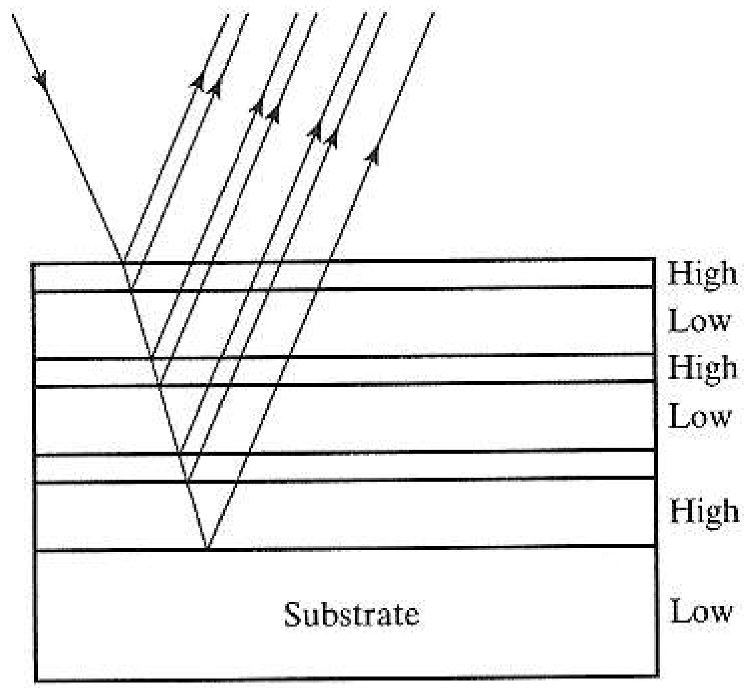
Φυσική Οπτική

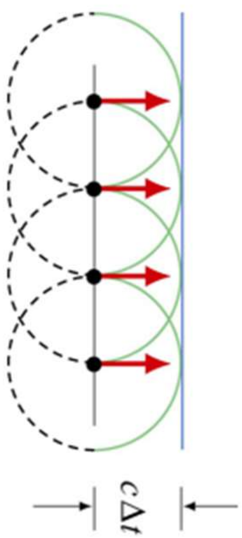
Αρχή Huygens
Συμβολή



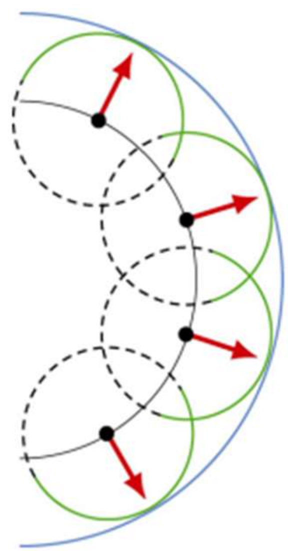
Το φως σαν κύμα

Αρχή του Huygens

Όλα τα σημεία ενός μετώπου κύματος λειτουργούν ως σημειακές πηγές δευτερογενών σφαιρικών κυμάτων. Μετά από χρόνο t η νέα θέση του μετώπου κύματος θα είναι αυτή μιας επιφάνειας εφαπτόμενης σε αυτά τα δευτερογενή κύματα



Διάδοση επίπεδου κύματος

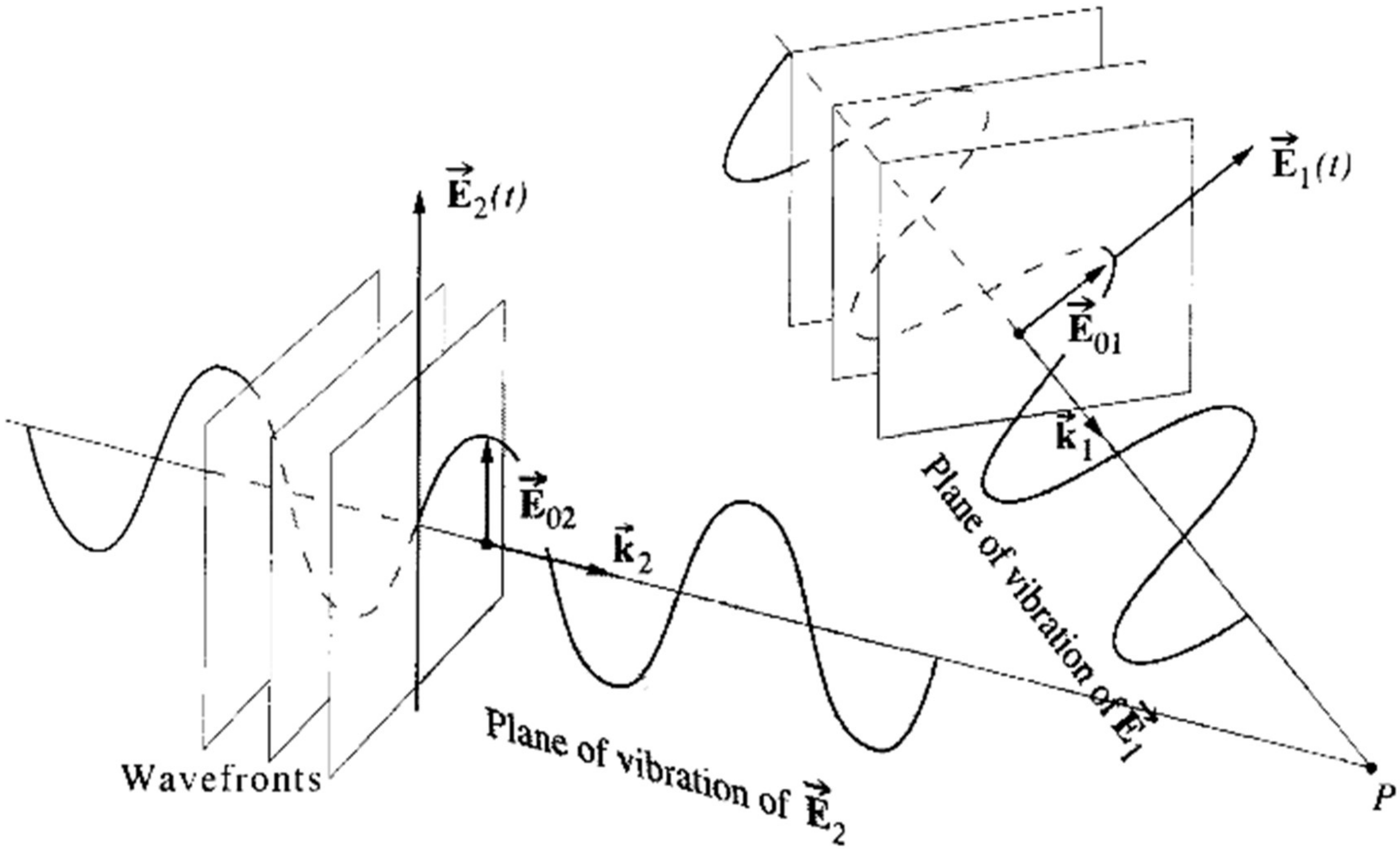


Διάδοση σφαιρικού κύματος

Συμβολή δυο επίπεδων κυμάτων

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \vec{\mathbf{E}}_{01}\cos(ks_1 - \omega t + \phi_1)$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \vec{\mathbf{E}}_{02}\cos(ks_2 - \omega t + \phi_2)$$



$$\vec{\mathbf{E}}_p = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2$$

Irradiance (ένταση ακτινοβολίας)

$$I = \varepsilon_0 c \langle \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \rangle$$

Στο σημείο P:

$$\vec{\mathbf{E}}_p = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2$$

$$I = \varepsilon_0 c \langle \vec{\mathbf{E}}_p^2 \rangle = \varepsilon_0 c \langle \vec{\mathbf{E}}_p \cdot \vec{\mathbf{E}}_p \rangle$$

$$= \varepsilon_0 c \langle (\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2) \cdot (\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2) \rangle$$

$$\longrightarrow \quad I = \varepsilon_0 c \langle \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 + 2\vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 \rangle$$

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

Όρος Συμβολής

$$I_{12} = 2\varepsilon_0 c \langle \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 \rangle$$

$$\vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 = \vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02} \cos(ks_1 - \omega t + \phi_1)\cos(ks_2 - \omega t + \phi_2)$$

Ορίζουμε $\alpha \equiv ks_1 + \phi_1$ και $\beta \equiv ks_2 + \phi_2$

Οπότε

$$2\vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 = 2\vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02} \cos(\alpha - \omega t)\cos(\beta - \omega t)$$

Χρησιμοποιώντας $$2\cos(A)\cos(B) = \cos(A+B) + \cos(B-A)$$

$$\longrightarrow \quad 2\langle \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 \rangle = \vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02}[\underbrace{\langle \cos(\alpha + \beta - 2\omega t) \rangle}_{0} + \langle \cos(\beta - \alpha) \rangle]$$

$$\begin{aligned} 2\langle \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 \rangle &= \vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02} \langle \cos(\beta - \alpha) \rangle = \vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02} \langle \cos(k(s_2 - s_1) + \phi_2 - \phi_1) \rangle \\ &\equiv \vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02} \langle \cos \delta \rangle \end{aligned}$$

Όπου ορίσαμε τη διαφορά φάσης μεταξύ των

$\vec{\mathbf{E}}_2$ και $\vec{\mathbf{E}}_1$ $\longrightarrow$ $$\delta = k(s_2 - s_1) + \phi_2 - \phi_1$$

Οπότε $$\boxed{I_{12} = \varepsilon_0 c \vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02} \langle \cos \delta \rangle}$$

Υπενθύμιση: $\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt'$

Οι δυο άλλοι όροι του I

$$I_1 = \varepsilon_0 c \langle \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_1 \rangle = \varepsilon_0 c E_{01}^2 \langle \cos^2(\alpha - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_{01}^2$$

$$I_2 = \varepsilon_0 c \langle \vec{\mathbf{E}}_2 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 \rangle = \varepsilon_0 c E_{02}^2 \langle \cos^2(\beta - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_{02}^2$$

$$I_{12} = \varepsilon_0 c \vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02} \langle \cos \delta \rangle$$

αν $\mathrm{E}_{01} \| \mathrm{E}_{02}$

$$\boxed{I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \delta \rangle}$$

Συμβολή ασύμφωνων μεταξύ τους πεδίων

Στην πράξη, τα ηλεκτρικά πεδία $\vec{\mathbf{E}}_1$ και $\vec{\mathbf{E}}_2$ προέρχονται από διαφορετικές πηγές, ο χρονικός μέσος όρος $\langle \cos \delta \rangle$ είναι 0, διότι καμιά πηγή δεν είναι τελείως μονοχρωματική. Ένας τρόπος για να το εξετάσουμε αυτό είναι να θεωρήσουμε ότι οι φάσεις ϕ_1 και ϕ_2 είναι συναρτήσεις του χρόνου.

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2}\underbrace{\langle \cos(k(s_2 - s_1) + \phi_2(t) - \phi_1(t))\rangle}$$

0, για τις περισσότερες πηγές, οπότε λέμε ότι είναι μεταξύ τους ασύμφωνες

$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{Mutually incoherent beams}$$

Συμβολή σύμφωνων μεταξύ τους πεδίων

Αν φως από το ίδιο laser π.χ. διαχωριστεί σε δυο δέσμες οι οποίες εν συνεχεία επανασυντίθενται στον ανιχνευτή μας, ο χρονικός μέσος όρος $\langle \cos\delta \rangle$ μπορεί να μην είναι 0. Αυτό συμβαίνει διότι ενώ υπάρχουν κι εδώ αποκλίσεις από την μονοχρωματικότητα, είναι **συσχετισμένες** στις δυο δέσμες. Αν λοιπόν οι δυο δέσμες διανύσουν αυστηρά ίσους οπτικούς δρόμους (ίσοι χρόνοι), το ϕ_1 - ϕ_2 θα είναι 0, οπότε η δ είναι σταθερή

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{I_1 I_2}\langle \cos(k(s_2 - s_1) + \phi_1(t) - \phi_1(t))\rangle &= 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(k(s_2 - s_1)) \\
&= 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta
\end{aligned}
$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta \qquad \text{Mutually coherent beams}$$

<u>Χρόνος συμφωνίας</u> (coherence time): το χρονικό διάστημα τ_0 μέσα στο οποίο αποκλίσεις από τη μονοχρωματικότητα είναι μικρές
<u>Μήκος συμφωνίας</u> (coherence length): η αντίστοιχη απόσταση που διανύει το κύμα στον χρόνο συμφωνίας $l_t = c\tau_0$

Καταστρεπτική και ενισχυτική συμβολή

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$$

Ενισχυτική συμβολή

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos\delta = +1 \\ &\delta = 2m\pi \\ &m \in Z_o \end{aligned}} \left.\vphantom{\begin{aligned} a\\ b\\ c\end{aligned}}\right\} \quad I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

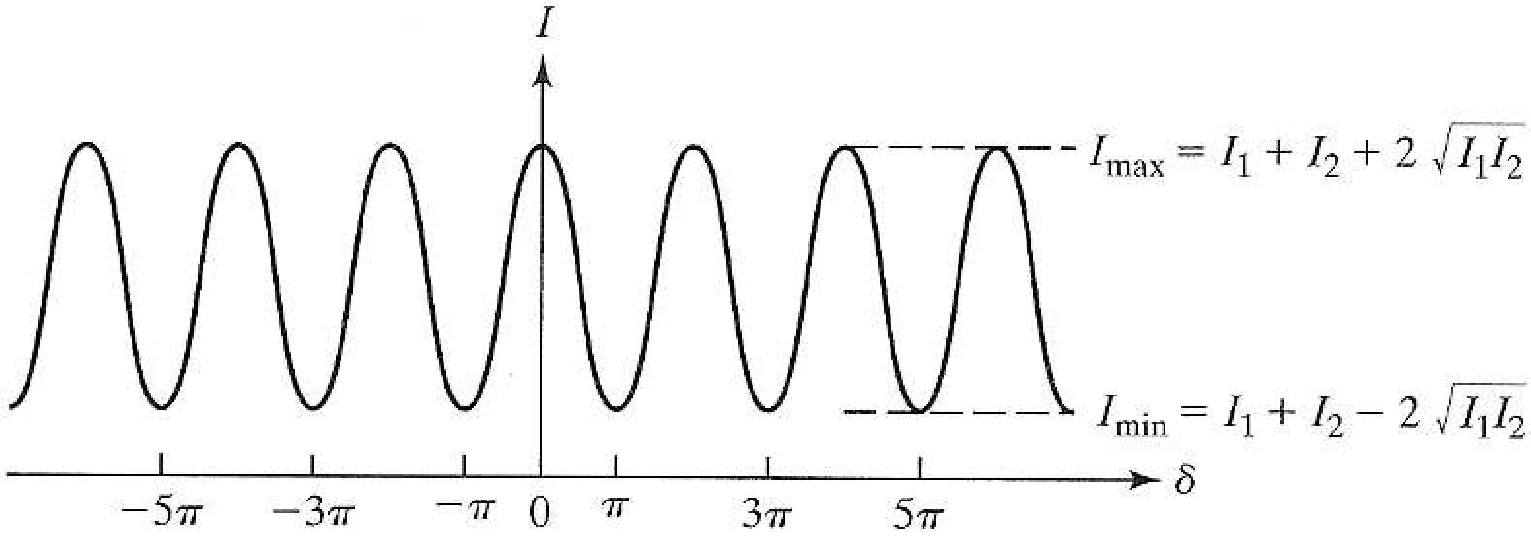
αν $I_1 = I_2 = I_0 \longrightarrow I_{\max} = 4I_0$

Καταστρεπτική συμβολή

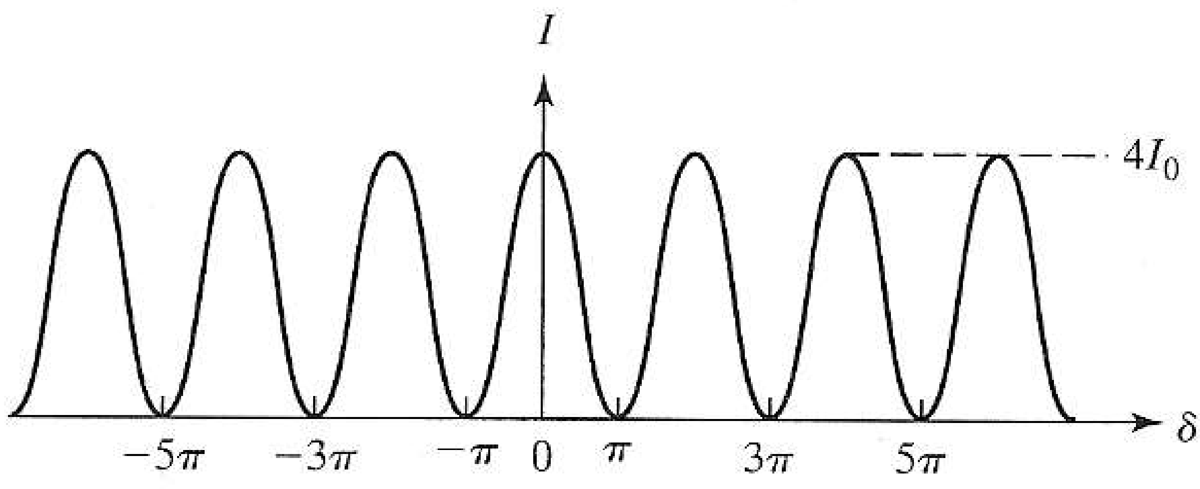
$$\boxed{\begin{aligned} &\cos\delta = -1 \\ &\delta = (2m+1)\pi \\ &m \in Z_o \end{aligned}} \left.\vphantom{\begin{aligned} a\\ b\\ c\end{aligned}}\right\} \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

αν $I_1 = I_2 = I_0 \longrightarrow I_{\min} = 0$

Κροσσοί συμβολής



(a)



(b)

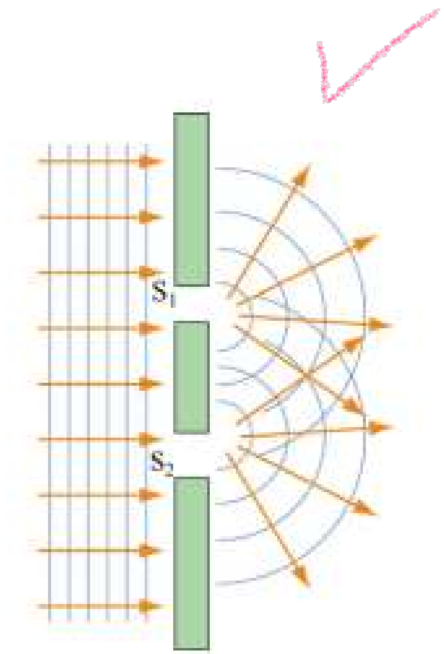
«ευκρίνεια» κροσσών

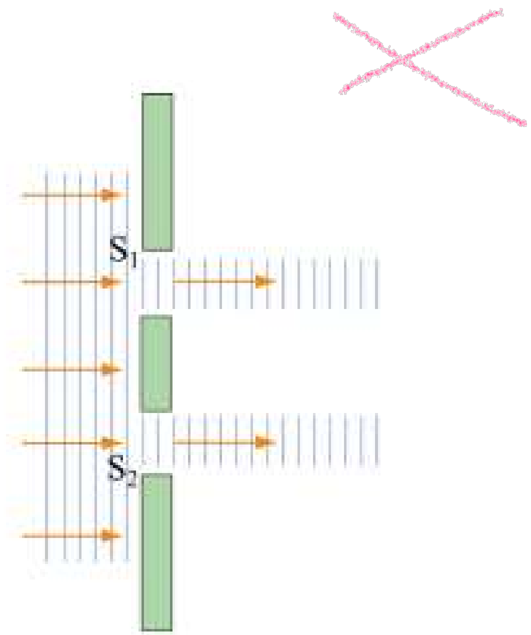
$$\text{visibility} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Άλλη μια χρήσιμη σχέση όταν $I_1 = I_2 = I_0$

$$\left.\begin{aligned} I &= I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0^2}\cos\delta = 2I_0(1 + \cos\delta) \\ 1 &+ \cos\delta \equiv 2\cos^2\!\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad I = 4I_0\cos^2\!\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Συμβολή από δυο σχισμές – Πείραμα Young
Wavefront-splitting interferometer



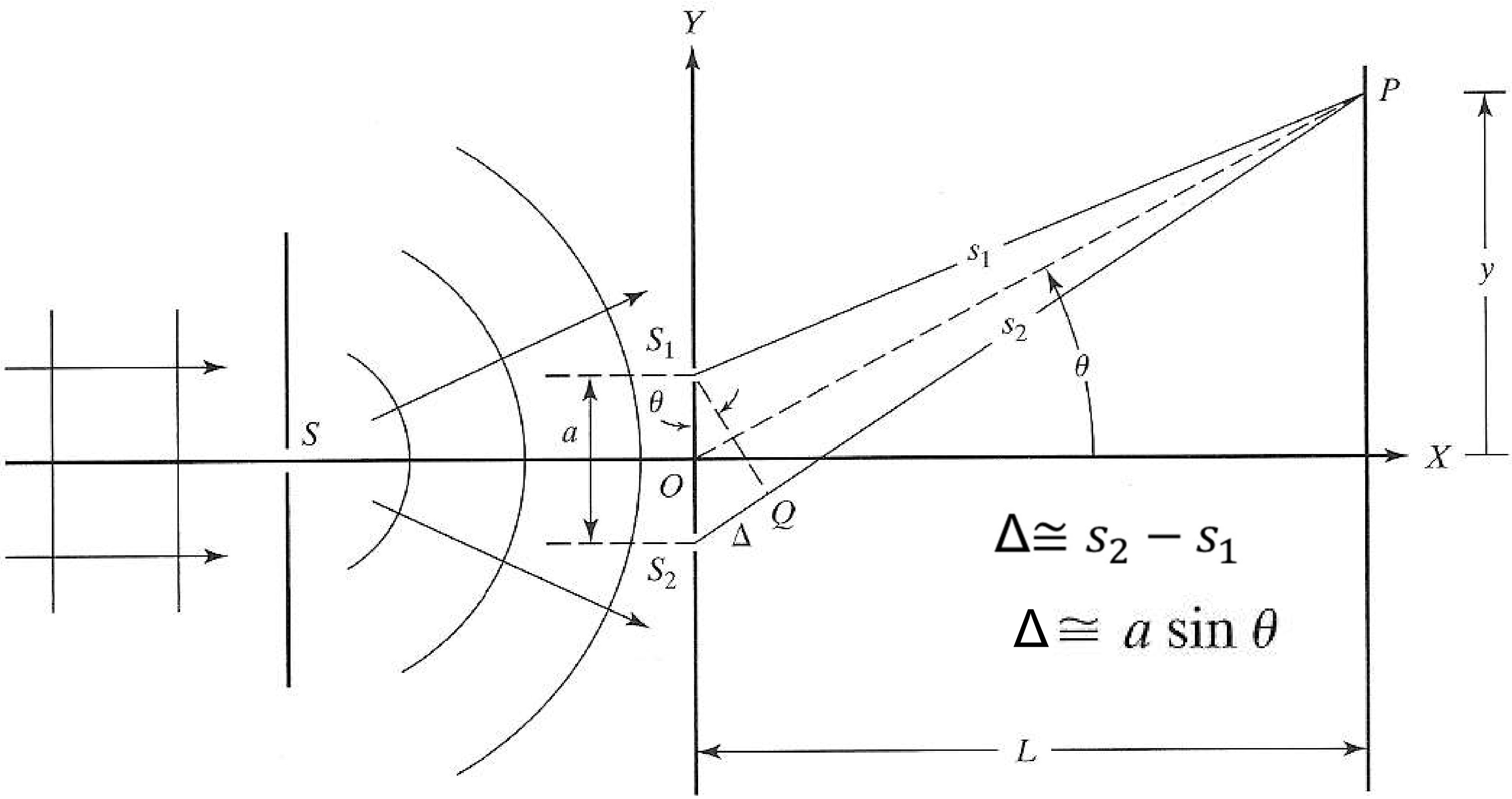


Αρχή Huygens – θα παρατηρηθούν κροσσοί συμβολής

Χωρίς τα δευτερεύοντα κύματα της αρχής Huygens, δεν θα έπρεπε να παρατηρηθούν κροσσοί συμβολής

Συμβολή από δυο σχισμές – Πείραμα Young

Wavefront-splitting interferometer – συμβολόμετρο διαχωρισμού κυματικού μετώπου



$$\Delta \cong s_2 - s_1$$

$$\Delta \cong a \sin\theta$$

Ενισχυτική συμβολή $\delta = k(s_2 - s_1) = 2m\pi \xRightarrow[k=2\pi/\lambda]{} s_2 - s_1 = \Delta = m\lambda$

Καταστρεπτική συμβολή $s_2 - s_1 = \Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

$$\delta = k(s_2 - s_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$$

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \rightarrow I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi\Delta}{\lambda}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)$$

Για σημεία P κοντά στον οπτικό άξονα $y \ll L$

$$\sin\theta \cong \tan\theta \cong y/L$$

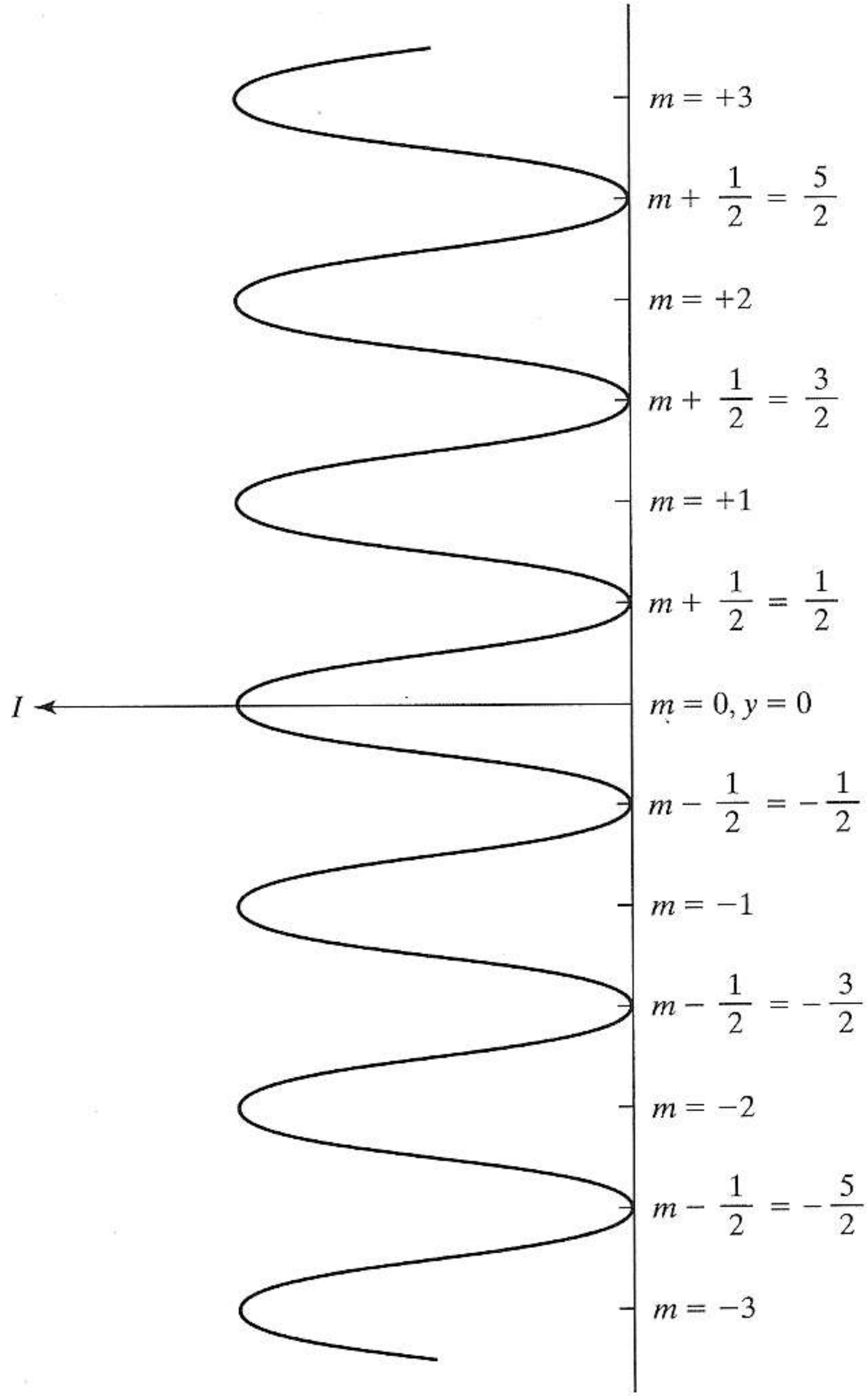
$$\rightarrow \boxed{I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi a y}{\lambda L}\right)}$$

Φωτεινοί κροσσοί $s_2 - s_1 = \Delta = m\lambda = a \sin\theta \cong$ α y/L

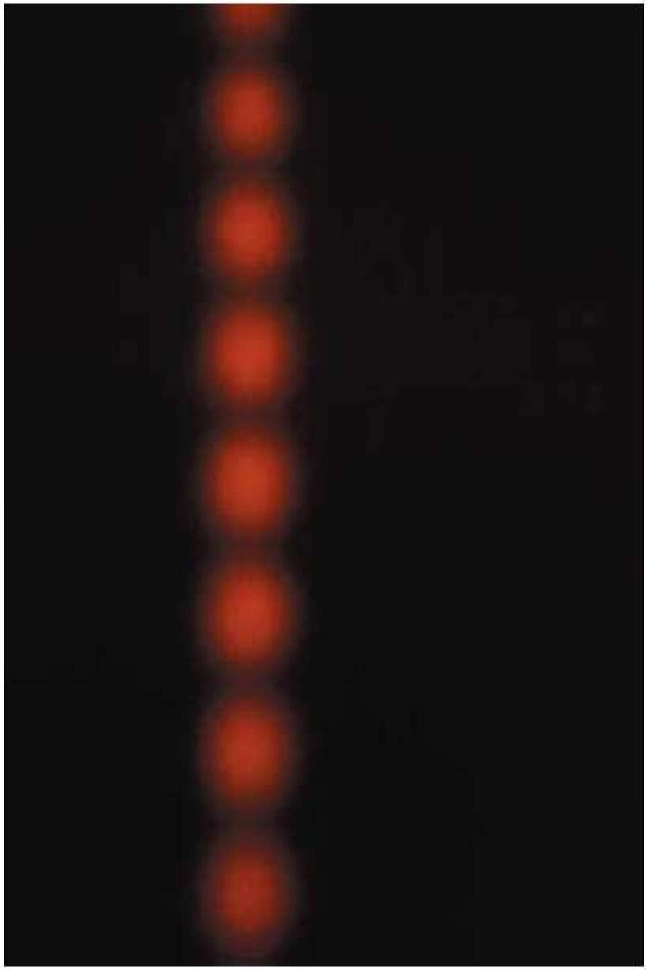
$$\rightarrow y_m = \frac{m\lambda L}{a}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Μέτρηση του λ

Απόσταση μεταξύ διαδοχικών κροσσών $\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda L}{a}$


$m = +3$
$m + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
$m = +2$
$m + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$m = +1$
$m + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
I
$m = 0, y = 0$
$m - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
$m = -1$
$m - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$
$m = -2$
$m - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$
$m = -3$

Το Πείραμα Συμβολής Young

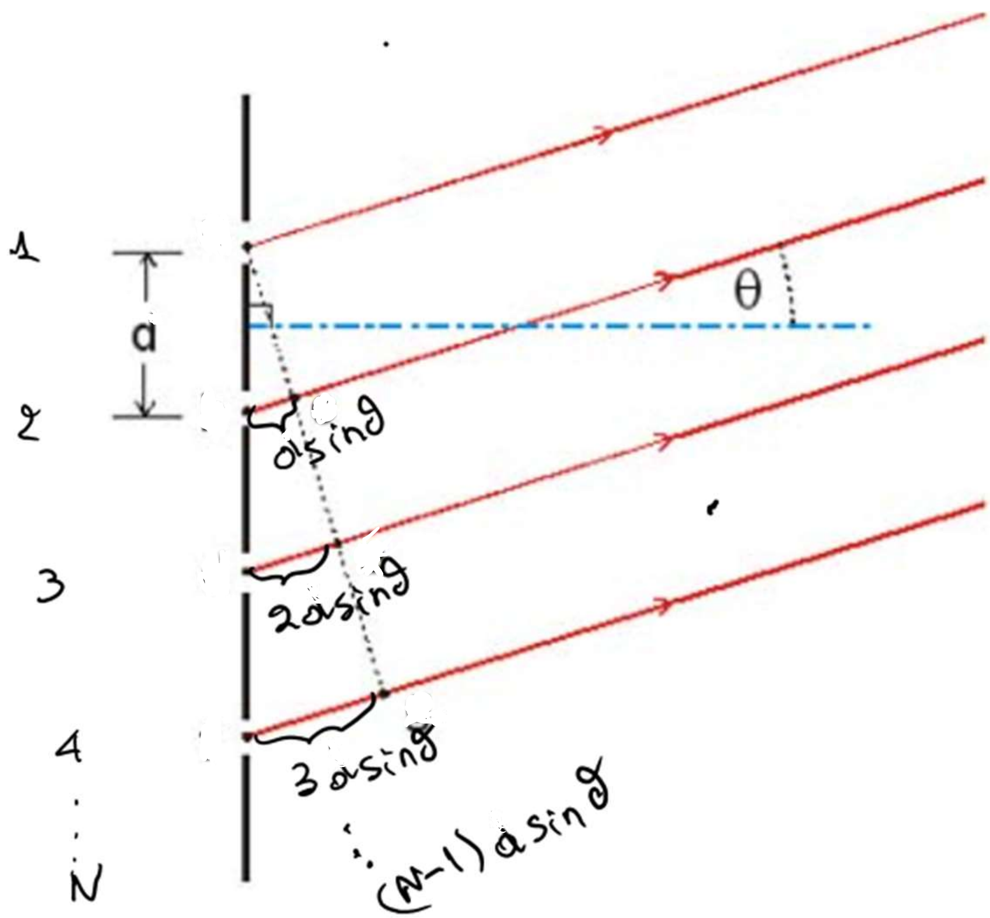


Φωτογραφία κροσσών συμβολής από
πείραμα συμβολής Young από δυο λεπτές
Σχισμές μικρού ύψους

Από Halliday-Resnick-Walker

Συμβολή από N σχισμές

Συμβολή από N σχισμές που απέχουν απόσταση d ανά δύο μεταξύ τους. Η μέτρηση γίνεται σε μεγάλη απόσταση από τις πηγές.



$$\delta = k a \sin\theta = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

$$E_1 = E_{01} \sin(kr_0 - \omega t)$$

$$E_2 = E_{01} \sin(kr_0 + \delta - \omega t)$$

$$E_3 = E_{01} \sin(kr_0 + 2\delta - \omega t)$$

$$E_4 = E_{01} \sin(kr_0 + 3\delta - \omega t)$$

$$\vdots$$

$$E_N = E_{01} \sin(kr_0 + (N-1)\delta - \omega t)$$

Στο σημείο P του πετάσματος, πολύ μακριά από τις σχισμές αθροίζω (αρχή υπέρθεσης) τα ηλεκτρικά πεδία που προέρχονται από τις διάφορες σχισμές. Υποθέτω ότι είναι παράλληλα μεταξύ τους.

$$E_p = E_{01}\sin(kr_0 - \omega t) + E_{01}\sin(kr_0 + \delta - \omega t) + \cdots + E_{01}\sin(kr_0 + (N-1)\delta - \omega t)$$

$$E_p = E_{01}\mathrm{Im}\left[e^{i(kr_0 - \omega t)} + e^{i(kr_0 + \delta - \omega t)} + \cdots e^{i(kr_0 + (N-1)\delta - \omega t)}\right]$$

$$= E_{01} Im[e^{i(kr_0 - \omega t)}\left(1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \cdots + e^{i(N-1)\delta}\right)]$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο για το άθροισμα όρων γεωμετρικής σειράς:

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Οπότε $E_p = E_{01}\mathrm{Im}\left[e^{i(kr_0 - \omega t)}\left(\frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}\right)\right] = E_{01}\mathrm{Im}\left[e^{i(kr_0 - \omega t)}\frac{-e^{iN\frac{\delta}{2}}\left(e^{iN\frac{\delta}{2}} - e^{-iN\frac{\delta}{2}}\right)}{-e^{i\delta/2}\left(e^{-\delta/2} - e^{-i\delta/2}\right)}\right] =$

$$= E_{01}\mathrm{Im}\left[e^{i\left[kr_0 + (N-1)\frac{\delta}{2} - \omega t\right]}\frac{\sin(\frac{N\delta}{2})}{\sin(\frac{\delta}{2})}\right]$$

Άρα, $E_p = E_{01}\sin\left(kr_0 + (N-1)\frac{\delta}{2} - \omega t\right)\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$

$\delta = k a \sin\theta = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda}$

$$\langle E_p^2 \rangle = E_{01}^2 \left\langle \sin^2\left(kr_0 + (N-1)\frac{\delta}{2} - \omega t\right)\right\rangle \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = \frac{1}{2} E_{01}^2$$

$$\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = \frac{E_0^2}{2\mathrm{N}^2} \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$$

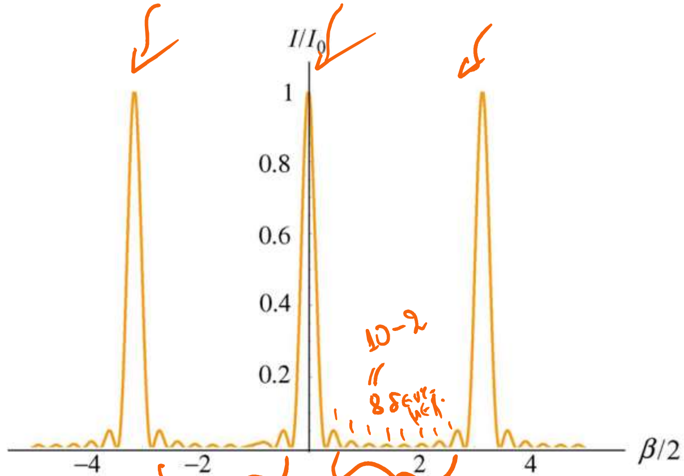
(όπου θέσαμε $E_{01} = E_0/\mathrm{N}$)

Οπότε $I = \frac{I_o}{\mathrm{N}^2} \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$

$\delta = ka\sin\theta = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda}$

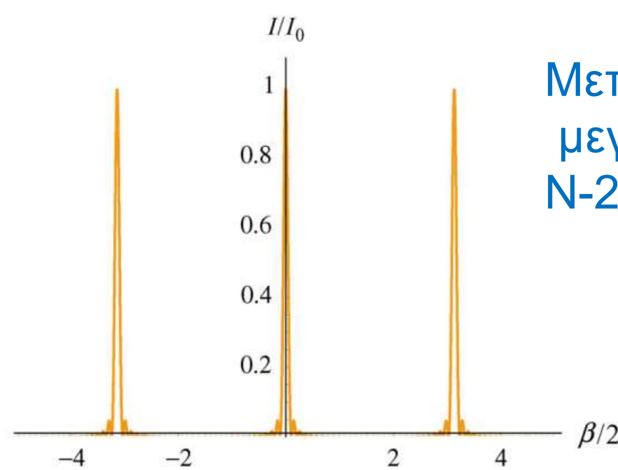
Παρατηρείστε ότι όταν το δ=0 (δηλ. θ=0), $\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{I}_o$

κύρια μέγιστα



N=10

δευτερεύοντα μέγιστα



N=30

Μεταξύ διαδοχικών μεγίστων υπάρχουν N-2 δευτερεύοντα μέγιστα

Κύρια μέγιστα

Όταν $\delta/2$ είναι ίσο με μηδέν ή ακέραιο πολλαπλάσιο του π, αποδεικνύεται ότι το $I = \frac{I_o}{\mathrm{N}^2}\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$ μεγιστοποιείται. Πρόκειται για τα λεγόμενα κύρια μέγιστα.

Παρατηρούμε ότι στο όριο που $\delta/2 \rightarrow m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\lim_{\frac{\delta}{2}\to m\pi} \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} = \lim_{\frac{\delta}{2}\to m\pi} \frac{N\cos N\delta/2}{\cos N\delta/2} = \pm N$$

Οπότε, στα κύρια μέγιστα, $I = \frac{I_o}{\mathrm{N}^2}\mathrm{N}^2 = I_o$.

Σχόλιο – διευκρίνιση για την συμβολή από Ν πηγές

Στη συζήτησή μας για τη συμβολή από Ν πηγές, πήραμε σαν E_o την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του ΗΜ κύματος που προσπίπτει στις N σχισμές, οπότε η αντίστοιχη ένταση από κάθε σχισμή είναι $\mathrm{E}_{o1} = \mathrm{E}_o/\mathrm{N}$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα

$I = \frac{I_o}{\mathrm{N}^2} \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$ (*)

όπου I_o η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας σε όλες μαζί τις N σχισμές. Οπότε, όπως είδαμε, στα πρωτεύοντα μέγιστα $I = I_o$

Αν όμως πάρουμε σαν I_o την ένταση ακτινοβολίας που προέρχεται από καθεμία από τις σχισμές ξεχωριστά, τότε ο τύπος (*) θα γραφόταν

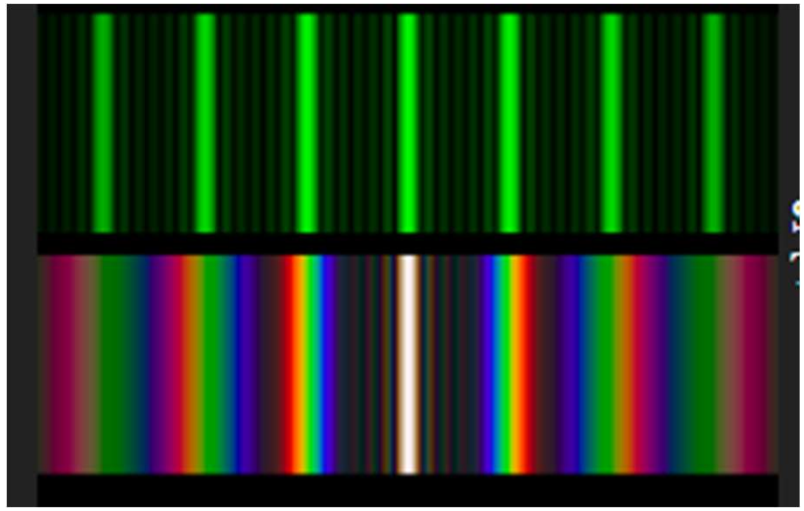
$I = I_o \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$, και στα μέγιστα θα είχαμε ένταση $I = I_o \mathrm{N}^2$.

Είναι θέμα ορισμού. Οπότε καλό είναι να προσέχετε πως ορίζεται κάθε φορά το I_o

Συμβολή για πολυχρωματική ακτινοβολία (π.χ. λευκό φως)

Μονοχρωματική ακτινοβολία

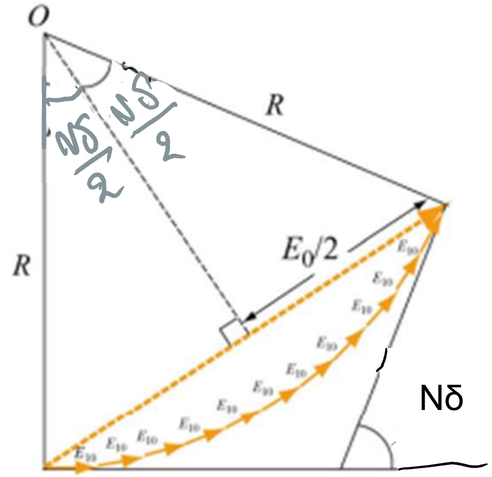
Πολυχρωματική ακτινοβολία (λευκό φως εδώ)



Συμβολή από 7 σχισμές

Εικόνα από https://farbeinf.de/static_html/multibeam.html

Παρατηρείστε ότι η θέση των μεγίστων είναι συνάρτηση του μήκους κύματος. Για την ίδια τάξη συμβολής (m) η θέση του μεγίστου είναι ανάλογη του λ, οπότε τα μικρότερα μήκη κύματος (μπλε) έχουν μικρότερη απόσταση από το κέντρο από ότι τα μεγάλα μήκη κύματος (κόκκινο). Ο κεντρικός κροσσός ($m = 0$) είναι λευκός (όλα τα μήκη κύματος στην ίδια θέση).



Διάγραμμα φασόρων για τον προσδιορισμό του χρονικά ανεξάρτητου μέρους του *E*.

Από ορθογώνιο τρίγωνο:

$$\sin\frac{N\delta}{2} = \frac{E_0/2}{R}$$

Μήκος τόξου: $NE_{10} = RN\delta$

Χρονικά ανεξάρτητο μέρος του $E = 2R\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 2\frac{NE_{10}}{N\delta}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = E_{01}\frac{\sin(N\delta/2)}{(\delta/2)}$

που ταυτίζεται (για το χρονικά ανεξάρτητο μέρος) με τον τύπο που βρήκαμε προηγουμένως για μικρά δ (οπότε $\sin(\frac{\delta}{2}) \cong \delta/2$