ΚΥΜΑΤΙΚΗ
Ι. Μηχανικά κύματα

Ασκήσεις Φυλλαδίου 6 – Ηχητικά κύματα

Άσκηση 1

Έστω ηχητικό κύμα που διαδίδεται μέσα σε ένα μακρύ σωλήνα γεμάτο αέρα. Ας υποθέσουμε ότι η οριζόντια μετατόπιση ενός τυχαίου στοιχείου περιγράφεται από τη συνάρτηση $s(x,t) = s_m \cos(kx - \omega t)$. Βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει τη μεταβολή της πίεσης ως προς τη θέση x και το χρόνο t.

Βλ. σχήμα στη 5η διαφάνεια του μαθήματος 10+11

$$\left.\begin{array}{l} \Delta V = A\,\Delta s. \\ \Delta P = -B\dfrac{\Delta V}{V}. \end{array}\right\} \Delta P = -B\frac{\Delta s}{\Delta x} = -B\frac{\partial s}{\partial x}.$$

$$s(x,t) = s_m \cos(kx - \omega t).$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[s_m \cos(kx - \omega t)] = -ks_m \sin(kx - \omega t).$$

$$\downarrow$$

$$\Delta P(x,t) = Bks_m \sin(kx - \omega t)$$

$$\downarrow$$

$$\Delta P(x,t) = \Delta P_m \sin(kx - \omega t)$$

$$\downarrow$$

$$\Delta P_m = Bk\, s_m \xRightarrow[\varepsilon\xi.14]{} \Delta P_m = \rho c_{\eta\chi o\upsilon}^2\, k\, s_m$$

$$\boxed{k = \omega / c_{\eta\chi o\upsilon}} \longrightarrow \downarrow$$

$$\Delta P_m = \rho \omega c_{\eta\chi o\upsilon}\, s_m$$

Άσκηση 2

Το μέγιστο πλάτος πίεσης που ανέχεται το ανθρώπινο αυτί είναι 28Pa (υπενθυμίζεται ότι η 1 atm= 10^5Pa). Πόσο είναι το πλάτος μετατόπισης για ένα τέτοιο ήχο συχνότητας 1000Hz, διαδιδόμενο με ταχύτητα 343m/s σε αέρα πυκνότητας 1.21kg/m^3;

Είδαμε προηγουμένως ότι

$$\Delta\mathrm{P}_m = \rho\omega c_{\eta\chi o\upsilon}\, s_m \Rightarrow$$

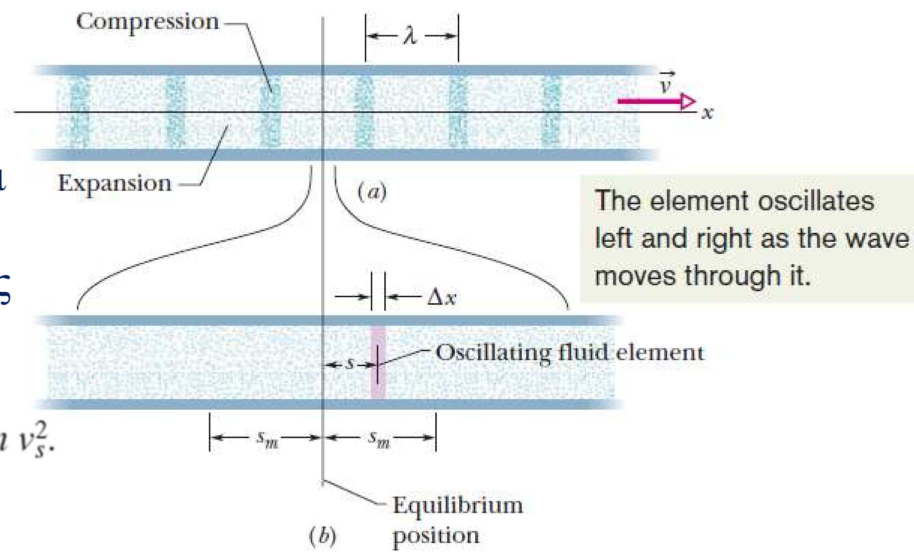
$$s_m = \frac{\Delta\mathrm{P}_m}{\rho\omega c_{\eta\chi o\upsilon}} = \frac{\Delta\mathrm{P}_m}{\rho 2\pi f c_{\eta\chi o\upsilon}} \Rightarrow s_m = \frac{28\mathrm{Pa}}{(1.21\mathrm{kg/m^3})(2\pi)(1000\mathrm{Hz})(343\mathrm{m/s})} = 1.1\times 10^{-5}\mathrm{m} = 11\mu\mathrm{m}$$

Το αυτί μπορεί να ακούσει σε αυτή τη συχνότητα μέχρι $2.8\times 10^{-5}\mathrm{Pa}$, που αντιστοιχεί σε

$s_m = 1.1\times 10^{-11}\mathrm{m} = 11\mathrm{pm}$

Άσκηση 3 Εύρεση της έντασης του ήχου

Θεωρείστε ένα μικρό στοιχείο όγκου αέρα πάχους dx, επιφάνειας διατομής A, και μάζας dm, που ταλαντώνεται εμπρός-πίσω, καθώς το ηχητικό κύμα περνά από αυτό. Υποθέσετε ότι η οριζόντια αυτή μετατόπιση περιγράφεται από τη συνάρτηση $s = s_m \cos(kx - \omega t)$. Βρείτε την ένταση του ηχητικού κύματος συναρτήσει της πυκνότητας του αέρα, της κυκλικής συχνότητας ω και της ταχύτητας του ήχου υ.



Η κινητική ενέργεια του στοιχείου αυτού είναι $dK = \frac{1}{2} dm\, v_s^2.$

όπου

$$v_s = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \sin(kx - \omega t).$$

Άρα

$$dK = \tfrac{1}{2}(\rho A\, dx)(-\omega s_m)^2 \sin^2(kx - \omega t).$$

Επομένως

$$\frac{dK}{dt} = \tfrac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_m^2 \sin^2(kx - \omega t).$$

και,

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{avg}} = \tfrac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_m^2 [\sin^2(kx - \omega t)]_{\text{avg}}$$

Οπότε ο μέσος ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται η κινητική ενέργεια είναι $\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{avg}} = \frac{1}{4}\rho A v \omega^2 s_m^2.$

Αφού ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται η δυναμική ενέργεια είναι ίσος με της κινητικής ενέργειας, συνολικά η ένταση του ηχητικού κύματος θα είναι

$$\boxed{I = \frac{2(dK/dt)_{\text{avg}}}{A} = \tfrac{1}{2}\rho v \omega^2 s_m^2.}$$

Άσκηση 4

Ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρικό σπινθήρα που ξεσπά κατά μήκος ευθείας γραμμής μήκους L=10m, εκπέμποντας ηχητικό παλμό που διαδίδεται ακτινικά από τον σπινθήρα προς τα έξω. Η ισχύς εκπομπής (του παλμού) είναι $P_{s,avg} = 1.6 \times 10^4 W$. Πόση είναι η ένταση του ήχου σε απόσταση r=12m από τον σπινθήρα;

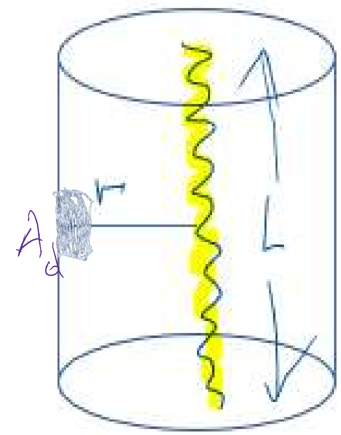
Εδώ έχουμε ένα παράδειγμα ήχου που δεν προέρχεται από σημειακή πηγή αλλά από μία εκτεταμένη γραμμική πηγή. Αν θεωρήσουμε ότι το μήκος της πηγής είναι μεγάλο, τα κυματικά μέτωπα είναι ομοαξονικοί κύλινδροι.

$I = \frac{P_s}{\mathrm{A}} = \frac{P_s}{2\pi r L}$, όπου $2\pi r L$ είναι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου με ύψος L και ακτίνα r.

οπότε $I = \frac{1.6\times 10^4 W}{2\pi(12m)(10m)} = 21.2 W/m^2$

Αν τοποθετήσουμε ένα ακουστικό ανιχνευτή επιφάνειας $A_d = 2cm^2$ εκεί από το σπινθήρα, ο ρυθμός συλλογής ηχητικής ενέργειας από τον ανιχνευτή θα είναι

$P_{\mathrm{d}} = I\, A_d = 21.2 W/m^2 \times 2 \times 10^{-4}\, m^2 = 4.2 mW$



Άσκηση 5

Αν μία ωτασπίδα μειώνει το επίπεδο του ήχου κατά 20DB πόσος είναι ο λόγος της τελικής I_f προς την αρχική έντασηI_i;

$$\beta_f = (10DB)\log\frac{I_f}{I_0}$$

$$\beta_i = (10DB)\log\frac{I_i}{I_0}$$

$$-20DB = \beta_f - \beta_i = (10DB)\left(\log\frac{I_f}{I_0} - \log\frac{I_i}{I_0}\right) \Rightarrow -2 = log\frac{I_f}{I_i} \Rightarrow \quad \frac{I_f}{I_i} = 10^{-2}$$

Άσκηση 6

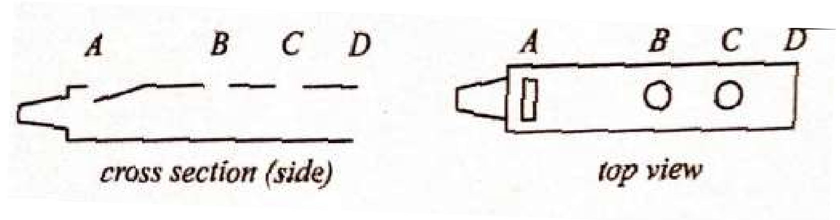
Ένα απλό «φλάουτο» όπως φαίνεται στην εικόνα είναι ανοικτό στο D. Υπάρχει επίσης ένα μεγάλο άνοιγμα στο A (κοντά στο στόμιο) και υπάρχουν δύο τρύπες στο B και C (AB=BD, BC=CD). Η απόσταση AD είναι ~37cm. Η ταχύτητα του ήχου είναι ~340m/s. Ποια συχνότητα περιμένετε να ακούσετε όταν φυσάμε από το στόμιο και έχουμε

(a) Και τις δύο τρύπες στο B και C κλειστές

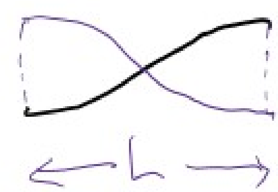
(b) Μόνο τη τρύπα στο C κλειστή

(c) Μόνο τη τρύπα στο B κλειστή

(d) Και τις δύο τρύπες στο B και C ανοικτές



Υποθέστε ότι θα ακούσετε κυρίως την θεμελιώδη αρμονική.



(a) Σωλήνας με δύο ανοικτά άκρα και μήκος $L = AD = 37cm$.

Θεμελιώδης τρόπος ταλάντωσης $\lambda = 2L = 74cm \Rightarrow f = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\lambda} = 446\text{Hz}$

b) Εάν οι τρύπες είναι αρκετά μεγάλες είναι σαν να έχουμε ένα σωλήνα μήκους 18.5cm (ανοικτό στα δύο άκρα) οπότε $\lambda = 2\text{AB} = 37cm \Rightarrow f = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\lambda} = 892\text{Hz}$

c) $\lambda = 2\text{AC} = 2\left(18.5 + \frac{18.5}{2}\right)\text{cm} = 55.5\text{cm} \Rightarrow \text{f} = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\lambda} = 612\text{Hz}$

d) Τότε είναι σαν να έχουμε τη περίπτωση (c).

‘Ασκηση 7

Η χορδή της νότας λα ενός βιολιού είναι τεντωμένη λίγο περισσότερο από ότι πρέπει. Όταν η χορδή ηχεί ταυτόχρονα με ένα διαπασών που ταλαντώνεται ακριβώς στη νότα λα (440Hz) ακούγονται 4 διακροτήματα το δευτερόλεπτο. Ποια είναι η περίοδος ταλάντωσης της χορδής του βιολιού;

Έστω T_β η περίοδος ταλάντωσης της χορδής του βιολιού. Η αντίστοιχη συχνότητα θα είναι $f_\beta = 1/\mathrm{T}_\beta$.

Δίνεται ότι $f_{beat} = 4s^{-1}$

Αλλά, $f_{\text{beat}} = f_1 - f_2 = f_\beta - f_{\delta\iota\alpha\pi\alpha\sigma\omega\nu} \Rightarrow$

$4s^{-1} = 1/\mathrm{T}_\beta - 440s^{-1} \Rightarrow \mathrm{T}_\beta = \left(\frac{1}{444}\right)s = 2.25 \times 10^{-3}s$

Άσκηση 8

Δύο πανομοιότυπες χορδές πιάνου έχουν θεμελιώδη συχνότητα 600Hz. Ποια κλασματική αύξηση της τάσης της μιας χορδής θα οδηγήσει στην εμφάνιση 6 διακροτημάτων το δευτερόλεπτο, όταν οι δύο χορδές ταλαντώνονται ταυτόχρονα.

Κάθε χορδή ταλαντώνεται στη θεμελιώδη συχνότητα με $L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L$ (1)

$f = \frac{\upsilon}{\lambda}$ (2)

$\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}}$ (3)

Από (1), (2), και (3) προκύπτει ότι $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}}$

Έστω $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}}$ και $f_2 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\mathrm{F}+\Delta\mathrm{F}}{\mu}}$

Τότε $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{\mathrm{F}+\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}}} = \sqrt{1+\frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}}}$

Για $\Delta F << F$, $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{1+\frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}}} \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}} \Rightarrow$, $f_{\text{beat}} = f_2 - f_1 = \frac{1}{2}\frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}} f_1 \Rightarrow$

$6\mathrm{Hz} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}} 600\mathrm{Hz} \Rightarrow \frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}} = 0.02$