

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μηχανικά κύματα

- I. Τι είναι κύμα
- II. Κατηγορίες κυμάτων
- III. Μηχανικά κύματα → τύποι μηχανικών κυμάτων
- IV. Περιοδικά κύματα → βασικοί ορισμοί: Μήκος κύματος, Συχνότητα, Πλάτος, Φάση, Μαθηματική περιγραφή
- V. Ταχύτητα τρέχοντος (οδεύοντος) κύματος

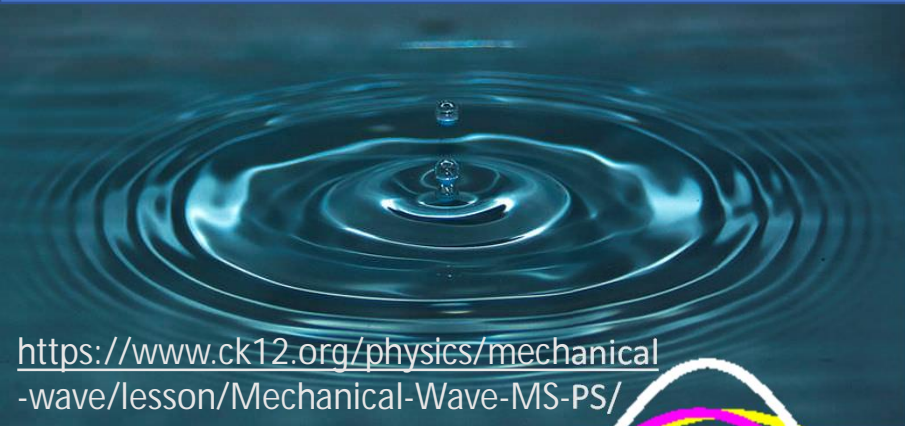
Τί είναι κύμα

- Διάδοση μίας διαταραχής στο χώρο
- Μεταφορά ενέργειας, χωρίς τη μεταφορά ύλης
- Σε άλλες περιπτώσεις απαιτείται υλικό μέσο για τη δημιουργία κύματος (μηχανικά κύματα) σε άλλες όχι (Η-Μ κύματα)
- Άρα για να δημιουργηθεί ένα κύμα χρειάζονται:
 - ΥΠΑΡΞΗ ΕΣΤΙΑΣ ΠΟΥ ΔΙΑΤΑΡΡΑΣΕΙ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (ΠΡΟΣΦΕΡΕΙ ΟΡΜΗ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ)
 - ΥΠΑΡΞΗ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΟΧΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ (ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ) ΠΟΥ ΔΕΝ ΣΥΝΟΔΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΥΛΗΣ

Κατηγορίες κυμάτων

- Μηχανικά κύματα – νόμοι Νεύτωνα – χρειάζονται υλικό μέσο
- Ηλεκτρομαγνητικά κύματα – δεν χρειάζονται υλικό μέσο (διάδοση και στο κενό)
- Κύματα ύλης (στοιχειώδη σωματίδια, ακόμα και άτομα, μόρια)
- Βαρυτικά κύματα (διαταραχή του χωρόχρονου)

Μηχανικά κύματα



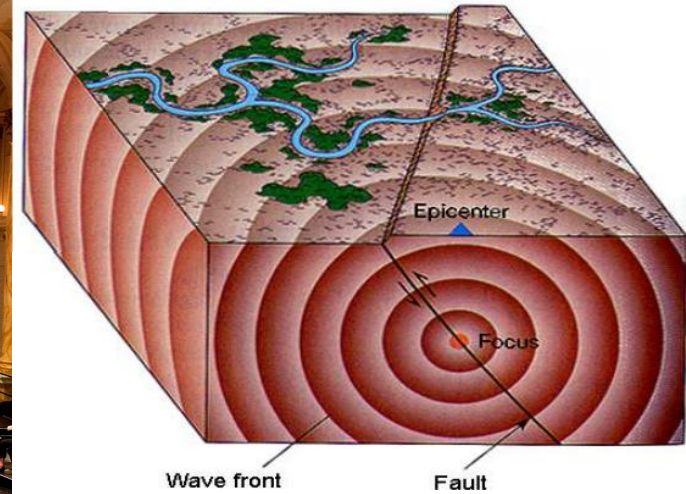
<https://www.ck12.org/physics/mechanical-wave/lesson/Mechanical-Wave-MS-PS/>



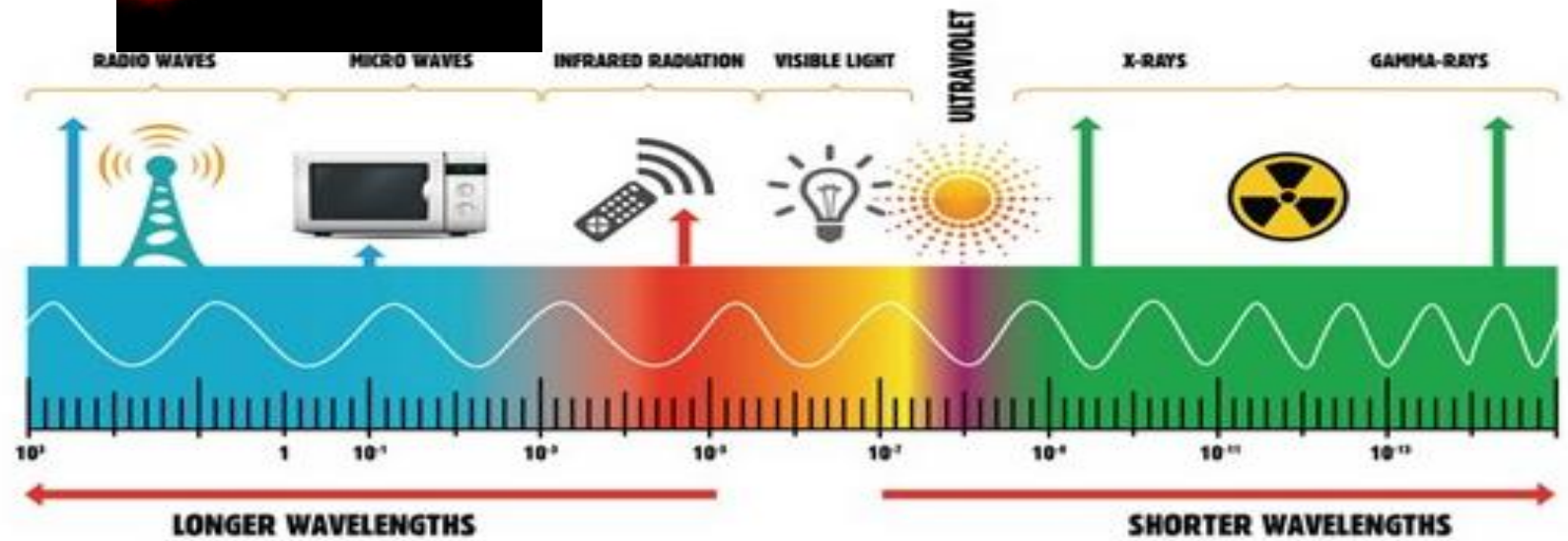
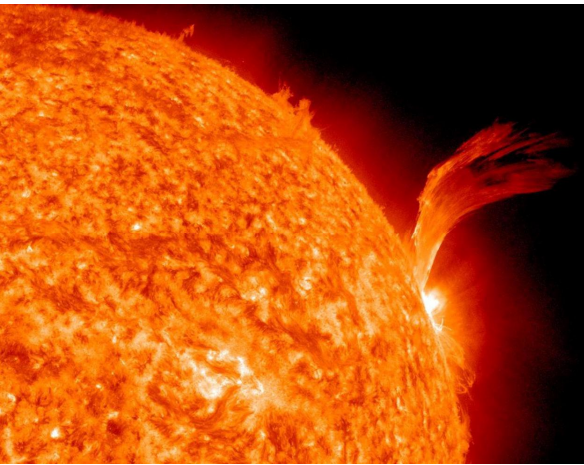
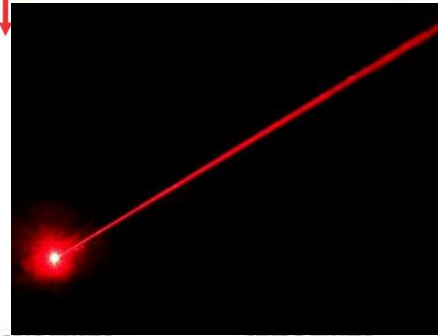
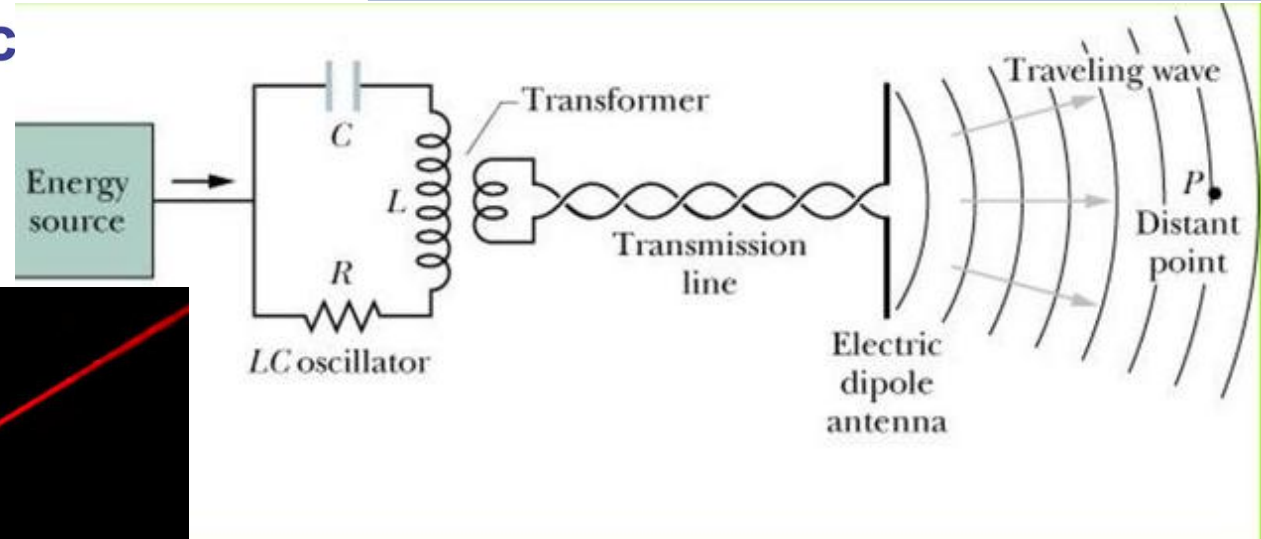
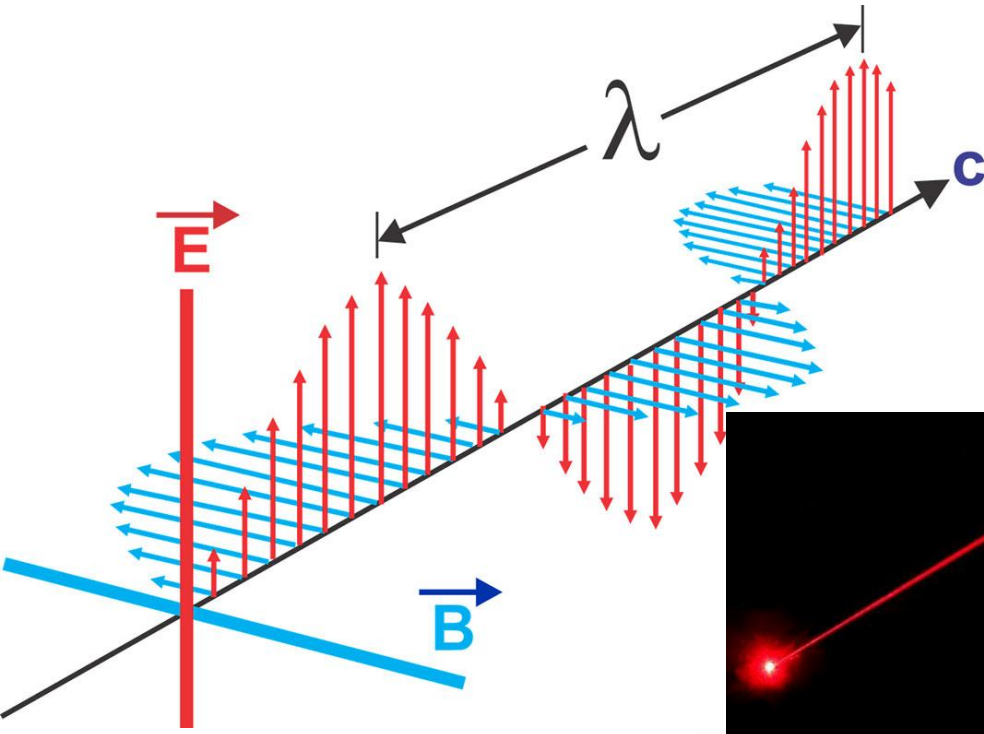
<https://www.seis-insight.eu/en/public-2/planetary-seismology/seismic-waves>



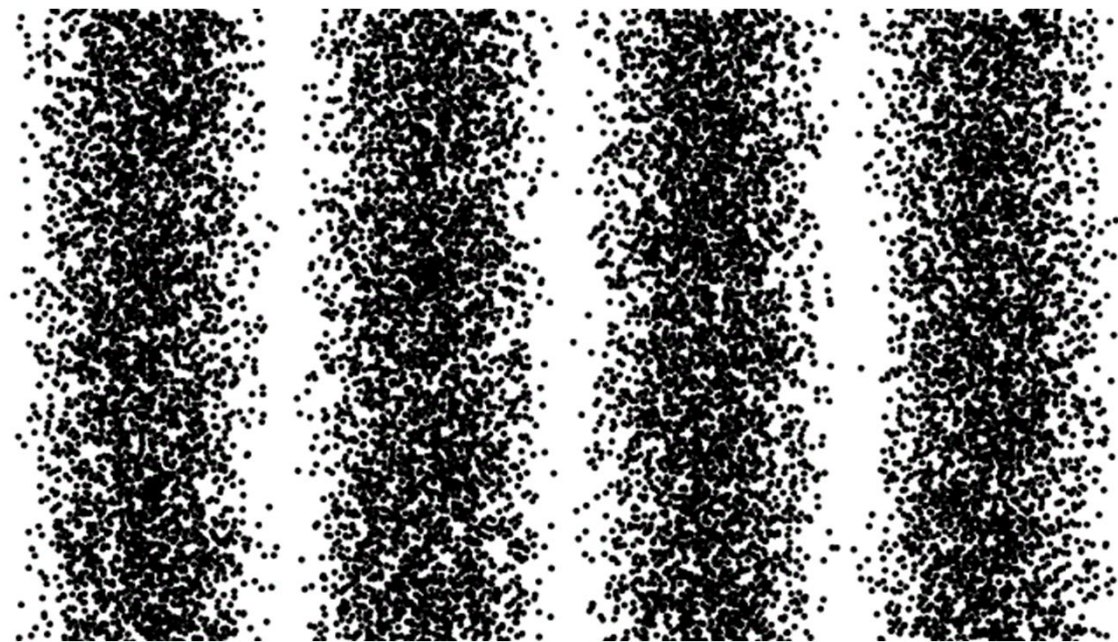
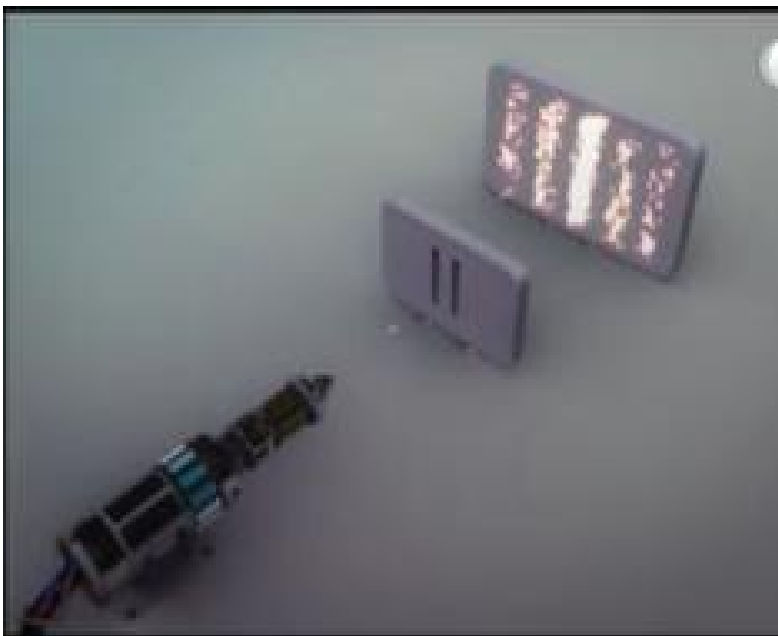
<https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/PT.3.4880>



Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

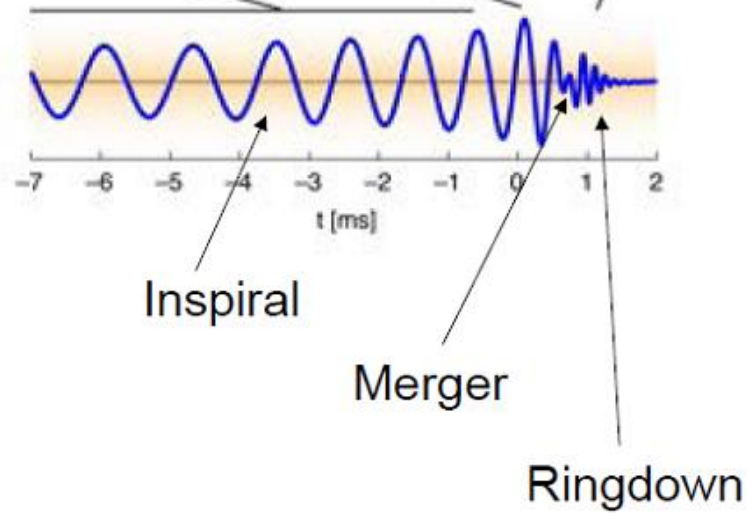


Κύματα ύλης

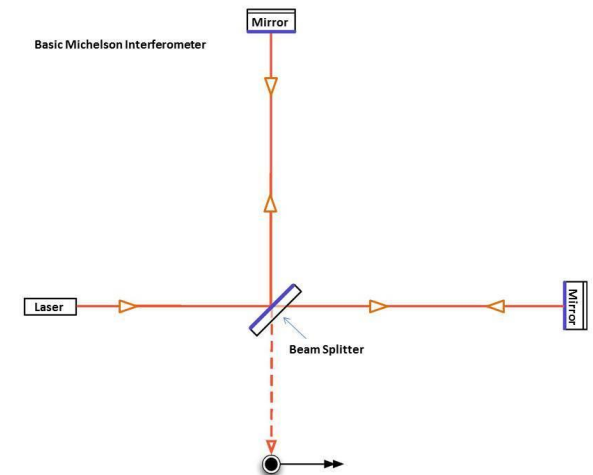


Particle impacts make visible the interference pattern of waves [Source: Thierry Dugnonle/Wikimedia](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thierry_Dugnonle_-_Interference_experiment.jpg)

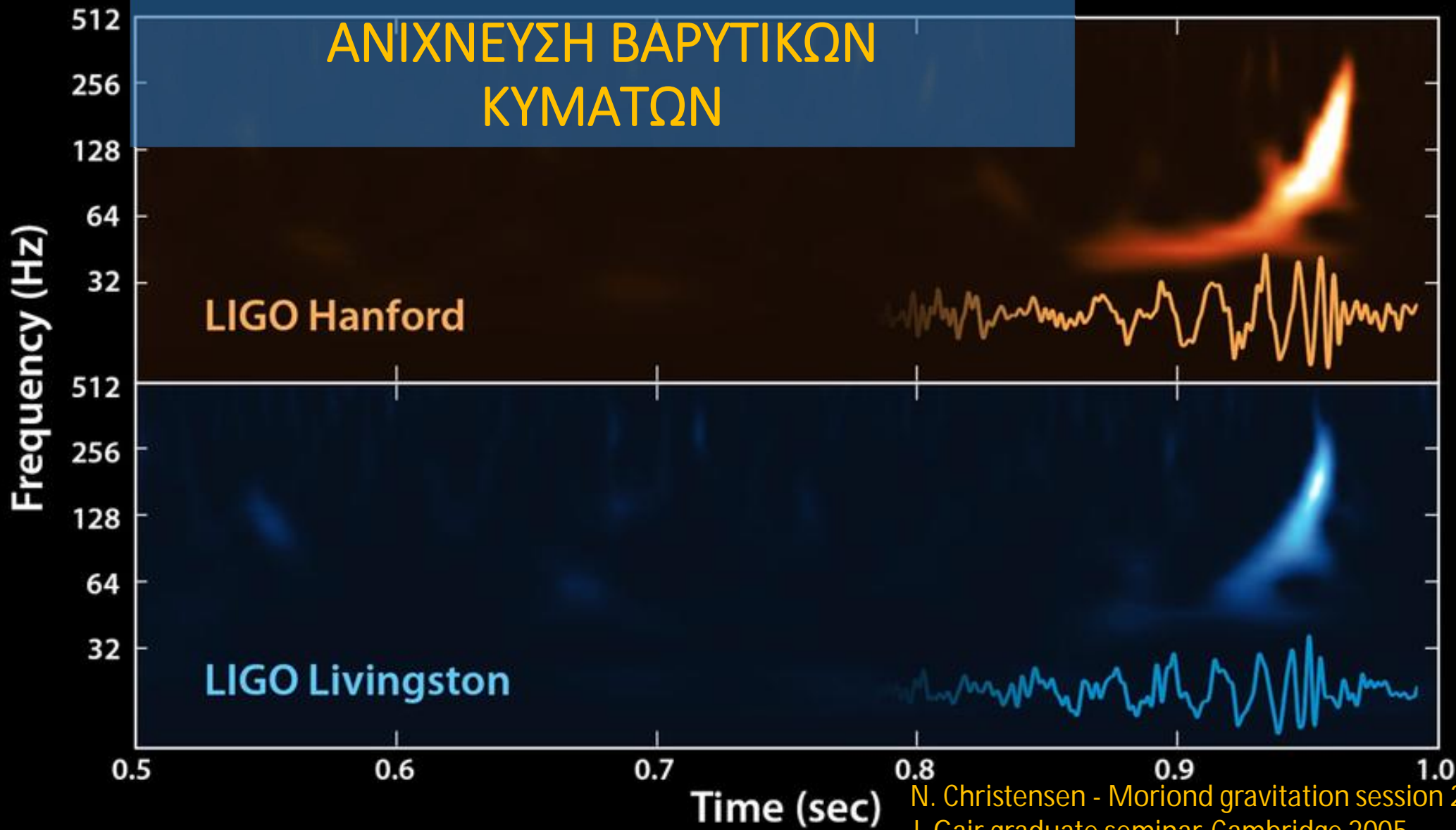
Βαρυτικά κύματα



- «διακυμάνσεις» στην καμπυλότητα του χωρόχρονου
- Επιταχυνόμενες μάζες προκαλούν τέτοιες διακυμάνσεις (τεράστιες μάζες και ακραίες επιταχύνσεις)
- Αυτές οι διακυμάνσεις διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός → βαρυτικό κύμα



ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

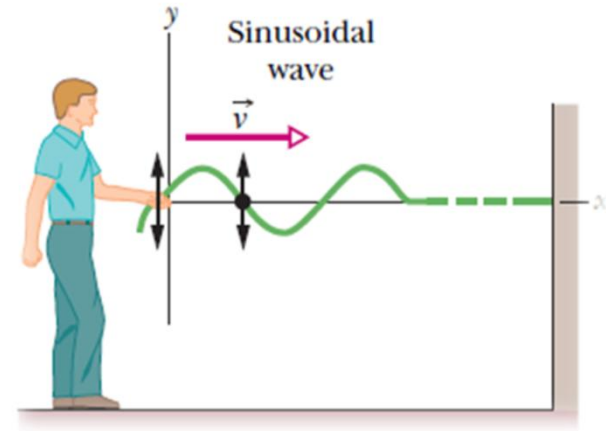


N. Christensen - Moriond gravitation session 2017
J. Gair graduate seminar-Cambridge 2005

Εγκάρσια κύματα

Διαταραχή κάθετη στη διεύθυνση
διάδοσης του κύματος

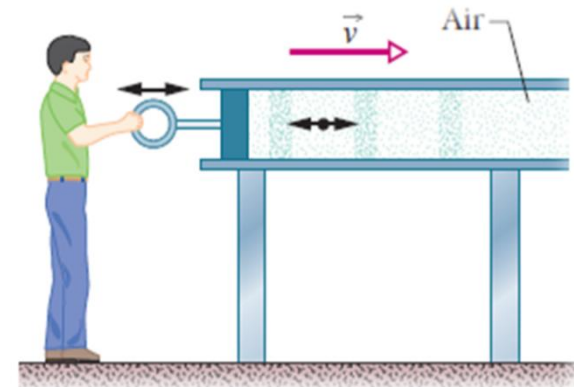
Π.χ. μηχανικά κύματα σε χορδή, ΗΜ κύματα



Διαμήκη κύματα

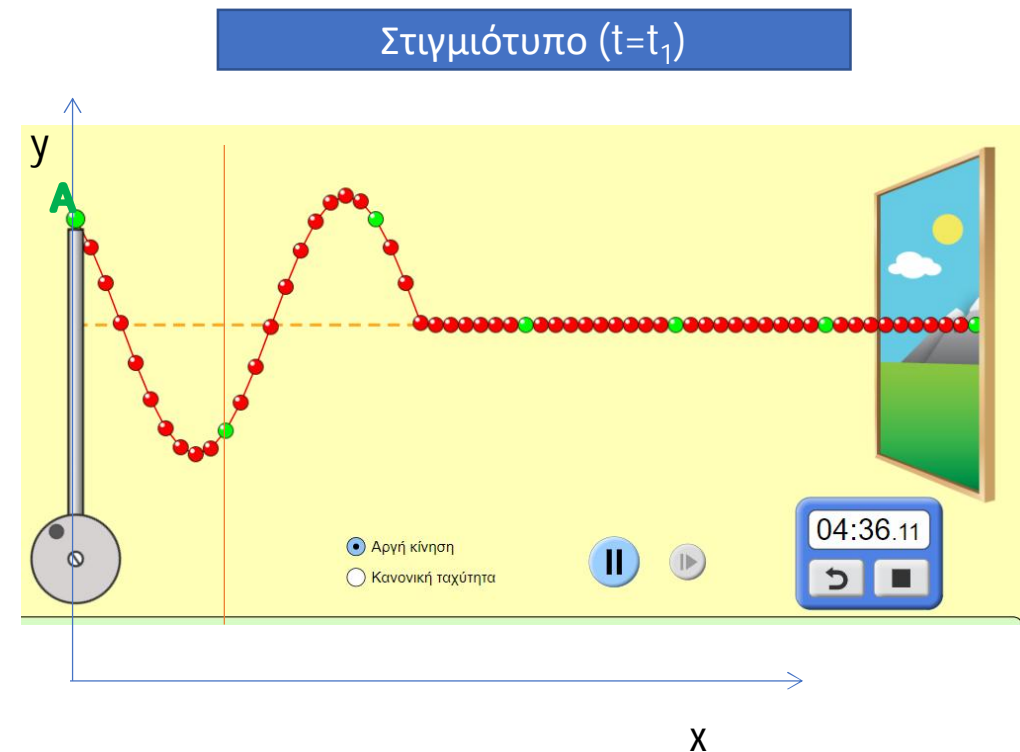
Διαταραχή παράλληλη στη διεύθυνση
διάδοσης του κύματος

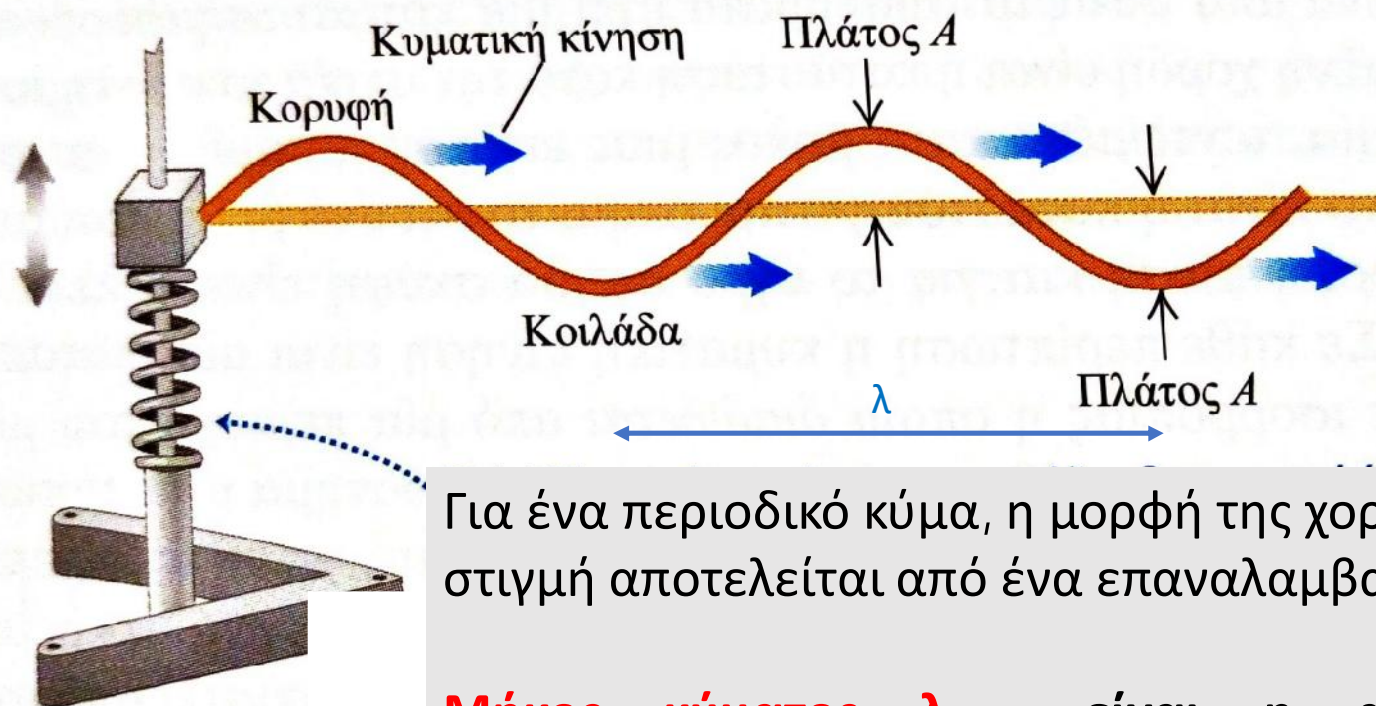
Π.χ. ηχητικά κύματα



Μηχανικά κύματα – το παράδειγμα της διάδοσης εγκάρσιου κύματος σε μία χορδή

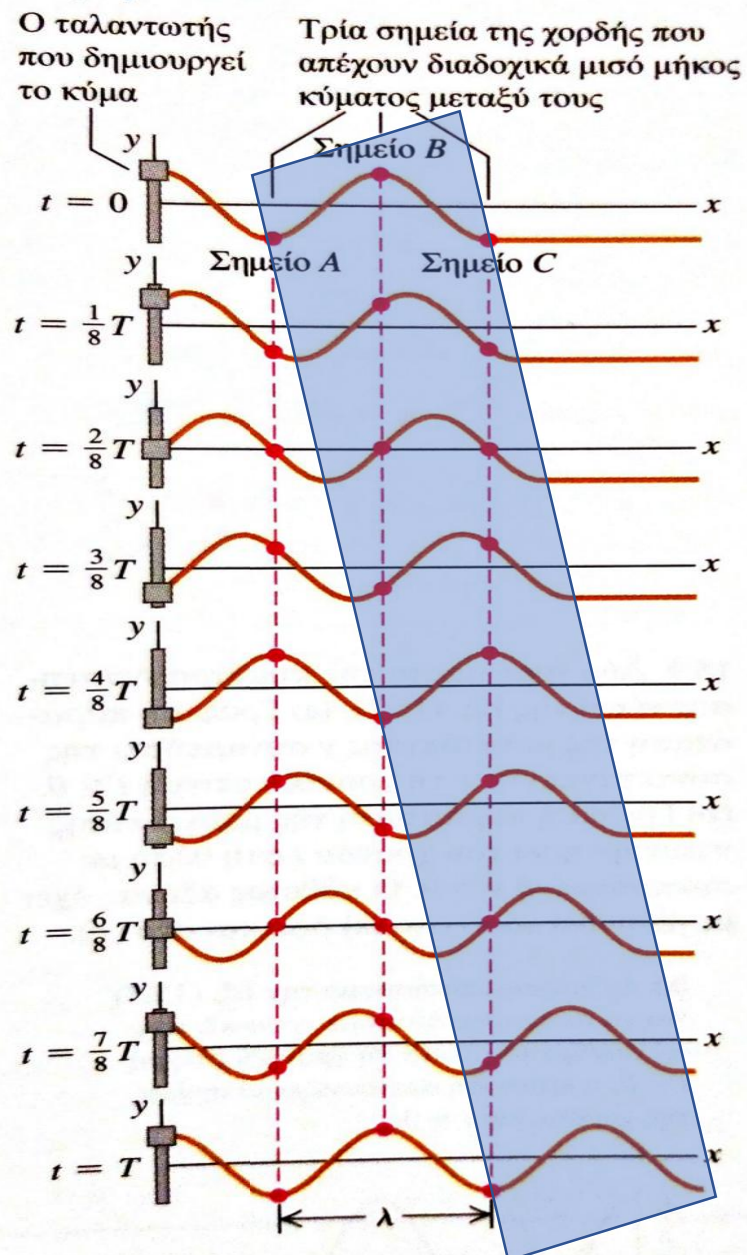
- Εγκάρσιο κύμα σε τεντωμένη χορδή αποτελεί παράδειγμα κυματικού παλμού.
- Ασκούμε μία εγκάρσια δύναμη στο άκρο της τεντωμένης χορδής, που κινεί τη χορδή πάνω κάτω, παράγοντας μία παραμόρφωση, που ταξιδεύει κατά μήκος της χορδής, (χάρη στη τάση της χορδής).
- Αν το άκρο της χορδής κινείται περιοδικά (π.χ. απλή αρμονική ταλάντωση), τότε κάθε «στοιχείο» της χορδής κάνει περιοδική κίνηση καθώς το κύμα διαδίδεται, οπότε έχουμε **περιοδικό κύμα**





Για ένα περιοδικό κύμα, η μορφή της χορδής σε κάθε στιγμή αποτελείται από ένα επαναλαμβανόμενο «μοτίβο».

Μήκος κύματος λ , είναι η απόσταση μεταξύ οποιουδήποτε σημείου και του αντίστοιχού του στην επόμενη επανάληψη της κυματομορφής (π.χ. μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών ή κοιλάδων)



Σχέση περιόδου – μήκους κύματος

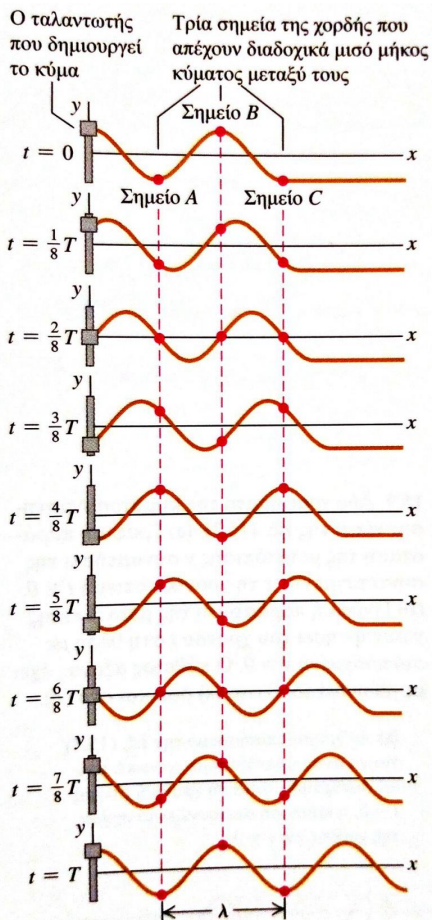
- Το κυματικό μοτίβο οδεύει με σταθερή ταχύτητα v προς τα δεξιά και προχωρά απόσταση λ μέσα σε μία περίοδο.
- Άρα η ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα είναι

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

όπου $f = 1/T$ η συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται όλα τα σημεία της χορδής (όπου έχει διαδοθεί το κύμα)

Στα μηχανικά κύματα, η ταχύτητα διάδοσης καθορίζεται από τις μηχανικές ιδιότητες του μέσου (αν αυξήσω τη συχνότητα, θα μειωθεί το μήκος κύματος, έτσι ώστε το γινόμενο να παραμείνει σταθερό)

Πως θα περιγράψω μαθηματικά το αρμονικό κύμα που διαδίδεται κατά μήκος της τεντωμένης χορδής



Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα της χορδής στη θέση $x=0$. Κατά τη διάρκεια της κυματικής κίνησης, το στοιχειώδες αυτό τμήμα θα ταλαντώνεται αρμονικά γύρω από τη θέση ισορροπίας ($y=0$), με συχνότητα f και πλάτος y_m .

Ας υποθέσουμε ότι η μετατόπιση y του στοιχείου κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας δίνεται από μία συνάρτηση ημιτόνου

$$y(x = 0, t) = y_m \sin \omega t = y_m \sin 2\pi f t$$

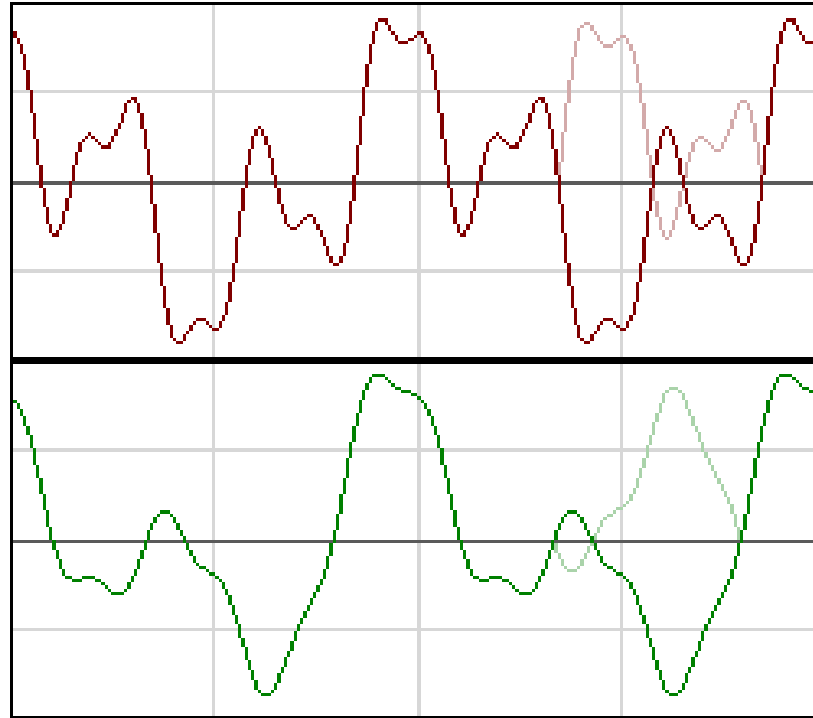
Η κυματική διαταραχή ταξιδεύει από το $x=0$ σε ένα σημείο x μέσα σε χρόνο $t = \frac{x}{v}$, όπου $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$

Η κίνηση του σημείου x τη στιγμή t είναι ίδια με τη κίνηση του σημείου 0 σε προγενέστερο χρόνο, $t = \frac{x}{v}$

Άρα $y(x, t) = y_m \sin \omega \left(\frac{x}{v} - t \right) = y_m \sin(kx - \omega t)$, όπου $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$

Αυτό ισχύει για διάδοση του κύματος προς τα δεξιά (θετικά). Για διάδοση προς τα αρνητικά, ο τύπος γίνεται

$$y(x, t) = y_m \sin \omega \left(\frac{x}{v} + t \right) = y_m \sin(kx + \omega t),$$



Με τον ίδιο τρόπο μπορώ να περιγράψω ένα κύμα που διαδίδεται κατά μήκος της χορδής με σχήμα του δεν είναι μία ημιτονοειδής συνάρτηση αλλά μία άλλη συνάρτηση ***h*** :

$$y(x, t) = h(kx \mp \omega t)$$

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

- Το πλάτος του κύματος y_m είναι το μέτρο της μέγιστης μετατόπισης των στοιχείων της χορδής από τη θέση ισορροπίας καθώς το κύμα διέρχεται από αυτά.
- Η φάση του κύματος είναι το όρισμα του ημιτόνου $\varphi = kx - \omega t$
Καθώς το κύμα σαρώνει το στοιχείο της χορδής της θέσης, η φάση μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο Πλήρης κύκλος: $\varphi=0 \rightarrow 2\pi$
- Μήκος κύματος: εξ ορισμού για μια χρονική στιγμή t_1 (στιγμιότυπο του κύματος)

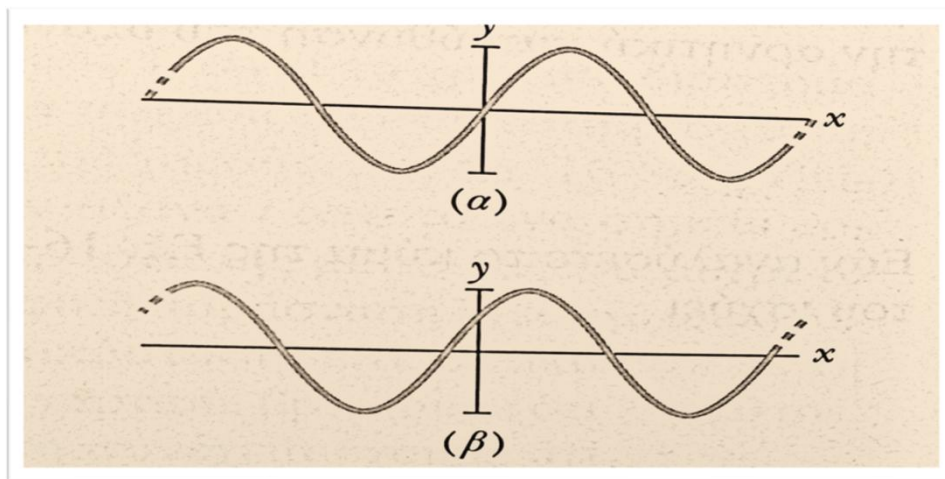
$$y_m \sin(kx - \omega t_1) = y_m \sin(k(x + \lambda) - \omega t_1) \Rightarrow$$

$$(kx - \omega t_1) = (k(x + \lambda) - \omega t_1) + 2\pi \Rightarrow k\lambda = 2\pi \text{ (όπως περιμέναμε)}$$
- Περίοδος ταλάντωσης ενός κύματος T , ο χρόνος που χρειάζεται το στοιχείο της χορδής για να εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση (εδώ κοιτάμε συγκεκριμένη θέση x)
Θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$y_m \sin(kx_1 - \omega t) = y_m \sin(kx_1 - \omega(t + T)) \Rightarrow (kx_1 - \omega t) = (kx_1 - \omega(t + T)) + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = 2\pi/T \text{ (όπως περιμέναμε) κυκλική συχνότητα}$$

$$f = 1/T \text{ συχνότητα}$$

Σταθερά φάσης



$$\varphi_0 = 0$$

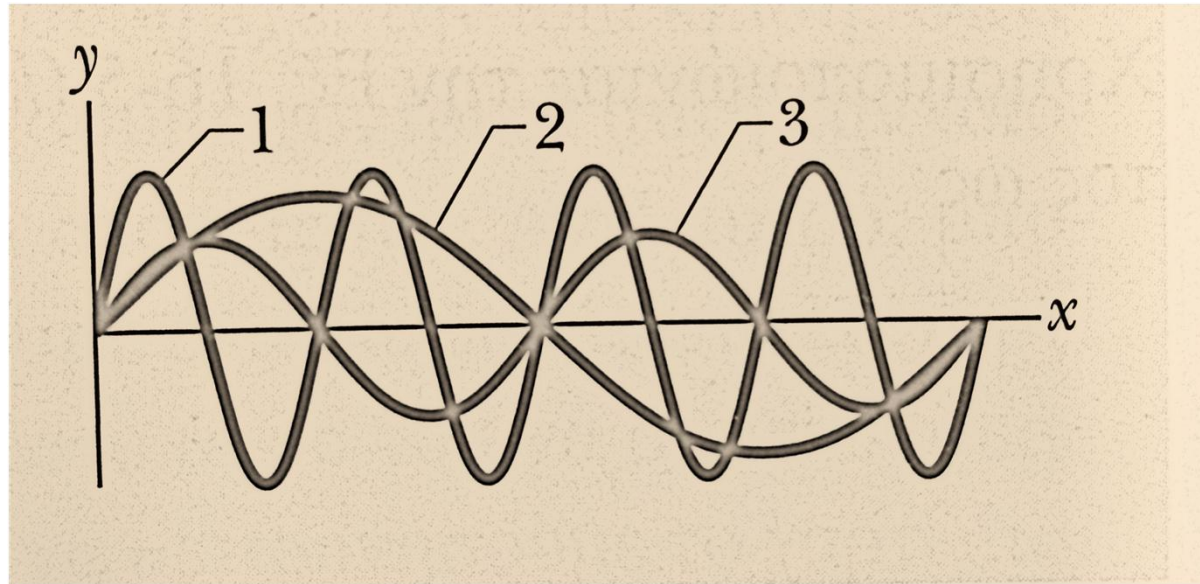
$$\varphi_0 = \pi/5$$

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$$

Θετική τιμή του φ_0 μετατοπίζει την καμπύλη προς τα αριστερά (προς τα αρνητικά του άξονα x)

Αρνητική τιμή του φ_0 μετατοπίζει την καμπύλη προς τα δεξιά (προς τα θετικά του άξονα x)»

Quiz 1



(a) $\phi = 2x - 4t$

(b) $\phi = 4x - 8t$

(c) $\phi = 8x - 16t$

1

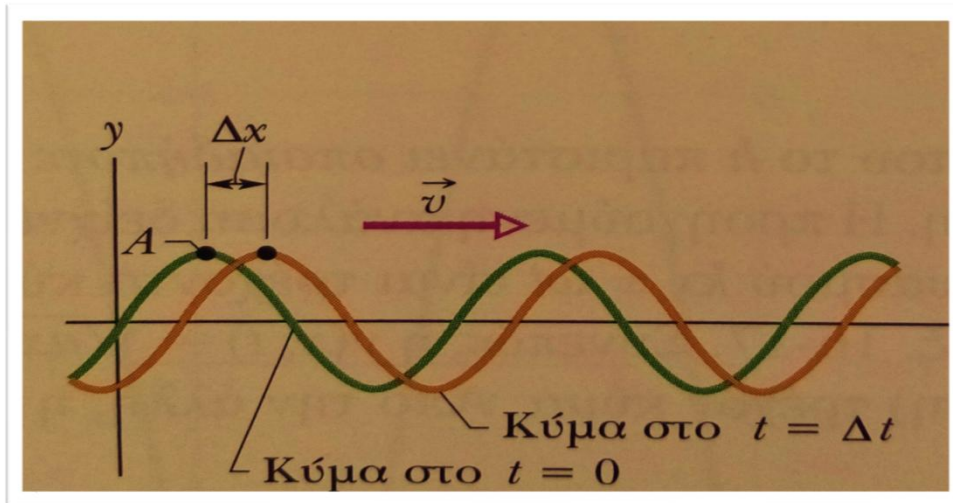
2

3

Ταχύτητα του τρέχοντος κύματος

Προσοχή: τα υλικά σημεία στη χορδή ΔΕΝ διατηρούν τη φάση τους σταθερή!!

- Είδαμε ήδη πως μπορούμε να βρούμε τη ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται η κυματομορφή κατά μήκος του άξονα, ποιοτικά.
- Πιο αυστηρά μπορούμε να την βρούμε ως εξής:



Καθώς το κύμα διαδίδεται, κάθε σημείο της διαδιδόμενης κυματομορφής (π.χ. το «νοητό» σημείο A που αντιστοιχεί σε μια κορυφή) διατηρεί τη μετατόπισή του y , άρα η αντίστοιχη φάση είναι σταθερή

$$kx - \omega t = \text{const} \Rightarrow k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T} \text{ όπως είχαμε βρει και προηγουμένως}$$

Ταχύτητα και επιτάχυνση στοιχείου σε ημιτονοειδές κύμα

Έστω εγκάρσιο ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται σε μία τεντωμένη χορδή:

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

Για συγκεκριμένο σημείο της χορδής x , η εγκάρσια ταχύτητα του στοιχείου της χορδής στο σημείο αυτό είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

και η εγκάρσια επιτάχυνση είναι

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 y$$

Quiz 2

Να κατατάξετε τα παρακάτω κύματα ως προς (α) τη ταχύτητα του κύματος, και (β) τη μέγιστη ταχύτητα κάθετα στη διεύθυνση του κύματος, με πρώτη τη μεγαλύτερη τιμή

1. $y(x, t) = 2\sin(4x - 2t)$

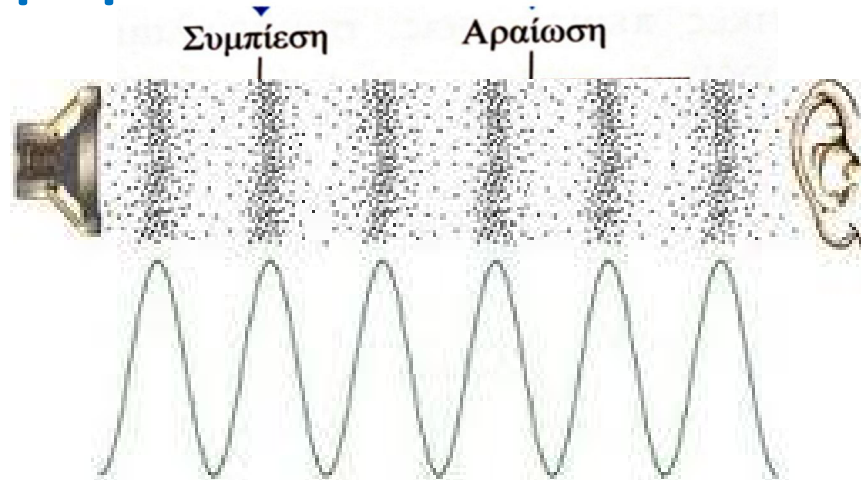
2. $y(x, t) = \sin(3x - 4t)$

3. $y(x, t) = 2\sin(3x - 3t)$

(α) $v = \omega/k$ (β) $\frac{dy(x,t)}{dt} = -y_m \omega \cos(kx - \omega t) \Rightarrow \left| \left(\frac{dy(x,t)}{dt} \right)_{max} \right| = y_m \omega$

(α) 2, 3, 1 (β) 3, 1=2

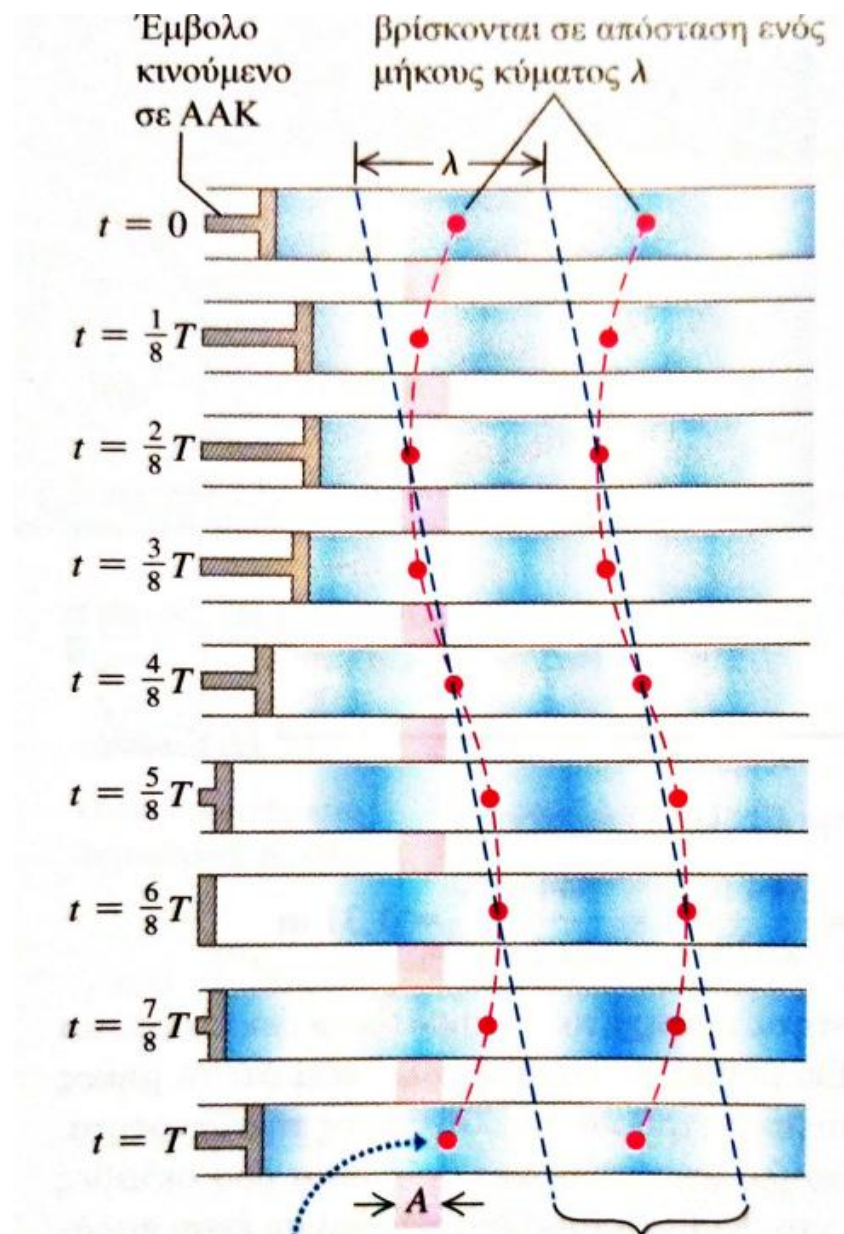
Διαμήκη κύματα



Πρίν από την εκπομπή από το ηχείο, η πίεση ήταν σε όλα τα σημεία σταθερή, ίση με την ατμοσφαιρική $P_{\text{ατμ}}$. Μετά την εκπομπή, έχουμε σημεία όπου η πίεση είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της $P_{\text{ατμ}}$. Το φυσικό μέγεθος $\Delta P(x, y, z, t) = P(x, y, z, t) - P_{\text{ατμ}}$ είναι ένα κατάλληλο μέγεθος για την περιγραφή της διαταραχής που έχει προκληθεί.

- Η διαταραχή (μεταβολή της πίεσης) είναι παράλληλη προς την διεύθυνση διάδοσης της διαταραχής
- Το μήκος κύματος είναι η απόσταση από το ένα πύκνωμα στο άλλο ή από το ένα αραιώμα στο άλλο
- Το «μοτίβο» των πυκνωμάτων και αραιωμάτων κινείται σταθερά προς τα δεξιά, όπως ακριβώς οι κορυφές και οι κοιλάδες στο εγκάρσιο κύμα

Διαμήκη κύματα



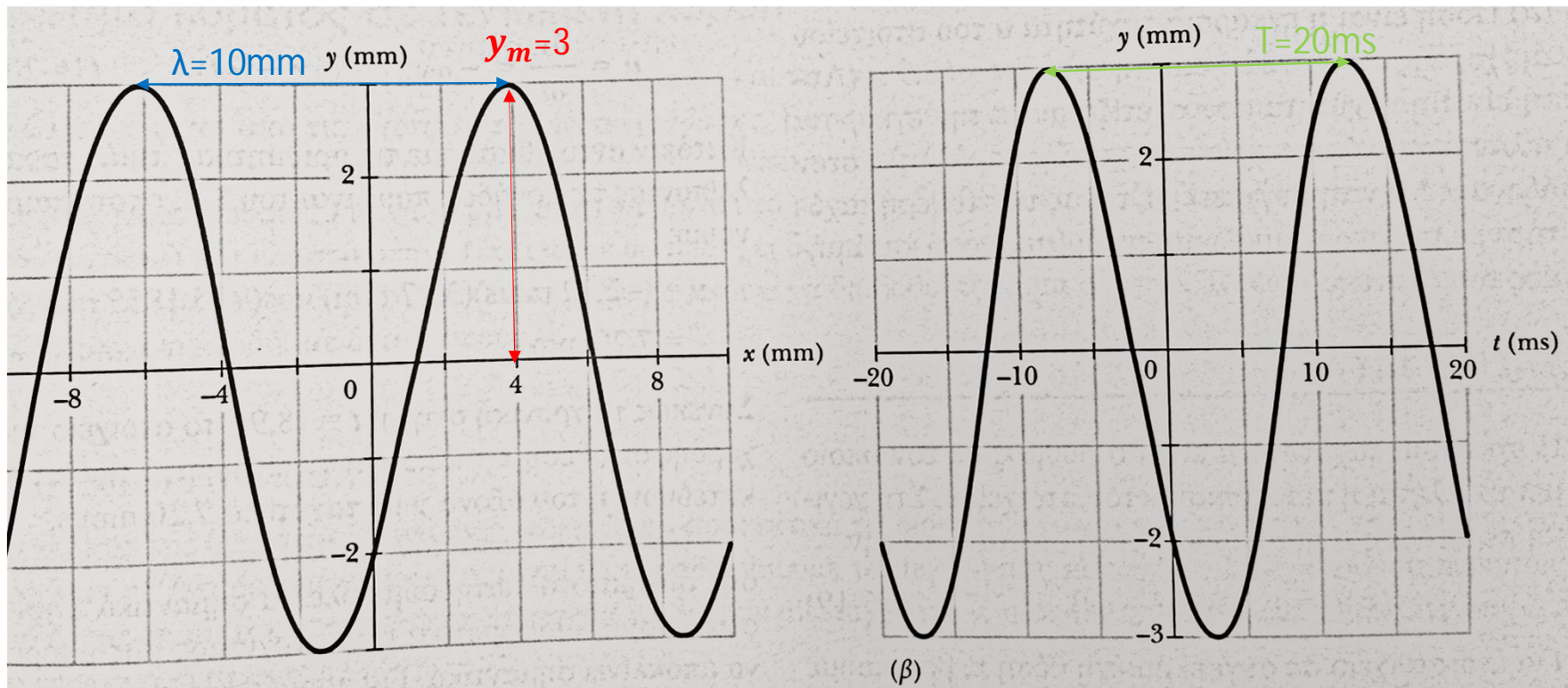
Πρόβλημα 1

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$$

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi/10\text{mm} = 200\pi\text{m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi/20\text{ms} = 100\pi\text{s}^{-1}$$

$$\varphi_0 = -0.73\text{rad}$$



Πρόβλημα 2

$$y(x, t) = 0.00327 \sin(72.1x - 2.72t)$$

α) εγκάρσια ταχύτητα στο $x=22.5\text{cm}$ και $t=18.9\text{s}$

β) εγκάρσια επιτάχυνση

γ) ταχύτητα διάδοσης κύματος

$$\alpha) \frac{\partial y}{\partial t} = 0.00327 \times (-2.72) \cos(72.1 \times 0.225 - 2.72 \times 18.9) = 7.2 \text{ mm/s}$$

$$\beta) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -0.00327 \times (-2.72)^2 \times \sin(72.1 \times 0.225 - 2.72 \times 18.9) = -14.2 \text{ mm/s}^2$$

$$\gamma) v = \omega/k = 2.72/72.1 = 0.038 \text{ cm/s}$$