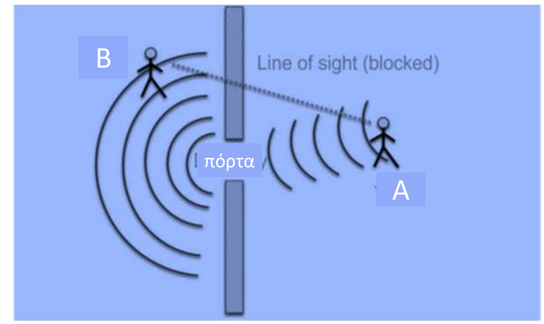
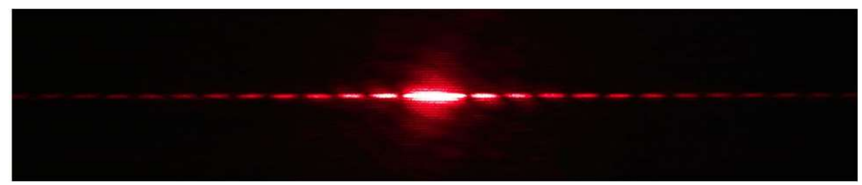
Το φως ως κύμα ΙΙ
Περίθλαση

Περίθλαση μακρινού πεδίου (Fraunhofer)

- Από απλή σχισμή (με απόδειξη)
- Από διπλή σχισμή
- Από φράγμα περίθλασης

Το φαινόμενο της περίθλασης παρατηρείται σε όλα τα κύματα.





Άνοιγμα ή εμπόδιο της τάξης του μήκους κύματος

***Περίθλαση* είναι κάθε απόκλιση από τις προβλέψεις της γεωμετρικής οπτικής για την ευθύγραμμη διάδοση του φωτός, που προκαλείται από παρεμβολή κάποιου εμποδίου**.

Στη λεγόμενη *φυσική οπτική,* βασικής σημασίας για τη ερμηνεία των πειραματικών παρατηρήσεων είναι ***η αρχή των Huygens-Fresnel.***

Σύμφωνα με τον Huygens κάθε σημείο του μετώπου του κύματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια δευτερεύουσα πηγή που εκπέμπει ένα σφαιρικό κύμα. Στην υπόθεση αυτή ο Fresnel πρόσθεσε ότι το πραγματικό πεδίο μακριά από τη δευτερεύουσα πηγή είναι η υπέρθεση όλων των κυμάτων που προέρχονται από τις δευτερεύουσες πηγές, παίρνοντας υπόψη τα πλάτη και τις φάσεις για κάθε κύμα.

Επομένως, για να βρούμε την κατανομή της έντασης (εικόνα περίθλασης) που περιμένουμε να δούμε σε μία οθόνη, λόγω περίθλασης π.χ. από διπλή σχισμή, θα πρέπει να αθροίσουμε τα κύματα που προέρχονται από κάθε σημείο της επιφάνειας της κάθε σχισμής και να προσθέσουμε τα πλάτη, λαμβάνοντας υπόψη τις αποστάσεις που έχουν διανύσει τα διάφορα κυματικά μέτωπα, καθότι διαφορές στους οπτικούς δρόμους προκαλούν διαφορές στις φάσεις των κυμάτων που προστίθενται.

Στην περίθλαση έχουμε συμβολή φωτεινών δεσμών που προέρχονται από μια συνεχή κατανομή πηγών, ενώ στα φαινόμενα συμβολής έχουμε συμβολή δεσμών που προέρχονται από διακριτό αριθμό πηγών. Αυτό, φυσικά, δεν αποτελεί θεμελιώδη αλλά μάλλον ιστορική διάκριση μεταξύ συμβολής και περίθλασης.

Feynman lectures in Physics (chapter 30-1)

“No one has ever been able to define the difference between interference and diffraction satisfactorily. It is just a question of usage, and there is no specific, important physical difference between them. The best we can do, roughly speaking, is to say that when there are only a few sources, say two, interfering, then the result is usually called interference, but if there is a large number of them, it seems that the word diffraction is more often used. ”

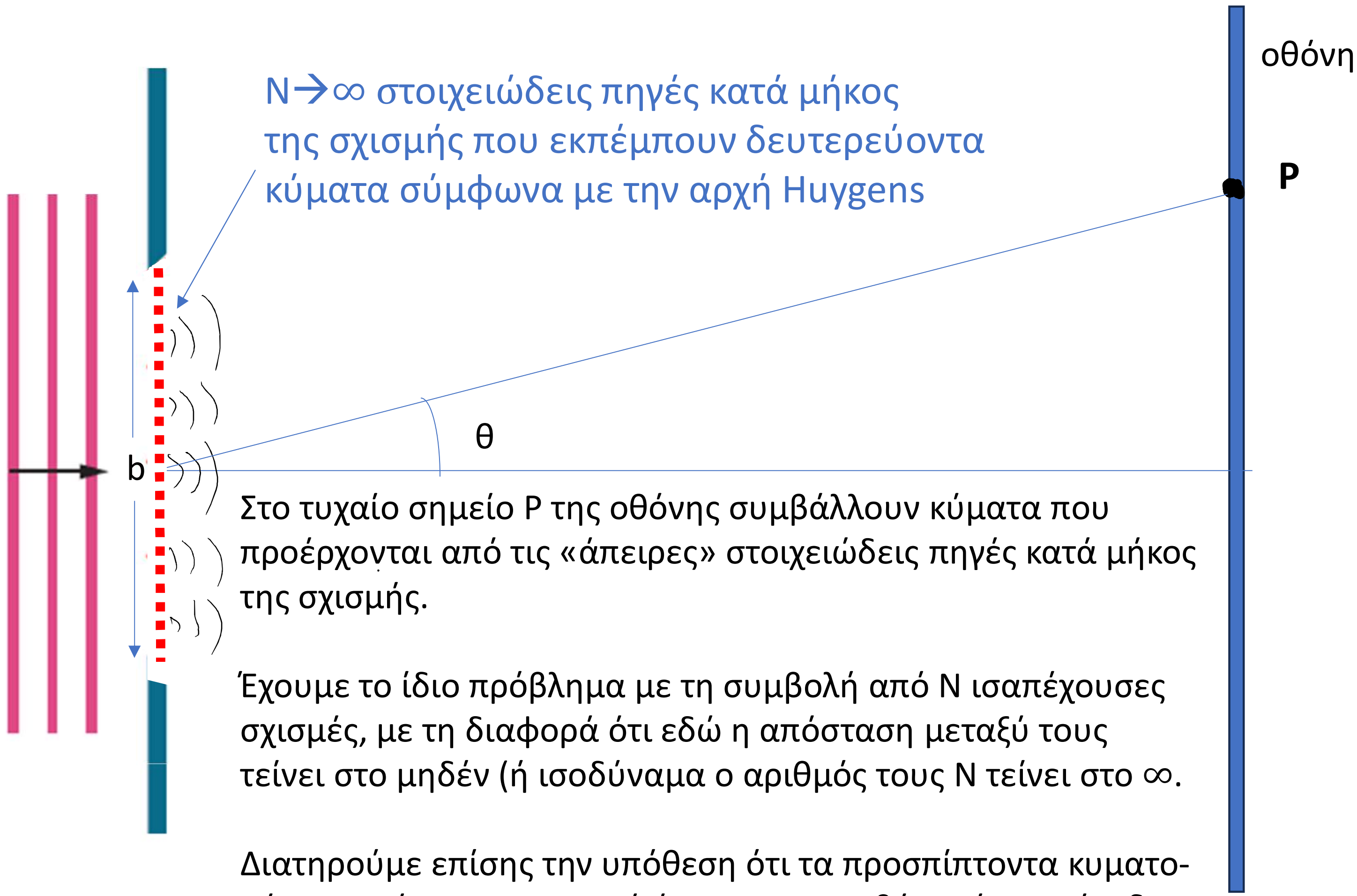
Περίθλαση μακρινού και κοντινού πεδίου

Αν η πηγή φωτός και το επίπεδο παρατήρησης (οθόνη) είναι και τα δύο σε μεγάλη απόσταση από το επίπεδο όπου το φως υφίσταται την περίθλαση, τότε το φως φθάνει στην οθόνη ως επίπεδο κύμα. Τότε μιλάμε για *περίθλαση Fraunhofer* ή *περίθλαση μακρινού πεδίου* (far-field diffraction).

Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε τη λεγόμενη *περίθλαση Fresnel* ή *περίθλαση κοντινού πεδίου* (near-field diffraction).

Στην περίπτωση της περίθλασης Fraunhofer, η εικόνα που παρατηρείται πάνω στο πέτασμα, αλλάζει ομοιόμορφα καθώς απομακρύνουμε την οθόνη από την σχισμή, πράγμα που δεν συμβαίνει στην περίπτωση της περίθλασης Fresnel.

Περίθλαση Fraunhoffer από σχισμή μεγάλου μήκους και πάχους b

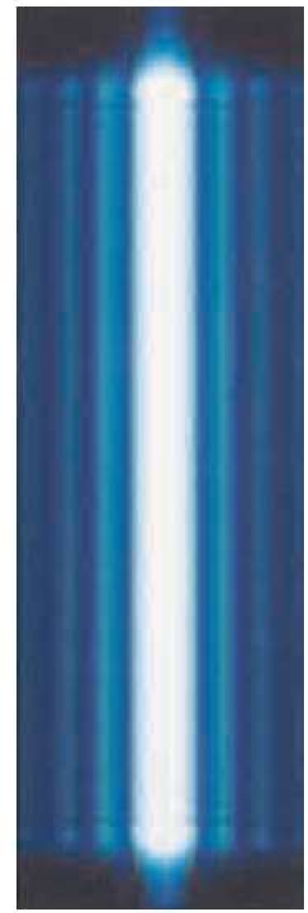


N→∞ στοιχειώδεις πηγές κατά μήκος της σχισμής που εκπέμπουν δευτερεύοντα κύματα σύμφωνα με την αρχή Huygens

Στο τυχαίο σημείο P της οθόνης συμβάλλουν κύματα που προέρχονται από τις «άπειρες» στοιχειώδεις πηγές κατά μήκος της σχισμής.

Έχουμε το ίδιο πρόβλημα με τη συμβολή από N ισαπέχουσες σχισμές, με τη διαφορά ότι εδώ η απόσταση μεταξύ τους τείνει στο μηδέν (ή ισοδύναμα ο αριθμός τους N τείνει στο ∞.

Διατηρούμε επίσης την υπόθεση ότι τα προσπίπτοντα κυματο-μέτωπα, τόσο στην σχισμή όσο και στην οθόνη είναι επίπεδα.



Στο προηγούμενο μάθημα είχαμε βρει ότι η κατανομή της έντασης του φωτός για συμβολή από N ισαπέχουσες (με την απόσταση μεταξύ διαδοχικών σχισμών ίση με d) παράλληλες και ομοεπίπεδες σχισμές δίνεται από τη σχέση

$$I = \frac{I_O}{\mathrm{N}^2}\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$$

όπου $\delta = kd\sin\theta$, $k = 2\pi/\lambda$.

Στο τωρινό μας πρόβλημα έχουμε χωρίσει τη σχισμή μας, που έχει συνολικό πλάτος b, σε πάρα πολλές ισαπέχουσες σχισμές που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = b/N$, με N→∞

$$\frac{I}{I_0} = \left[\frac{\sin\frac{Nkd\sin\theta}{2}}{N\mathrm{si}\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}\right]^2 = \left[\frac{\sin\left(\frac{\mathrm{Nk}\frac{b}{\mathrm{N}}\sin\theta}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\mathrm{k}\frac{b}{\mathrm{N}}\sin\theta}{2}\right)}\right]^2 \cong \left[\frac{\sin\left(\frac{k\mathrm{bsi}}{2}\right)}{N\frac{k\mathrm{bsin}\theta}{2N}}\right]^2$$

Διότι $\frac{k\mathrm{bsin}}{2N} \to 0$ όταν $\mathrm{N} \to \infty$, οπότε $\sin\left(\frac{\mathrm{k}\frac{b}{\mathrm{N}}\sin\theta}{2}\right) \cong \frac{\mathrm{k}\frac{b}{\mathrm{N}}\sin\theta}{2}$

Άρα $I = I_o\left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$, όπου ορίσαμε $\beta = kbsin\theta$, όπου b το πλάτος της σχισμής

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε χρησιμοποιώντας διάγραμμα φασόρων

Από τη γεωμετρία του σχήματος, φαίνεται ότι η γωνία β είναι επίσης η γωνία μεταξύ των δύο ακτίνων που συμβολίζονται με R. Η διακεκομμένη γραμμή διχοτομεί τη γωνία β, σχηματίζοντας δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα.

$$\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{E_\theta}{2R} \quad (1)$$

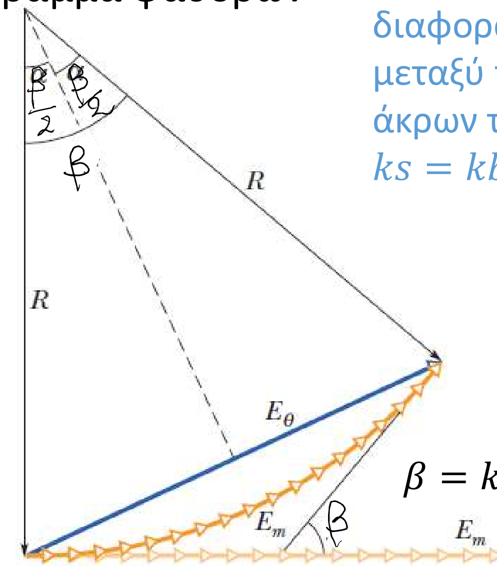
Επιπλέον (υποθέτοντας ότι το μήκος τόξου τόξο είναι περίπου ίσο με το μήκος της χορδής) $\beta = \frac{E_\theta}{R} \cong \frac{E_m}{R}$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $E_\theta = \frac{E_m}{\frac{1}{2}\beta}\sin\frac{1}{2}\beta$

Αλλά $$\frac{I(\theta)}{I_m} = \frac{E_\theta^2}{E_m^2}.$$

Άρα

$$I = I_m\left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \qquad \beta = kbsin\theta$$



διαφορά φάσης μεταξύ των δυο άκρων της σχισμής $ks = kbsin\theta$

$\beta = kbsin\theta$

Σχήμα που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της κατανομής της έντασης που παίρνουμε σε ένα μακρινό πέτασμα από περίθλαση από σχισμή. Τα πορτοκαλί διανύσματα φασόρων αντιστοιχούν στα ηλεκτρικά πεδία σε ένα σημείο P της οθόνης, που προέχονται από διαδοχικές στοιχειώδεις πηγές κατά μήκος της σχισμής

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}} \underset{\frac{\beta}{2}\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Κεντρικό μέγιστο β=0

$$I = I_o \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ \beta = kbsin\theta$$

Τα δευτερεύοντα μέγιστα της συνάρτησης δίνονται από τη σχέση

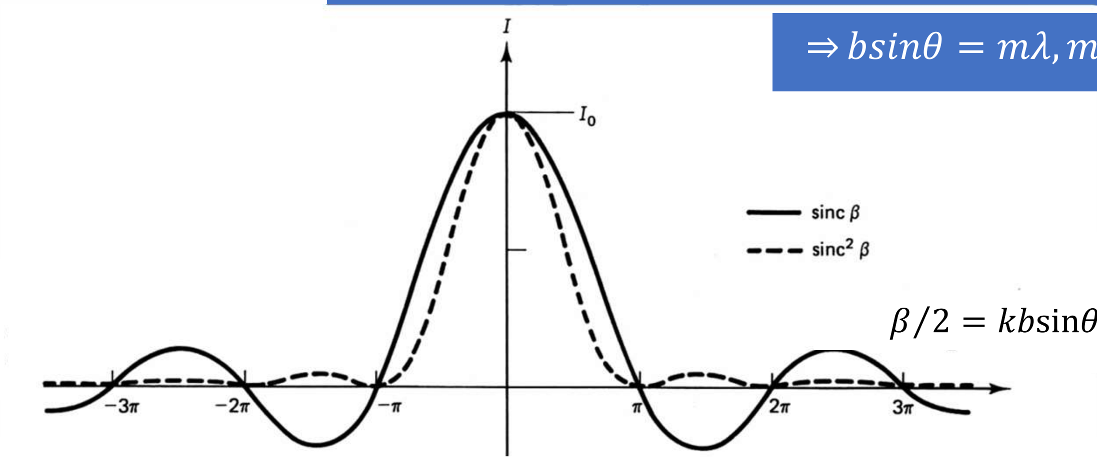
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\frac{\beta}{2})}\left[\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{(\frac{\beta}{2})}\right] = \frac{(\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\beta}{2}) - \sin(\frac{\beta}{2})}{(\frac{\beta}{2})^2} = 0 \longrightarrow \frac{\beta}{2} = \tan(\frac{\beta}{2})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} bsin\theta = 1.43\pi, 2.46\pi, 3.47\pi, \ldots.$$

Τα ελάχιστα της συνάρτησης δίνονται από τη σχέση

$$\Rightarrow \quad \sin(\frac{\beta}{2}) = 0\ \mu\varepsilon\ \beta \neq 0 \Rightarrow \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} bsin\theta = \ m\pi,\ m = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

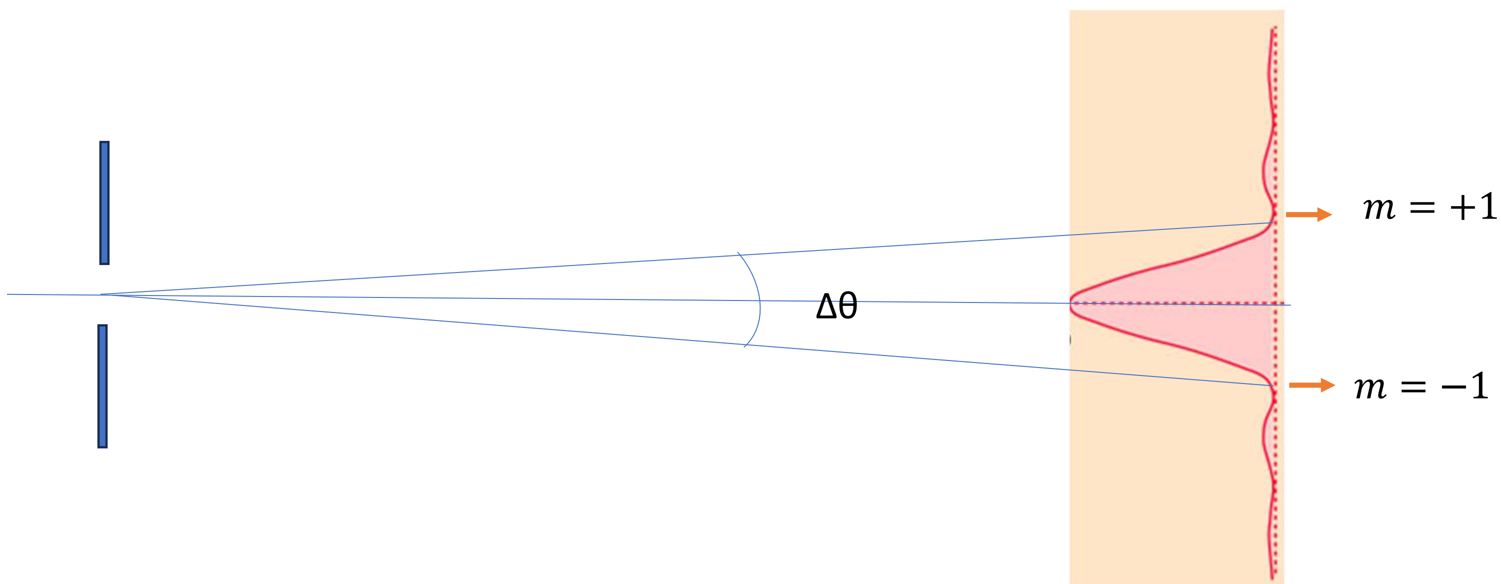
$$\Rightarrow bsin\theta = m\lambda, m = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

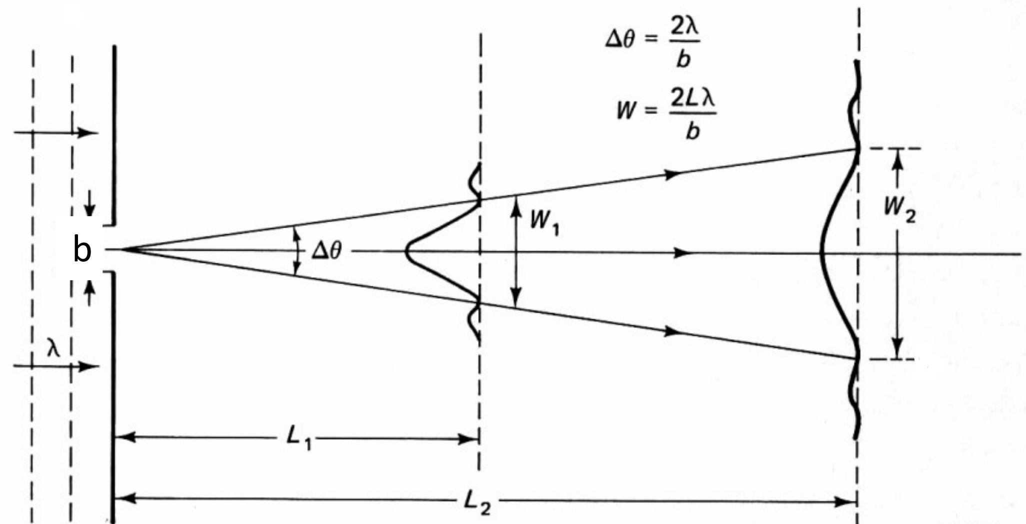


Ο κεντρικός λοβός περίθλασης (δηλ. ο συνολικό πλάτος μεταξύ των δύο πρώτων μηδενισμών της έντασης εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου) φαίνεται υπό γωνία Δθ από τη σχισμή

$$\left.\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m\lambda = b\sin\theta \\ \sin\theta \simeq \theta \end{array}\right\} \boxed{\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b}}$$

Δηλαδή, ο κεντρικός λοβός απλώνει απεριόριστα όσο το εύρος της σχισμής ελαττώνεται. Θα πλησιάσει όμως το άπειρο;
Πρόσφατα πειράματα έδειξαν ότι για σχισμές της τάξης των *nm* η περίθλαση αρχίζει να περιορίζεται. Αυτό οφείλεται στην αλληλεπίδραση του φωτός με τα φωνόνια των μετάλλων που στη σχισμή έχουν κατεύθυνση ορμής μη παράλληλη προς την επιφάνεια.





$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

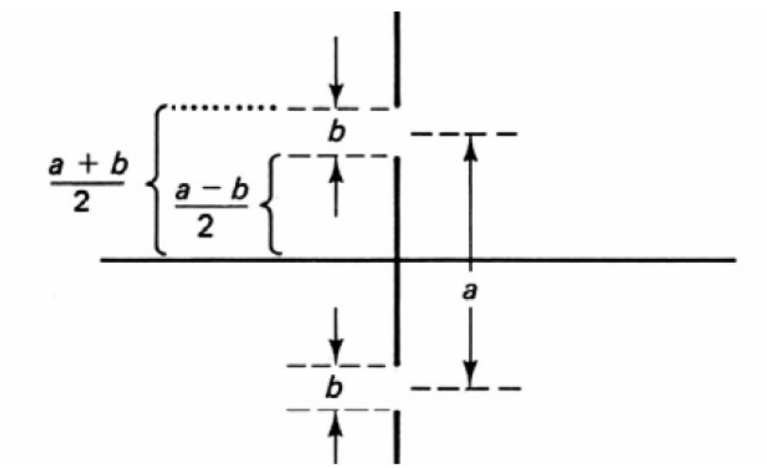
Η γραμμική διάσταση του λοβού *W*

$$W = L\Delta\theta = \frac{2L\lambda}{b}$$

(ισχύει για περίθλαση μακρινού πεδίου)

Περίθλαση Fraunhofer (μακρινού πεδίου) από διπλή σχισμή

$$k = 2\pi/\lambda$$



Συμβολή από δύο πολύ λεπτές σχισμές – πείραμα Young

$$I = 4I_0^{*} \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \qquad \frac{\delta}{2} \equiv \frac{1}{2}\mathrm{k}a\sin\theta = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

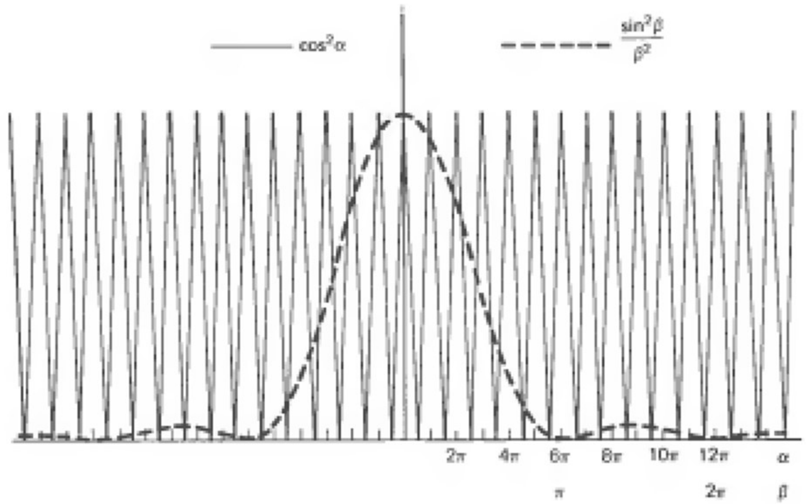
Περίθλαση από απλή σχισμή

$$I = I_m \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \qquad \frac{\beta}{2} \equiv \frac{1}{2}\mathrm{kb}\sin\theta = \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}$$

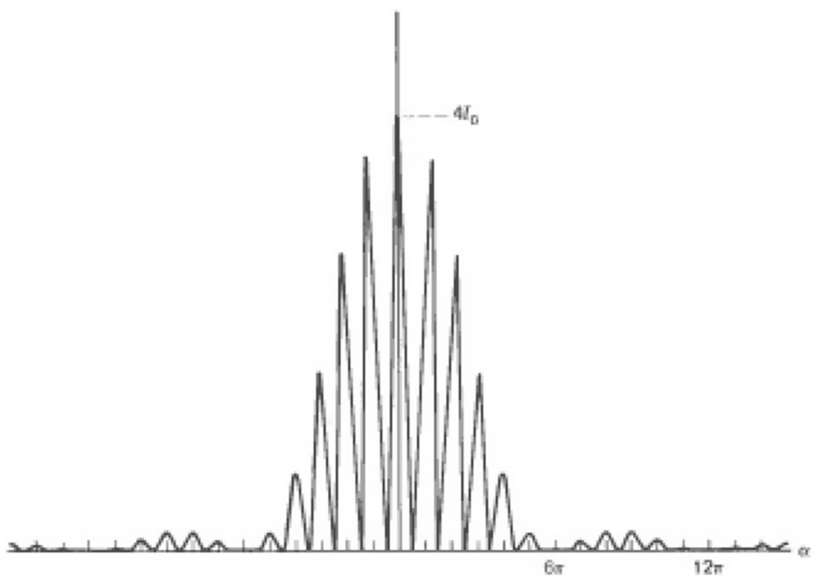
Περίθλαση από διπλή σχισμή

$$I = 4I_o \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \cos^2(\delta/2)$$

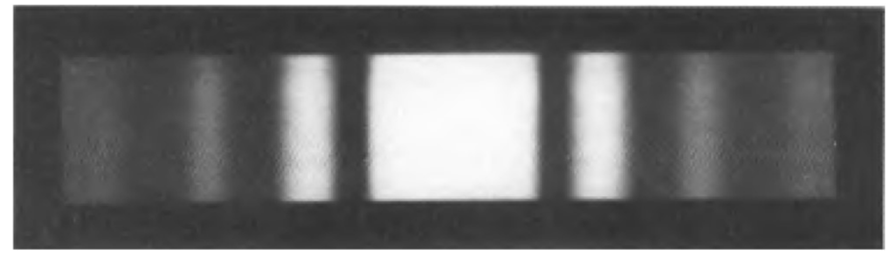
* προσοχή, εδώ θεωρήσαμε ως I_o την ένταση που προσπίπτει σε κάθε μία από τις σχισμές (βλ. πείραμα Young)



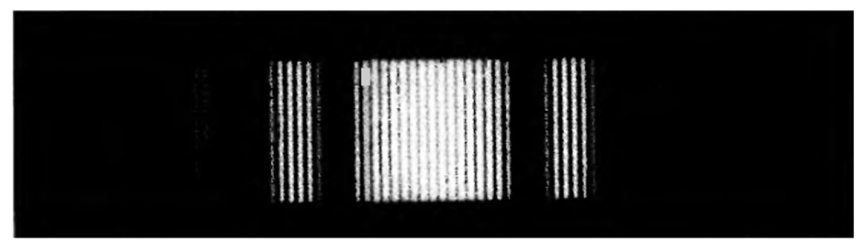
(a)



(b)



Απλή σχισμή



Διπλή σχισμή

Ελάχιστα περίθλασης $m\lambda = b\sin\theta$ $m = \pm1, \pm2, \ldots$

Μέγιστα συμβολής $p\lambda = a\sin\theta$ (*) $p = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Όταν οι δυο συνθήκες ικανοποιούνται ταυτόχρονα, έχουμε με εμφανιζόμενους κροσσούς συμβολής

$$a = \left(\frac{p}{m}\right) b$$

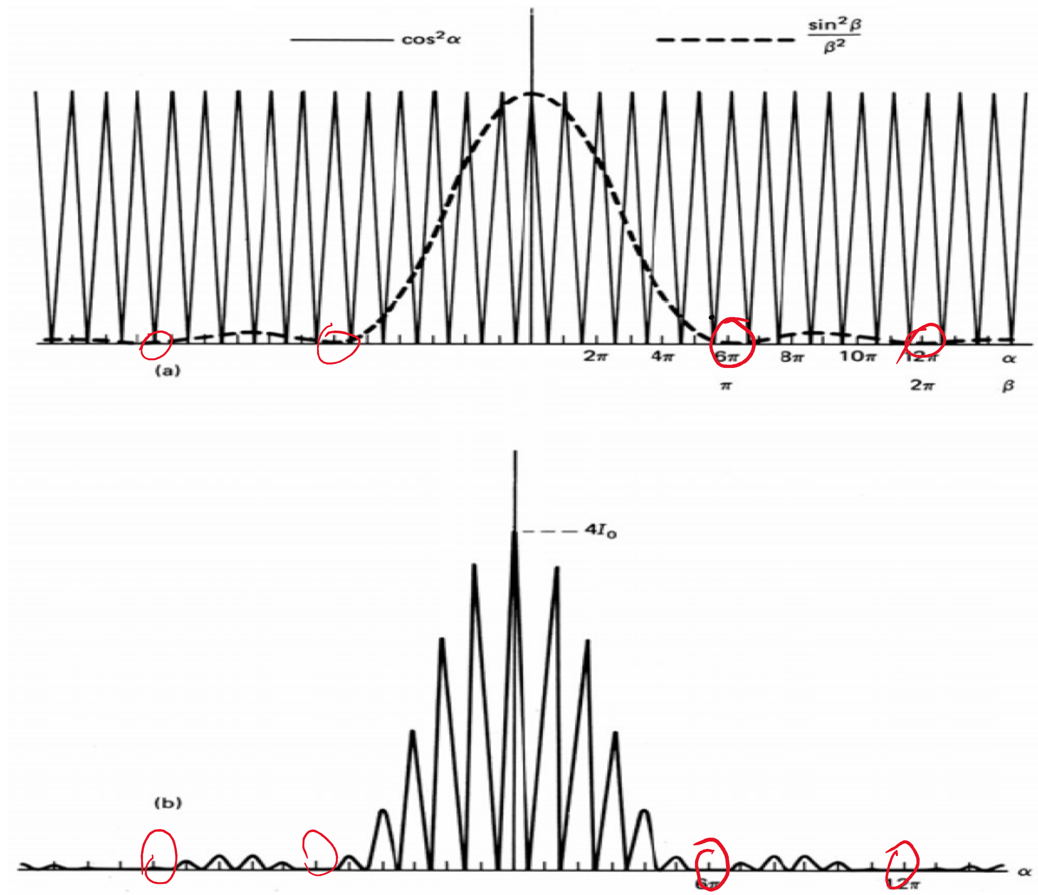
(*) Παρατήρηση: $|\sin\theta| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{p\lambda}{\alpha}\right| \leq 1 \Rightarrow p_{max} = \alpha/\lambda$!

όταν η απόσταση των σχισμών είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του πάχους της μιας σχισμής, τότε η συνθήκη ικανοποιείται.

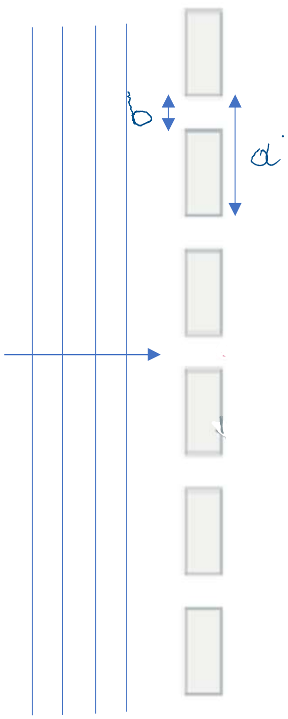
$$\overset{6b}{a} = \left(\frac{p}{m}\right) b \Rightarrow p = 6m$$

Για παράδειγμα, όταν a= 6b, τότε p=6m=±6, ±12, ± 18....

$a=6b$



Περίθλαση Fraunhofer (μακρινού πεδίου) από φράγμα (N σχισμές)



$k = 2\pi/\lambda$

Συμβολή από N σχισμές

$$I \propto \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \qquad \frac{\delta}{2} \equiv \frac{1}{2}\mathrm{kasin}\theta = \frac{\pi a sin\theta}{\lambda}$$

Περίθλαση από απλή σχισμή

$$I \propto \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \qquad \frac{\beta}{2} \equiv \frac{1}{2}\mathrm{kbsin}\theta = \frac{\pi b sin\theta}{\lambda}$$

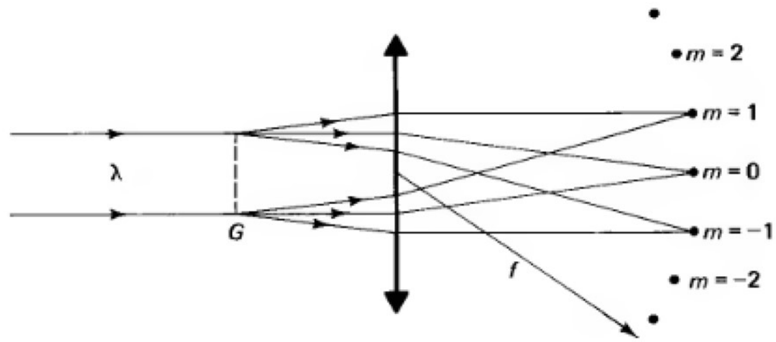
Περίθλαση από φράγμα N σχισμών

$$I = I_0^{*}\left(\frac{\sin(\beta/2)}{(\beta/2)}\right)^2 \left(\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right)^2$$

* I_0 συνολική ένταση που προσπίπτει στο φράγμα

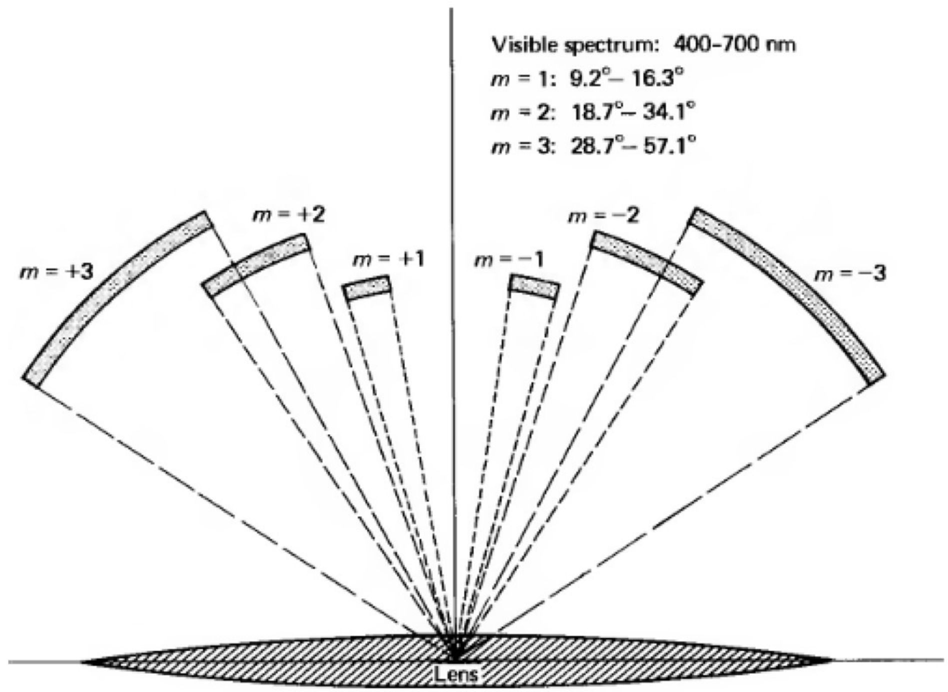
Συνθήκη μεγίστων συμβολής $\alpha \sin\theta_m = m\lambda, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Η σχέση αυτή λέγεται και εξίσωση φράγματος, και ισχύει για κάθετη πρόσπτωση.
Για γωνία πρόσπτωσης θ_i, ο τύπος γενικεύεται στον: $a(\sin\theta_i + \sin\theta_m) = m\lambda, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$



λ
G
f
m = 2
m = 1
m = 0
m = −1
m = −2

(a)



Visible spectrum: 400–700 nm
m = 1: 9.2°– 16.3°
m = 2: 18.7°– 34.1°
m = 3: 28.7°– 57.1°
m = +3
m = +2
m = +1
m = −1
m = −2
m = −3
Lens

(b)

Το πάχος των κροσσών συμβολής για φράγμα

- Είδαμε ότι η εξίσωση φράγματος (για τα μέγιστα) είναι : $a\sin\theta = m\lambda$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (για κάθετη πρόσπτωση)
  όπου a η απόσταση μεταξύ διαδοχικών σχισμών
  m : αριθμός τάξης
  $m=0$: γραμμή μηδενικής τάξης. → κεντρικό μέγιστο ($m=0$) για $\theta = 0$
  $m=1$: γραμμή πρώτης τάξης

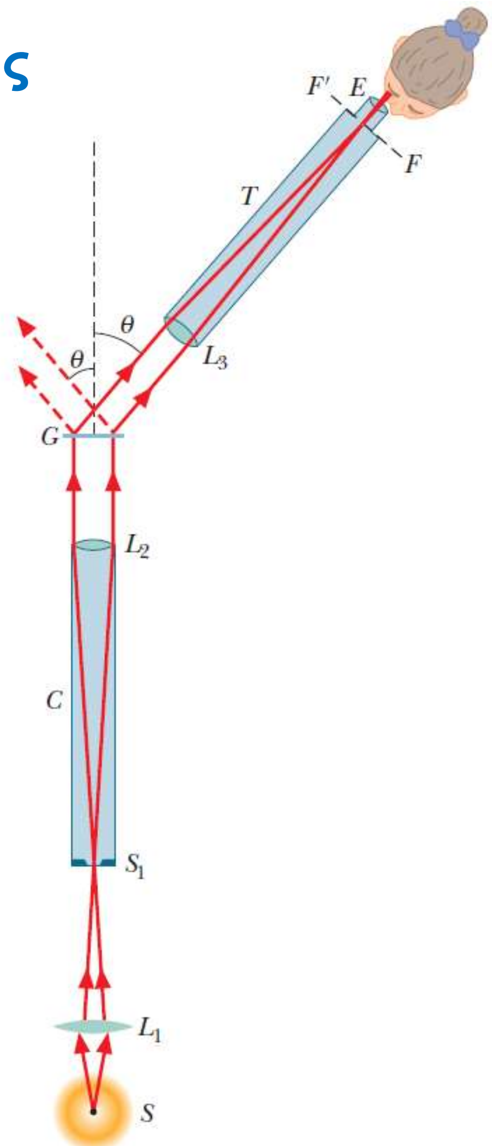
- $$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

  Πρώτο ελάχιστο για
  $N\alpha = \pi \Rightarrow N\cdot\frac{1}{2}ka\sin\theta = \pi$
  $\Rightarrow N\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\cancel{\pi}}{\lambda}a\sin\theta = \cancel{\pi} \Rightarrow$

  $\Rightarrow N a\sin\theta = \lambda \Rightarrow$ $\Delta\theta_H \approx \lambda/Na$
  (για θ μικρό)

- Για $m>0$, το $\Delta\theta \approx \dfrac{\lambda}{Na\cos\theta}$

Φασματοσκόπιο φράγματος περίθλασης



Ένα απλό φασματοσκοπιο με φράγμα περίθλασης,
για τη φασματική ανάλυση του φωτός που εκπέμπεται
από τη πηγή S

Παράδειγμα φάσματος που παρατηρούμε με το φασματοσκόπιο

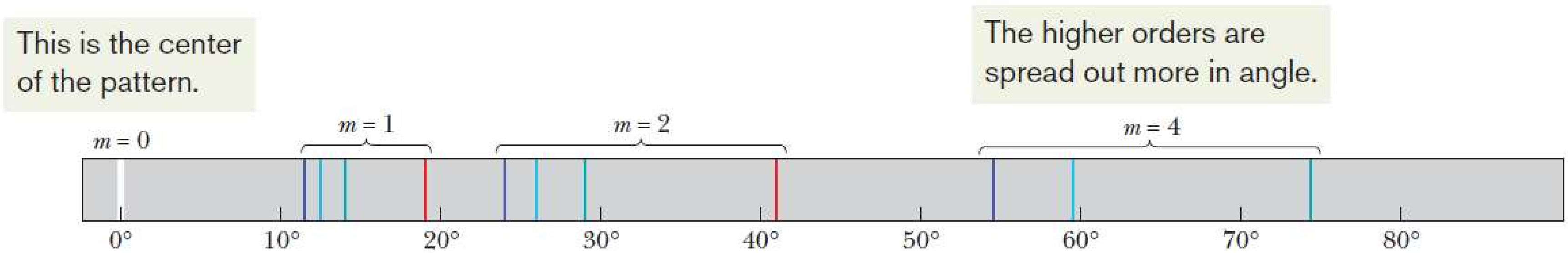


Fig. 36-24 The zeroth, first, second, and fourth orders of the visible emission lines from hydrogen. Note that the lines are farther apart at greater angles. (They are also dimmer and wider, although that is not shown here.)

Fig. 36-25 The visible emission lines of cadmium, as seen through a grating spectroscope. *(Department of Physics, Imperial College/Science Photo Library/Photo Researchers)*

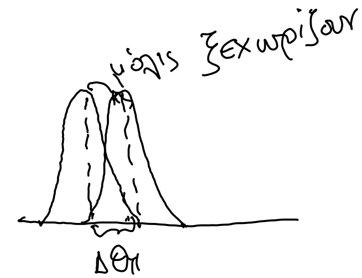
Φράγματα περίθλασης- Διασπορά (Dispersion) και διακριτική ικανότητα (Resolving Power)

χωρίς απόδειξη!

Ως **διασπορά** ορίζεται το πηλίκον dθ/dλ, και μας δείχνει τη γωνιακά απόκλιση μεταξύ δύο γειτονικών μηκών κύματος που διαφέρουν μεταξύ τους κατά dλ   (a η απόσταση μεταξύ διαδοχικών σχισμών)

$$D = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}$$

Αλλά $a\sin\theta = m\lambda \Rightarrow d\cos\theta\, d\theta = m d\lambda \Rightarrow \boldsymbol{D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{a\cos\theta}, m = 0, 1, 2, \ldots}$



Ως **διακριτική ικανότητα** ορίζεται ο λόγος $R = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{\Delta\lambda}$

ναι

$$\boxed{R = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{\Delta\lambda}} \qquad \text{(resolving power defined).}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο Rayleigh δυο γραμμές μόλις ξεχωρίζουν μεταξύ τους όταν η απόστασή τους ισούται με το μισό πλάτος τους δηλ. $\Delta\theta = \Delta\theta_{hw}$

ναι

$$\Delta\theta_H = \frac{\lambda}{N a\cos\theta}.$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{a\cos\theta} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{m}{a\cos\theta}\Delta\lambda$$

$$\Delta\theta = \Delta\theta_H \Rightarrow \frac{m}{a\cos\theta}\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N a\cos\theta} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm}$$

$$R = Nm \qquad \text{(resolving power of a grating).}$$