Γεωμετρική Οπτική
Δημιουργία ειδώλων από ανάκλαση και από διάθλαση

Απεικόνιση από οπτικό σύστημα

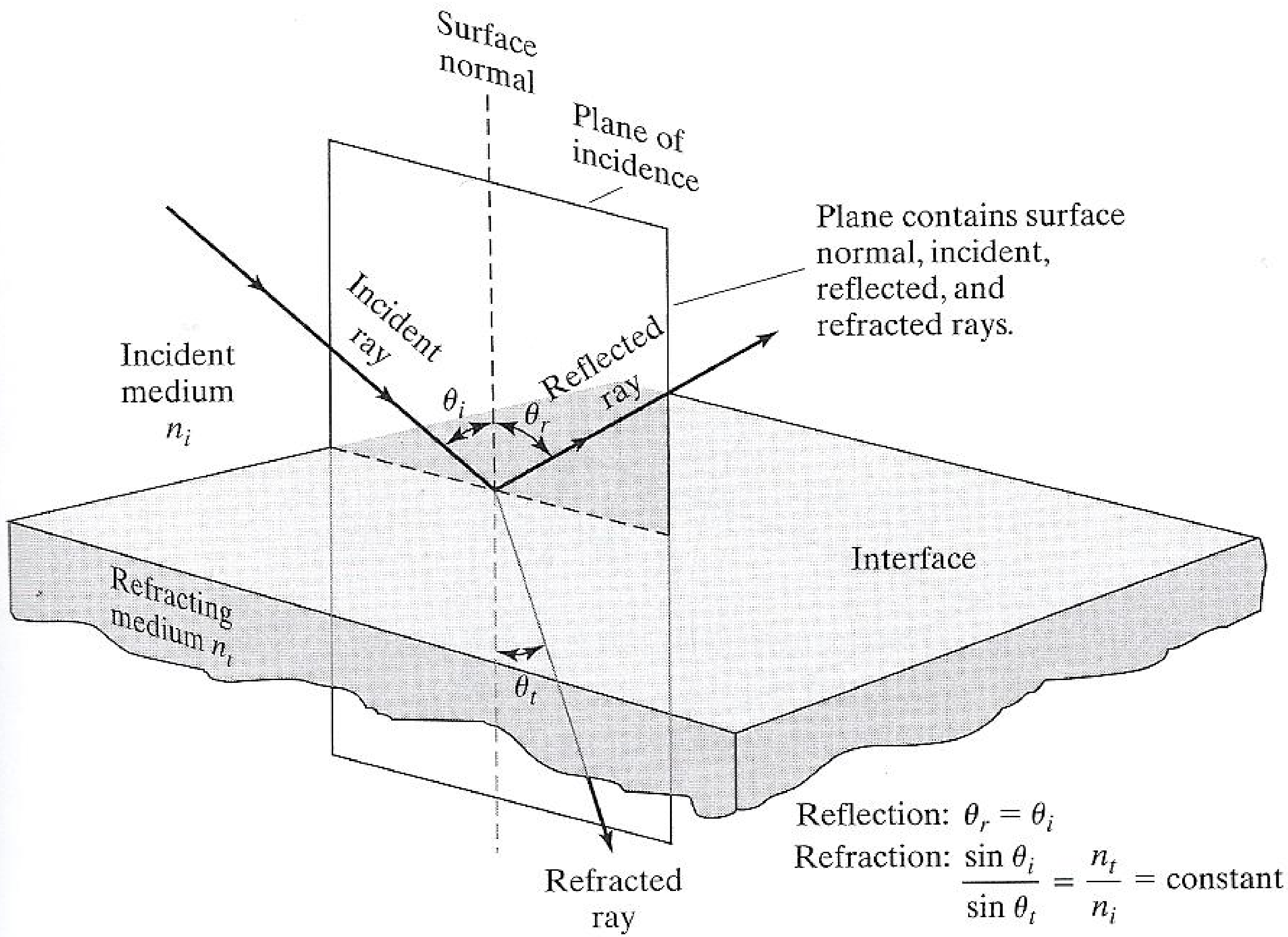
Γεωμετρική Οπτική

Όταν οι διαστάσεις των διαφόρων οπτικών στοιχείων είναι πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος του φωτός μπορούμε να αγνοήσουμε την κυματική φύση του φωτός.

Αυτή η προσέγγιση αποτελεί την ***Γεωμετρική Οπτική***

1. Το φως θεωρείται ότι διαδίδεται με ευθείες γραμμές, τις *ακτίνες*.
2. Όταν μια φωτεινή ακτίνα διέρχεται μέσα από ένα οπτικό σύστημα αποτελούμενο από διαδοχικά ομοιογενή μέσα, τότε ο οπτικός δρόμος είναι μια ακολουθία από ευθύγραμμα τμήματα.
3. Οι νόμοι της γεωμετρικής οπτικής που περιγράφουν την αλλαγή διεύθυνσης των ακτίνων, είναι οι γνωστοί νόμοι της ανάκλασης και της διάθλασης

Ανάκλαση και διάθλαση στην διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δυο οπτικών μέσων

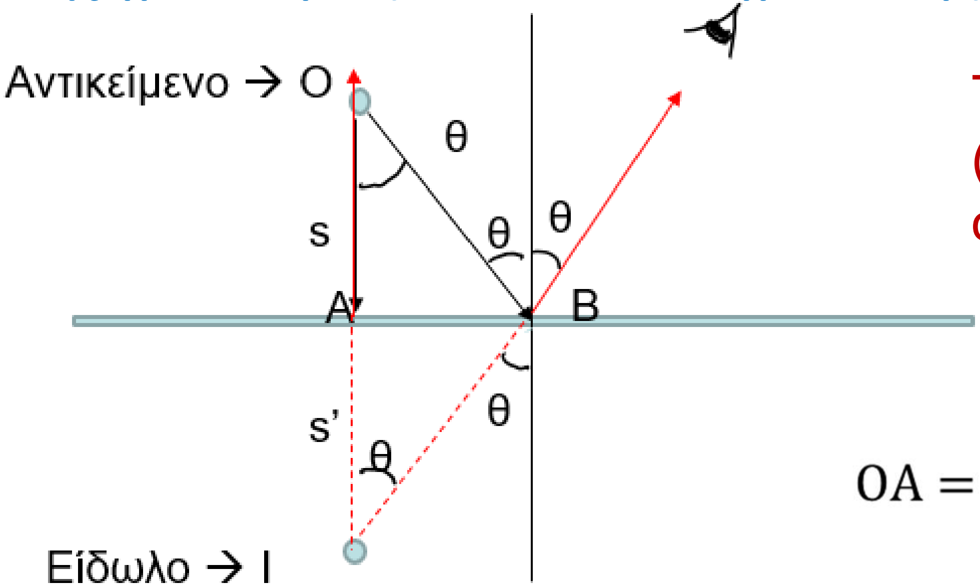


Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Αρχή της αντιστρεψιμότητας

Όταν αντιστραφεί η πορεία μιας οπτικής ακτίνας, αυτή θα ακολουθήσει ακριβώς την ίδια διαδρομή, αλλά αντίστροφα (διότι το αποτέλεσμα της εφαρμογής της αρχής του Fermat δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα σημεία A και B).

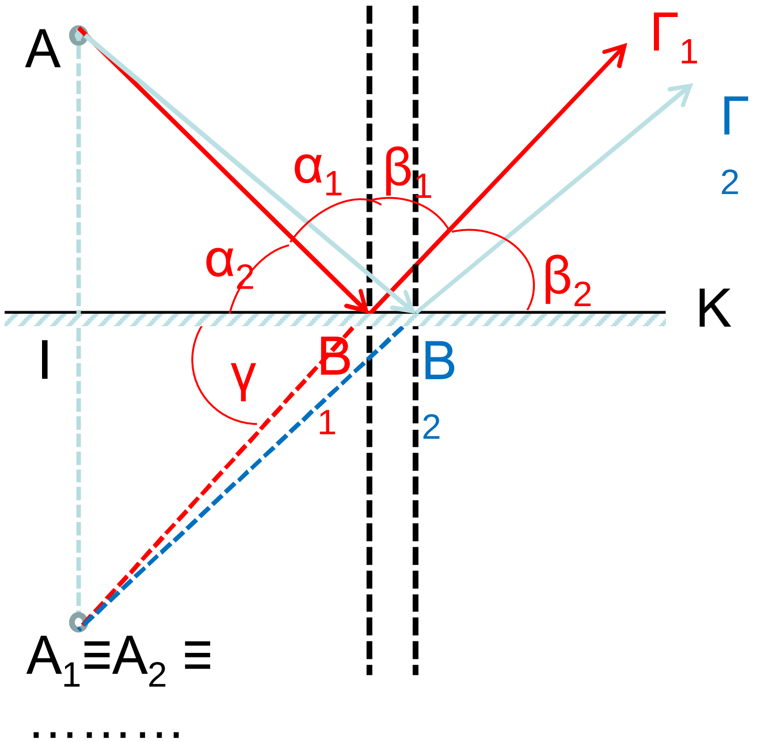
Σχηματισμός ειδώλου σημειακής πηγής από επίπεδο κάτοπτρο



Το μάτι βλέπει το φανταστικό είδωλο (Δεν μπορεί να προβληθεί π.χ. σε μία οθόνη)

$OA = s = s' = OI$ από ισότητα τριγώνων

Το αντικείμενο βρίσκεται σε κάθετη απόσταση s από το κάτοπτρο.
Θεωρώ δύο ακτίνες από το Ο.
Η πρώτη ακτίνα πέφτει κάθετα στο κάτοπτρο (στο σημείο Α), οπότε ανακλάται στην ίδια κάθετη διεύθυνση, απομακρυνόμενη από το κάτοπτρο (συμβ. με κόκκινο). (γωνία πρόσπτωσης=γωνία ανάκλασης =0)
Η δεύτερη ακτίνα σχηματίζει γωνία θ με την κάθετο από το Ο προς τη επιφάνεια. Προσπίπτει στην επιφάνεια στο σημείο Β, και ανακλάται υπό γωνία θ ίση με την γωνία πρόσπτωσης (η ανακλώμενη συμβ. με κόκκινο). Το **είδωλο, Ι,** βρίσκεται στο σημείο όπου συναντώνται οι δυο ανακλώμενες ακτίνες,
εδώ, οι προεκτάσεις τους. Το είδωλο είναι **φανταστικό** (βρίσκεται πίσω από το κάτοπτρο), σε κάθετη απόσταση s'. Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει $s = s'$
Οποιαδήποτε άλλη ακτίνα από το Ο θα καταλήξει στο Ι μετά από ανάκλαση. Βλ. επόμενη διαφάνεια.



Ακτίνα $AB_1\Gamma_1$

$\alpha_1=\beta_1 \longrightarrow \alpha_2=\beta_2$

Αλλά $\beta_2=\gamma$

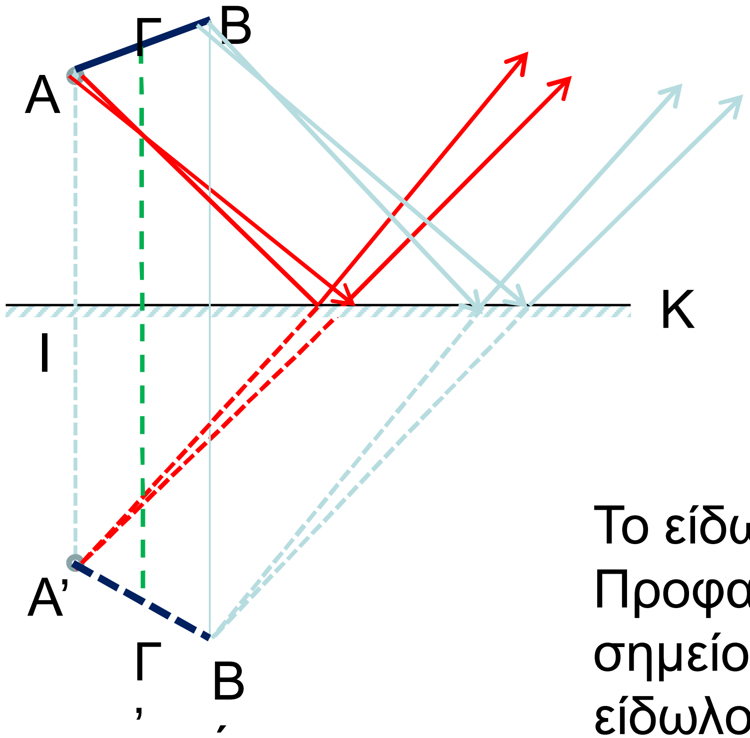
οπότε $AI=IA_1$

Ακτίνα $AB_2\Gamma_2$

ομοίως

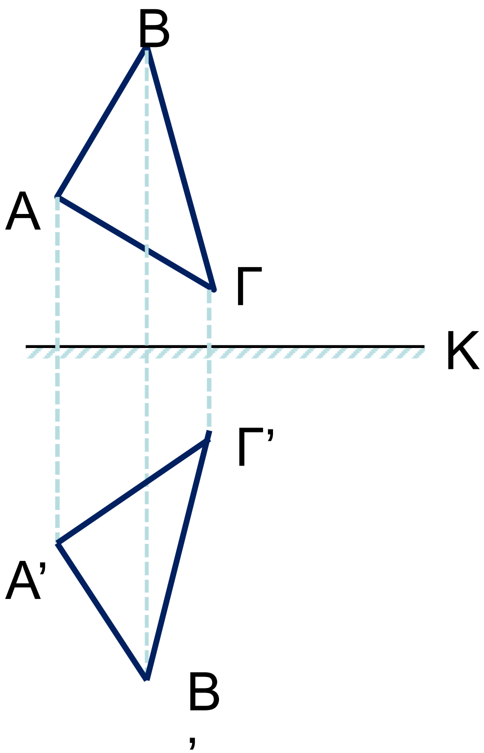
οπότε $AI=IA_2$, ο.κ.ε.

Σχηματισμός ειδώλου γραμμικού αντικειμένου



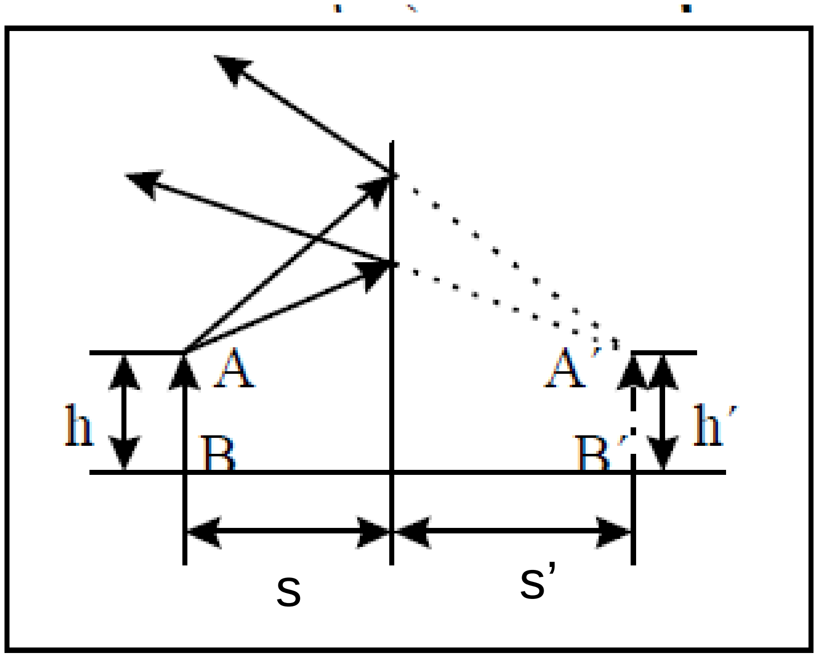
Το είδωλο των ΑΒ είναι το Α’Β’.
Προφανώς και κάθε ενδιάμεσο σημείο της ΑΒ δίνει αντίστοιχο είδωλο στο Α’Β’

Σχηματισμός ειδώλου εκτεταμένου αντικειμένου



Οποιοδήποτε σχήμα μέσω επιπέδου κατόπτρου απεικονίζεται:
1ον σε συμμετρική θέση
2ον πίσω από το κάτοπτρο (φανταστικό)
3ον διατηρώντας τις διαστάσεις του

Γενικές ιδιότητες ειδώλου γραμμικού αντικειμένου μέσω επιπέδου κατόπτρου.



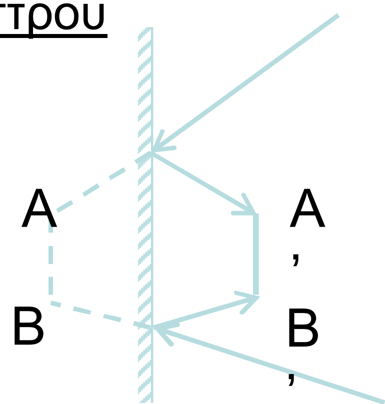
1ον E (είδωλο) φανταστικό
2ον E ορθό
3ον E ίσο με το Αντικείμενο.

Μεγέθυνση $m = \frac{h'}{h} = 1$

Για να υποδείξουμε αν το είδωλο είναι ορθό ή αντεστραμμένο, χρησιμοποιούμε αντίστοιχα θετικό ή αρνητικό πρόσημο για το m. Εδώ, $m = +1$)

Εφαρμογές / Ασκήσεις

1ον φανταστικό Αντικειμένο πραγματικό Είδωλο μέσω επιπέδου κατόπτρου



Δέσμη συγκλίνουσα πίσω από επίπεδο κάτοπτρο (φανταστικό Α) σχηματίζει πραγματικό είδωλο έμπροσθεν του κατόπτρου.

2ον Σχέση αριστεράς προς δεξιά παλάμη

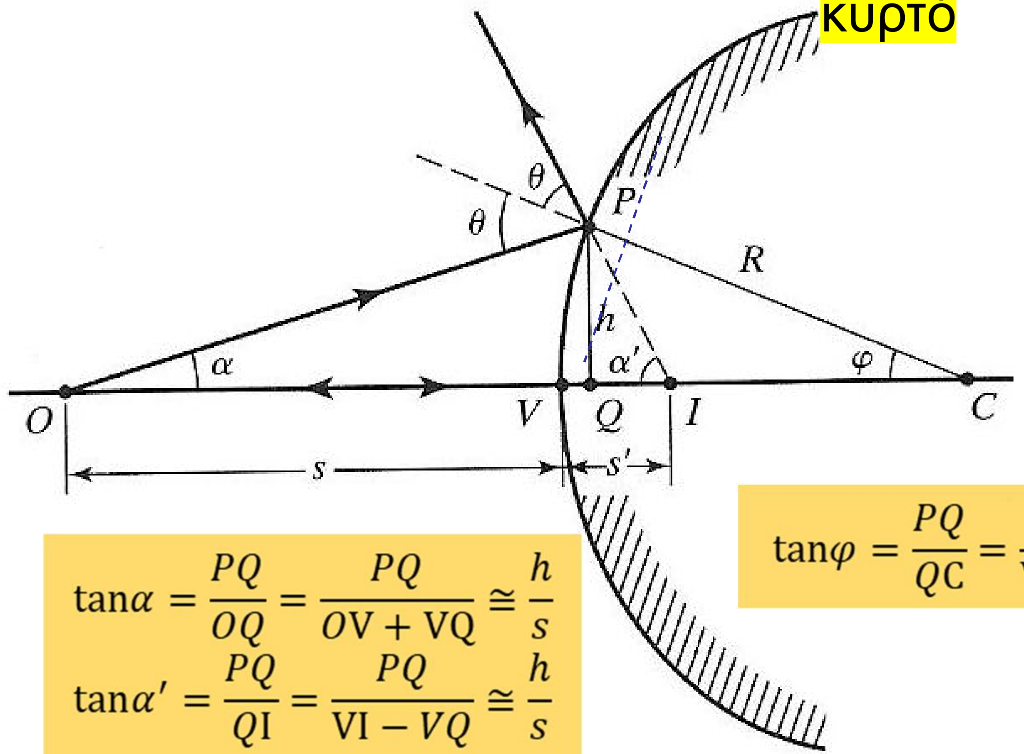
Το επίπεδο κάτοπτρο αντιστρέφει το αριστερά-δεξιά αλλά όχι και το πάνω κάτω.

Ανάκλαση από σφαιρική επιφάνεια

Τα σφαιρικά κάτοπτρα μπορεί να είναι είτε κοίλα είτε κυρτά ως προς το αντικείμενο *O*, ανάλογα με το αν το κέντρο καμπυλότητας, *C*, είναι στην ίδια πλευρά με το αντικείμενο ή όχι.

Αντικείμενο → O

Είδωλο → I



Για ακτίνες με μικρή γωνία με τον οπτικό άξονα (παραξονικές ακτίνες)

$\cos\varphi \sim 1$

$\sin\varphi \sim \tan\varphi \sim \varphi$

$VQ \sim 0$

$$\tan\alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{PQ}{\mathrm{OV} + \mathrm{VQ}} \cong \frac{h}{s}$$

$$\tan\alpha' = \frac{PQ}{QI} = \frac{PQ}{\mathrm{VI} - VQ} \cong \frac{h}{s}$$

$$\tan\varphi = \frac{PQ}{QC} = \frac{PQ}{\mathrm{VC} - VQ} \cong \frac{h}{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta=\alpha+\varphi \text{ (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου } OPC\text{).} \\ 2\theta=\alpha+\alpha' \text{ (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου } OPI\text{).} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha-\alpha'=-2\varphi.$ Αντικαθιστώντας τις γωνίες με τις εφαπτομένες τους. $\Rightarrow$

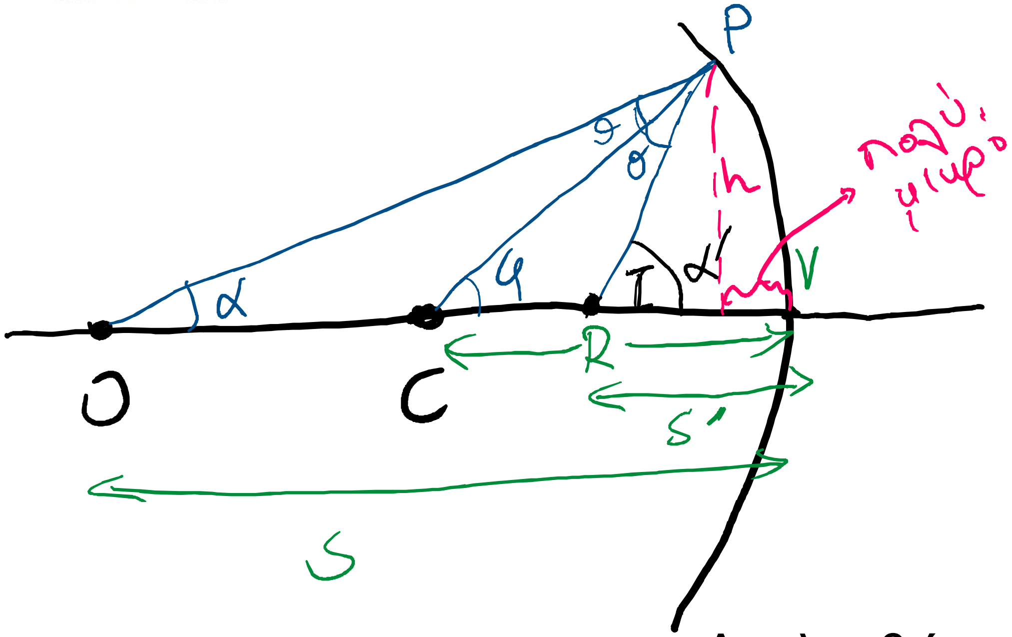
$$\Rightarrow \frac{h}{s}-\frac{h}{s'}=-2\frac{h}{R} \Rightarrow \frac{1}{s}-\frac{1}{s'}=-\frac{2}{R}$$

Η αντίστοιχη απόδειξη για κοίλο κάτοπτρο

Αντικείμενο → O

Είδωλο → I

$s = OV$
$s' = IV$
$R = CP = CV$



$$\left.\begin{aligned} a' &= 2\theta + a \\ \varphi &= \alpha + \theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha' = (2\varphi - 2\alpha) + \alpha = 2\varphi - \alpha$$

$$\Rightarrow 2\varphi = \alpha + \alpha'$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν, βρίσκουμε ότι για παραξονικές ακτίνες ισχύει:

$$\frac{2h}{R} \cong \frac{h}{s} + \frac{h}{s\prime} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{2}{R} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s\prime}}$$

Είδαμε ότι

για κυρτό κάτοπτρο ισχύει ο τύπος

$$\frac{1}{s}-\frac{1}{s'}=-\frac{2}{R}$$

Και
για κοίλο κάτοπτρο ο τύπος

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{R}$$

όπου τα s, s' και R είναι, εδώ, αποστάσεις (θετικές ποσότητες)

Μπορούμε να ενοποιήσουμε τους τύπους σε έναν, αποδίδοντας κατάλληλα πρόσημα στις ποσότητες αυτές.

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{R}$$

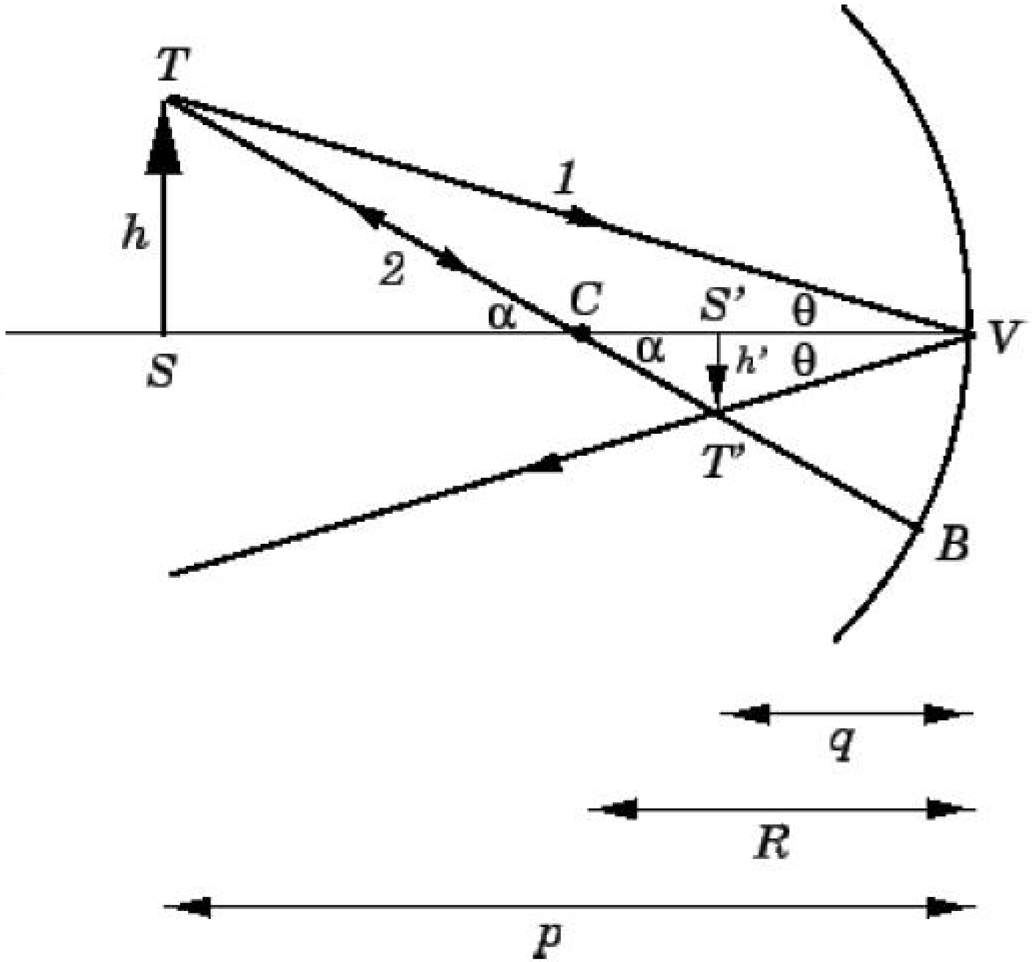
<u>*2ος τρόπος: ΤΥΠΟΣ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΚΑΤΟΠΤΡΩΝ*</u>

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}$$

$$\tan\alpha = \frac{h}{p-R} = -\frac{h'}{R-q}$$

$$\frac{-h'}{h} = \frac{R-q}{p-R} = \frac{q}{p}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$



Οι συνθήκες προσήμων για είδωλα από ανάκλαση από σφαιρικά κάτοπτρα

- Πραγματικά είδωλα εμφανίζονται από τη πλευρά του κατόπτρου που είναι το αντικείμενο. Σε αυτή τη περίπτωση το s' είναι θετικό. Αν το είδωλο είναι από την άλλη πλευρά του κατόπτρου, είναι φανταστικό και το s' είναι αρνητικό.

- Η ακτίνα καμπυλότητας R είναι θετική για κοίλο κάτοπτρο, και αρνητική για κυρτό κάτοπτρο.

$$\boxed{\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=+\frac{2}{R}}$$

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε $R \to \infty$ (επίπεδο κάτοπτρο), βρίσκουμε $s = -s'$, όπου το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το είδωλο είναι φανταστικό.

Εστία σφαιρικού κατόπτρου

Αν το αντικείμενο είναι στο άπειρο, τότε οι ακτίνες που προσπίπτουν στο κάτοπτρο είναι παράλληλες μεταξύ τους. Θεωρούμε ακτίνες κοντά στον οπτικό άξονα και παράλληλες προς αυτός.

Τότε από τη σχέση

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

προκύπτει ότι $\frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$.

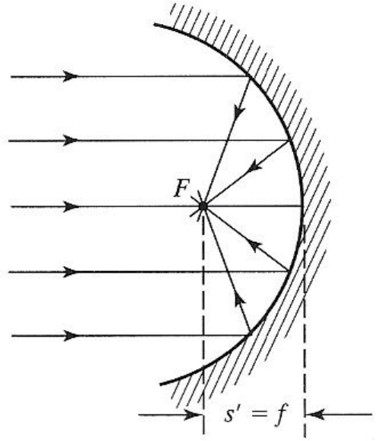
Η θέση του ειδώλου, που σχηματίζεται από την παραξονική παράλληλη δέσμη που θεωρήσαμε, ονομάζεται **εστία του κατόπτρου** και η απόσταση s′ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** του κατόπτρου, $\boldsymbol{f}$.

Οπότε για σφαιρικά κάτοπτρα, η εστιακή απόσταση είναι

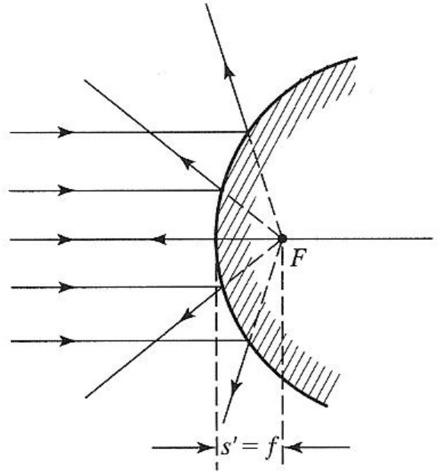
$$\boldsymbol{f = R/2}$$

και είναι θετική για κοίλα (R>0) και αρνητική για κυρτά κάτοπτρα (R<0).

Κοίλο (concave)



Κυρτό (convex)

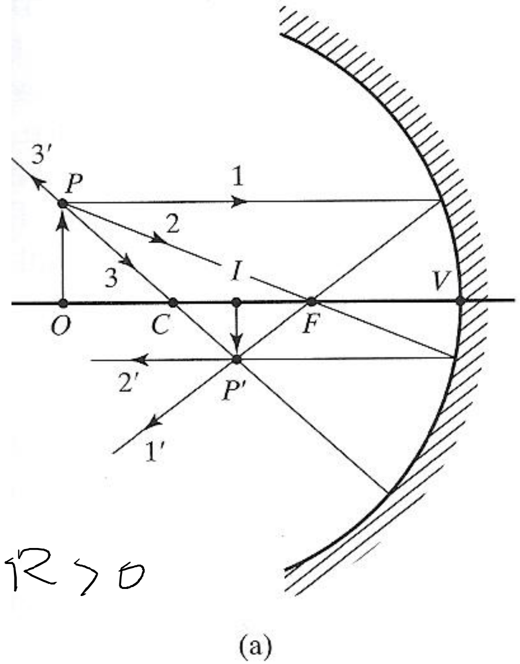


(b)

Σχηματισμός ειδώλου από σφαιρικά κάτοπτρα

1. Υποθέτουμε ότι το αντικείμενο είναι μικρό και πάνω (ή πολύ κοντά) στον οπτικό άξονα, ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ακτίνες είναι παραξονικές.
2. Θα θεωρήσουμε στα επόμενα παραδείγματα ένα μικρό ευθύγραμμο αντικείμενο ΑΒ τοποθετημένο κάθετα στον οπτικό άξονα (το σημείο Α πάνω στον άξονα).
3. Θα θεωρήσουμε δύο ακτίνες που ξεκινούν από το άκρο Β και ανακλώνται από το κάτοπτρο, και θα αναζητήσουμε το σημείο όπου οι ανακλώμενες ακτίνες (ή οι προεκτάσεις τους) τέμνονται. Το σημείο αυτό είναι το είδωλο του Β, έστω Β'. Για να βρω το είδωλο του αντικειμένου αρκεί να φέρω κάθετο από το Β' προς τον άξονα. Το αντίστοιχο σημείο Α' είναι το είδωλο του Α, όπως μπορείτε πολύ εύκολα να διαπιστώσετε.
   - Η πρώτη ακτίνα είναι παράλληλη προς τον οπτικό άξονα, οπότε μετά από την ανάκλαση, περνά από την εστία του κατόπτρου.
   - Η δεύτερη ακτίνα, περνά από το κέντρο καμπυλότητας του κατόπτρου και δεν αλλάζει κατεύθυνση μετά από την ανάκλαση (λόγω κάθετης πρόσπτωσης)
   - Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να θεωρήσουμε μία ακτίνα που περνά από την εστία, οπότε μετά από την ανάκλαση «φεύγει» παράλληλα προς τον οπτικό άξονα.

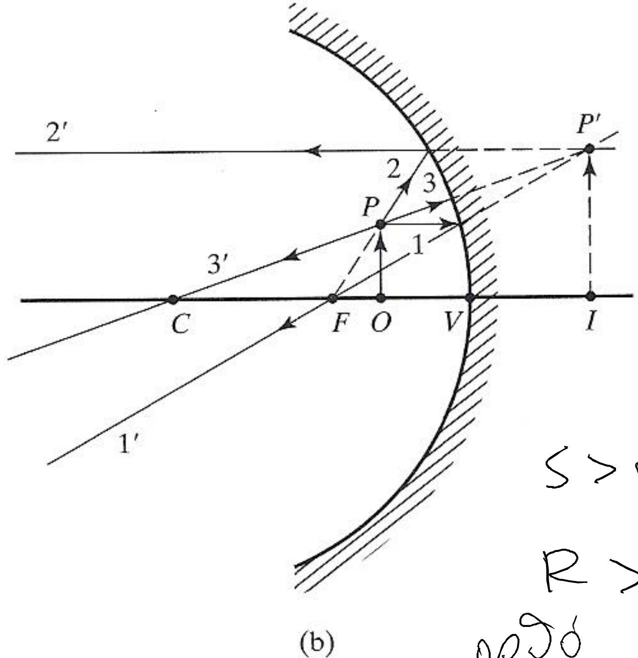
Σχηματισμός ειδώλου από σφαιρικά κάτοπτρα



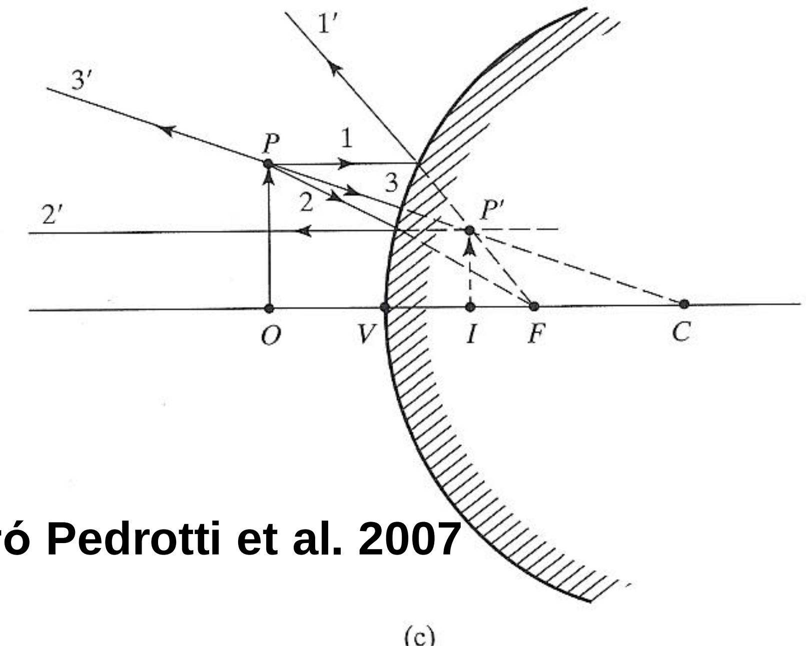
$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{R}$$

$s>0,\ s'>0,\ R>0$

αντεστραμ.
πραγμ. ειδωλ



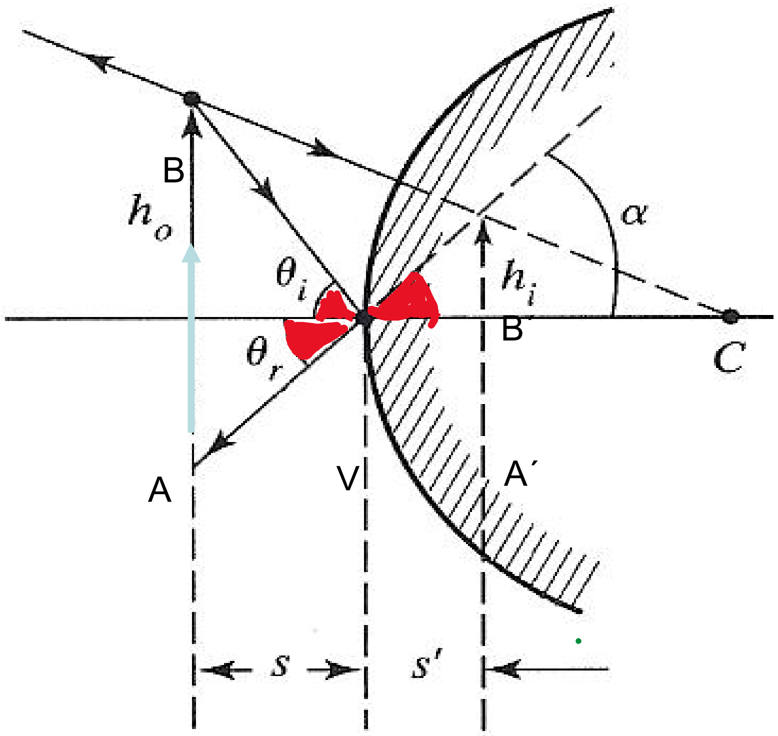
$s>0,\ s'<0$
$R>0$
ορθό φανταστικό
είδωλο



$s>0,\ s'<0$
$R<0$
ορθό φανταστικό
είδωλο

Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Εύρεση μεγέθυνσης ειδώλου



Το αντικείμενο ΑΒ ύψους h_o βρίσκεται σε απόσταση AV=s από τη κορυφή του κατόπτρου.

1η ακτίνα: από το πάνω άκρο του αντικειμένου, Β, στο κέντρο καμπυλότητας C. Η διεύθυνση της ακτίνας δεν αλλάζει λόγω καθετότητας στην επιφάνεια της σφαίρας.

2η ακτίνα: από το πάνω άκρο του αντικειμένου, Β, στη κορυφή του κατόπτρου, V. Οι προεκτάσεις των δύο ανακλώμενων ακτίνων τέμνονται στη κορυφή του ειδώλου, Β΄. Το είδωλο είναι το Α΄Β΄ με ύψος h_i.

Η απόσταση Α΄V=s΄ βρίσκεται από τον τύπο

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{R}$$

Τα τρίγωνα ABV και A΄B΄V είναι όμοια, άρα

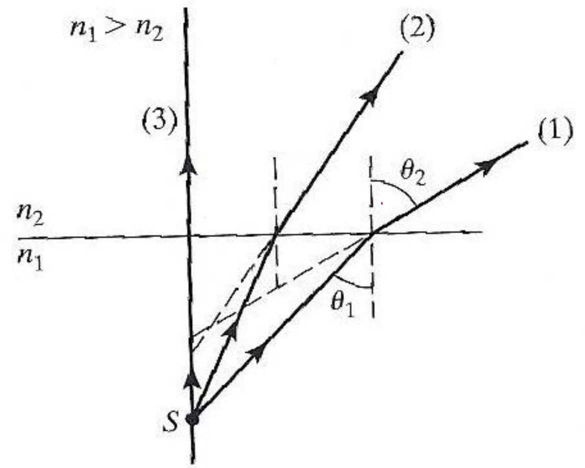
$$\frac{s}{s\prime}=\frac{h_o}{h_i}$$

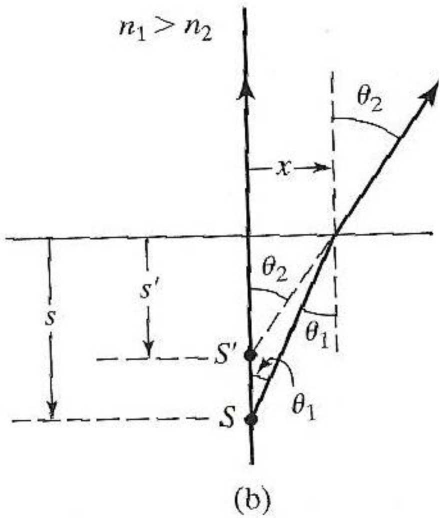
Με δεδομένες τις παραδοχές για τα πρόσημα, γράφουμε $\boldsymbol{m=-\frac{s'}{s}}$

s'<0, άρα m>0 → ορθό είδωλο

Σχηματισμός ειδώλου από διάθλαση από επίπεδη επιφάνεια

Οι (1), (2) και (3) δεν τέμνονται, σε κοινό σημείο
οπότε δεν δημιουργείται ευκρινές είδωλο.
(μόνο για παραξονικές ακτίνες έχουμε ευκρινές είδωλο)





$\sin\theta \sim \tan\theta \sim \theta$

$n_1 \tan\theta_1 \sim n_2 \tan\theta_2$

$n_1(x/s) = n_2(x/s')$

$s' = (n_2/n_1)s$

Διάθλαση από σφαιρική επιφάνεια

$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

Στο τρίγωνο *CPO*, η εξωτερική γωνία $\alpha = \theta_1 + \varphi$.

Στο τρίγωνο *CPI*, η εξωτερική γωνί $\alpha' = \theta_2 + \varphi$.

Για *παραξονικές ακτίνες*

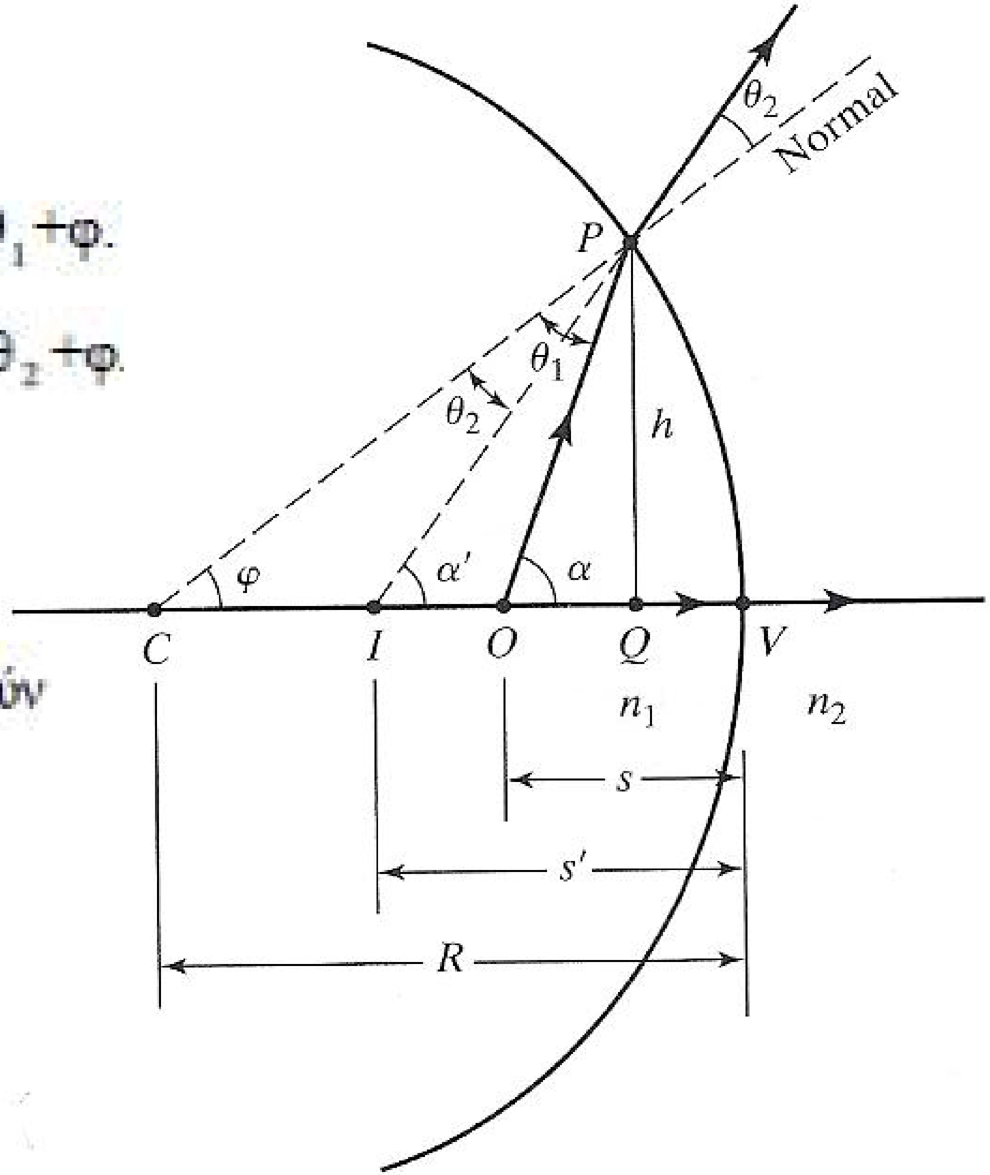
$$n_1(\alpha - \varphi) = n_2(\alpha' - \varphi)$$

οι γωνίες *α*, *α΄* και *φ* μπορούν να αντικατασταθούν

από τις εφαπτομένες τους

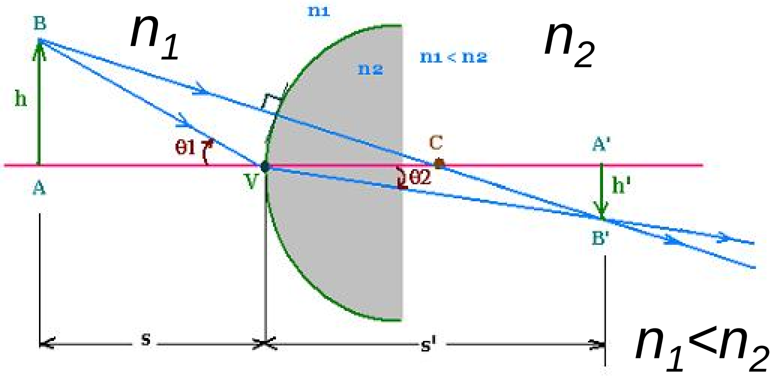
$$n_1\left(\frac{h}{s} - \frac{h}{R}\right) = n_2\left(\frac{h}{s'} - \frac{h}{R}\right)$$

$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$



Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

2ος τρόπος: Διάθλαση από σφαιρική επιφάνεια



$$n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2$$

ΠΑΡΑΞΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ $\theta_1, \theta_2 << 1$

$$\boxed{n_1\theta_1 = n_2\theta_2}$$

$$m = \frac{h'}{h} = \frac{-s'\tan\theta_2}{s\tan\theta_1} = -\frac{s'n_1}{sn_2}$$

$$ABC, A'B'C \rightarrow \frac{|\,h\,|}{(R+s)} = \frac{|\,h'\,|}{(s'-R)}$$

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}$$

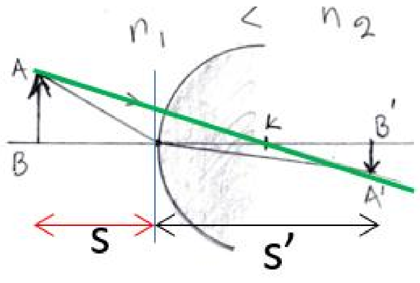
Κοινός τύπος για κοίλες και κυρτές επιφάνειες – συνθήκες προσήμων

- Κοινός τύπος για διάθλαση από κοίλες ή κυρτές σφαιρικές επιφάνειες, για παραξονικές ακτίνες

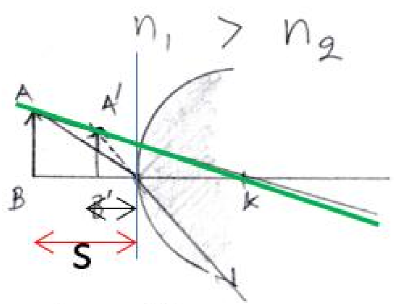
$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

- Προσοχή, πραγματικά ($s' > 0$) είναι τα είδωλα που σχηματίζονται στην αντίθετη πλευρά της διαθλαστικής επιφάνειας από αυτή που βρίσκεται το αντικείμενο

- Προσοχή! Για να ισχύει ο παραπάνω τύπος, η ακτίνα καμπυλότητας είναι θετική όταν ένα αντικείμενο αντικρίζει μία κυρτή διαθλαστική επιφάνεια. Το αντίθετο ισχύει για μία κοίλη επιφάνεια.

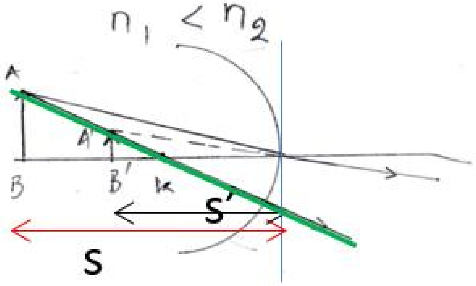


$$\frac{n_1}{S} + \frac{n_2}{S'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

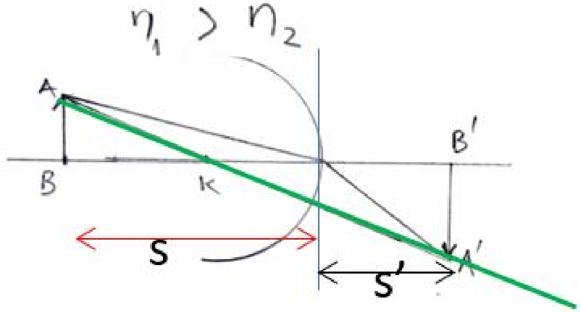


$$\frac{n_1}{S} + \frac{n_2}{(-S')} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

ΚΟΙΛΟ ΔΙΟΠΤΡΟ



$$\frac{n_1}{S} + \frac{n_2}{(-S')} = \frac{n_2 - n_1}{(-R)}$$



$$\frac{n_1}{S} + \frac{n_2}{S'} = \frac{n_2 - n_1}{(-R)}$$

Κατακόρυφη μεγέθυνση ειδώλου από διάθλαση από σφαιρική επιφάνεια

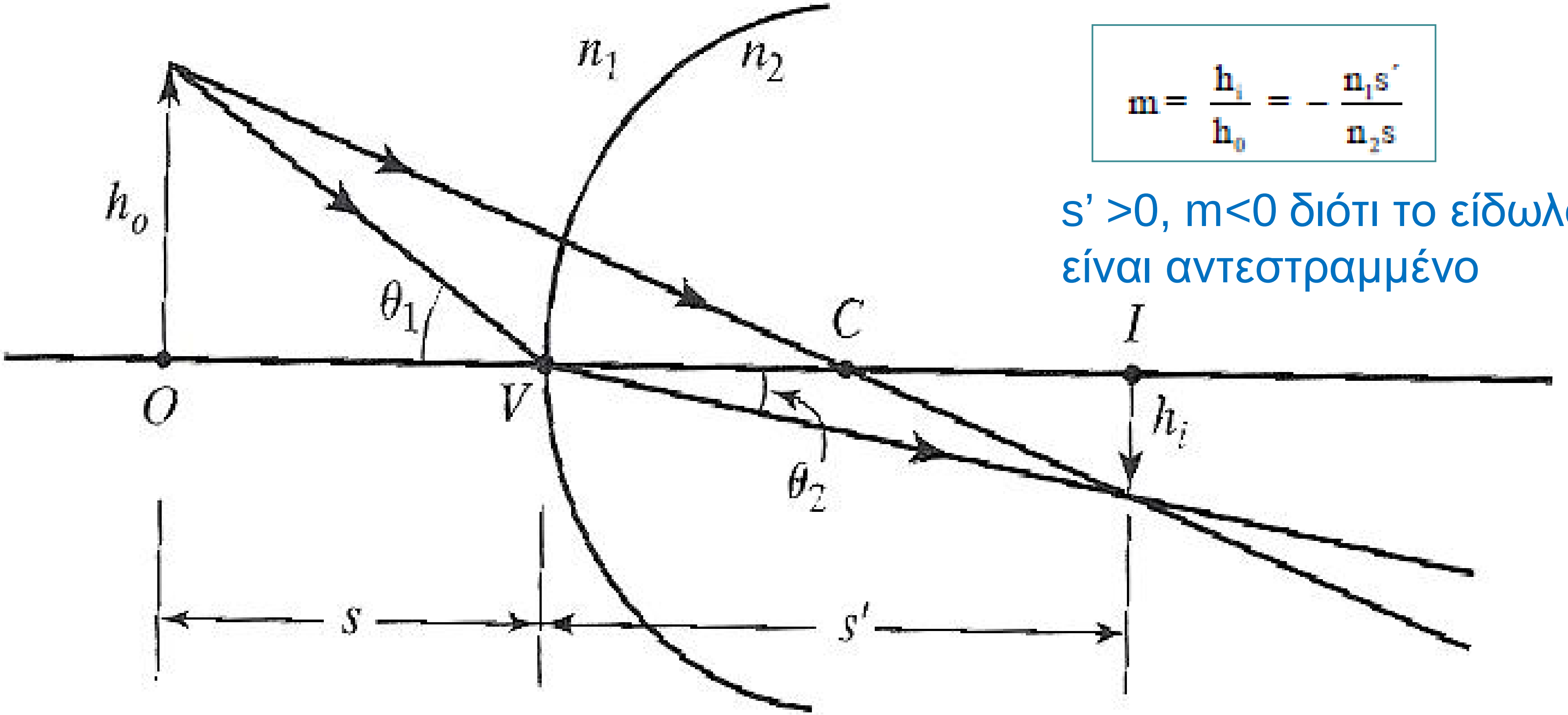
Παραξονική προσέγγιση

N. Snell στο σημείο V

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2$$

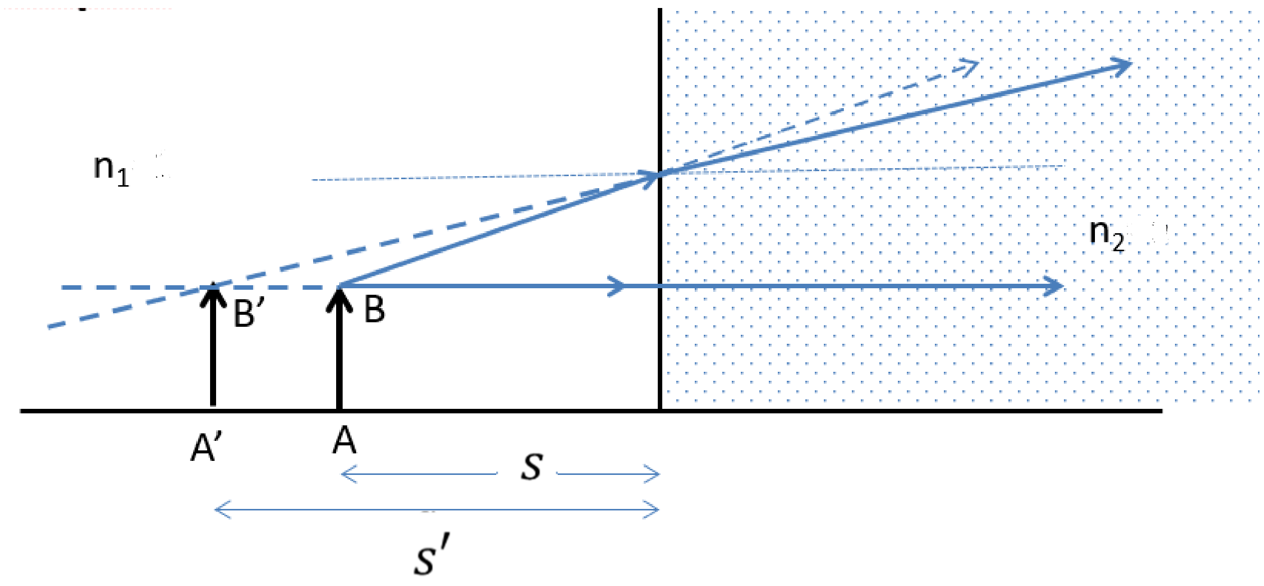
$$n_1\left(\frac{h_0}{s}\right) = n_2\left(\frac{h_i}{s'}\right)$$

$$m = \frac{h_i}{h_0} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s}$$



s' >0, m<0 διότι το είδωλο είναι αντεστραμμένο

Για διάθλαση από επίπεδη επιφάνεια, θέτουμε $R \to \infty$



$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \to 0 \Rightarrow$$

$$\frac{n_1}{s} = -\frac{n_2}{s'}$$

και

$$m = \frac{h_i}{h_0} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = 1$$

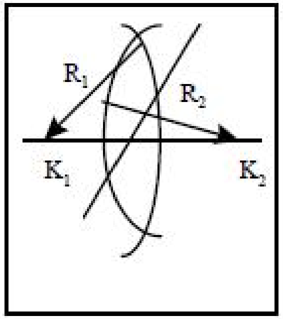
ΦΑΚΟΙ

Φακός είναι ένα διαφανές μέσον που περιορίζεται από δύο εν γένει καμπύλες επιφάνειες (η μία εξ αυτών μπορεί να είναι και επίπεδη)

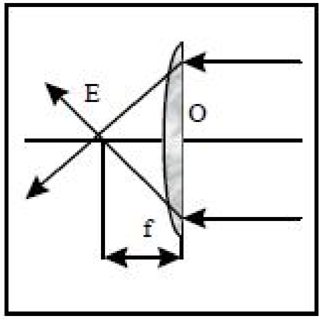
Είδη Φακών

Συγκλίνοντες

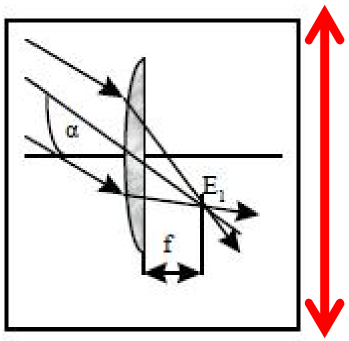
Αποκλίνοντες



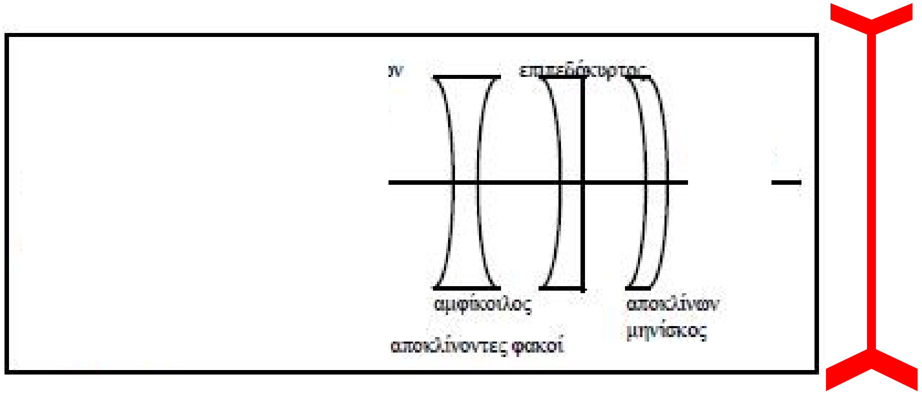
Σχήμα 121



Σχήμα 122



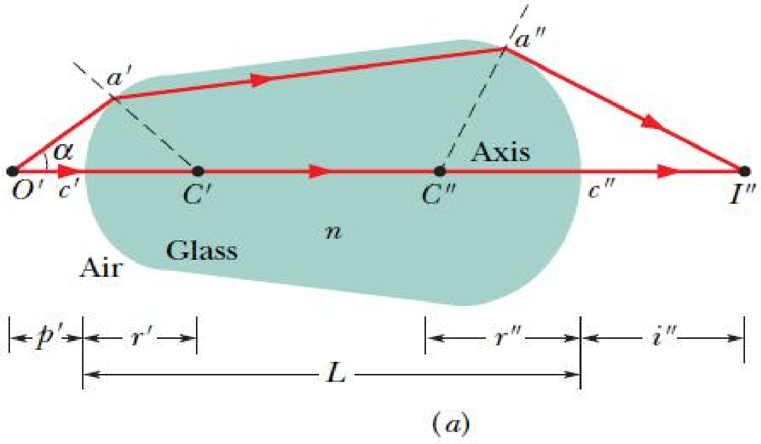
Σχήμα 123



Σχήμα 124

Αυτό ισχύει όταν ο εξωτερικός δείκτης διάθλασης είναι μικρότερος από αυτόν του υλικού του φακού. Εάν δεν συμβαίνει αυτό τότε οι συγκλίνοντες γίνονται αποκλίνοντες και αντίστροφα.

34.9: Three Proofs, The Thin Lens Formula:



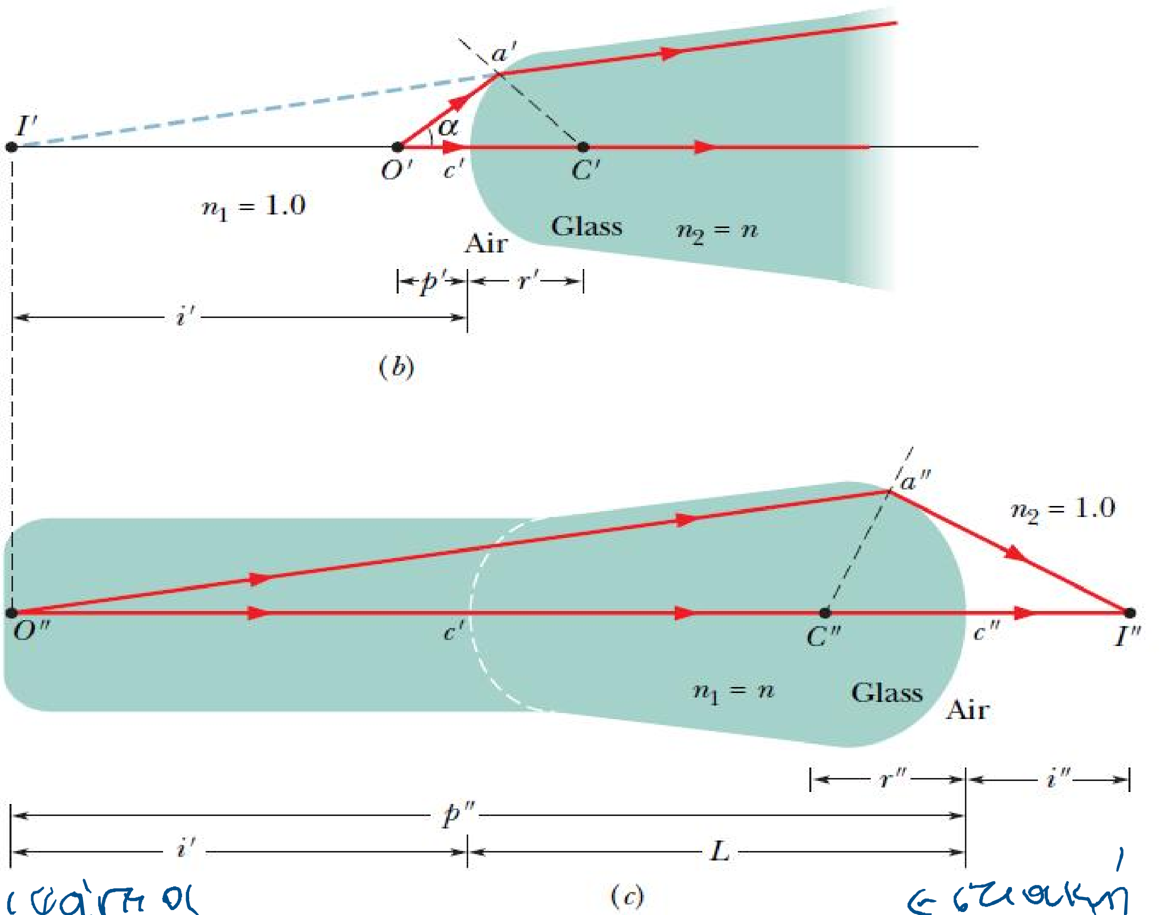


Fig. 34-24 (*a*) Two rays from point object O' form a real image I'' after refracting through two spherical surfaces of a lens. The object faces a convex surface at the left side of the lens and a concave surface at the right side. The ray traveling through points a' and a'' is actually close to the central axis through the lens. (*b*) The left side and (*c*) the right side of the lens in (*a*), shown separately.

$$\boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}.}$$

1η επιφάνεια

$$\boxed{\frac{1}{p'} - \frac{n}{i'} = \frac{n-1}{r'}.}$$

$$p'' = i' + L.$$

2η επιφ.

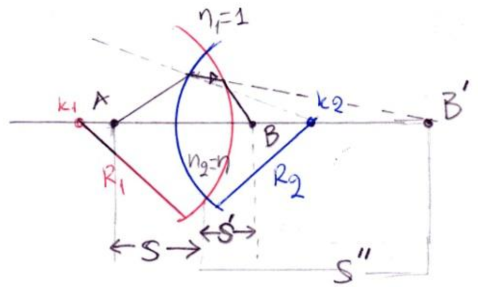
$$\boxed{\frac{n}{i' + L} + \frac{1}{i''} = \frac{1-n}{r''}.} \xRightarrow{L \approx 0} \frac{n}{i'} + \frac{1}{i''} = -\frac{n-1}{r''}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{p'} + \frac{1}{i''} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right).}$$

εστιακή απόσταση

$1/f$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{i} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right),$$



Εάν δεν υπήρχε το R_1 τότε:

$R_2>0$ $\quad \frac{1}{s}+\frac{n}{s'}=\frac{n-1}{R_2}$

Το B' είναι φ.Α. για τό R_1 (κοίλο)

$R_1<0$ $\quad \frac{n}{-s''}+\frac{1}{s'}=\frac{1-n}{-R_1}$

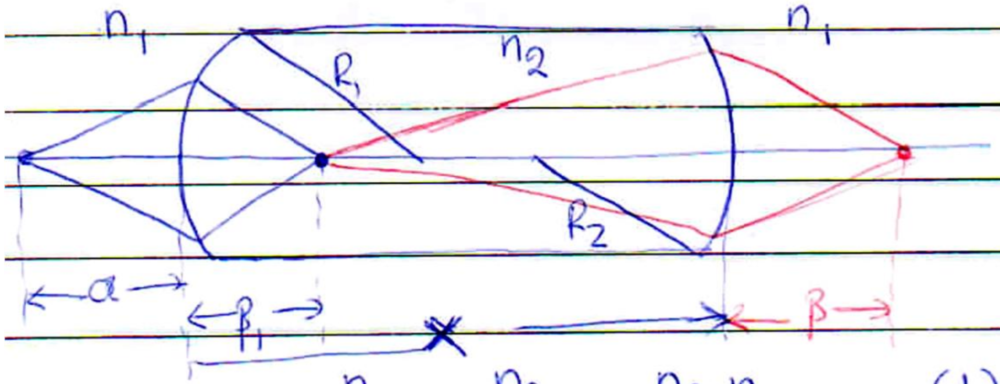
$$\Rightarrow \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

Για $s\to\infty$ τότε $s'=f$

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

και γενικά

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}.$$



$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{\beta_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (1)$$

$$\frac{n_2}{x - \beta_1} + \frac{n_1}{\beta} = \frac{n_1 - n_2}{-R_2} = \frac{n_2 - n_1}{R_2} \quad (2)$$

Για $x \to 0$ η (2) γίνεται $\frac{n_2}{-\beta_1} + \frac{n_1}{\beta} = \frac{n_2 - n_1}{R_2} \quad (2')$

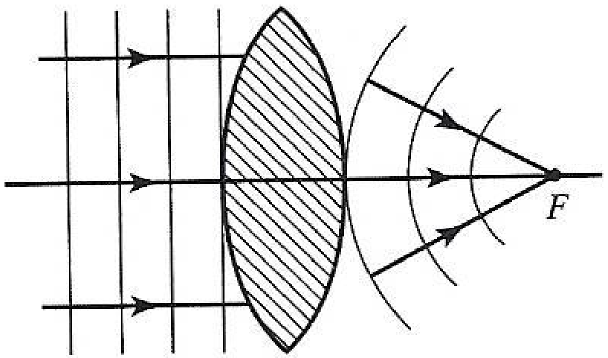
Προσθέτουμε (1) κ (2')

$$\frac{n_1}{a} + \cancel{\frac{n_2}{\beta_1}} - \cancel{\frac{n_2}{\beta_1}} + \frac{n_1}{\beta} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f}$$

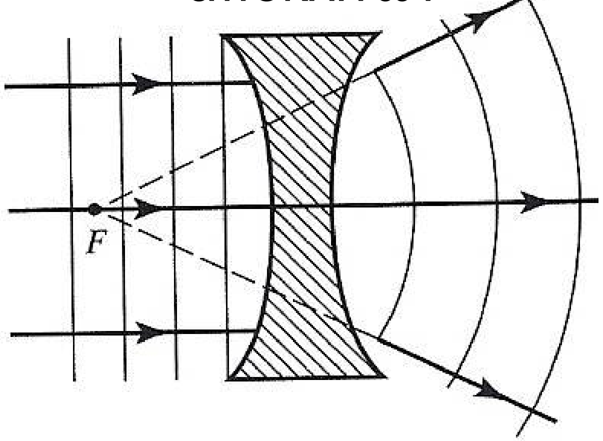
Λεπτοί φακοί

συγκλίνων

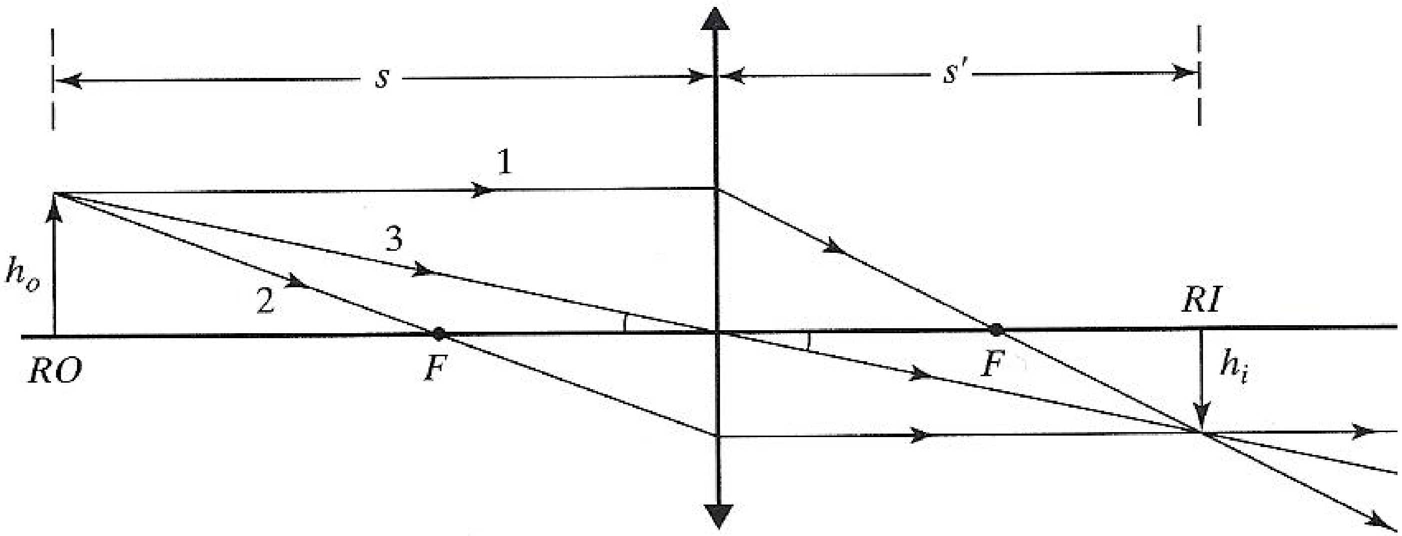


(a)

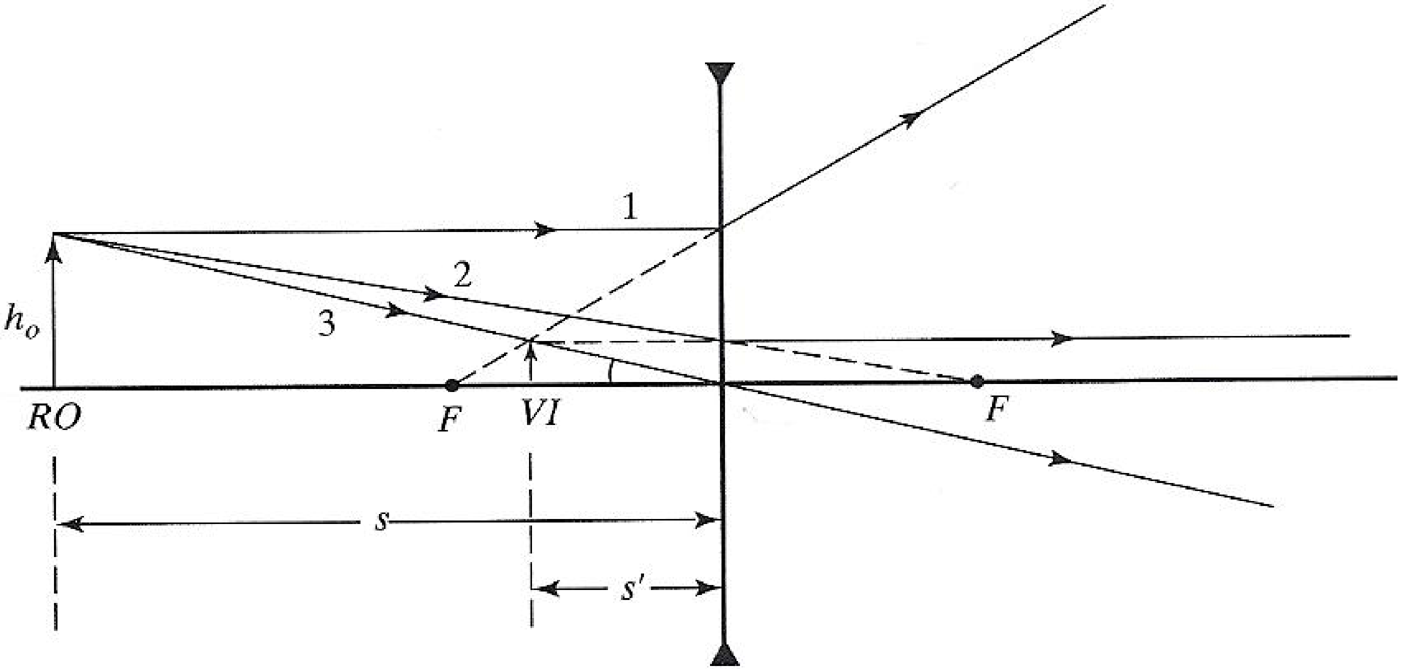
αποκλίνων



(b)



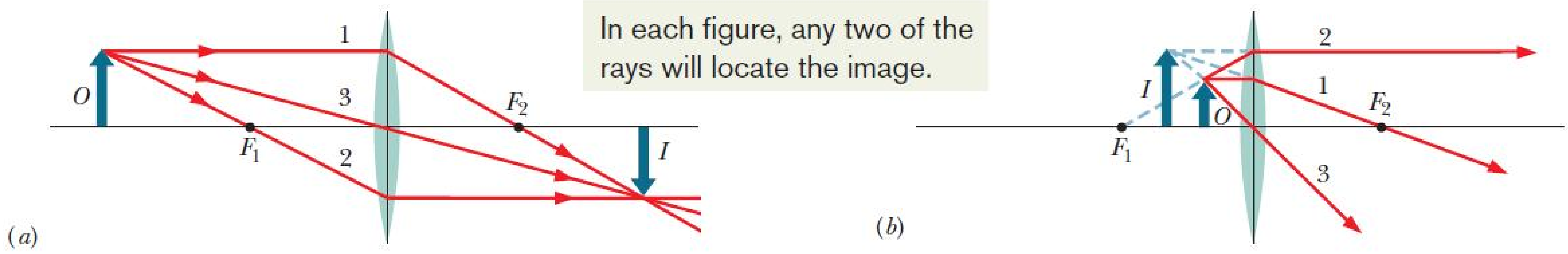
(a)



(b)

Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

34.7: Thin Lenses, Locating Images by Drawing Rays:



- A ray that is initially parallel to the central axis of the lens will pass through focal point F_2 *(ray 1* in Fig. 34-16a).
- A ray that initially passes through focal point F_1 will emerge from the lens parallel to the central axis (*ray 2* in Fig. 34-16a).
- A ray that is initially directed toward the center of the lens will emerge from the lens with no change in its direction (ray 3 in Fig. 34-16a).

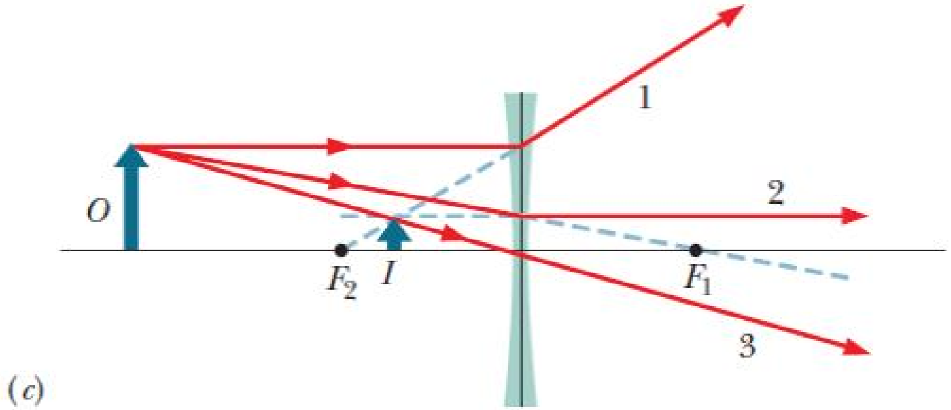
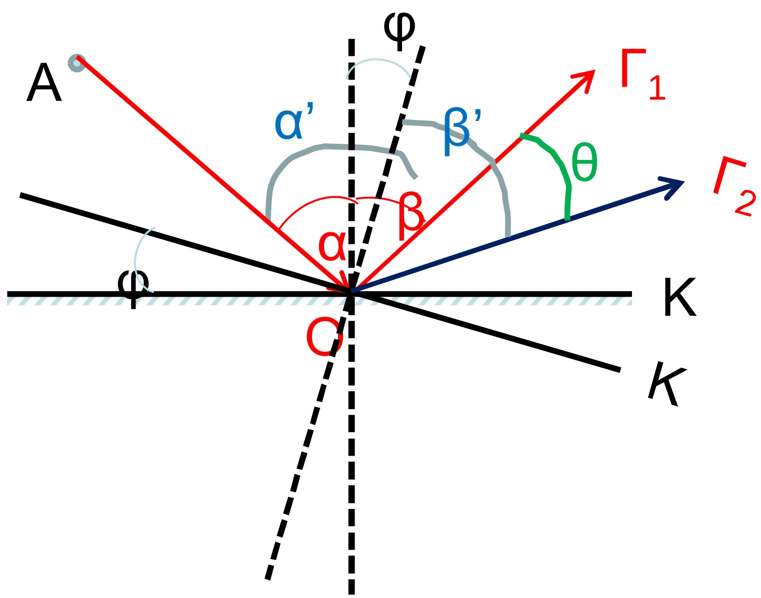


Fig. 34-16 Three special rays allow us to locate an image formed by a thin lens whether the object O is (*a*) outside or (*b*) inside the focal point of a converging lens, or (*c*) anywhere in front of a diverging lens.

Ανάκλαση – Διάθλαση –
Κάτοπτρα- Φακοί – Ασκήσεις

Άσκηση 1η:

Όταν επίπεδο κάτοπτρο στραφεί κατά γωνία φ περί άξονα κάθετο στο επίπεδό του τότε η ανακλώμενη ακτίνα στρέφεται κατά γωνία 2φ



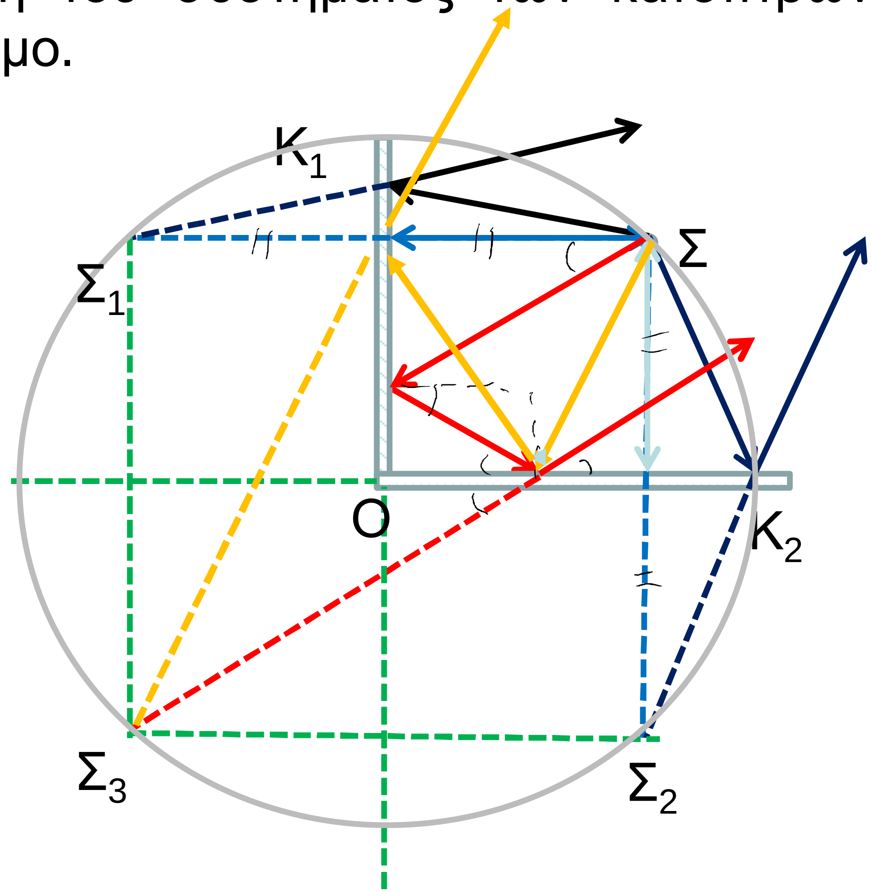
Λύση:

$$\left.\begin{aligned} &\theta=\beta'-(\beta-\varphi)=\beta'-\beta+\varphi \\ &\text{Αλλά } \alpha'=\beta' \ \& \ \alpha=\beta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\theta=\alpha'-\alpha+\varphi=\varphi+\varphi=2\varphi$$

Άσκηση 2η:

Σχηματισμός ειδώλου φωτεινού σημείου μέσω συστήματος δύο καθέτων επιπέδων κατόπτρων. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η κάτοψη του συστήματος των κατόπτρων. Η πηγή Σ βρίσκεται στη διχοτόμο.



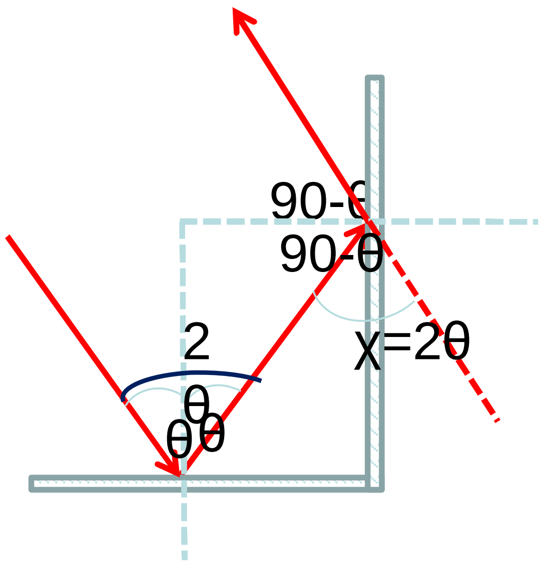
Σ_1 το είδωλο της Σ από το K_1

Σ_2 το είδωλο της Σ από το K_2

Σ_3 σχηματίζεται από ανάκλαση πρώτα στο K_1 και ακολούθως στο K_2 και αντίστροφα

- Διαπιστώστε ότι τα σημεία Σ, Σ_1, Σ_2 & Σ_3 βρίσκονται στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας ΟΣ.

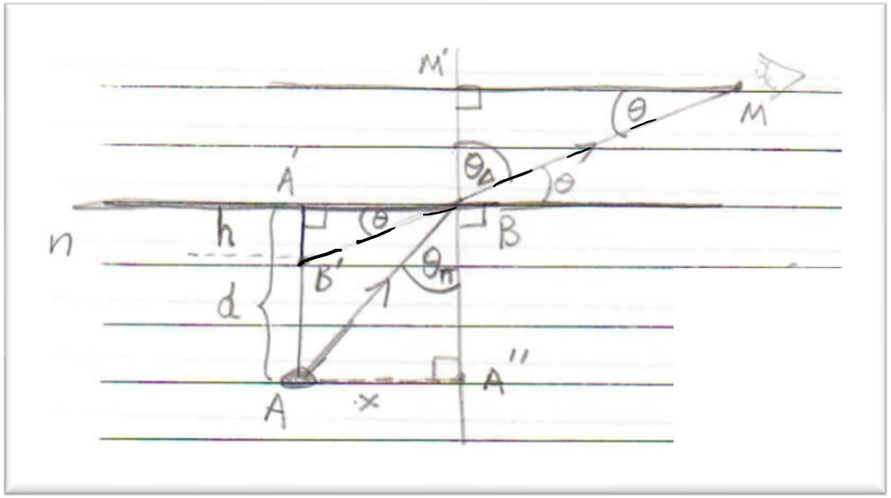
Άσκηση 3η:
Δείξτε ότι η ακτίνα προσπίπτουσα στο εσωτερικό συστήματος δύο καθέτων επιπέδων κατόπτρων με οποιαδήποτε γωνία εξέρχεται πάντα αντιπαράλληλος προς την αρχική.



Από το σχήμα φαίνεται ότι:
χ=180-2(90-θ)=2θ
Συνεπώς προσπίπτουσα και ανακλώμενη είναι αντιπαράλληλες.

Άσκηση 1

Ένα σημειακό αντικείμενο είναι τοποθετημένο σε βάθος d μέσα σε ένα υγρό με δείκτη διάθλασης n. Ένας παρατηρητής, πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, βλέπει το αντικείμενο υπό γωνία θ. Ποιο είναι το φαινόμενο βάθος του αντικειμένου;



$(A'B') = h$

$(AA'') = (A'B) = x$

$\tan\,\theta = \frac{h}{(A'B)} = \frac{h}{x}$ (1)

$\tan\,\theta_\pi = \frac{(AA'')}{(BA'')} = \frac{x}{d} \Rightarrow x = d\tan\,\theta_\pi$ (2)

$\theta_\Delta + \theta = 90^\circ$ (3)

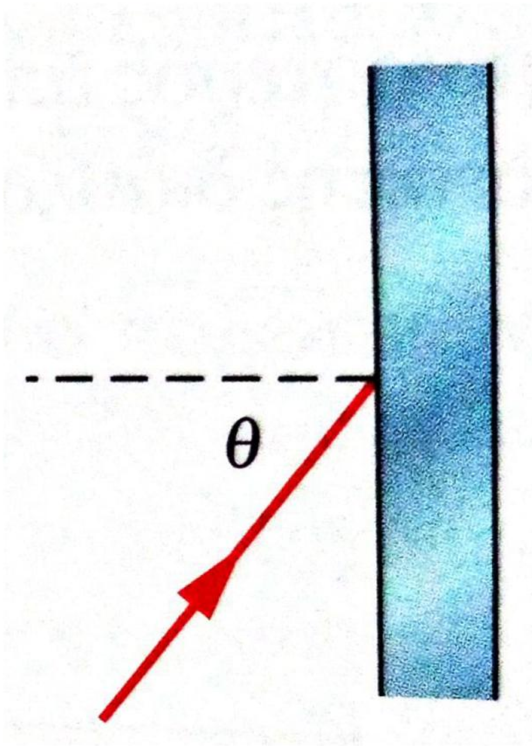
Νόμος Snell $n\sin\,\theta_\pi = \sin\,\theta_\Delta$ (4)

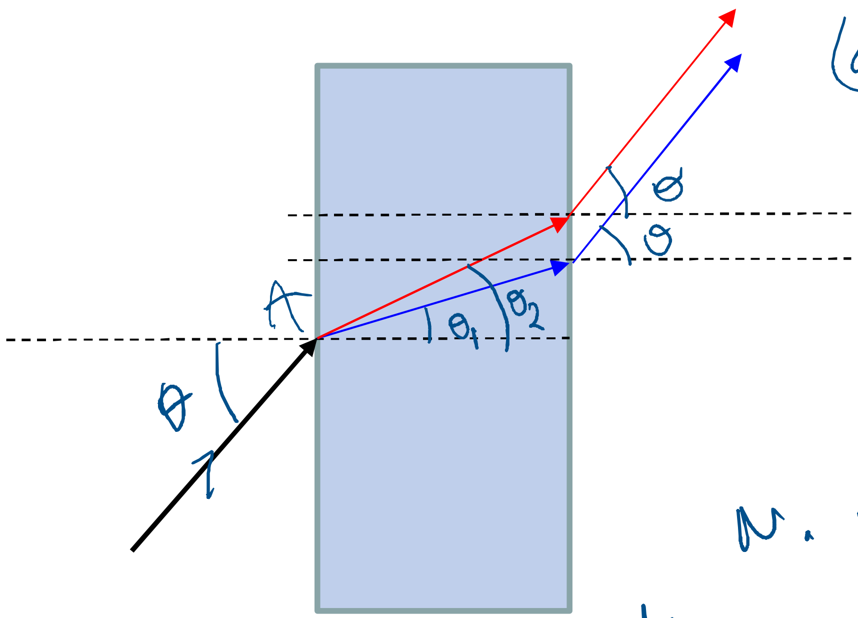
$$h = x\tan\,\theta \overset{(2)}{=} d\tan\,\theta_\pi \tan\,\theta \underset{(3)}{\Rightarrow} h = d\tan\,\theta_\pi \cot\,\theta_\Delta = d\,\frac{\sin\theta_\pi}{\cos\theta_\pi}\frac{\cos\theta_\Delta}{\sin\theta_\Delta} \overset{(4)}{=} d\cdot\frac{1}{n}\frac{\cos\theta_\Delta}{\cos\theta_\pi} \Rightarrow$$

$$h = \frac{d}{n}\frac{\cos\theta_\Delta}{\sqrt{1-\sin^2\,\theta_\pi}} \overset{(3,4)}{=} \frac{d}{n}\frac{\cos\,(90-\theta)}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\theta_\Delta}{n}\right)^2}} \overset{(3)}{=} \frac{d}{n}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\frac{\cos^2\theta}{n^2}}}$$

Άσκηση 2 (Halliday ασκ. 33.51)

Μια δέσμη λευκού φωτός προσπίπτει υπό γωνία 50^o πάνω σε κοινό τζάμι, που έχει δείκτη διάθλασης για το ορατό φως που κυμαίνεται από 1.524 στο μπλε άκρο μέχρι 1.509 στο κόκκινο άκρο του ορατού φάσματος. Οι δυο όψεις του τζαμιού είναι παράλληλες. Πόσος είναι ο χρωματικός διαχωρισμός των χρωμάτων της δέσμης (α) όταν το φως εισέρχεται στο γυαλί και (β) όταν εξέρχεται από την απέναντι όψη.





(a)

$\theta_i = \theta = 50^\circ$

$n^{\text{γυαλί}}_{\text{μπλε}} = 1.524$ $\qquad$ $n^{\text{γυαλί}}_{\text{κοκ}} = 1.509$

$n_{\text{αερ}} \approx 1$

Ν. Snell στο σημείο Α:

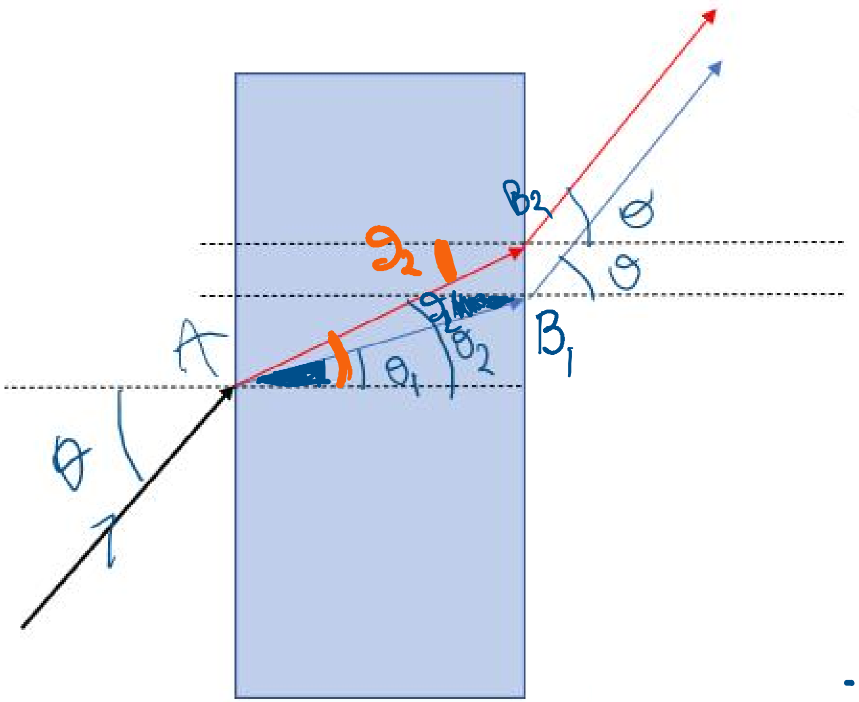
Μπλε: $1 \cdot \sin 50^\circ = 1.524 \times \sin\theta_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta_1 = 30,176^\circ$

Κοκ.: $1 \cdot \sin 50^\circ = 1.509 \times \sin\theta_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta_2 = 30,508^\circ$

Μέσα στο γυαλί $\Delta\theta = 30,508^\circ - 30,176^\circ \approx 0,332^\circ$



Ν. Snell στο B_1:

$$n^{\gamma\upsilon\alpha\lambda\acute{\iota}}_{\mu\pi\lambda\epsilon} \cdot \sin\theta_1 = n_{\alpha\acute{\epsilon}\rho} \cdot \sin\theta_{\mu\pi\lambda\epsilon}$$

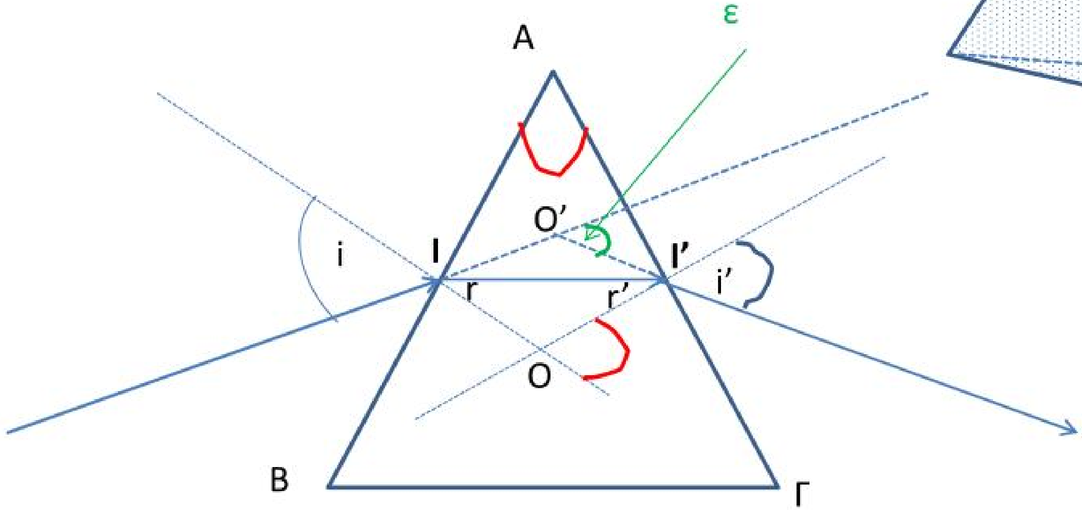
$$\Rightarrow \sin\theta_{\mu\pi\lambda\epsilon} = n^{\gamma\upsilon\alpha\lambda\acute{\iota}}_{\mu\pi\lambda\epsilon} \cdot \frac{\sin\theta}{n^{\gamma\upsilon\alpha\lambda\acute{\iota}}_{\mu\pi\lambda\epsilon}} = \sin\theta$$

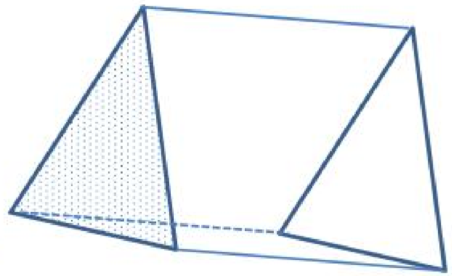
$$\Rightarrow \theta_{\mu\pi\lambda\epsilon} = \theta$$

· Όμοια στο B_2 $\theta_{\kappa o \kappa} = \theta$

Άρα η δέσμη είναι παράλληλη και δεν υπάρχει χρωματική διασπορά

Πρίσματα





<u>Γωνία εκτροπής μονοχρωματικής ακτίνας μέσω πρίσματος ισοσκελούς διατομής</u>

Έστω A η θλαστική γωνία του πρίσματος.

$$\left.\begin{array}{l} I: 1\sin(i)=n\sin(r) \\ I': n\sin(r')=1\sin(i') \end{array}\right\} \quad (1)$$

Από το τρίγωνο OII': $A=r+r'$ (2)

Από το τρίγωνο O'II', η γωνία εκτροπής ε είναι: $\varepsilon=(i-r)+(i'-r') = (i+i')-(r+r') \rightarrow$ $\varepsilon= (i+i')-A$ (3)

Οξέα πρίσματα: και μικρές γωνίες πρόσπτωσης, διάθλασης

Από την (1): $\begin{cases} i = nr \\ i' = nr' \end{cases}$

Οπότε η (3) γίνεται: $\Rightarrow \varepsilon = n(r + r') - A = nA - A = (n-1)A$

$$\varepsilon = (n-1)A \qquad (4)$$

Η γωνία εκτροπής για οξέα πρίσματα είναι ανεξάρτητη της γωνίας πρόσπτωσης.

Γωνία ελάχιστης εκτροπής:

Άραγε υπάρχει μία χαρακτηριστική διαδρομή για την οποία η γωνία εκτροπής να είναι ελάχιστη;
Εάν υπάρχει τότε θα πρέπει *dε/di=0*

$$(3) \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 0 \Rightarrow \frac{di'}{di} = -1 \qquad (5)$$

Με διαφόριση των σχέσεων (1) έχουμε: $\begin{matrix} \cos i\, di = n \cos r\, dr \\ \cos i'\, di' = n \cos r'\, dr' \end{matrix}$

Επιπλέον από την (2) με διαφόριση έχουμε: $dr = dr^{'}$

Οπότε:

$$\frac{di^{'}}{di} = -\frac{\cos i \cos r^{'}}{\cos i^{'} \cos r} \qquad (6)$$

Επειδή οι γωνίες i, r, i’,r’ είναι οξείες και επιπλέον ικανοποιούν υις συμμετρικές σχέσεις (1), οι εξισώσεις (5) & (6) μπορούν ταυτόχρονα να ικανοποιηθούν μόνον όταν

$$i = i^{'} \quad \& \quad r = r^{'} \qquad (7)$$

Τότε $\varepsilon = \varepsilon_{min}$

$\varepsilon_{min} = 2i - A \Rightarrow i =$

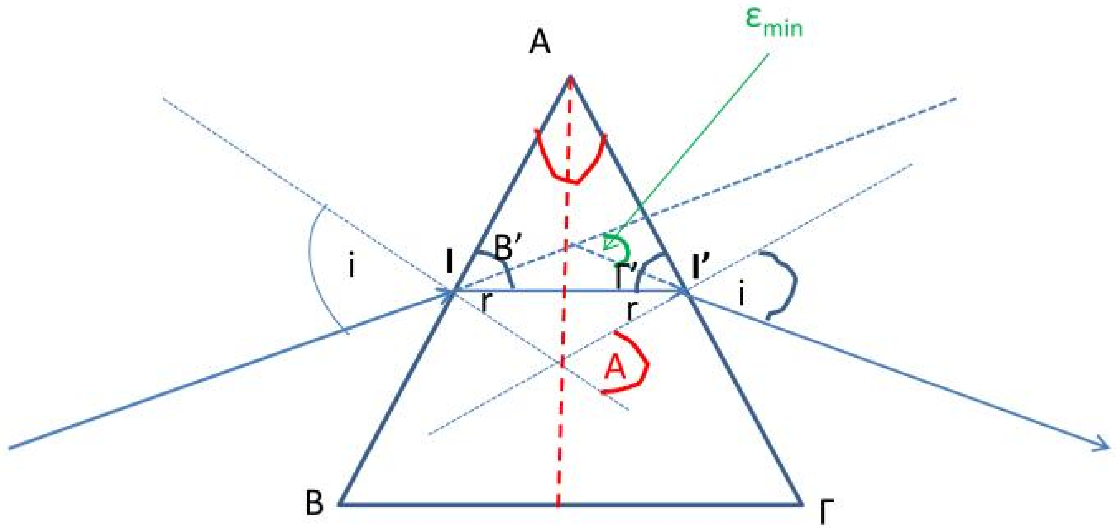
Λόγω των (3) & (7): ε_{min} = 2i-A, απ’ όπου i= (ε_{min} +A)/2

Λόγω των (2) & (7): A=2r, απ’ όπου r=A/2 (8)

Από τις (1) & (8) προκύπτει:

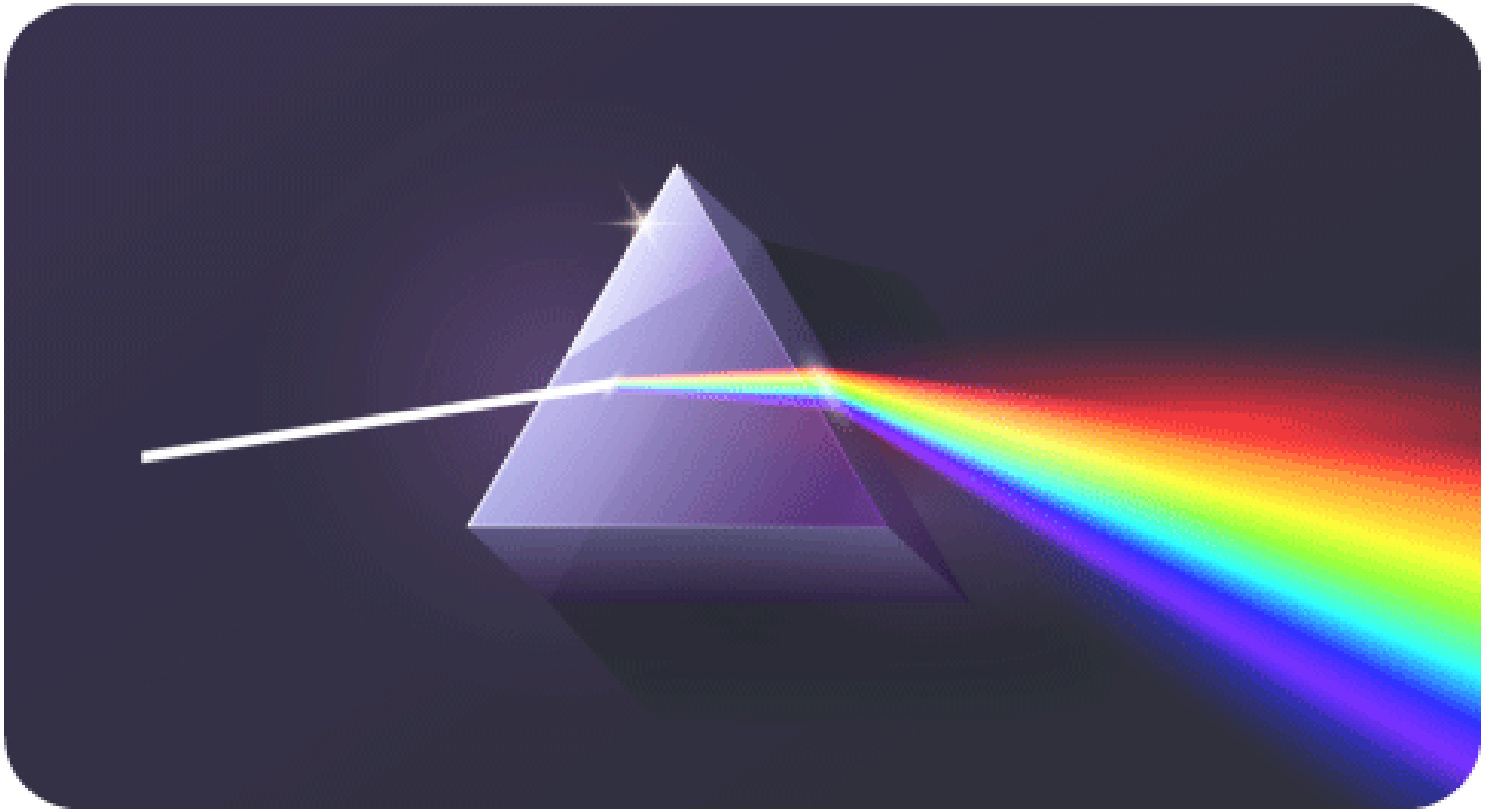
$$n = \frac{\sin\frac{\varepsilon_{min} + A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \qquad (9)$$

Στην περίπτωση που η ακτίνα εκτρέπεται με την γωνία ελαχίστης εκτροπής emin η διαδρομή της ακτίνας είναι συμμετρική αναφορικά με τις 2 επιφάνειες του πρίσματος.



B’+r=90^o & Γ’+r=90^o → B’=Γ’

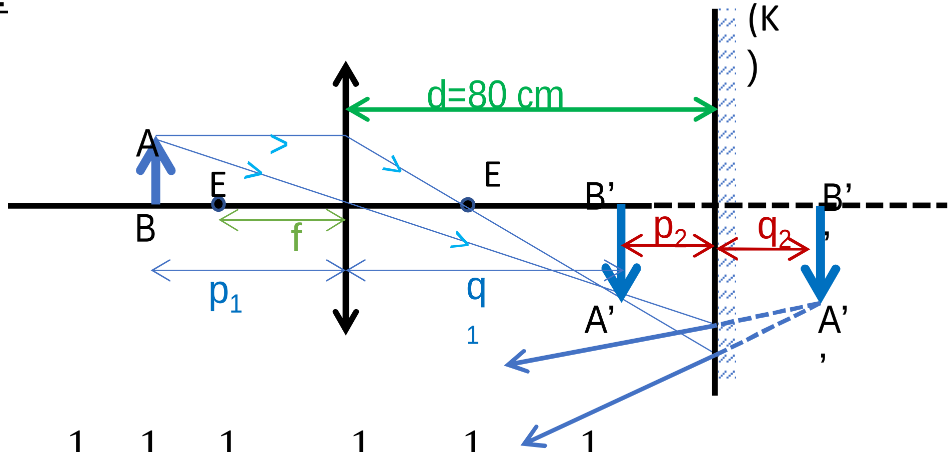
Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ & ΑΙΙ’ είναι όμοια, συνεπώς, Β=Β’ & Γ=Γ’
Άρα η Β’Γ’ είναι παράλληλη της ΒΓ, δηλαδή η ακτίνα κατά την διαδρομή της στο πρίσμα είναι παράλληλη προς την βάση.



Άσκηση 3η: Ένας συγκλίνων φακός f=20cm απέχει d=80 cm από επίπεδο κάτοπτρο. Γραμμικό αντικείμενο AB=10cm βρίσκεται 30 cm έμπροσθεν του φακού. (α) Να βρεθεί η θέση και το ύψος του τελικού ειδώλου μετά από διάθλαση μέσω του φακού και ανάκλαση από το κάτοπτρο. (β) Να λυθεί η ίδια άσκηση για d=40 cm

Λύση:

(α)



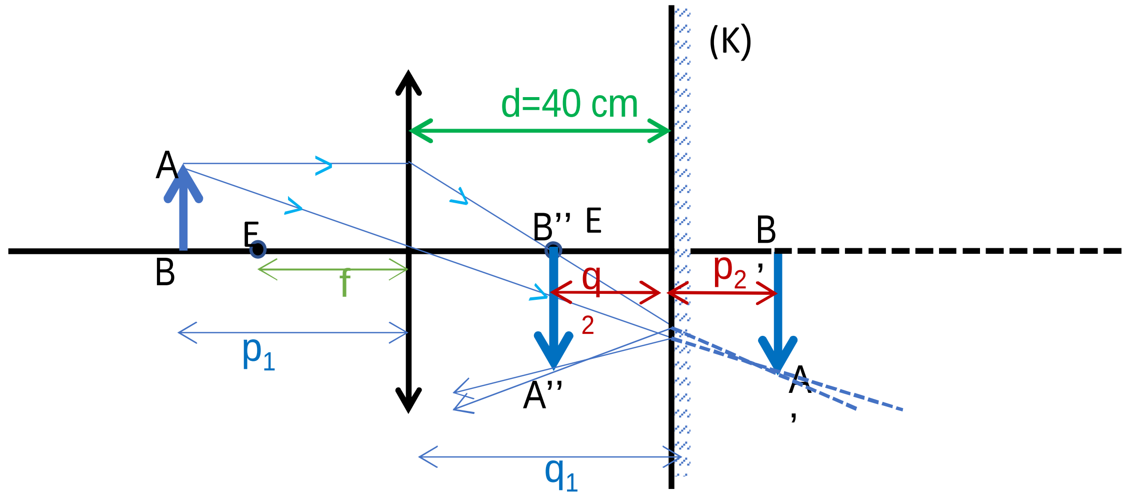
Φακός: $$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{30cm}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{20cm}\Rightarrow q_1=60cm$$

Κάτοπτρο: $$p_2=d-q_1=80cm-60cm=20cm\Rightarrow q_2=20cm$$

Μεγέθυνση:
$$m_{o\lambda}=\frac{A''B''}{AB}=\frac{A''B''}{A'B'}\frac{A'B'}{AB}=m_\varphi m_K$$
$$m_{o\lambda}=\frac{q_1}{p_1}\frac{q_2}{p_2}=\frac{60cm}{30cm}\frac{20cm}{20cm}=2\Rightarrow A''B''=20cm$$

Το τελικό είδωλο είναι φανταστικό, ανεστραμμένο, μεγέθους 20cm και βρίσκεται 20cm πίσω του Κ

(β)



Φακός: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{30cm}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{20cm} \Rightarrow q_1=60cm$

Κάτοπτρο: $p_2=d-q_1=40cm-60cm=-20cm \Rightarrow q_2=-20cm \Rightarrow p_2=20cm$

Μεγέθυνση:

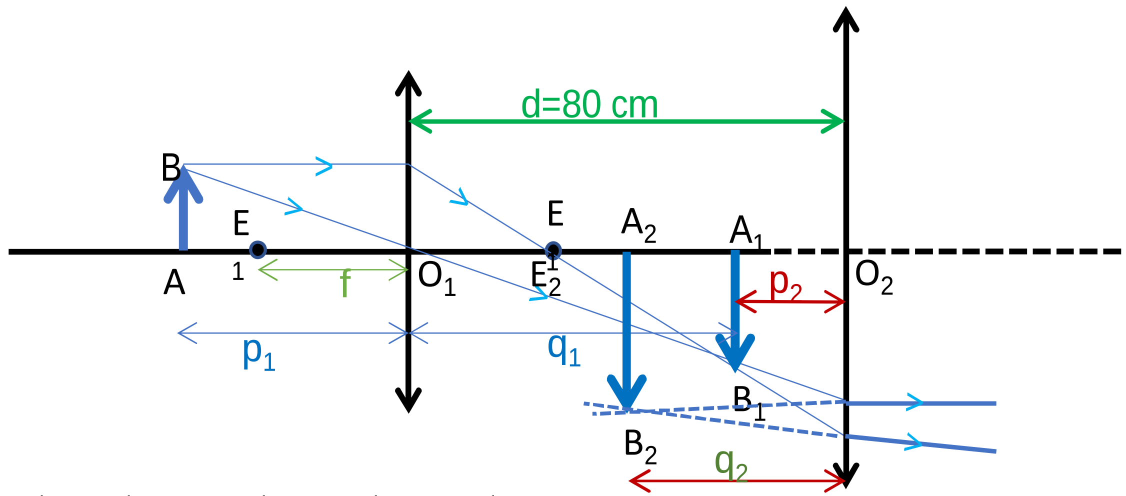
$$m_{o\lambda}=\frac{A''B''}{AB}=\frac{A''B''}{A'B'}\frac{A'B'}{AB}=m_{\varphi}m_K$$

$$m_{o\lambda}=\frac{q_1}{p_1}\frac{q_2}{p_2}=\frac{60cm}{30cm}\frac{20cm}{20cm}=2 \Rightarrow A''B''=20cm$$

Το τελικό είδωλο είναι πραγματικό, ανεστραμμένο, μεγέθους 20cm και βρίσκεται 20cm έμπροσθεν του Κ

Άσκηση 4η: Δύο συγκλίνοντες φακοί εστιακών αποστάσεων f1=20cm & f2=60cm, απέχουν μεταξύ τους απόσταση d=80cm. Αντικείμενο AB=10cm τοποθετείται σε απόσταση p1=30cm έμπροσθεν του πρώτου φακού. Ζητείται το είδος, η θέση και το μέγεθος του τελικού ειδώλου.

Λύση:



1ος Φακός: $$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow\frac{1}{30cm}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{20cm}\Rightarrow q_1=60cm$$

2ος Φακός: $$p_2=d-q_1=80cm-60cm=20cm$$

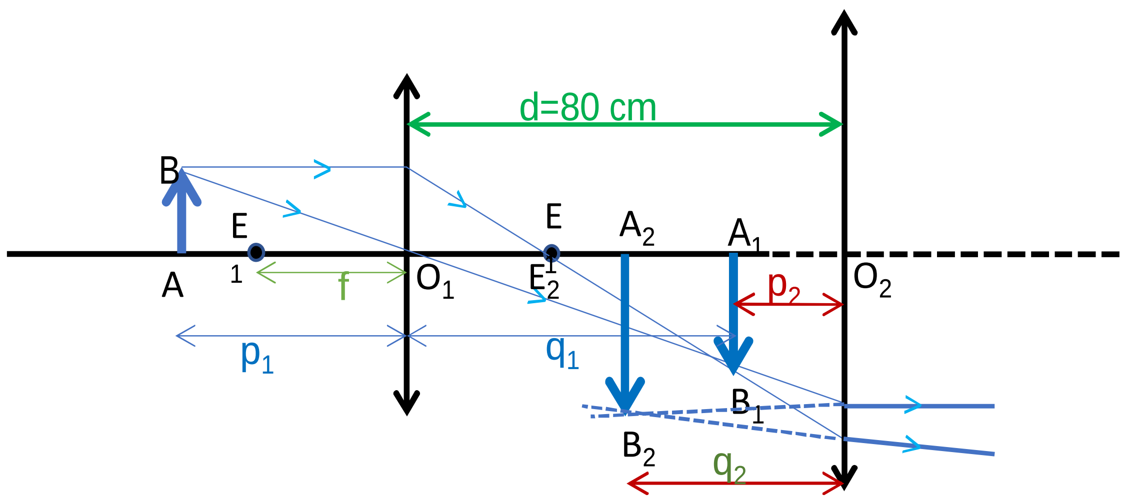
$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2}\Rightarrow\frac{1}{20cm}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{60cm}\Rightarrow q_2=-30cm$$

Μεγέθυνση:

$$m_{ολ}=\frac{A_2B_2}{AB}=\frac{A_2B_2}{A_1B_1}\frac{A_1B_1}{AB}=m_{φ1}m_{φ2}$$

$$m_{ολ}=\frac{q_1}{p_1}\frac{q_2}{p_2}=\frac{60cm}{30cm}\frac{30cm}{20cm}=3\Rightarrow A_2B_2=30cm$$

Το τελικό είδωλο είναι φανταστικό, ανεστραμμένο, μεγέθους 30cm και βρίσκεται μεταξύ των δύο φακών.



Γενικό συμπέρασμα:

Η τελική μεγέθυνση συστήματος φακών, συστήματος κατόπτρων, ή συστήματος φακών/κατόπτρων είναι ίση με το γινόμενο των επιμέρους μεγεθύνσεων.