ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μ**ηχανικά κύματα**

Μάθημα 8

Η έννοια της εμπέδησης

Ασκήσεις φυλ. 3 – 3**η** **άσκηση**

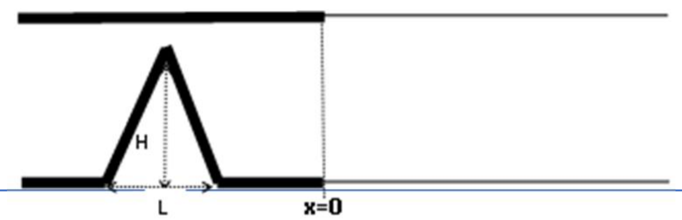
ανάκλαση-διάθλαση

Ασκήσεις φυλ. 4-

συμβολή-στάσιμα κύματα

Άσκηση 3 (από Φυλλάδιο ασκήσεων 3 Ανάκλαση-Διάθλαση)

Στο σχήμα απεικονίζεται χορδή (F, μ_1, x<0), (F, μ_2, x>0) με $\mu_1 = 9\mu_2$.
Στον αρνητικό ημιάξονα οδεύει προς τα δεξιά ο τριγωνικός παλμός (H, L).
A) Να βρεθούν τα πλάτη του ανακλώμενου και του διαδιδόμενου προς τα δεξιά παλμού.
B) Να σχεδιαστεί ποσοτικά ένα στιγμιότυπο της χορδής, αφού ο παλμός έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο x=0. Πόση ενέργεια μεταφέρει ο παλμός;



Για τον ανακλώμενο παλμό το $\lambda = \lambda_1$ οπότε το μήκος της βάσης του παμού παραμένει L.

Για τον διαθλώμενο παλμό το $\lambda = \lambda_2$

Λύση (σύντομη – βλ. και άσκηση 2)

$$\mu_1 = 9\mu_2 \quad \upsilon_1 = \sqrt{\frac{F}{\mu_1}}, \quad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{F}{\mu_2}} \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \upsilon_2 = 3\upsilon_1$$

Επίσης,

$$\upsilon_1 = \frac{\omega}{k_1} \Rightarrow k_1 = \frac{\omega}{\upsilon_1}, \text{ομοίως } k_2 = \frac{\omega}{\upsilon_2} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = 3 \Rightarrow k_1 = 3k_2 \Rightarrow \quad \lambda_2 = 3\lambda_1 \qquad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

Συντελεστής ανάκλασης $r = \frac{y_{ανακλ}}{y_{προσπ}} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{3k_2 - k_2}{3k_2 + k_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y_{ανακλ} = \frac{1}{2}\, y_{προσπ} = \frac{H}{2}$$

Δηλ. ο <u>ανακλώμενος παλμός</u> έχει το μισό ύψος → εγκάρσια συστολή

Συντελεστής διάθλασης (ή διάδοσης) $t = \frac{y_{διαθλ}}{y_{προσπ}} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2\times 3k_2}{3k_2 + k_2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow y_{διαθλ} = \frac{3}{2}H$

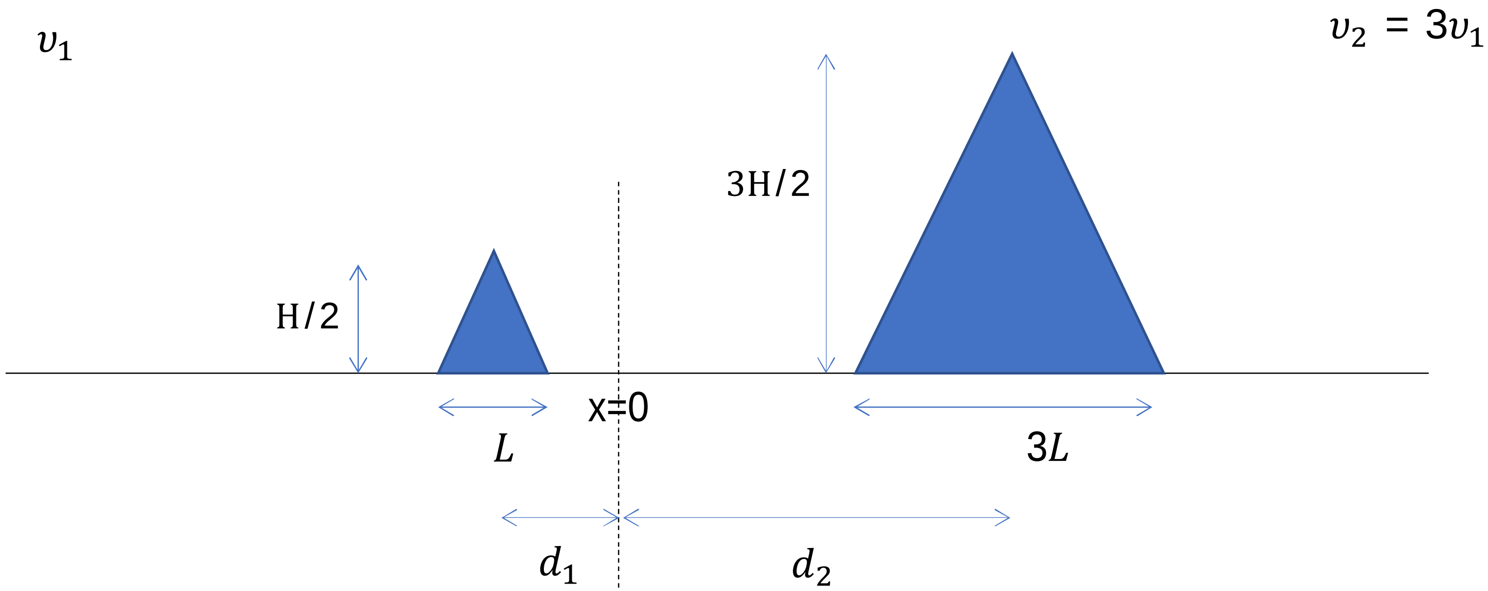
Δηλ. ο <u>διαθλώμενος παλμός</u> έχει το 1.5 φορά μεγαλύτερο ύψος → εγκάρσια διαστολή.

Διάγραμμα στιγμιότυπου τη χρονική στιγμή t:

Έστω ότι σε χρόνο t η κορυφή του ανακλώμενου παλμού βρίσκεται σε απόσταση d_1 προς τα αριστερά του σημείου $x = 0$. Μέσα στον ίδιο χρόνο, η κορυφή του διαθλώμενου παλμού θα βρίσκεται σε απόσταση d_2 προς τα δεξιά του σημείου $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= v_1 t \\ d_2 &= v_2 t \end{aligned}\right\} \quad d_2 = \frac{v_2}{v_1} d_1 = 3d_1$$

Επίσης, όπως έχουμε βρει ο ανακλώμενος παλμός έχει βάση L και ύψος $\mathrm{H}/2$ (και είναι ορθός, αντίθετα από το αποτέλεσμα της άσκησης 2), ενώ ο διαθλώμενος έχει βάση $3L$ και ύψος $3\mathrm{H}/2$.



Φυλλάδιο ασκήσεων 4

Ερωτήσεις κατανόησης - συμβολή

1. **Δύο κύματα με το ίδιο πλάτος και μήκος κύματος συμβάλλουν σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις**, **δημιουργώντας συνιστάμενα κύματα με τις ακόλουθες εξισώσεις**

(1) $y'(x,t) = 4\sin(5x - 4t)$ → (α)

(2) $y'(x,t) = 4\sin(5x)\cos(4t)$ → (γ)

(3) $y'(x,t) = 4\sin(5x + 4t)$ → (β)

Σε ποια περίπτωση τα δύο συμβάλλοντα κύματα διαδίδονται (α) προς τη θετική κατεύθυνση του x, (β) προς την αρνητική κατεύθυνση του x και (γ) προς αντίθετες κατευθύνσεις;

2. **Από την ακόλουθη σειρά συχνοτήτων συντονισμού**, **λείπει μία συχνότητα (μικρότερη από** 400 Hz): 150, 225, 300, 375Hz.

(α) Ποια είναι η συχνότητα που λείπει; (β) Ποια είναι η συχνότητα της 7^{ης} αρμονικής;

(α) 375-300=75, 300-225=75, 225-150=75, 150-75=75 → 75Hz

(β) 6^{η} αρμονική 375+75=450Hz

7^{η} **αρμονική** 450+75=525Hz

Άσκηση 1 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-34) Συμβολή κυμάτων

Ημιτονοειδές κύμα γωνιακής συχνότητας 1200rad/s και πλάτους 3.00mm στέλνεται κατά μήκος καλωδίου γραμμικής πυκνότητας 2.00g/m που βρίσκεται υπό τάση 1200N.

(α) Πόσος είναι ο μέσος ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από το κύμα στο αντίθετο άκρο του καλωδίου;

(β) Εάν ένα πανομοιότυπο κύμα διαδίδεται ταυτόχρονα κατά μήκος ενός διπλανού πανομοιότυπου καλωδίου πόσος είναι ο συνολικός μέσος ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από τα δύο κύματα στα αντίθετα άκρα των καλωδίων;

Εάν αντιθέτως αυτά τα δύο κύματα σταλούν ταυτόχρονα κατά μήκος του ίδιου καλωδίου, πόσος είναι ο μέσος ρυθμός με τον οποίο μεταφέρουν ενέργεια όταν η διαφορά φάσης τους είναι **(γ)** 0, **(δ)** 0.4π rad και **(ε)** π rad;

Λύση

$(a) y_m = 3.00mm = 3 \times 10^{-3}$m

$\omega = 1200\ rad/s = 1.2 \times 10^3 rad/s$

$\mu = 2\ g/m = 2 \times 10^{-3} kg/m$

$\upsilon = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{\frac{1200\mathrm{N}}{2\times10^{-3}kg/\mathrm{m}}} = 774.6m/s$

$$P_{avg} = \frac{1}{2}\mu\upsilon\omega^2 y_m^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \times \frac{10^{-3}kg}{\cancel{m}} \times \frac{774.6\cancel{m}}{s} \times 1.2^2 \times \cancel{10^6} s^{-2} \times 9 \times \cancel{10^{-6}}\ m^2 = 10.388 kgm^2 s^{-3} \cong 10W$$

(β) Ανεξάρτητα μεταξύ τους – άρα απλά αθροίζω τις ισχύες → 20W

(γ), (δ), (ε) $y_m' = 2y_m \cos\frac{1}{2}\phi \rightarrow P'_{avg} = \frac{1}{2}\mu\upsilon\omega^2 y_m'^2 = 4P_{avg}\ cos^2\frac{1}{2}\phi$

Άρα για $\varphi = 0 \rightarrow P'_{avg} = 4P_{avg}$=40W

για $\varphi = 0.4\pi \rightarrow P'_{avg} = 4P_{avg}\ \ cos^2 0.2\pi = 26.2W$

για $\varphi = \pi \rightarrow P'_{avg} = 0$

Άσκηση 2 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-39) – Διανύσματα φάσης

Δύο ημιτονοειδή κύματα της ίδιας περιόδου και με πλάτη 5.0 και 7.0mm διαδίδονται κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής και προς την ίδια κατεύθυνση. Δημιουργούν ένα συνιστάμενο κύμα πλάτους 9.00 mm. Η σταθερά φάσης του κύματος πλάτους 5.00mm είναι 0. Πόση είναι η σταθερά φάσης του κύματος πλάτους 7.00mm;

Λύση

$y_1(x,t) = A_1 e^{i(kx-\omega t)}$

$y_2(x,t) = A_2 e^{i(kx-\omega t+\varphi)}$

$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

και $y(x,t) = A e^{i(kx-\omega t+\theta)}$

$\Downarrow$

$A_1 e^{i(kx-\omega t)} + A_2 e^{i(kx-\omega t+\varphi)} = A e^{i(kx-\omega t+\theta)} \Rightarrow$

$A_1 + A_2 e^{i\varphi} = A e^{i\theta} \Rightarrow$

$A_1 + A_2 \cos\varphi + iA_2 \sin\varphi = A\cos\theta + iA\sin\theta$ $\Rightarrow$

$A_1 = 5mm$

$A_2 = 7mm$

$A_1 = 9mm$

$5 + 7\cos\varphi + i7\sin\varphi = 9\cos\theta + i9\sin\theta$

$$5 + 7\cos\varphi + i7\sin\varphi = 9\cos\theta + i9\sin\theta \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 5 + 7\cos\varphi &= 9\cos\theta \\ 7\sin\varphi &= 9\sin\theta \end{aligned}\right\}$$ υψώνουμε και τις δυο εξισώσεις στο τετράγωνο και παίρνουμε

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 25 + 49\cos^2\varphi + 70\cos\varphi &= 81\cos^2\theta \\ 49\sin^2\varphi &= 81\sin^2\theta \end{aligned}\right\}$$ προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε

$$25 + 49 + 70\cos\varphi = 81$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{7}{70} = 0{,}1 \Rightarrow \varphi = 84{,}3^o$$

Άσκηση 3 Στάσιμα κύματα

Δύο οδεύοντα κύματα που κινούνται σε χορδή είναι πανομοιότυπα εκτός του ότι έχουν αντίθετες ταχύτητες. Ικανοποιούν την εξίσωση $y(x,t) = Asin(kx - \omega t)$, όπου το θετικό ή το αρνητικό πρόσημο εξαρτάται από την κατεύθυνση που ταξιδεύει το κύμα.

α) Δείξτε ότι η παλλόμενη χορδή περιγράφεται από την εξίσωση $y(x,t) = 2Asin(kx)\cos(\omega t)$,

β) Για τις τιμές A=4 cm, k=3 rad/cm και ω=2 rad/s ποια η μέγιστη μετατόπιση της συνισταμένης κυματικής διαταραχής στο σημείο με συντεταγμένη x=2.3 cm;

γ) Ποιες οι θέσεις των δεσμών και των αντιδεσμών (κοιλιών) της συνισταμένης κυματικής διαταραχής;

Λύση

α) Έστω $y_1(x,t) = \mathrm{A}\sin(kx - \omega t)$ και $y_2(x,t) = \mathrm{A}\sin(kx + \omega t)$, οπότε

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \mathrm{A}\sin(kx - \omega t) + \mathrm{A}\sin(kx + \omega t) = [2\mathrm{A}\sin kx]\cos \omega \mathrm{t}$$

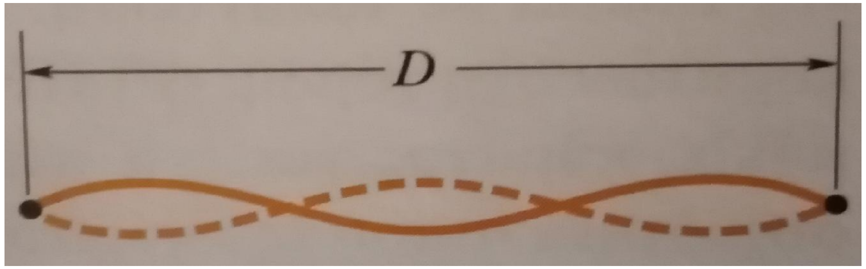
β) Για x=2.3 cm, $y'_{max} = 2\mathrm{A}\sin kx = 2 \times 4cm \times \sin\left(3\frac{rad}{cm} \times 2.3cm\right) = 4.63cm$

γ) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}cm = 2.09cm \rightarrow x = \frac{n\lambda}{2} = 1.05n,\ n = 0,1,2,...$ Δεσμοί

και $x = (n + 1/2)l/2 = 1.05(n + 1/2),\ n = 0,1,2,...$ Αντιδεσμοί (κοιλίες)

Άσκηση 4 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-49) – Στάσιμα κύματα και συντονισμός

Μία πλαστική χορδή κιθάρας έχει γραμμική πυκνότητα 7.2g/m και στη χορδή ασκείται τάση 150N. Τα σταθερά στηρίγματά της απέχουν μεταξύ τους κατά απόσταση D=90.0cm. Η χορδή ταλαντώνεται δημιουργώντας τον σχηματισμό στάσιμου κύματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε: (α) τη ταχύτητα, (β) το μήκος κύματος και (γ) τη συχνότητα των οδευόντων κυμάτων των οποίων η υπέρθεση δίνει αυτό το στάσιμο κύμα.



(α) $\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}} = \sqrt{\frac{150\mathrm{N}}{7.20\times10^{-3}\mathrm{kg/m}}} = 144.34\mathrm{m/s} \approx 1.44 \times 10^{2}\mathrm{m/s}$

(β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $\lambda + \frac{\lambda}{2} = \mathrm{L} \Rightarrow \lambda = \left(2/3\right)(90.0\mathrm{cm}) = 60.0\mathrm{cm} = 0.6\mathrm{m}$

(γ) $f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{1.44\times10^{2}\mathrm{m/s}}{0.600\mathrm{m}} = 241\mathrm{Hz}$

Άσκηση 5 Στάσιμα κύματα

(α) Χορδή υπό τάση F και μάζα ανά μονάδα μήκους μ είναι στερεωμένη στο $x = 0$ και στο $x = L$. Την χρονική στιγμή $t = 0$, η χορδή είναι σε ηρεμία και η μετατόπιση της y δίδεται από την κυματοσυνάρτηση:

$y(x, 0) = 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ (1)

Ποια είναι η συνολική ενέργεια στο $t = 0$;

(β) Η χορδή ελευθερώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ και αρχίζει να ταλαντώνεται. Ποια η απομάκρυνση $y(x, t)$ τη χρονική στιγμή t;

Λύση

(α) Η ενέργεια τη στιγμή t=0 είναι μόνο δυναμική (αφού η χορδή είναι ακίνητη) με γραμμική πυκνότητα

$\rho_{\mathrm{U}} = \frac{dU}{dx} \approx \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ (2)

Από (1) προκύπτει $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \left[\frac{4\pi}{L}\cos\left(\frac{2nx}{L}\right) + \frac{3\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]^2.$

Οπότε $E_{\text{total}} = U(t = 0) = \frac{1}{2} F \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\mathrm{F} \int_0^L \left[\frac{4\pi}{L}\cos\left(\frac{2nx}{L}\right) + \frac{3\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]^2 dx$

Ο όρος που είναι $\propto \cos\left(\frac{2nx}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ δεν συμμετέχει στο ολοκλήρωμα (διαπιστώστε το) οπότε τελικά

$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} F \frac{\pi^2}{L^2}\left[16 \int_0^L \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx + 9 \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx\right]$

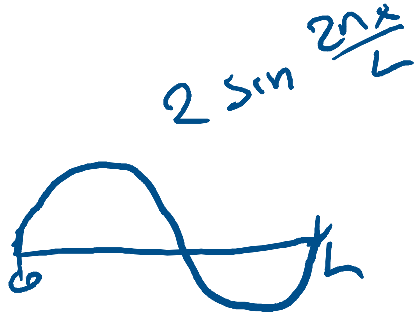
Άρα $\quad E_{\text{total}} == \frac{1}{2} F \frac{\pi^2}{L^2}\left(16\frac{L}{2} + 9\frac{L}{2}\right) = \frac{25}{4}\frac{F\pi^2}{L}$

Υπενθύμιση

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \cos(2x) d(2x) + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + c$$

β) $y(x,0) = 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \rightarrow k_1 = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_1} \Rightarrow \lambda_1 = \mathrm{L}$



$\omega_1 = \upsilon k_1 = \frac{2\pi\upsilon}{L}$

$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \rightarrow k_2 = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_2 = 2\mathrm{L}$

και $\omega_2 = \upsilon k_2 = \frac{\pi\upsilon}{L}$

Άρα

$y(x,t) = 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi\upsilon t}{L}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi\upsilon t}{L}\right)$

όπου $\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}}$

Άσκηση 6 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-84) – Στάσιμα κύματα και συντονισμός

Η ταλάντωση ενός διαπασών των 600Hz δημιουργεί στάσιμα κύματα σε μια χορδή στερεωμένη στα δύο άκρα της. Η κυματική ταχύτητα σε αυτή τη χορδή είναι 400m/s. Το στάσιμο κύμα έχει 4 βρόχους και πλάτος 2mm. (α) Πόσο είναι το μήκος της χορδής; (β) Γράψτε μία εξίσωση για την εγκάρσια μετατόπιση της χορδής ως συνάρτηση της θέσης και του χρόνου.

Λύση

(α) $n = 4, L = 4\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 2\lambda$

$\lambda = v/f \Rightarrow \lambda = \frac{400\frac{m}{s}}{6001/s} = \frac{2}{3}m$

$$\boxed{L = \left(\frac{4}{3}\right)m}$$

(b) $y = y_m \sin(kx)\cos(\omega t)$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\frac{3}{2}m^{-1} = 3\pi m^{-1} \cong 9{,}42 rad\ m^{-1}$

$\omega = 2\pi f = 2\pi(600\text{Hz}) = 3800\text{rad/s}$

$y(x,t) = (2.0\text{mm})\sin[(9.4\text{m}^{-1})x]\cos[(3800\text{s}^{-1})t]$