Φυσική Οπτική

Φυλλάδιο Ασκήσεων 8

Περίθλαση

Άσκηση 1

Παρατηρούμε σε μία οθόνη την κατανομή της έντασης του φωτός που προκύπτει από τη περίθλαση μακρινού πεδίου από μία λεπτή σχισμή. Ποιος είναι ο λόγος των εντάσεων του κεντρικού μεγίστου προς το πρώτο από τα δευτερεύοντα μέγιστα;

$$I = I_o \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \Longrightarrow \frac{I_{\beta/2=0}}{I_{\beta/2=1.43\pi}} = \frac{[\sin^2(\beta/2)/(\beta/2)^2]_{\frac{\beta}{2}=0}}{[\sin^2(\beta/2)/(\beta/2)^2]_{\frac{\beta}{2}=1.43\pi}}$$

$$= \frac{1}{[\sin^2(\beta/2)/(\beta/2)^2]_{\frac{\beta}{2}=1.43\pi}} = \left(\frac{\beta^2/4}{\sin^2(\frac{\beta}{2})}\right)_{\frac{\beta}{2}=1.43\pi}$$

$$= \frac{20.18}{0.952} = 21.2$$

Άρα, ο λόγος του μεγίστου της έντασης του πρώτου δευτερεύοντος λοβού προς τον κύριο είναι μόλις 4.7%.

Άσκηση 2 √

Σε ένα πείραμα περίθλασης μακρινού πεδίου από διπλή σχισμή, με πάχος σχισμής 4.050μm και απόσταση μεταξύ των σχισμών 19.44μm, παρατηρούμε την εικόνα των μεγίστων και ελαχίστων έντασης σε ένα πέτασμα. Το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός είναι 405nm. Πόσοι φωτεινοί κροσσοί συμβολής παρατηρούνται μέσα στο κεντρικό λοβό περίθλασης; Και πόσα στον πρώτο πλευρικό λοβό;

Ο κεντρικός λοβός περίθλασης ορίζεται από τα δύο ελάχιστα εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου, $m = \pm 1$

Αν b=4.05μm είναι το πάχος της σχισμής, τότε οι γωνίες στις οποίες εμφανίζονται τα πρώτα ελάχιστα περίθλασης είναι

$b sin\theta = \pm\lambda \Rightarrow \theta_{-1} \cong -\frac{\lambda}{b}\ \kappa\alpha\iota\ \theta_{+1} \cong +\frac{\lambda}{b}$, άρα $\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b} = \frac{2\times 405nm}{4.05\mu m} = 0.2rad$ (1)

Οι γωνίες στις οποίες εμφανίζονται τα μέγιστα συμβολής δίνονται από τον τύπο $p\lambda = \alpha \sin\theta, p = 0, \pm 1, \ldots$, όπου α=19.44μm

Άρα η γωνιακή απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κροσσών είναι (περίπου, δηλ. $\sin\theta \sim \theta$)

$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{405nm}{19.44\mu m}$ =0.02rad (2)

Από τα (1) και (2) προκύπτει ότι στον κεντρικό λοβό περίθλασης χωράνε 0.2/0.02=10 κροσσοί συμβολής.

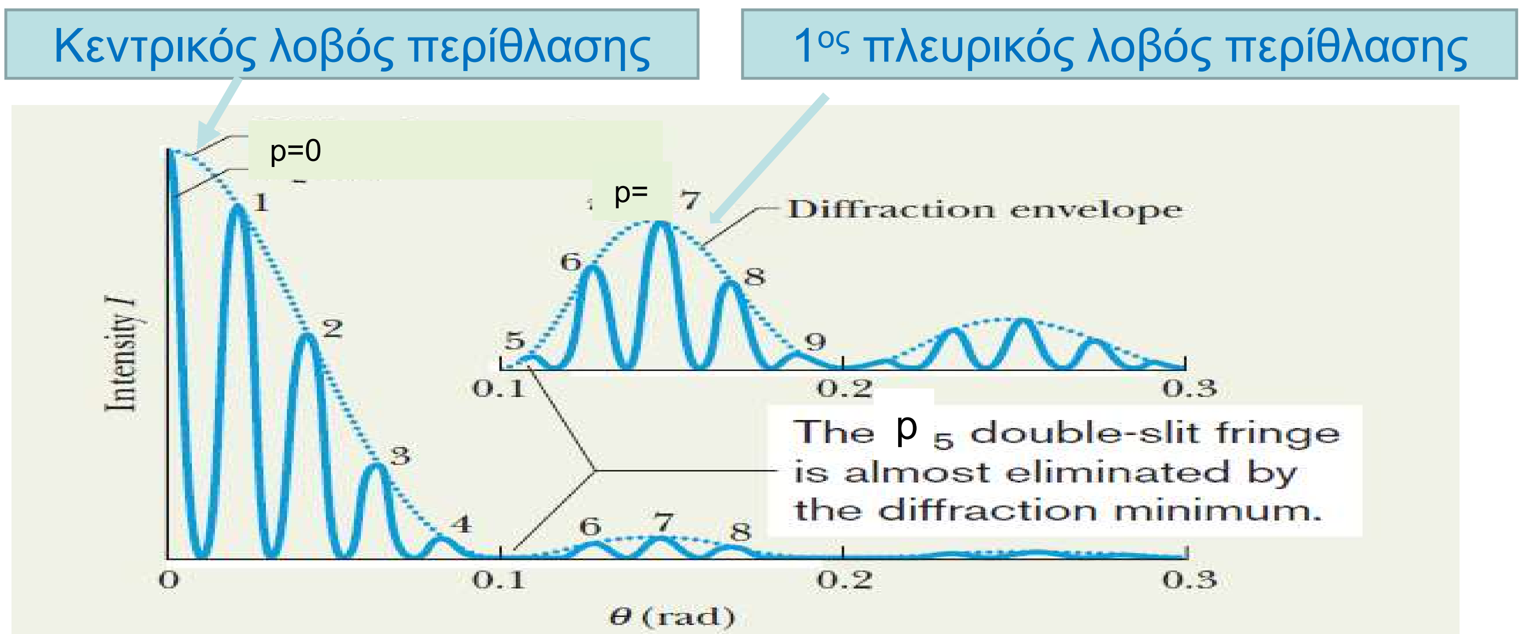
Όμοια εργαζόμαστε για τον πρώτο πλευρικό λοβό, ο οποίος ορίζεται από τα ελάχιστα περίθλασης $m = 1$ και $m = 2$ δηλ.

$\Delta\theta = \frac{\lambda}{b} = 0.1rad$ οπότε σε αυτό τον πλευρικό λοβό χωράνε 5 κροσσοί συμβολής.

Εξετάζουμε αν ικανοποιείται η συνθήκη για m=1, ή m=2

$$a = \left(\frac{p}{m}\right) b \Rightarrow 19.44\mu m = \left(\frac{p}{m}\right) 4.050\mu m \Rightarrow \frac{p}{m} = 4.8$$

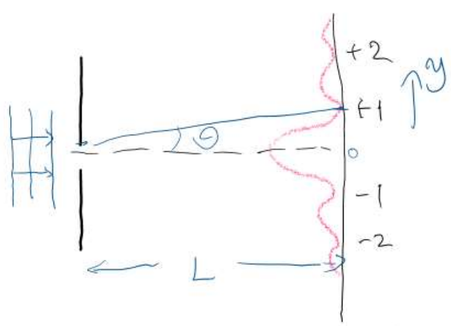
Άρα κοντά στο πρώτο ελάχιστο περίθλασης πέφτει ο πέμπτος φωτεινός κροσσός, που επομένως θα είναι πάρα πολύ αμυδρός. Παρόμοια, κοντά στο 2ο ελάχιστο περίθλασης, πέφτει ο 10ος φωτεινός κροσσός, ο οποίος επίσης εμφανίζεται πολύ αμυδρός.



Άσκηση 3

Όταν η οθόνη βρίσκεται 40cm μακριά από τη σχισμή και το χρησιμοποιούμενο μήκος κύματος του φωτός είναι 550nm, η απόσταση μεταξύ του πρώτου και πέμπτου ελαχίστου ενός σχηματισμού περίθλασης απλής σχισμής, είναι 0.35mm. (α) Βρείτε το πλάτος της σχισμής και (β) Υπολογίστε τη γωνία θ του πρώτου ελαχίστου περίθλασης

(α)



$$I = I_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}, \quad \beta = \frac{1}{2} k b \sin\theta, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

b = πλάτος της σχισμής

Ελάχιστα: $\left.\beta = \frac{1}{2} k b \sin\theta = m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots \right\} \Rightarrow$

$\tan\theta = \frac{y}{L}, \quad \tan\theta \approx \sin\theta$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\pi}{\lambda} b \frac{y}{L} \approx m\cancel{\pi} \Rightarrow \boxed{y = \frac{m\lambda L}{b}}$$

1ο ελάχιστο $y_1 = \frac{\lambda L}{b}$

5ο ελάχιστο $y_5 = \frac{5\lambda L}{b}$

$$\left.\right\} y_5 - y_1 = \frac{4\lambda L}{b} \Rightarrow b = \frac{4 \times 550\times10^{-9}\,m \times 40\times10^{-2}\,m}{0{,}35\times10^{-3}\,m} \simeq 2{,}51\,mm$$

(β) $\frac{1}{2} k b \sin\theta = m\pi \xRightarrow[m=1]{} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\cancel{\pi}}{\lambda} b\,\theta_1 \approx \cancel{\pi} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\lambda}{b} = \frac{550\,nm}{2{,}5\,mm} = \frac{550\times10^{-9}\,m}{2{,}5\times10^{-3}\,m} = 2{,}2\times10^{-4}\,rad$

Άσκηση 4 ✓

Μια απλή σχισμή φωτίζεται με φως μηκών κύματος λ_α και λ_β, έτσι επιλεγμένα ώστε το πρώτο ελάχιστο περίθλασης της λ_α συνιστώσας να συμπίπτει με το δεύτερο ελάχιστο της λ_β συνιστώσας. (α) Αν λ_β=350nm, πόσο είναι το λ_α; (β) Για ποια τάξη m_β (αν υπάρχει) ένα ελάχιστο της λ_β συνιστώσας συμπίπτει με ένα ελάχιστο της λ_α συνιστώσας για την τάξη m_α=2 και m_α=3;

(α) $\theta_m \cong \dfrac{m\lambda}{b}$ $\qquad \theta_{\alpha,m} = \dfrac{m_\alpha \lambda_\alpha}{b}$ $\qquad$ για $m_\alpha = 1$, $m_\beta = 2$ $\quad \theta_{\alpha,m} = \theta_{\beta,m}$

$\lambda_\alpha = 350\,nm$ $\qquad \theta_{\beta,m} = \dfrac{m_\beta \lambda_\beta}{b}$ $\qquad$ Άρα $\dfrac{1\cdot\lambda_\alpha}{\cancel{b}} = \dfrac{2\cdot\lambda_\beta}{\cancel{b}} \Rightarrow \lambda_\alpha = 2\lambda_\beta = 700\,nm$

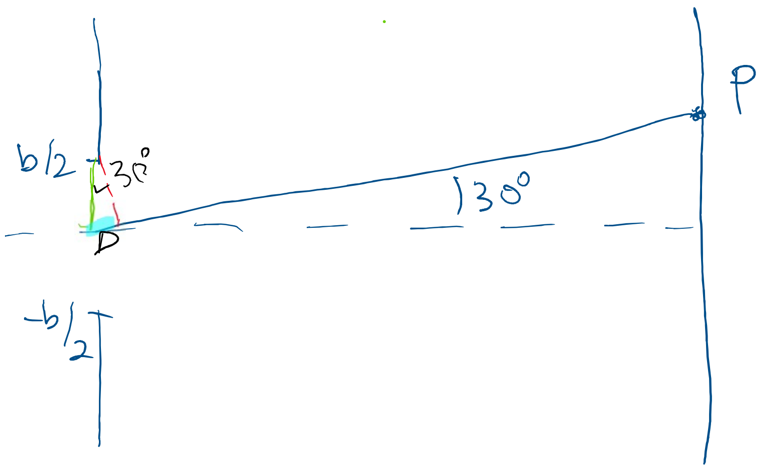
(β) $\theta_{\alpha,m} = \theta_{\beta,m} \Rightarrow \dfrac{m_\alpha \lambda_\alpha}{\cancel{b}} = \dfrac{m_\beta \lambda_\beta}{\cancel{b}} \Rightarrow m_\alpha 2 \cancel{\lambda_\beta} = m_\beta \cancel{\lambda_\beta} \Rightarrow m_\beta = 2 m_\alpha$

για $m_\alpha = 2 \quad m_\beta = 4$

$m_\alpha = 3 \quad m_\beta = 6$

Άσκηση 5

Σχισμή πλάτους 0.10mm φωτίζεται με φως μήκους κύματος 589nm. Θεωρείστε ένα σημείο P σε οθόνη όπου παρατηρούμε τον σχηματισμό περίθλασης της σχισμής. Το σημείο βρίσκεται σε γωνία 30° ως προς το κεντρικό άξονά της. Πόση είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των δευτερευόντων κυμάτων Huygens που φτάνουν στο σημείο P από τη κορυφή και το μέσο της σχισμής;



Διαφορά οπτικού δρόμου $\Delta = \frac{b}{2}\sin\theta$

Διαφορά φάσης $\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$

Άρα

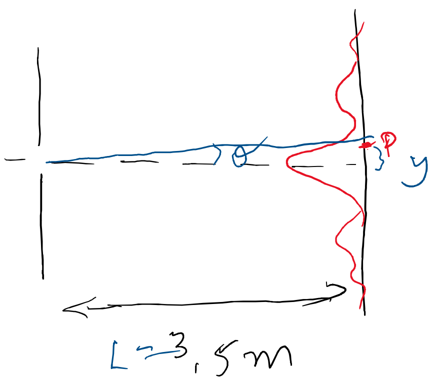
$$\varphi = \frac{2\pi}{589\times10^{-9}\,m}\cdot\frac{0{,}1\cdot10^{-3}\,m}{2}\sin30^{o} = 266{,}6\,rad =$$

$$= 84\pi + 0{,}904\pi$$

$$\rightarrow \underline{162{,}7^{o}}$$

Άσκηση 6

Μονοχρωματικό φως μήκους κύματος 538nm προσπίπτει σε σχισμή πλάτους 0.025mm. Η απόσταση από τη σχισμή μέχρι την οθόνη είναι 3.5m. Θεωρήστε ένα σημείο στην οθόνη που απέχει 1.1cm από το κεντρικό μέγιστο. Υπολογίστε (α) τη γωνία θ για αυτό το σημείο (β) τον λόγο της έντασης σε αυτό το σημείο προς την ένταση του κεντρικού μεγίστου.



$$\tan\theta = \frac{y}{L} = \frac{1{,}1\times10^{-2}\,m}{3{,}5\,m} = 0{,}00314 \Rightarrow \theta \simeq 0{,}00314\ rad$$

$$\rightarrow 0{,}18^\circ$$

$$\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} k b \sin\theta = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\pi}{\lambda} b\theta = \frac{3{,}14}{538\times10^{-9}\,m}\times 0{,}025\times10^{-3}\,m \times 3{,}14\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{2} = 0{,}46\ rad$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2(\beta/2)}{(\beta/2)^2} = \frac{\sin^2(0{,}46\ rad)}{0{,}46^2} = \left(\frac{0{,}44}{0{,}46}\right)^2 = 0{,}93$$

Άσκηση 7

Σε ένα πείραμα περίθλασης μακρινού πεδίου από διπλή σχισμή τα πλάτη των σχισμών είναι 12μm, η απόσταση μεταξύ των σχισμών 24μm, το μήκος κύματος 600nm και η οθόνη παρατήρησης βρίσκεται σε απόσταση 4.0m. Έστω I_P η ένταση στο σημείο P της οθόνης σε ύψος y=70.0cm. (α) Ποιος είναι ο λόγος μεταξύ I_P και I_m στο κέντρο του σχηματισμού; (β) Προσδιορίστε τη θέση του P ως προς τα μέγιστα και ελάχιστα συμβολής. (γ) Προσδιορίστε τη θέση του P ως προς τα ελάχιστα περίθλασης.

$$I = 4I_o\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\alpha$$

$$\beta \equiv \frac{1}{2}kb\sin\theta$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{2}ka\sin\theta$$

$$y = L\tan\theta \cong L\sin\theta$$

$=2b$

b=12μm
a=24μm
λ=600nm
L=4.0m
y=70.0cm

(α) $\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{2\pi}{\lambda}b\frac{y}{L} = \frac{\pi \cdot 12\times10^{-6}m \times 70\times10^{-2}m}{600\times10^{-9}m \times 4\,m} = 11$ rad

$\alpha = \frac{1}{2}ka\sin\theta = \ldots = 22$ rad

$(=2\beta)$

$\frac{I_P}{I_o} = 4\left(\frac{\sin(11\,rad)}{11}\right)^2\cos^2(22\,rad) = 4\left(\frac{-1}{11}\right)^2\cdot(-1)^2 = 0{,}03$

$\frac{I_m}{I_o} = 4 \Rightarrow \frac{I_P}{I_m} = \frac{0{,}03}{4} = 0{,}0075$

(β) Προσδιορίστε τη θέση του P ως προς τα μέγιστα και ελάχιστα συμβολής.

Μέγιστα συμβολής: $a\sin\theta = p\lambda$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L}$, δηλ. $\frac{ay}{L} = p\lambda \Rightarrow y = \frac{p\lambda L}{a}$

$m = 1$ $\quad y_1 = \frac{600\times10^{-9}\,m \times 4\,m}{24\times10^{-6}\,m} = 0{,}1\,m = 10\,cm$

$y_7 = 70\,cm$ → μέγιστο συμβολής $p = 7$

Ελάχιστα περίθλασης $b\sin\theta = m\lambda$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

$b\frac{y}{L} \approx m\lambda \Rightarrow y = \frac{m\lambda L}{b}$, $m = 1 \rightarrow y_{1,\pi\epsilon\rho} = 20\,cm$

$y_3 = 60\,cm$ $\quad y_4 = 80\,cm$ Άρα $y = 70\,cm$ μεταξύ 3ου και 4ου ελάχ. περίθλασης

Άσκηση 8

Ένα φράγμα περίθλασης έχει $1.26x10^4$ χαραγές («σχισμές») και έχει συνολικό πλάτος w=25.4mm. Φωτίζεται από κίτρινο φως λάμπας Νατρίου που περιλαμβάνει δύο πολύ κοντικά μήκη κύματος 589.00 και 589.59nm.

(α) σε ποια γωνία εμφανίζεται το μέγιστο πρώτης τάξης (σε οποιαδήποτε πλευρά του κέντρου) για το μήκος κύματος των 589.00nm

$$\alpha = \frac{w}{N} = \frac{25.4\times10^{-3}\mathrm{m}}{1.26\times10^{4}}$$
$$= 2.016 \times 10^{-6}\mathrm{m} = 2016\mathrm{nm}$$

Το μέγιστο πρώτης τάξης αντιστοιχεί σε m=1.

Από την εξίσωση $d\sin\theta = m\lambda$, for $m = 0,1,2, \ldots$ βρίσκουμε ότι

$$\theta = \sin^{-1}\frac{m\lambda}{d} = \sin^{-1}\frac{(1)(589.00\mathrm{nm})}{2016\mathrm{nm}}$$
$$= 16.99^\circ \approx 17.0^\circ.$$

(β) Ποια είναι η γωνιακή απόκλιση ανάμεσα στις δυο γραμμές.

Η διασπορά του φράγματος στη γωνία θ που βρήκαμε προηγουμένως είναι

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{1}{(2016\mathrm{nm})(\cos 16.99^\circ)}$$
$$= 5.187 \times 10^{-4}\mathrm{rad/nm}.$$

Από τον ορισμό της διασποράς $D = \Delta\theta/\Delta\lambda$, βρίσκουμε ότι

$$\Delta\theta = D\Delta\lambda = (5.187 \times 10^{-4}\mathrm{rad/nm})(589.59 - 589.00)$$
$$= 3.06 \times 10^{-4}\mathrm{rad} = 0.0175^\circ.$$

(γ) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χαραγών (σχισμών) για να ξεχωρίζουν οι δύο γραμμές του Νατρίου μεταξύ τους σε πρώτη τάξη;

$$N = \frac{R}{m} = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{m\Delta\lambda}$$

$$= \frac{589.30\text{nm}}{(1)(0.59\text{nm})} = 999 \text{ χαραγές}$$

Άσκηση 9

Υποθέστε ότι τα όρια του ορατού φάσματος επιλέγονται αυθαίρετα να είναι τα 430nm και τα 680nm. Υπολογίστε τον αριθμό των χαραγών ανά χιλιοστό ενός φράγματος που θα διαχέει το φάσμα πρώτης τάξης κατά μία γωνία 20^o .

$\lambda_1 = 430nm$, $\lambda_2 = 680nm$ $\quad \Delta\theta = 20^\circ$ $\quad \lambda_1 \to \theta$, $\lambda_2 \to \theta + \Delta\theta$

Για $m=1$, από τον τύπο του φράγματος έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = a \sin\theta \\ \lambda_2 = a \sin(\theta + \Delta\theta) = a[\sin\theta\cos\Delta\theta + \cos\theta \sin\Delta\theta] \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = a\left[\frac{\lambda_1}{a}\cos\Delta\theta + \sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{a}\right)^2}\sin\Delta\theta\right] = \lambda_1 \cos\Delta\theta + \sqrt{a^2-\lambda_1^2}\,\sin\Delta\theta$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1\cos\Delta\theta)^2 + (\lambda_1 \sin\Delta\theta)^2}{\sin^2(\Delta\theta)}} = \ldots 9{,}14 \times 10^{-4}\, mm$$

$$\to 1/9{,}14\times10^{-4} = 1{,}09\times10^{3}\ \text{γρ}/mm$$