

Εφαρμοσμένη Οπτική

Περίθλαση Fraunhofer

Περίθλαση Fresnel

Περίθλαση - Ορισμός

Περίθλαση είναι κάθε απόκλιση από την ευθύγραμμη διάδοση του φωτός, η οποία προκαλείται από παρεμβολή κάποιου εμποδίου.

Στη λεγόμενη *φυσική οπτική*, βασικής σημασίας για τη ερμηνεία των πειραματικών παρατηρήσεων είναι *η αρχή των Huygens-Fresnel*.

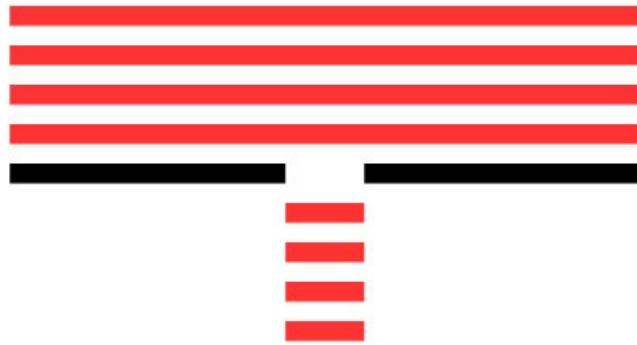
Σύμφωνα με τον Huygens κάθε σημείο του μετώπου του κύματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια δευτερεύουσα πηγή που εκπέμπει ένα σφαιρικό κύμα.

Στην υπόθεση αυτή ο Fresnel πρόσθεσε ότι το πραγματικό πεδίο μακριά από τη δευτερεύουσα πηγή είναι η υπέρθεση όλων των κυμάτων που προέρχονται από τις δευτερεύουσες πηγές, παίρνοντας υπόψη τα πλάτη και τις φάσεις για κάθε κύμα.

• Περίθλαση του φωτός

Παράλληλο φως προσπίπτει σε επιφάνεια με μικρό άνοιγμα

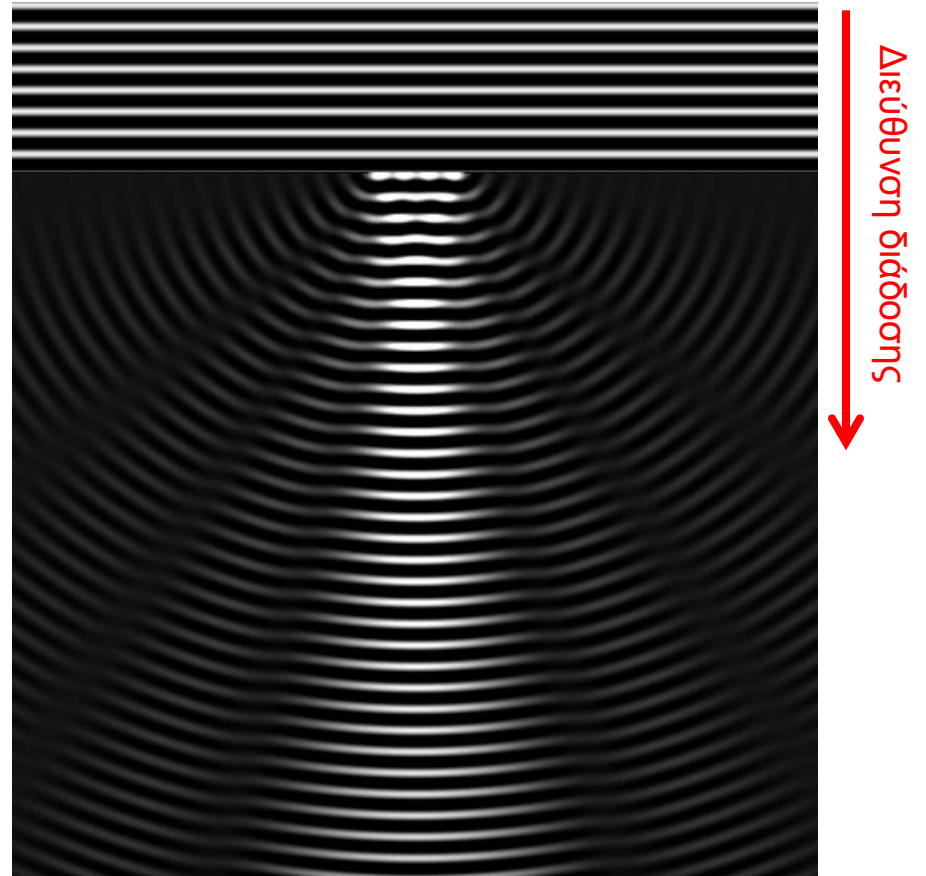
χωρίς περίθλαση (όχι πραγματικό)



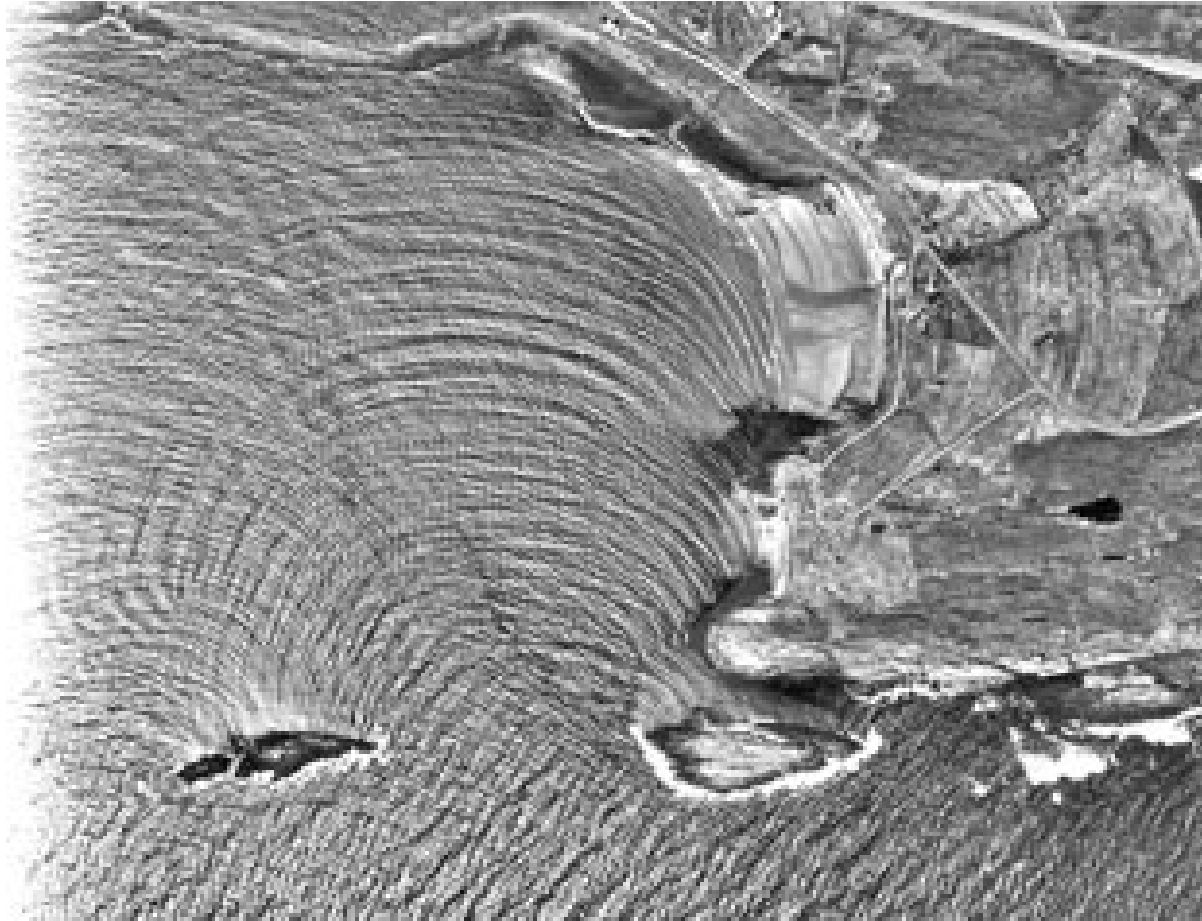
με περίθλαση (πραγματικό)



με περίθλαση (πραγματικό οπτικό αποτέλεσμα)



- Περίθλαση των κυμάτων (και του φωτός)



Για να βρούμε την κατανομή της έντασης (εικόνα περίθλασης) που περιμένουμε να δούμε σε μία οθόνη, λόγω περίθλασης π.χ. από μια λεπτή σχισμή, θα πρέπει να αθροίσουμε τα κύματα που προέρχονται από κάθε σημείο της σχισμής και να προσθέσουμε τα πλάτη, λαμβάνοντας υπόψη τις αποστάσεις που έχουν διανύσει τα διάφορα κυματικά μέτωπα, καθότι διαφορές στους οπτικούς δρόμους προκαλούν διαφορές στις φάσεις των κυμάτων που προστίθενται.

Στην περίθλαση έχουμε συμβολή φωτεινών δεσμών που προέρχονται από μια συνεχή κατανομή πηγών, ενώ στα φαινόμενα συμβολής έχουμε συμβολή δεσμών που προέρχονται από διακριτό αριθμό πηγών. Αυτό, φυσικά, δεν αποτελεί θεμελιώδη αλλά μάλλον ιστορική διάκριση μεταξύ συμβολής και περίθλασης.

Περίθλαση μακρινού και κοντινού πεδίου

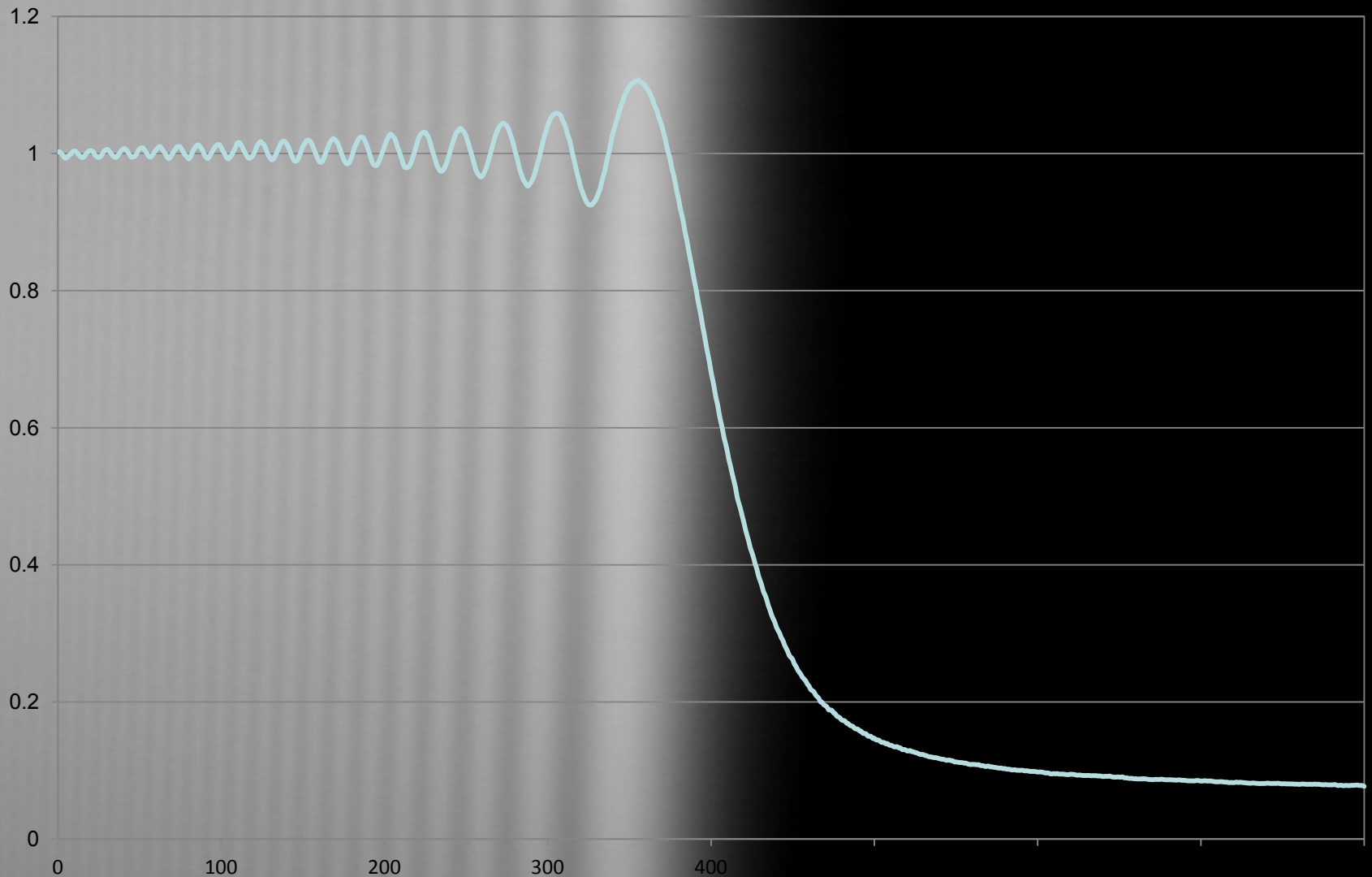
Αν η πηγή φωτός και το επίπεδο παρατήρησης (οθόνη) είναι και τα δύο σε μεγάλη απόσταση από το επίπεδο όπου το φως υφίσταται την περίθλαση, τότε το φως φθάνει στην οθόνη ως επίπεδο κύμα. Τότε μιλάμε για *περίθλαση Fraunhofer* ή *περίθλαση μακρινού πεδίου* (far-field diffraction).

Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε τη λεγόμενη *περίθλαση Fresnel* ή *περίθλαση κοντινού πεδίου* (near-field diffraction).

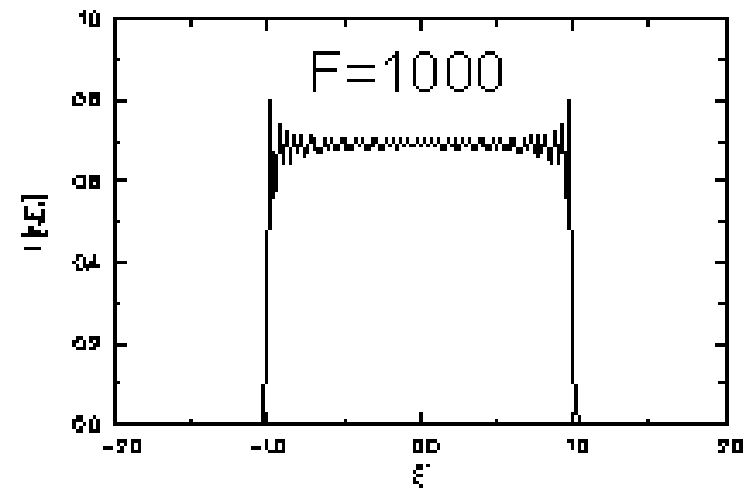
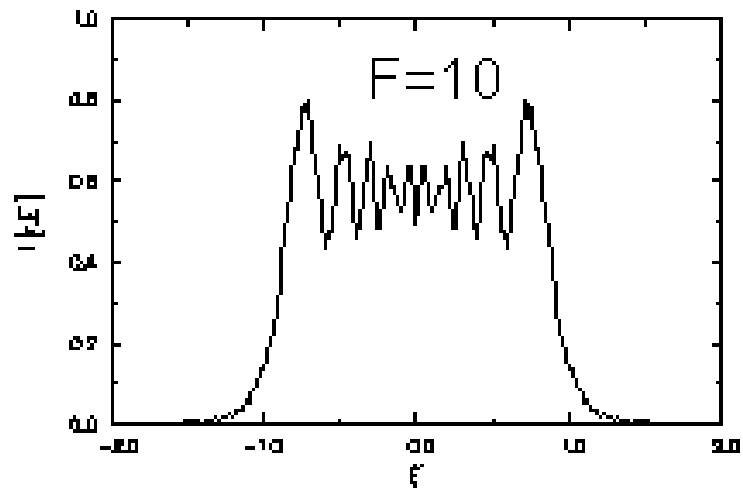
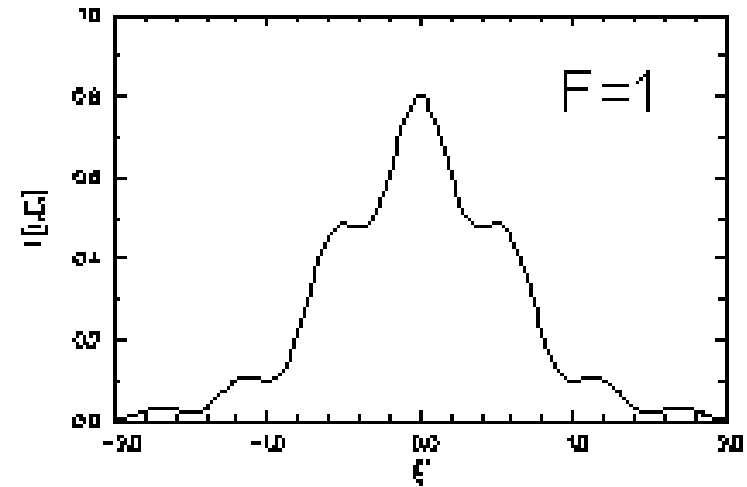
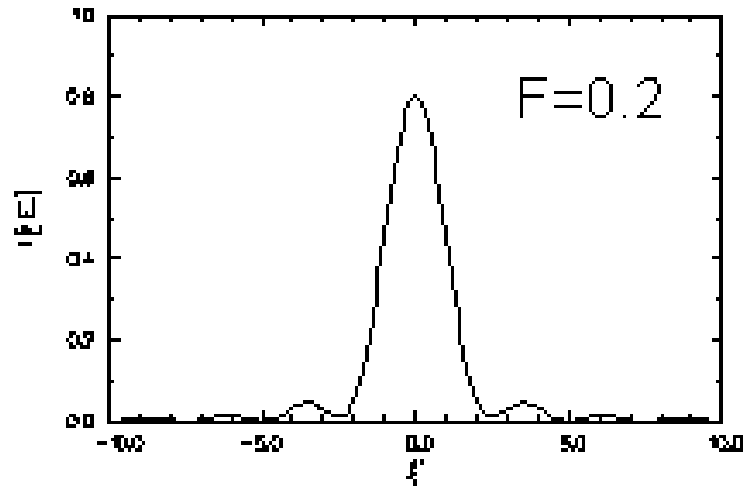
Στην περίπτωση της περίθλασης Fraunhofer, η εικόνα που παρατηρείται πάνω στο πέτασμα, αλλάζει ομοιόμορφα καθώς απομακρύνουμε την οθόνη από την σχισμή, πράγμα που δεν συμβαίνει στην περίπτωση της περίθλασης Fresnel.

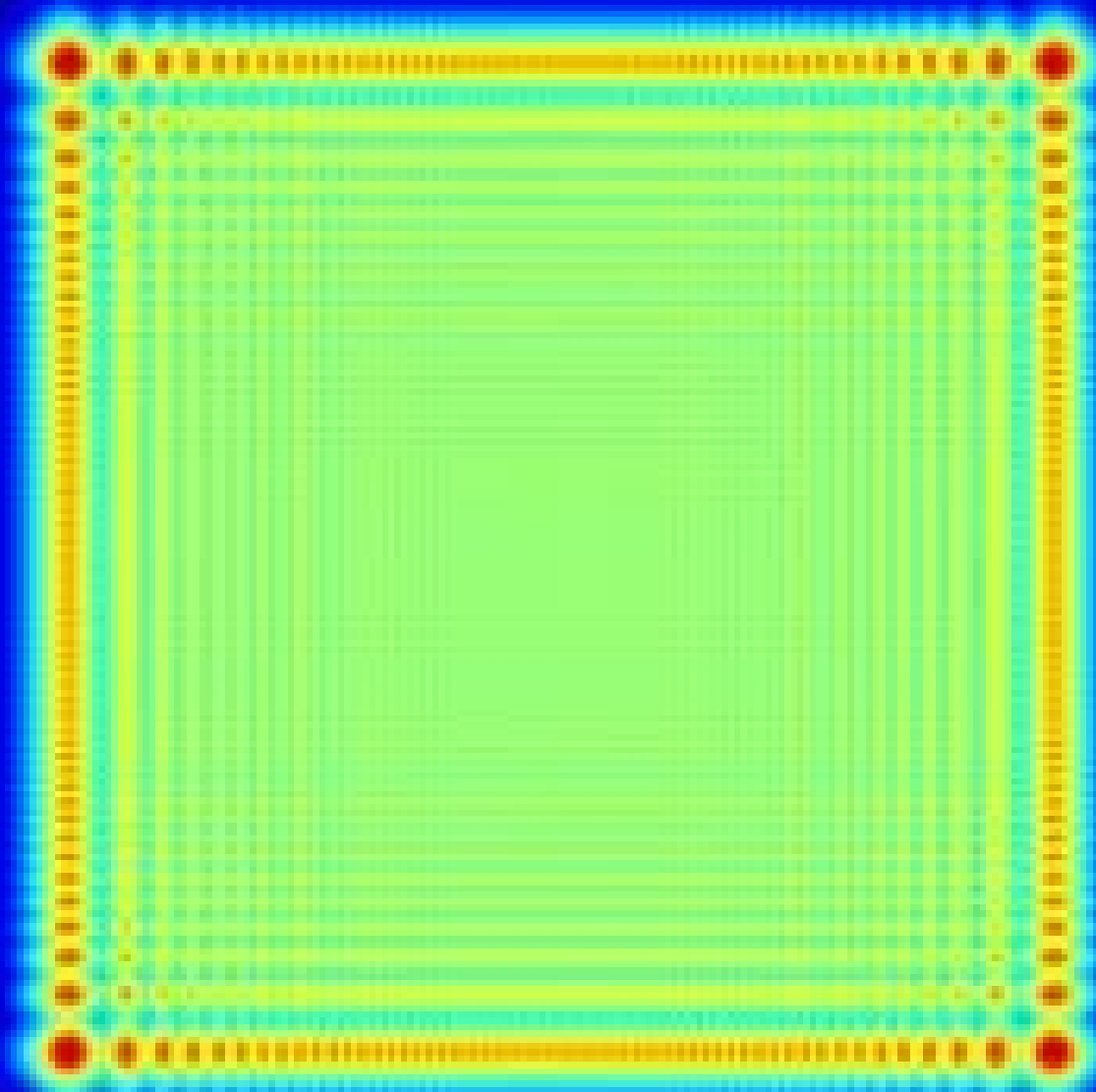
Περίθλαση από το χείλος ενός αντικειμένου

Περίθλαση από το χείλος ενός αντικειμένου

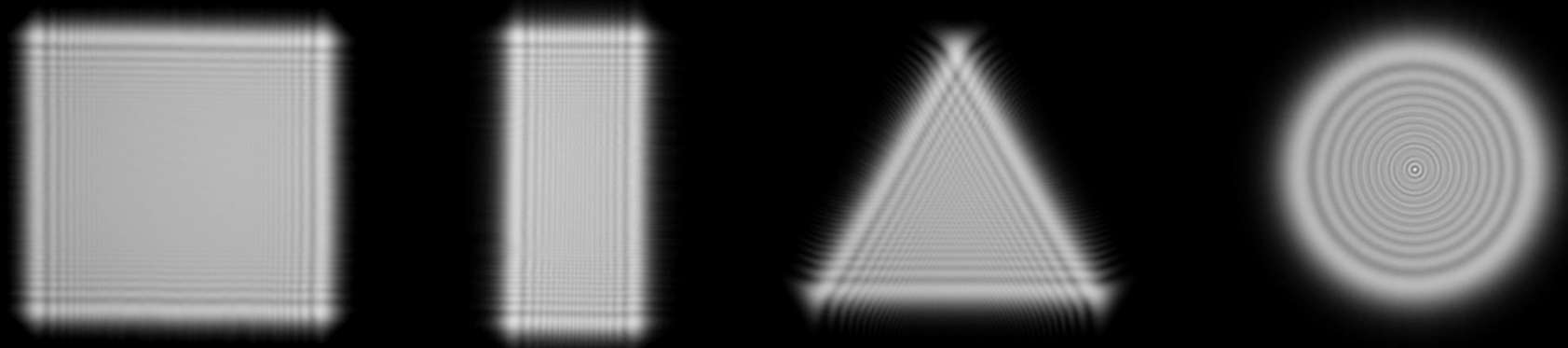


Περίθλαση μακρινού και κοντινού πεδίου

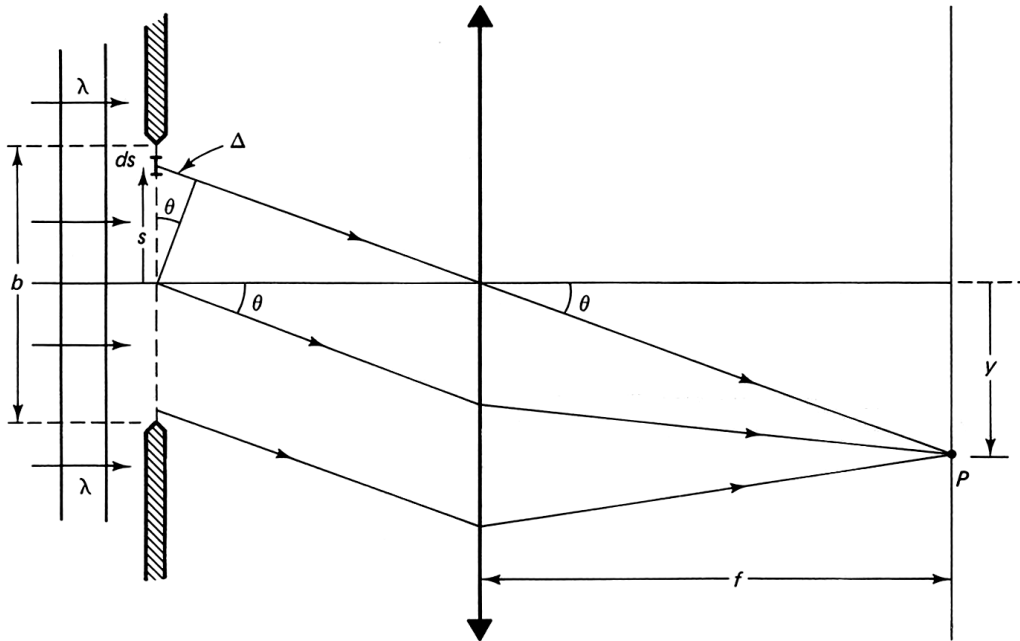




Περίθλαση μακρινού και κοντινού πεδίου



Περίθλαση από μία σχισμή



Κάθε σημείο της επιφάνειας της σχισμής είναι εστία σφαιρικών κυμάτων, τα οποία φθάνουν με την αντίστοιχη καθυστέρηση στο σημείο P όπου προστίθενται

$$dE_p = \left(\frac{dE_o}{r} \right) e^{i(kr - \omega t)}$$

Το πλάτος του κύματος διαιρείται με το r , γιατί το πλάτος του σφαιρικού κύματος ελαττώνεται με την απόσταση κατά $1/r$.

Ας θέσουμε $r = r_0$ για τη στοιχειώδη πηγή που βρίσκεται στο $s=0$.

Το στοιχειώδες πεδίο στο σημείο **P** που προέρχεται από μία οποιαδήποτε στοιχειώδη πηγή **ds** σε απόσταση **s** από την αρχή του άξονα (δηλ. από το μέσο της σχισμής) δίνεται από τον τύπο:

$$dE_p = \left(\frac{dE_o}{r} \right) e^{i[k(r_0+\Delta)-\omega t]}$$

$$\Delta \ll r_0 \longrightarrow dE_o / (r_0 + \Delta) \approx \frac{dE_o}{r_0} \approx \frac{dE_o}{r}$$

Το πλάτος της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από κάθε στοιχειώδη πηγή εξαρτάται από το μέγεθος του ds , έτσι ώστε όταν όλες οι συνεισφορές προστεθούν, να έχουμε την ολική συνεισφορά στο σημείο P .

$$dE_o = E_L ds$$

E_L είναι το πλάτος του ηλ. πεδίου ανά μονάδα πλάτους της σχισμής ($E_L b = E_o$)

Για το σημείο P, σε γωνία θ κάτω από τον άξονα που περνά από το κέντρο του φακού

$$\Delta = s \sin \theta$$

Η διαφορική συνεισφορά στο πεδίο του P από μια οποιαδήποτε στοιχειώδη πηγή ds

$$dE_P = \left(\frac{E_L ds}{r_o} \right) e^{i(kr_o + ks \sin \theta - \omega t)}$$

Ολοκληρώνοντας σ' όλο το πλάτος της σχισμής έχουμε

$$E_P = \left(\frac{E_L}{r_o} \int_{-b/2}^{b/2} e^{iks \sin \theta} ds \right) e^{i(kr_o - \omega t)}$$

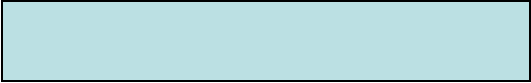
Επειδή μας ενδιαφέρει η ένταση $I = E_P E_P^* = |E_P|^2$ την οποία μπορούμε να μετρήσουμε και όχι το πλάτος του πεδίου, λόγω της πολύ υψηλής συχνότητας των οπτικών κυμάτων $\omega \approx 10^{14}$ Hz, κρατάμε μόνο τους όρους της παρένθεσης, οπότε

$$E_P = \frac{E_L}{r_o} \left(\frac{e^{iks \sin \theta}}{ik \sin \theta} \right)_{-b/2}^{b/2} \longrightarrow E_P = \frac{E_L}{r_o} \frac{1}{ik \sin \theta} [e^{(ikb \sin \theta)/2} - e^{-(ikb \sin \theta)/2}]$$

Κάνοντας την αντικατάσταση

$$\beta \equiv \frac{1}{2} kb \sin \theta$$

$$\longrightarrow E_P = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta) \longrightarrow \boxed{E_P = \frac{E_L b \sin \beta}{r_o \beta}}$$

 : διαφορά φάσης μεταξύ των κυμάτων που προέρχονται από το κέντρο και από τα άκρα της σχισμής

Η ένταση του κύματος

$$\boxed{I = \left(\frac{\epsilon_o c}{2} \right) E_P^2 = \frac{\epsilon_o c}{2} \left(\frac{E_L b}{r_o} \right)^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}} \longrightarrow \boxed{I = I_o \left(\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \equiv I_o \sin^2(\beta)}$$

$$I = I_o, \text{ για } \beta = 0$$

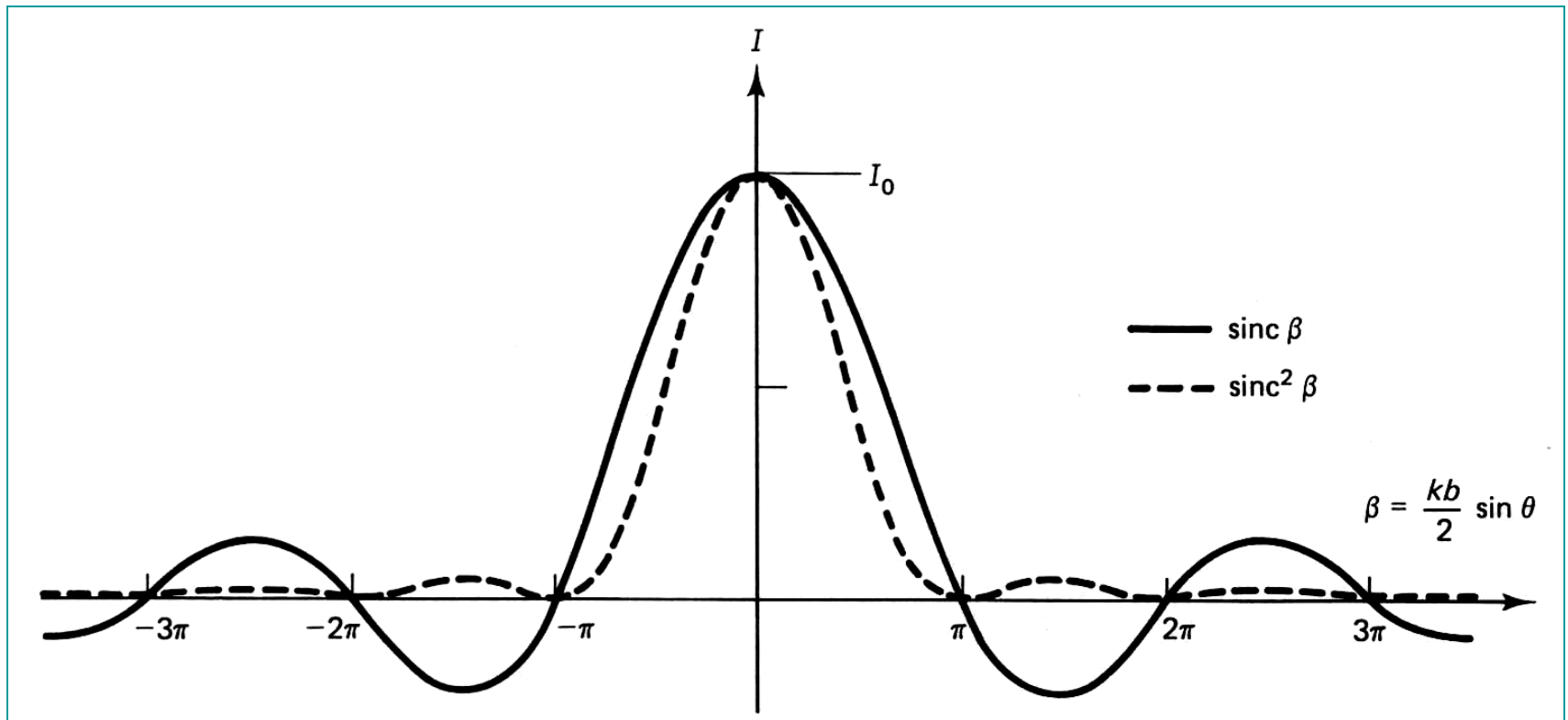
$$I = 0, \text{ όταν } \sin \beta = 0 \quad \beta = \frac{1}{2} (kb \sin \theta) = m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

ελάχιστα

Τα μέγιστα της συνάρτησης δίνονται από τη σχέση

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) = \frac{\beta \cos \beta - \sin \beta}{\beta^2} = 0 \longrightarrow \boxed{\beta = \tan \beta}$$

$$\boxed{\beta = 1.43\pi, 2.46\pi, 3.47\pi \text{ κλπ.}}$$



Παράδειγμα:

Ποιος είναι ο λόγος των εντάσεων του κυρίως λοβού και του πρώτου από τα δευτερεύοντα μέγιστα;

Ο λόγος υπολογίζεται από τη σχέση της έντασης για $\beta=0$ και $\beta=1.43\pi$

$$\frac{I_{\beta=0}}{I_{\beta=1.43\pi}} = \frac{(\sin^2 \beta/\beta^2)_{\beta=0}}{(\sin^2 \beta/\beta^2)_{\beta=1.43\pi}} = \frac{1}{(\sin^2 \beta/\beta^2)_{\beta=1.43\pi}} = \left(\frac{\beta^2}{\sin^2 \beta} \right)_{1.43\pi} = \frac{20.18}{0.952} = 21.2$$

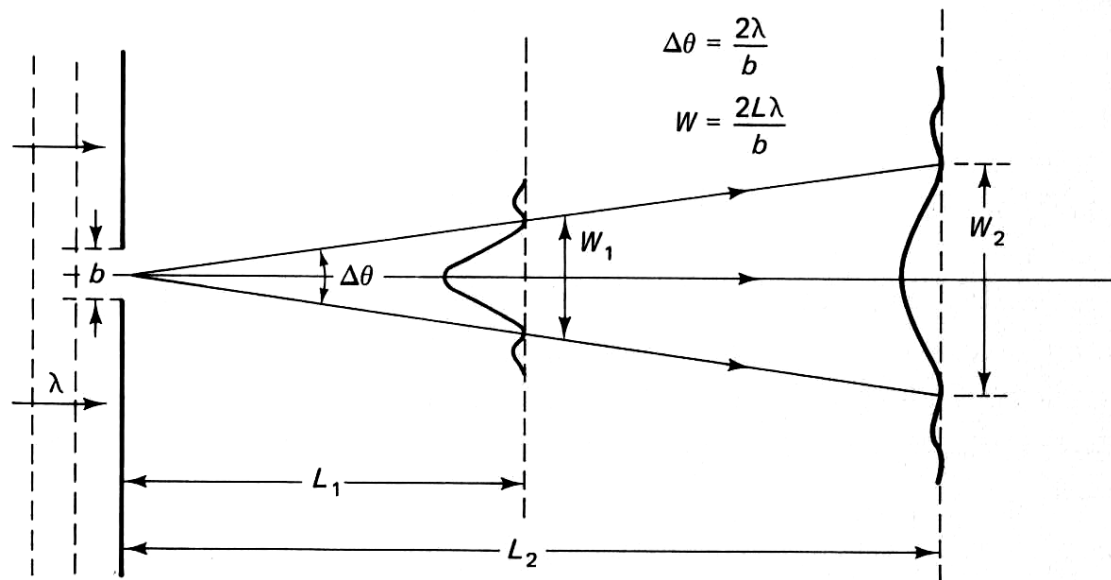
Άρα, η ένταση του δευτερεύοντος λοβού είναι μόλις το 4.7% του πρωτεύοντος λοβού!

Ο κεντρικός λοβός περίθλασης (δηλ. το συνολικό πλάτος μεταξύ των δύο πρώτων μηδενισμών της έντασης εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου) φαίνεται υπό γωνία $\Delta\theta$ από τη σχισμή

$$\left. \begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m\lambda = b \sin \theta \\ \sin \theta \sim \theta \end{array} \right\}$$

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b}$$

Δηλαδή, ο κεντρικός λοβός πλαταίνει απεριόριστα όσο το εύρος της σχισμής ελαττώνεται. Θα πλησιάσει όμως το άπειρο; Πρόσφατα πειράματα έδειξαν ότι για σχισμές της τάξης των nm η περίθλαση αρχίζει να περιορίζεται. Αυτό οφείλεται στην αλληλεπίδραση του φωτός με τα φωνόνια των μετάλλων που στη σχισμή έχουν κατεύθυνση ορμής μη παράλληλη προς την επιφάνεια.



Η γραμμική διάσταση του λοβού W

$$W = L\Delta\theta = \frac{2L\lambda}{b}$$

Παράδειγμα

Έστω μια παράλληλη δέσμη laser με $\lambda = 546\text{nm}$ και εύρος $b = 0.5\text{mm}$ που διαδίδεται σε απόσταση 10m . Βρείτε το τελικό άνοιγμα της δέσμης.

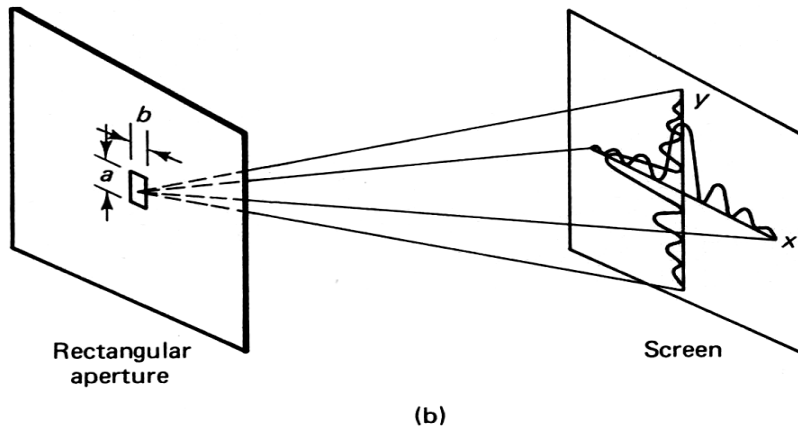
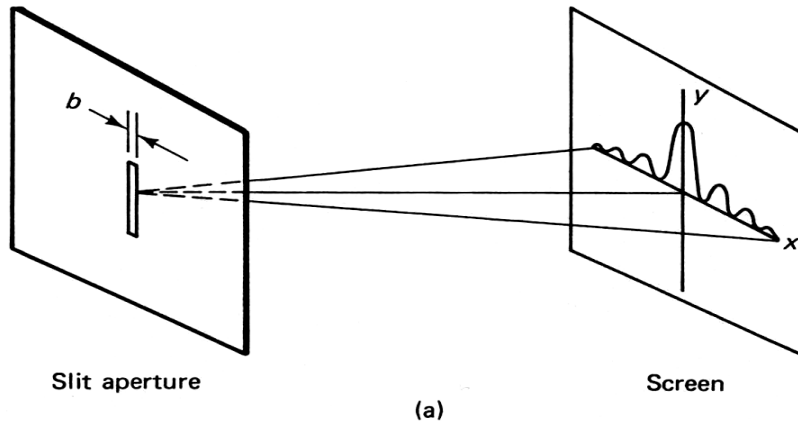
Λύση: Από την εξίσωση (15) έχουμε ότι

$$W = \frac{2L\lambda}{b} = \frac{2(10)(546 \times 10^{-9})}{0.5 \times 10^{-3}} = 21.8\text{mm}.$$

Δηλαδή, ακόμη και η δέσμη ενός laser που είναι αρκετά παράλληλη υφίσταται περίθλαση. Δεν μπορούν να υπάρξουν τελείως παράλληλες δέσμες φωτός. Αυτό αποτελεί μία βασική συνέπεια της κυματικής φύσης του φωτός.

Περίθλαση από ορθογώνιες οπές

Όταν και οι δύο διαστάσεις της σχισμής είναι συγκρίσιμες, τότε θα έχουμε αισθητή περίθλαση και στις δύο διευθύνσεις



Για το ύψος **a**

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad \text{όπου} \quad \alpha \equiv \left(\frac{k}{2} \right) a \sin \theta$$

Η ένταση πάνω στο πέτασμα είναι το γινόμενο των επιμέρους εντάσεων στους άξονες x και y

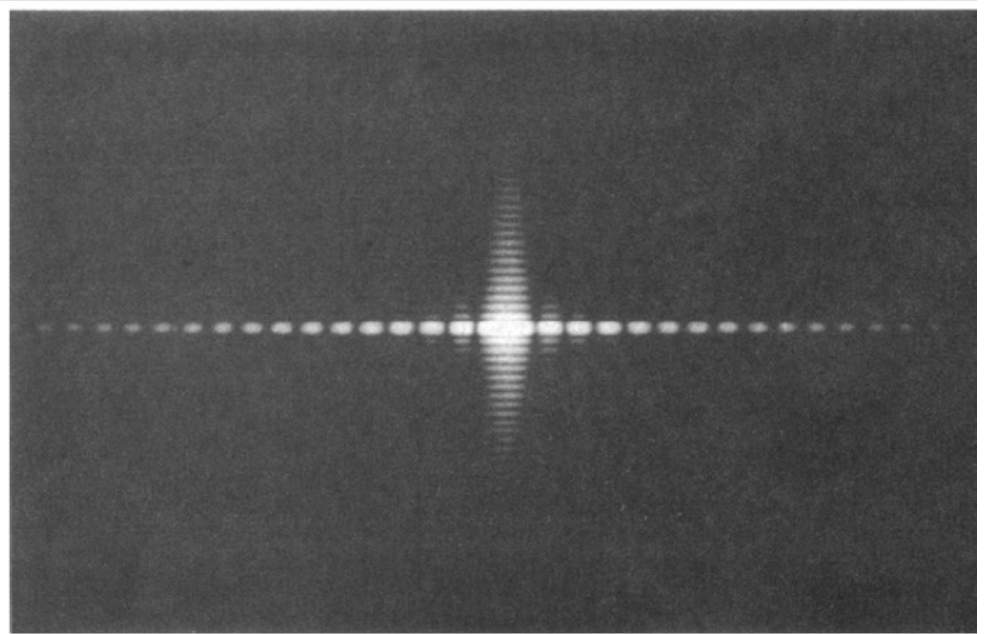
$$I = I_0 (\sin^2 \beta)(\sin^2 \alpha)$$

Η ένταση του πεδίου θα εμφανίζει μηδενικές τιμές στα x και y που ικανοποιούν τις σχέσεις

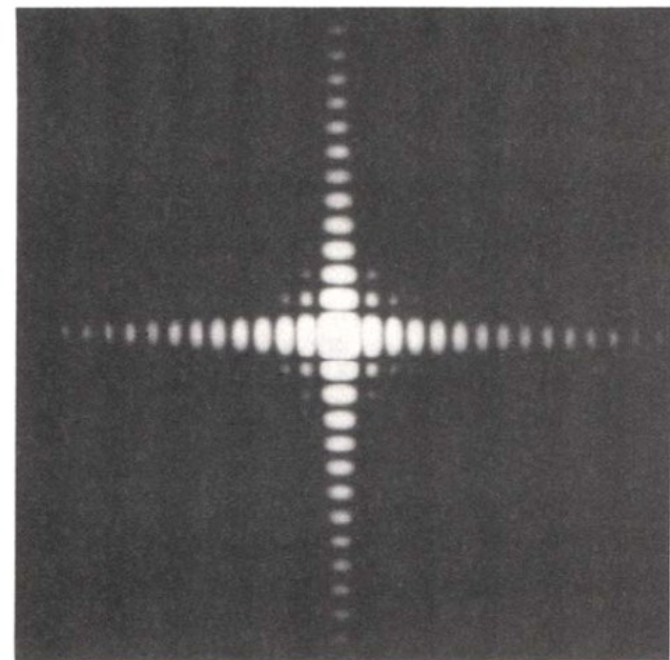
$$y = \frac{m\lambda f}{b} \quad \text{και} \quad x = \frac{n\lambda f}{a}$$

Πραγματική εικόνα περίθλασης της περίπτωσης (a).

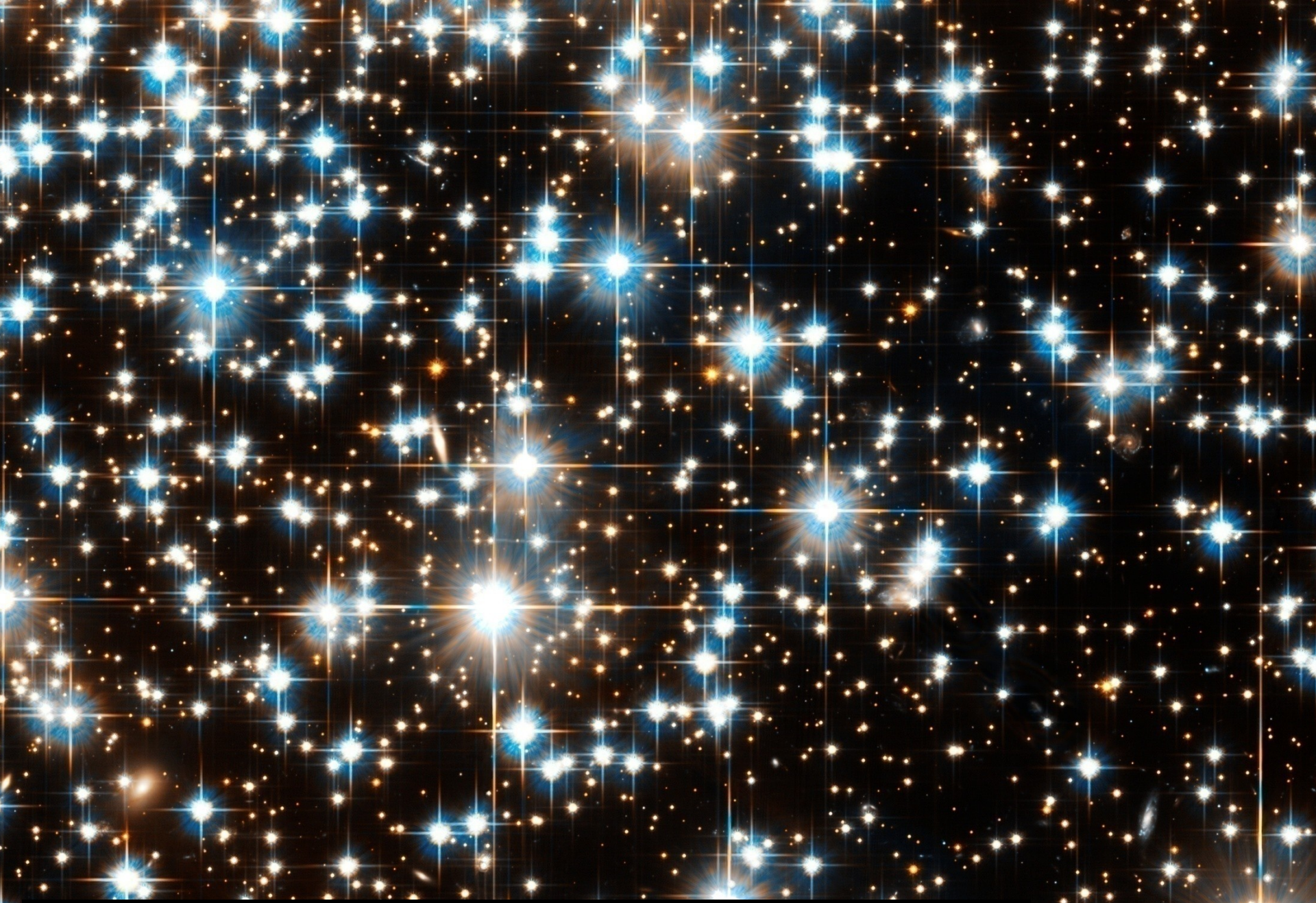
(d) Πραγματική εικόνα περίθλασης από τετράγωνη σχισμή που αντιστοιχεί στην περίπτωση (b).



(c)



(d)



Περίθλαση από κατοπτρικό τηλεσκόπιο





Περίθλαση από διοπτρικό τηλεσκόπιο



Περίθλαση από κατοπτρικό τηλεσκόπιο



Περίθλαση από κυκλικές οπές

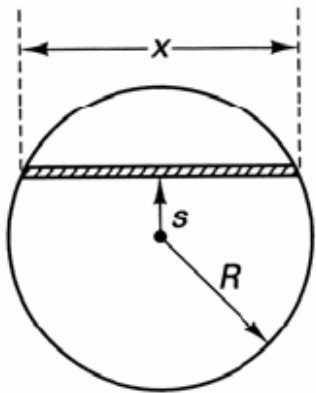
Στη σχισμή: $dE_o = E_A dA$ όπου E_A είναι τώρα το πλάτος ανά μονάδα επιφάνειας

Το πεδίο στο P δίνεται από την σχέση

$$E_P = \frac{E_A}{r_o} \iint_{Area} e^{isk \sin \theta} dA$$

Στοιχειώδης επιφάνεια μια ορθογώνια ταινία επιφάνειας $dA = xds$

$$x = 2\sqrt{R^2 - s^2}$$

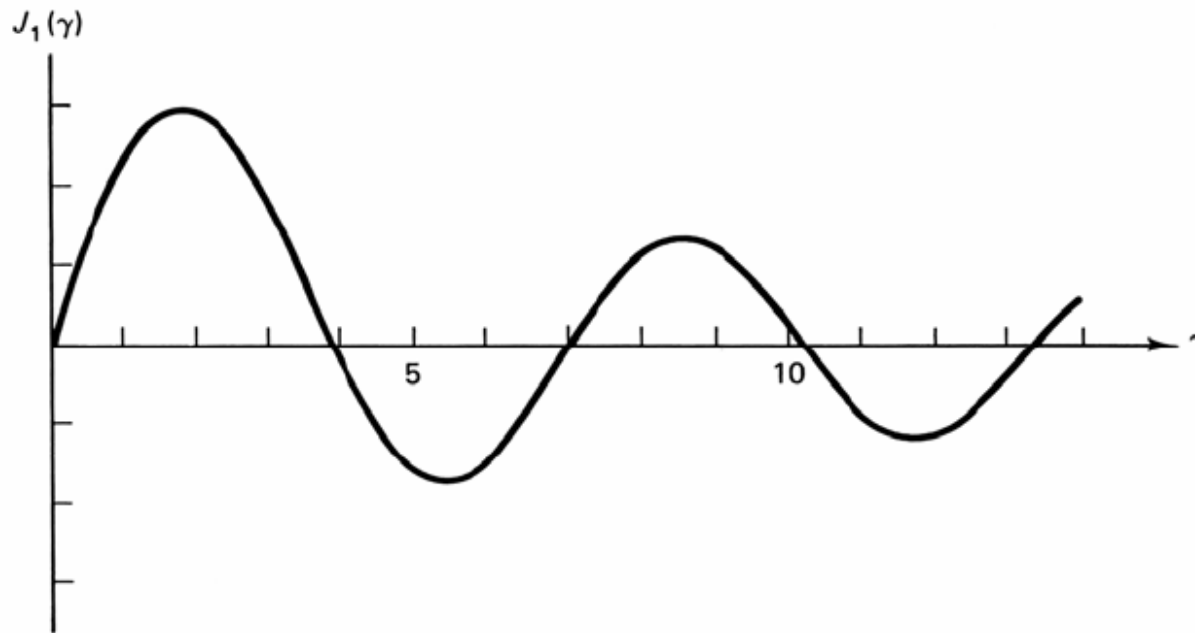


$$\left. \begin{aligned} E_P &= \frac{2E_A}{r_o} \int_{-R}^R e^{isks \sin \theta} \sqrt{R^2 - s^2} ds \\ \nu &= s/R \\ \gamma &= kR \sin \theta \end{aligned} \right\} E_P = \frac{2E_A R^2}{r_o} \int_{-1}^{+1} e^{i\gamma \nu} \sqrt{1 - \nu^2} d\nu$$

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\gamma v} \sqrt{1-v^2} dv = \frac{\pi J_1(\gamma)}{\gamma}$$

όπου $J_1(\gamma)$ είναι μια συνάρτηση Bessel πρώτης τάξης

$$J_1(\gamma) = \frac{\gamma}{2} - \frac{(\gamma/2)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{(\gamma/2)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \dots$$

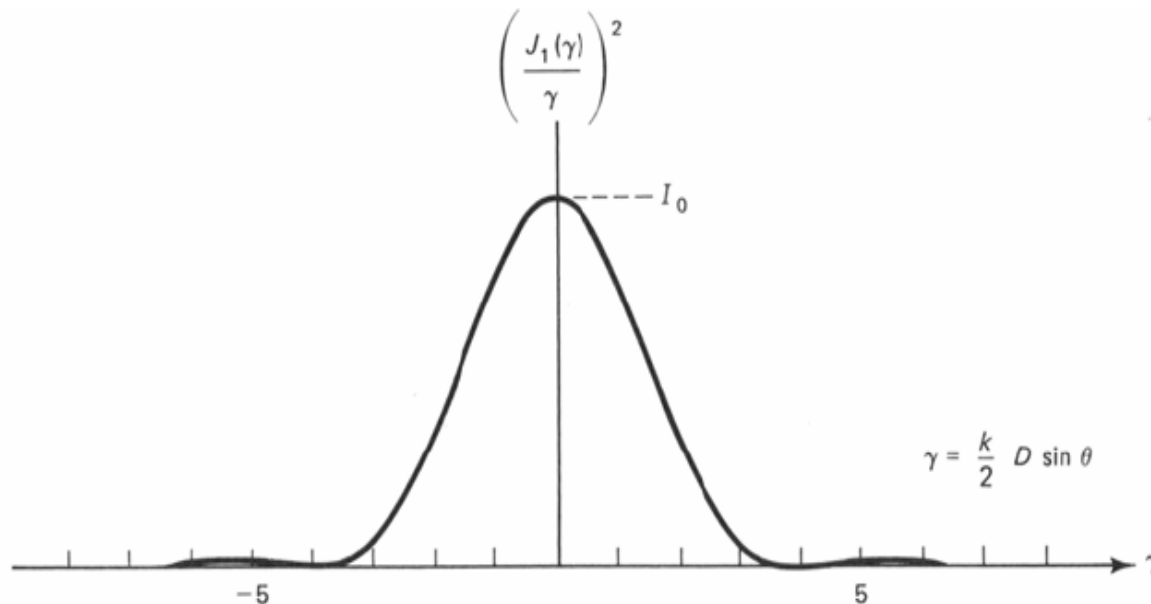


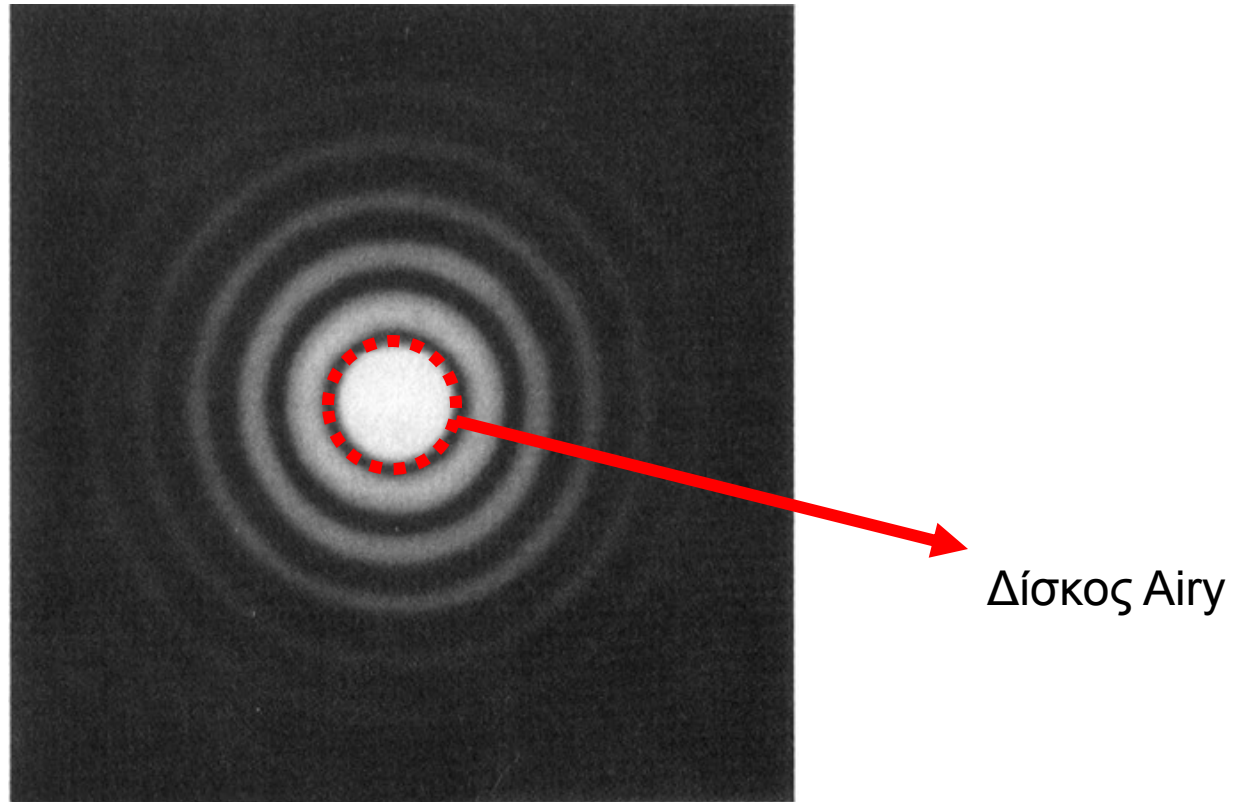
Για μια οπή διαμέτρου D , η κατανομή της έντασης πάνω στο πέτασμα

$$I = I_0 \left(\frac{2J_1(\gamma)}{\gamma} \right)^2 \quad \text{όπου } \gamma \equiv \frac{1}{2} k D \sin \theta \quad \boxed{I_0 \text{ είναι η ένταση στο } \gamma=0}$$

Το πρώτο ελάχιστο της I ($I=0$) συμβαίνει όταν $\gamma=3.832$

$$\gamma = \frac{k}{2} D \sin \theta = 3.832 \quad \text{ή όταν } , D \sin \theta = 1.22 \lambda$$





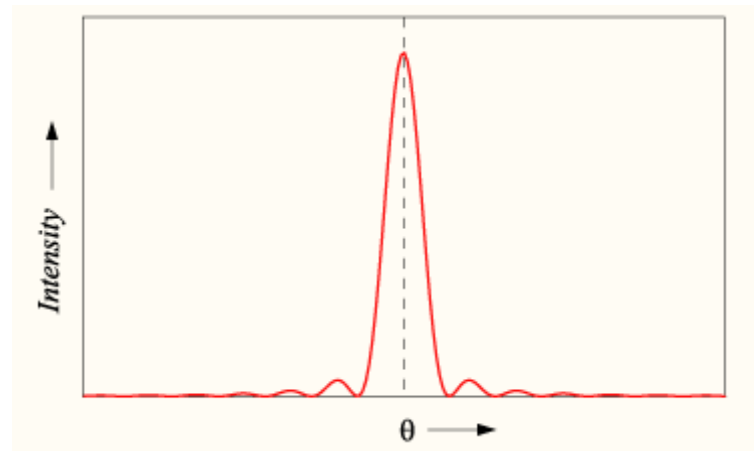
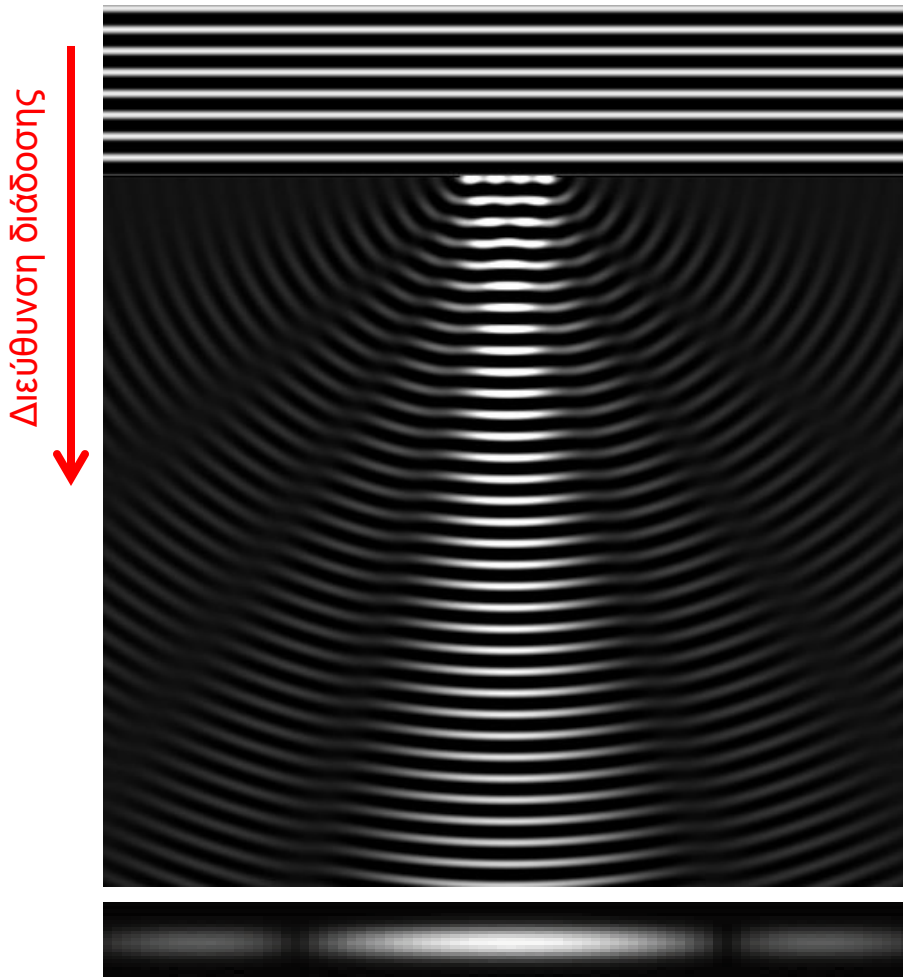
Το κεντρικό τμήμα αντιστοιχεί στη μηδενική τάξη της περίθλασης.
Ο κύκλος αυτός είναι γνωστός ως δίσκος του Airy.

Η γωνία υπό την οποία φαίνεται ο δίσκος Airy από το επίπεδο της οπής είναι

$$\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

• Περίθλαση του φωτός

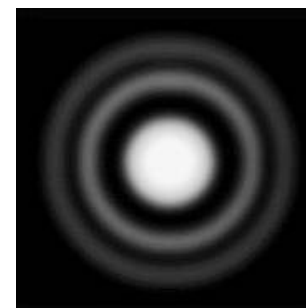
Παράλληλο φως προσπίπτει σε επιφάνεια με μικρό άνοιγμα



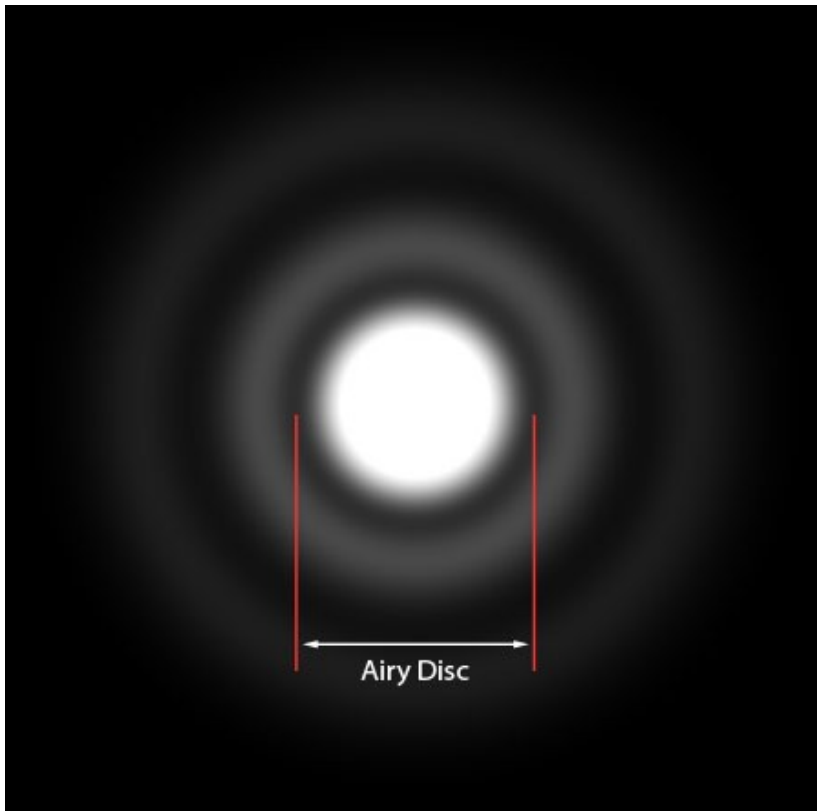
για σχισμή:



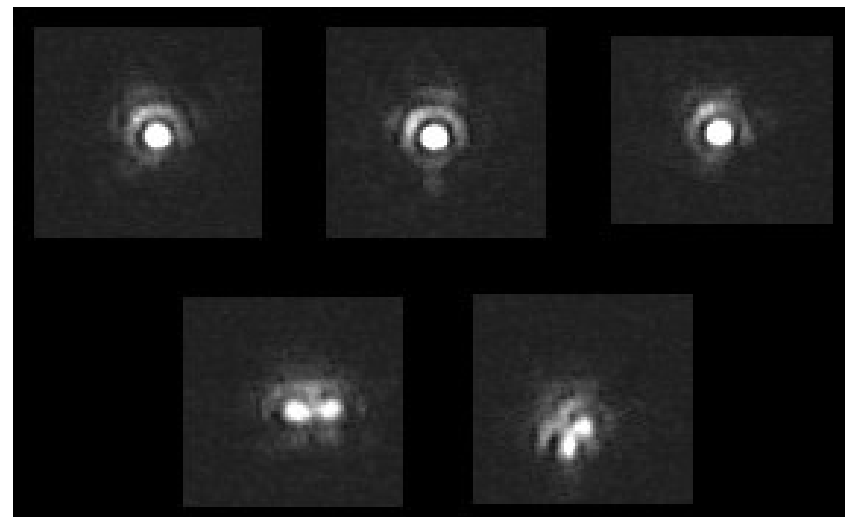
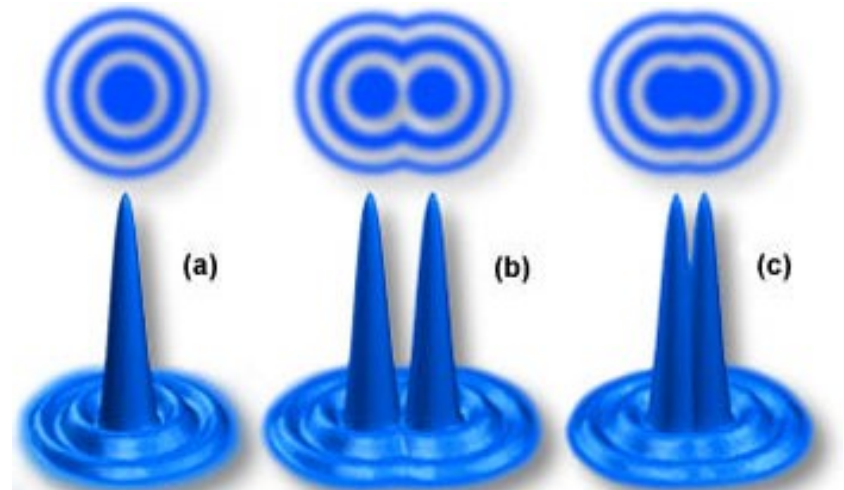
για κυκλικό άνοιγμα:



- Ο δίσκος του Airy

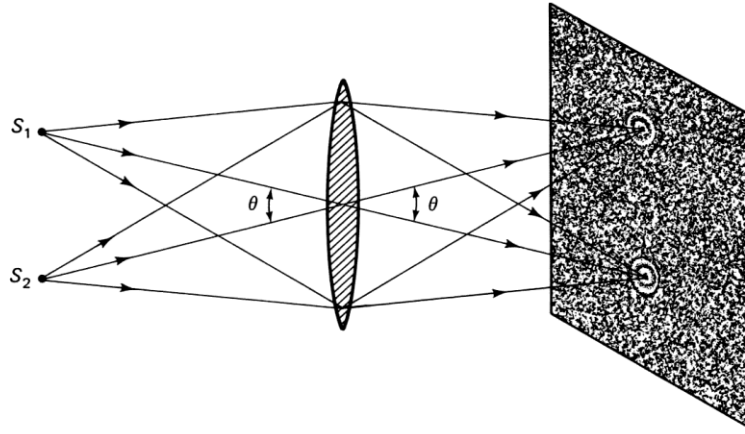


Ιδανική περίπτωση δίσκου Airy

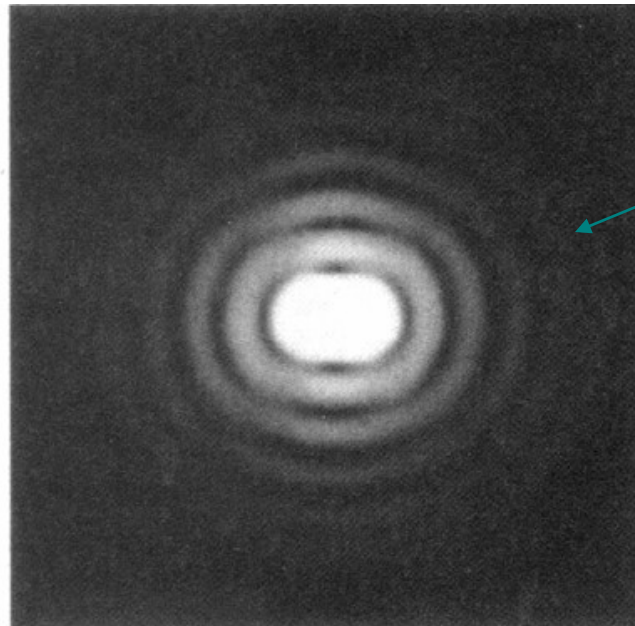
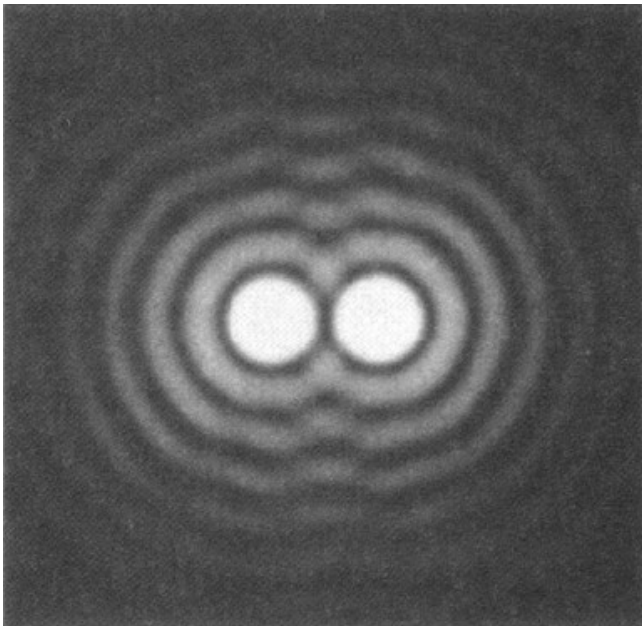


Πραγματικές περιπτώσεις δίσκου Airy

Διακριτική ικανότητα

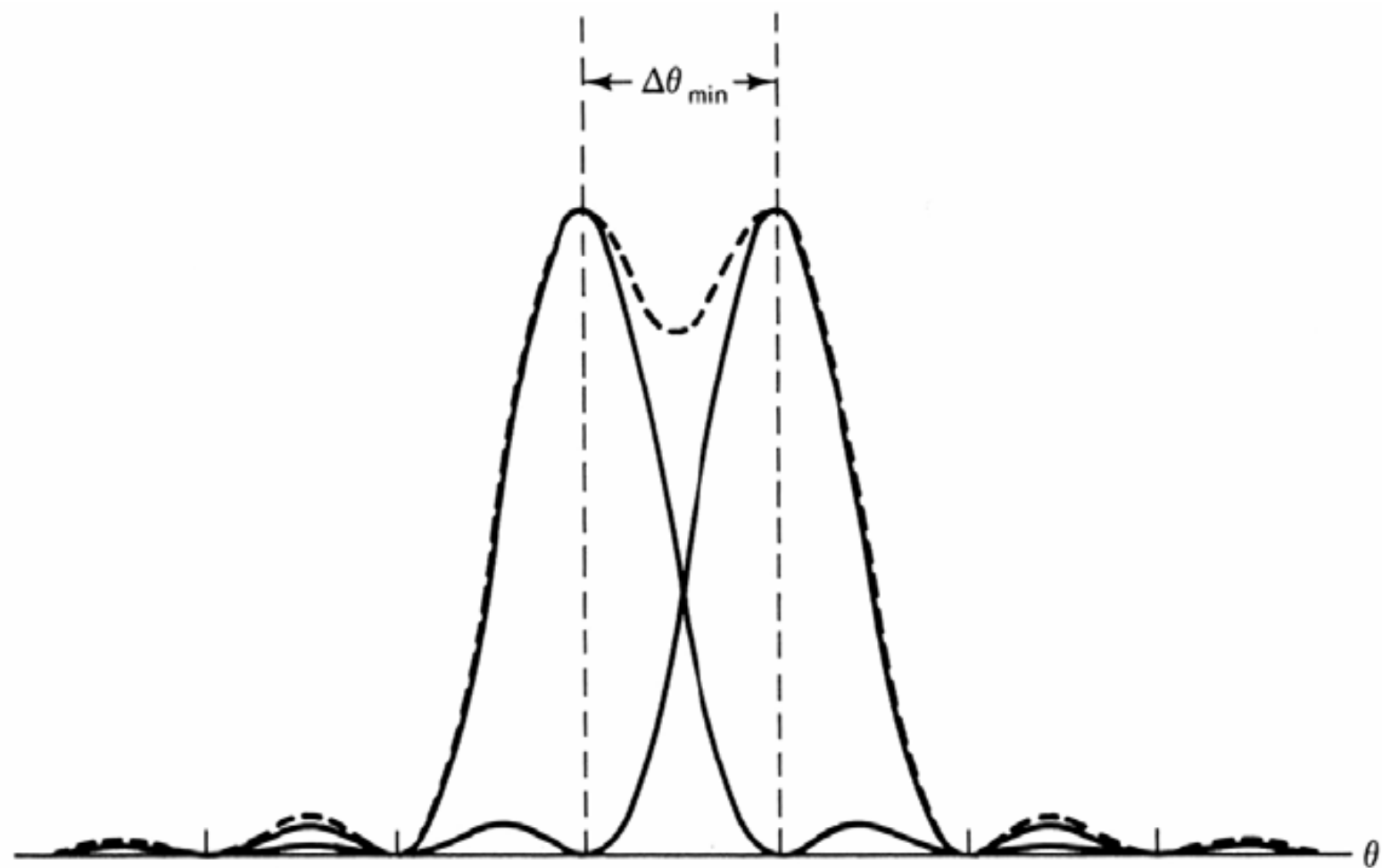


Σύμφωνα με **το κριτήριο του Rayleigh** η ελάχιστη γωνιακή απόκλιση δίνεται όταν οι δύο δίσκοι Airy έχουν κέντρα που απέχουν την ακτίνα των δίσκων.



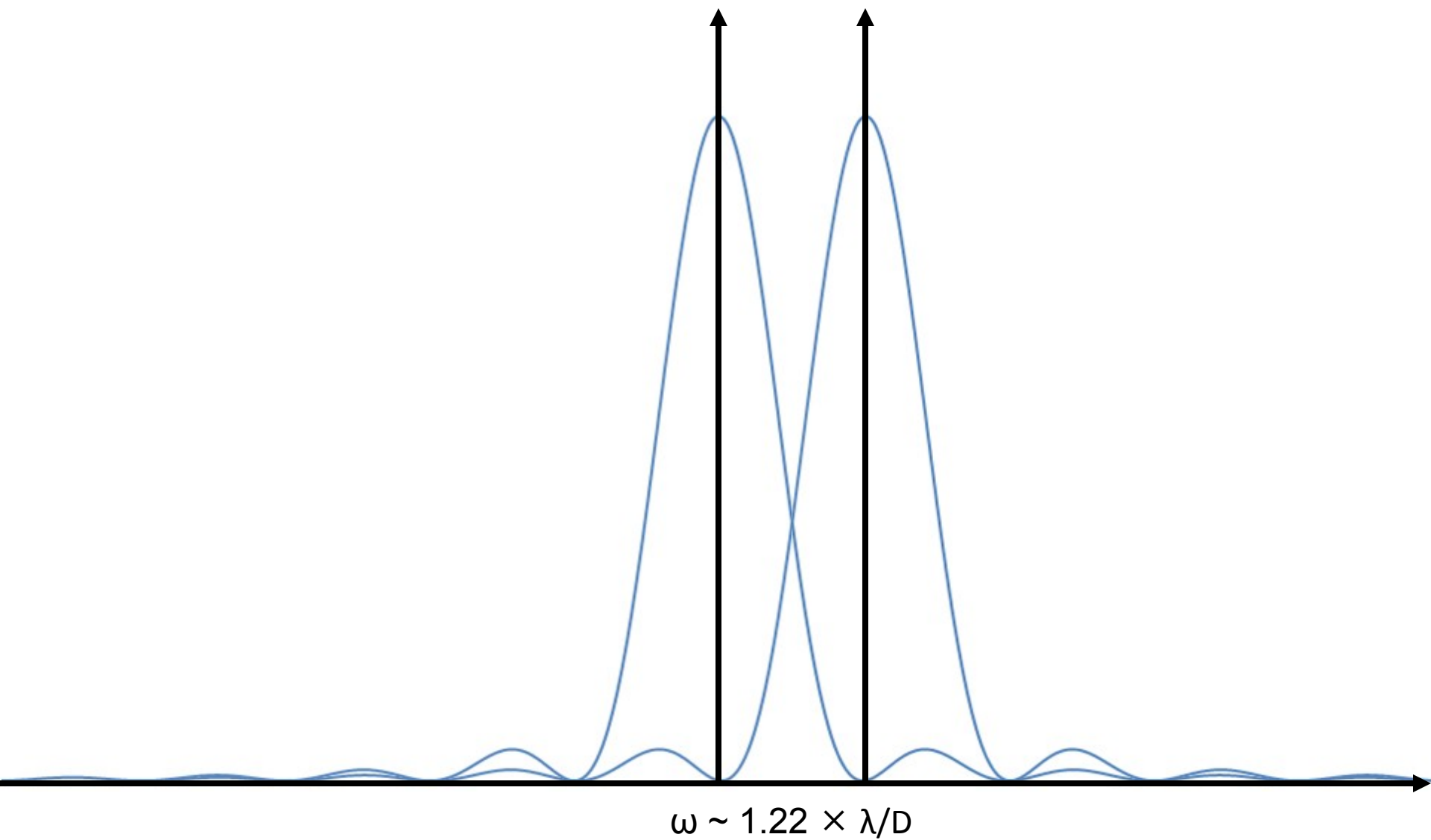
Μόλις ξεχωρίζουν

$$(\Delta\theta)_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D}$$

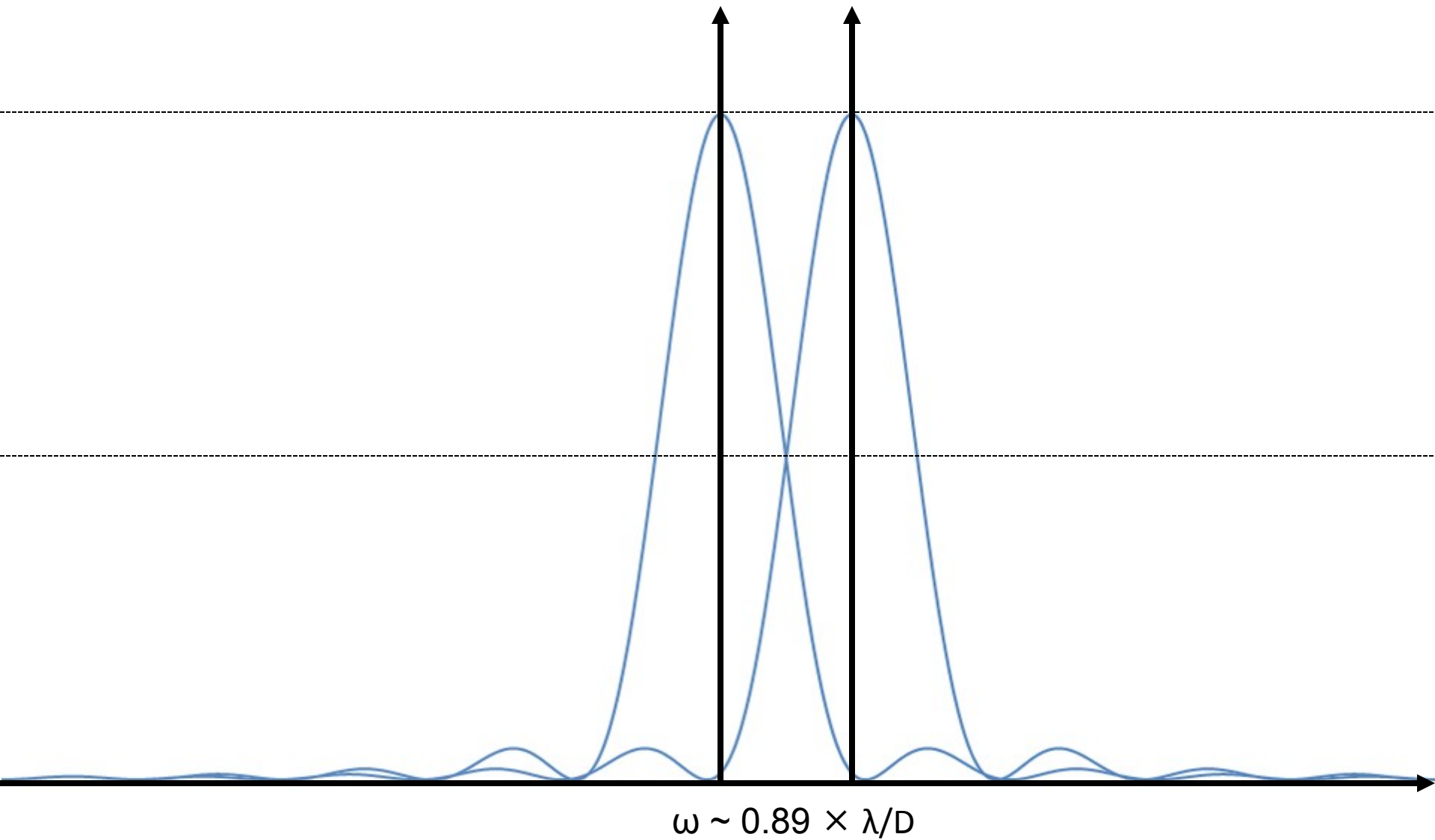


Το κριτήριο Rayleigh για δύο σημεία περίθλασης που μόλις ξεχωρίζουν.

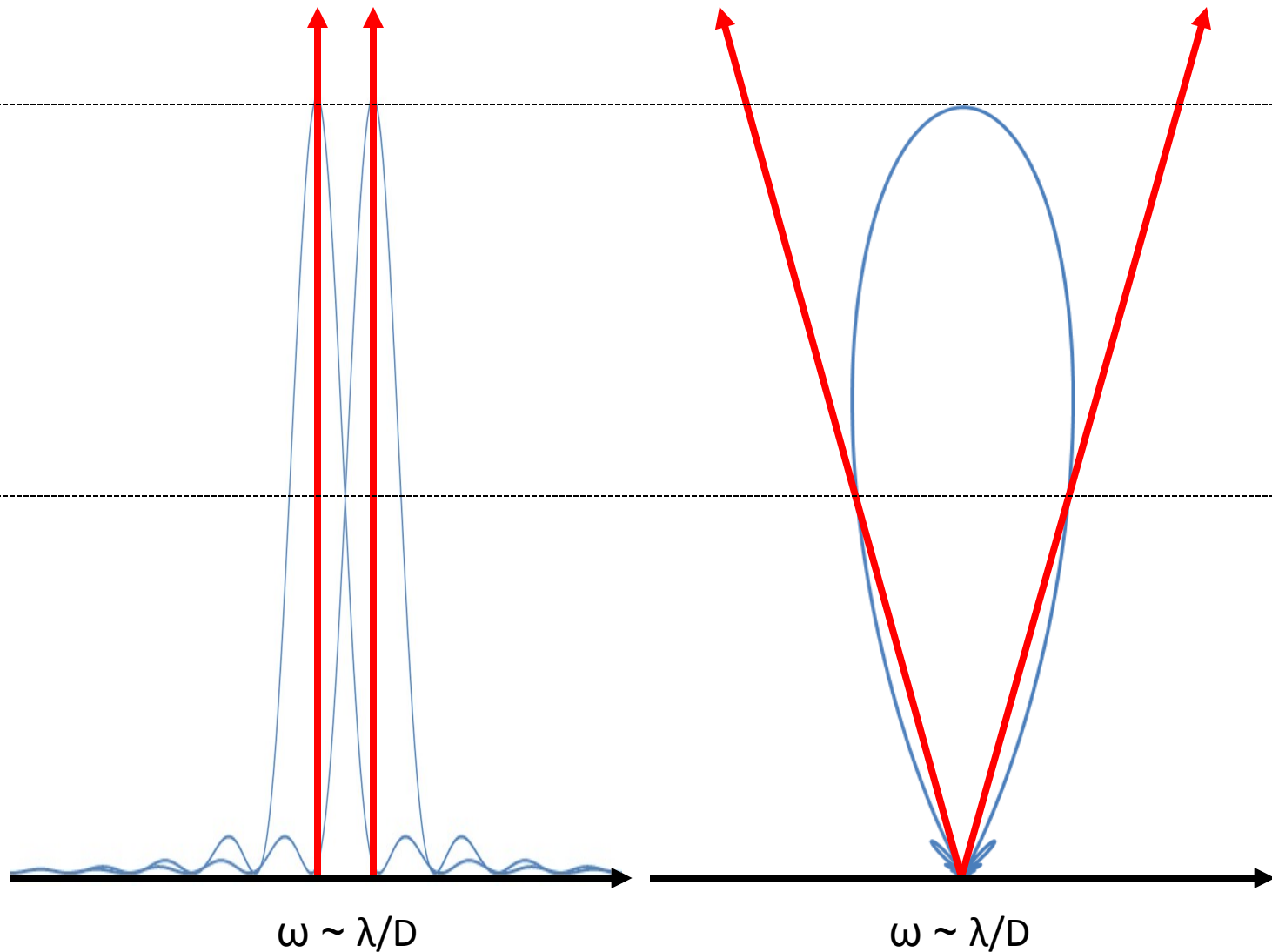
Κριτήριο Rayleigh

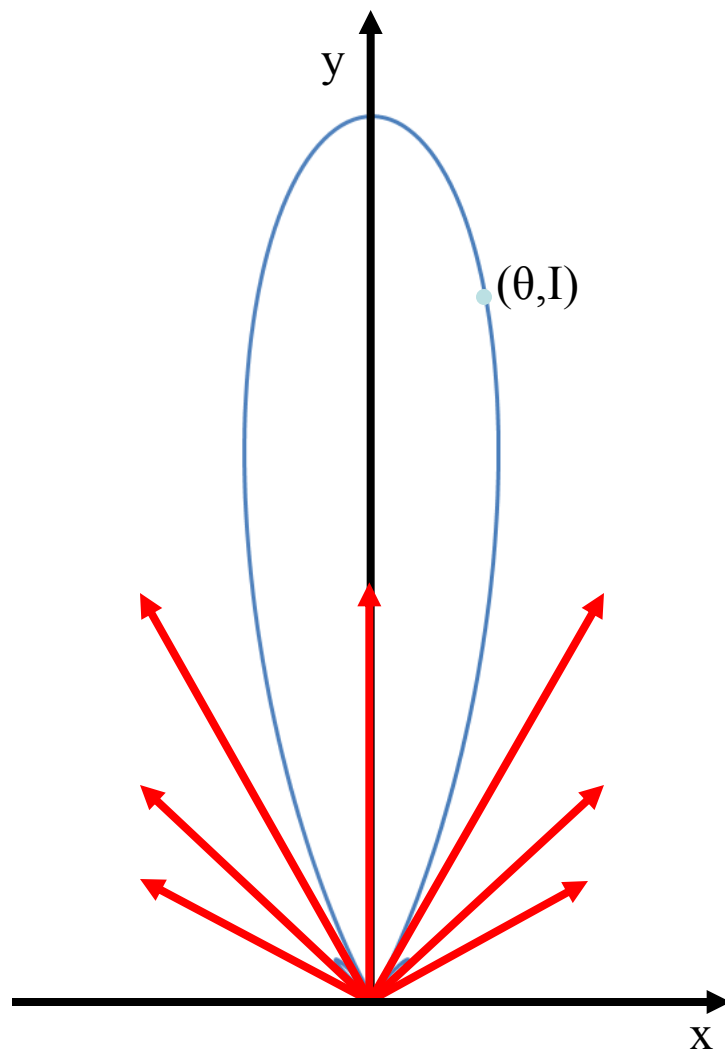
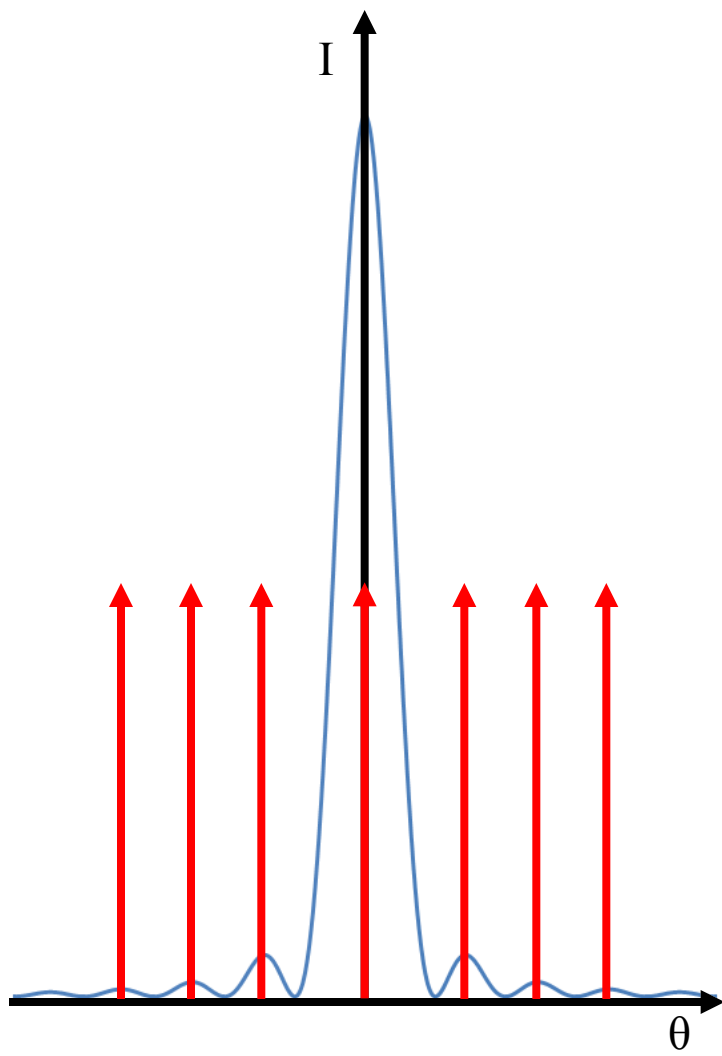


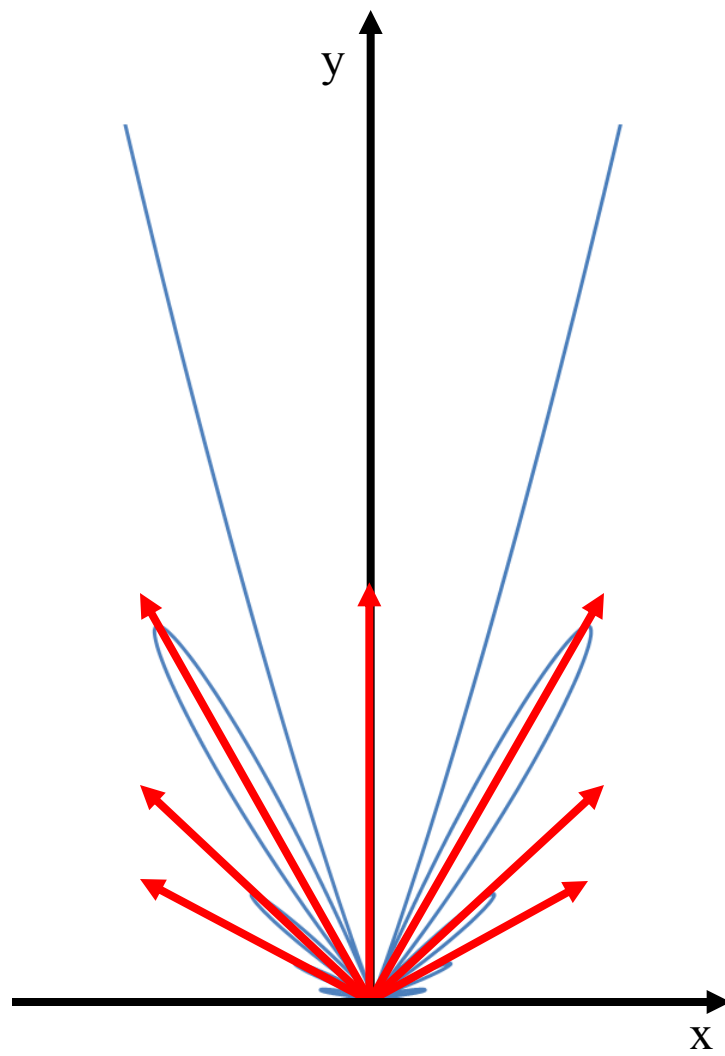
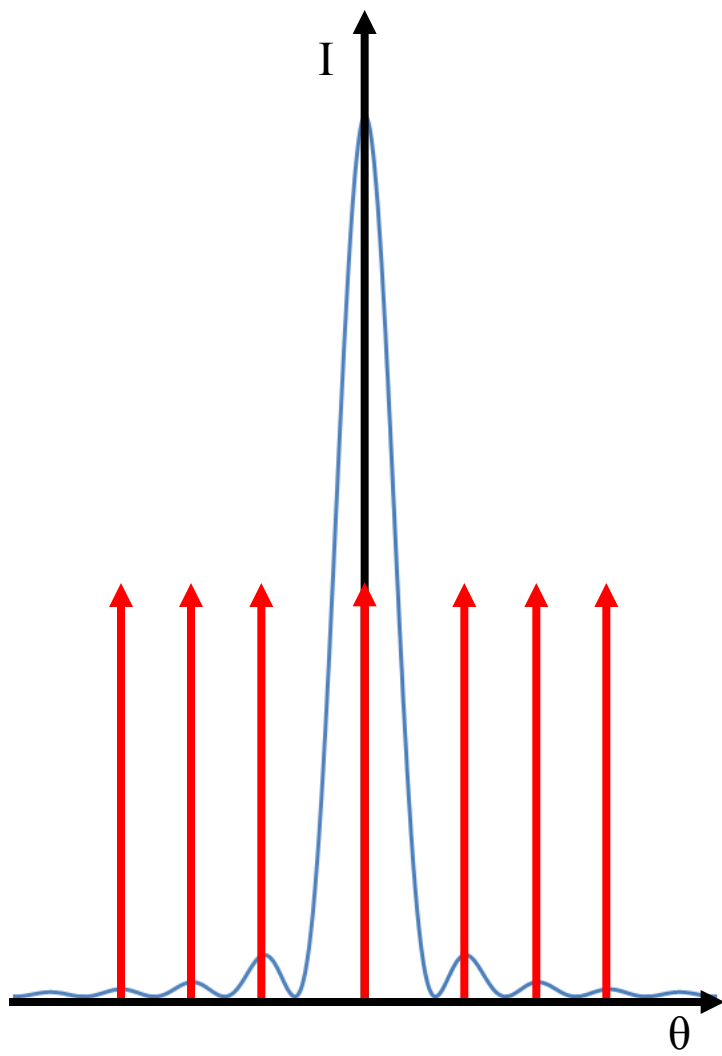
Κριτήριο ημίσειας έντασης (HPBW: Half Power Beam Width)



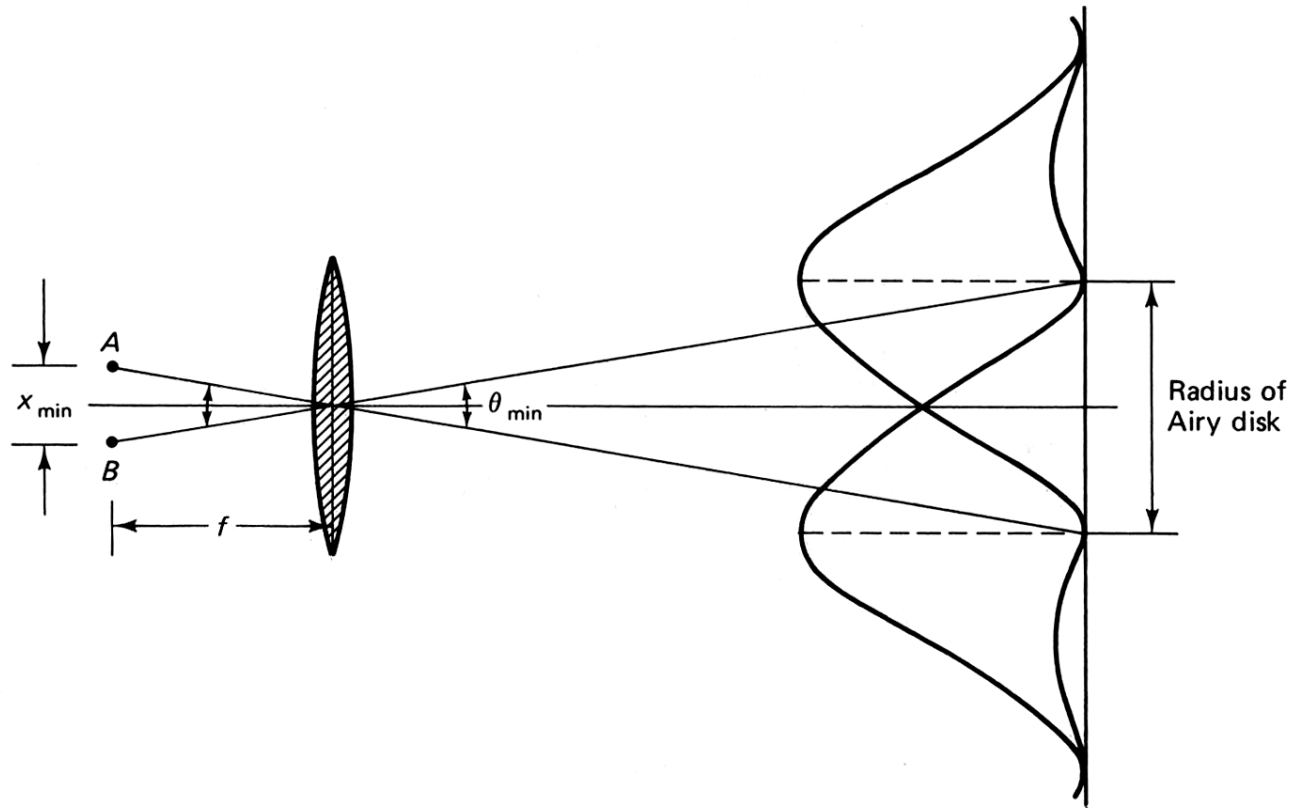
Κριτήριο ημίσειας έντασης (HPBW: Half Power Beam Width)





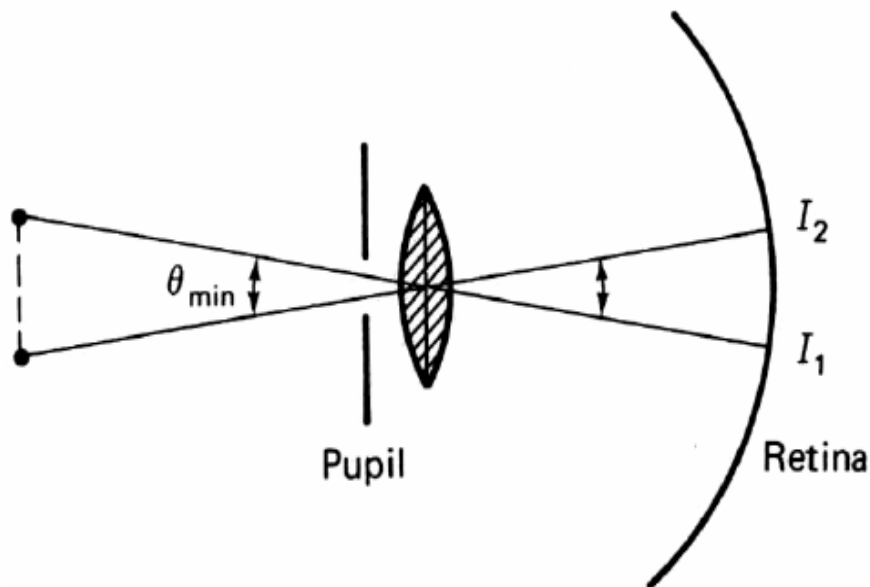


Ελάχιστη γωνιακή διακριτική ικανότητα για ένα φακό.



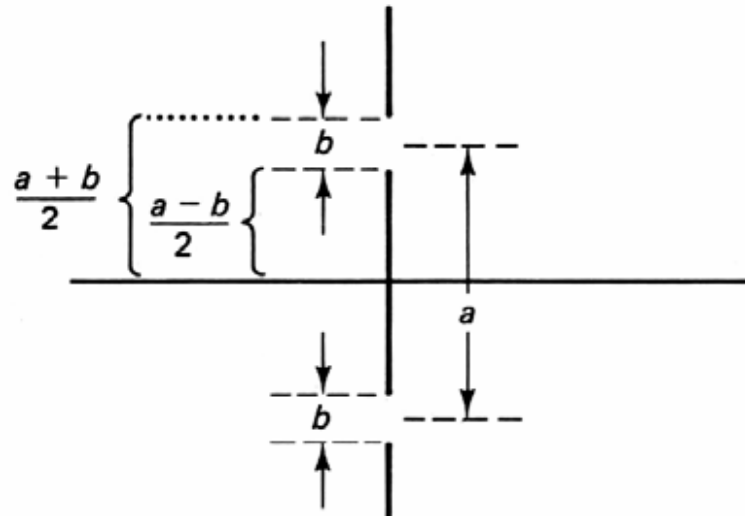
Διακριτική ικανότητα του οφθαλμού:

Κατά τη διάρκεια μιας ηλιόλουστης ημέρας η διάμετρος της ίριδας του οφθαλμού είναι περίπου 2mm . Από τη σχέση (22) βρίσκουμε για $\lambda=550\text{nm}$ ότι $\Delta\theta_{\min} = 33.6 \cdot 10^{-5} \text{rad}$.



$$(\Delta\theta)_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D} (*)$$

Περίθλαση από διπλή σχισμή



Για το πλάτος E_R θα έχουμε

$$E_P = \frac{E_L}{r_0} \int_{-(1/2)(a+b)}^{-(1/2)(a-b)} e^{isk \sin \theta} ds + \frac{E_L}{r_0} \int_{(1/2)(a-b)}^{(1/2)(a+b)} e^{isk \sin \theta} ds$$

Ολοκλήρωση και αντικατάσταση των ορίων δίνει

$$E_P = \frac{E_L}{r_0} \frac{1}{ik \sin \theta} [e^{(1/2)ik(-a+b) \sin \theta} - e^{(1/2)ik(-a-b) \sin \theta} + e^{(1/2)ik(a+b) \sin \theta} - e^{(1/2)ik(a-b) \sin \theta}]$$

ορίζοντας

$$\beta \equiv \frac{1}{2}kb \sin \theta$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{2}ka \sin \theta$$

$$\longrightarrow E_P = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} [e^{i\alpha}(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + e^{-i\alpha}(e^{i\beta} - e^{-i\beta})]$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Euler έχουμε

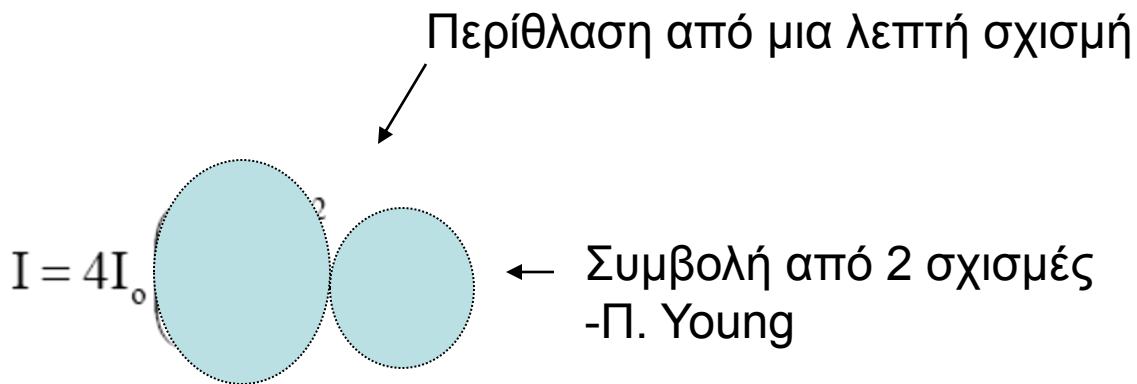
$$E_P = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta)(2 \cos \alpha)$$

$$\longrightarrow E_P = \frac{2E_L b \sin \beta}{r_o \beta} \cos \alpha$$

Η ένταση δίνεται τώρα από την

$$I = \left(\frac{\epsilon_o c}{2} \right) E_R^2 = \left(\frac{\epsilon_o c}{2} \right) \left(\frac{2E_L b}{r_o} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha$$

Ισοδύναμα, η ένταση γράφεται



όπου

$$I_0 = \left(\frac{\epsilon_0 c}{2} \right) \left(\frac{E_L b}{r_0} \right)^2$$

Η ένταση στο κέντρο είναι τώρα $4I_0$

Αυτό είναι αναμενόμενο όταν οι δέσμες είναι σε φάση και τα πλάτη προστίθενται.

Ελάχιστα περίθλασης $m\lambda = b \sin \theta$

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Μέγιστα συμβολής $p\lambda = a \sin \theta$

$$p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

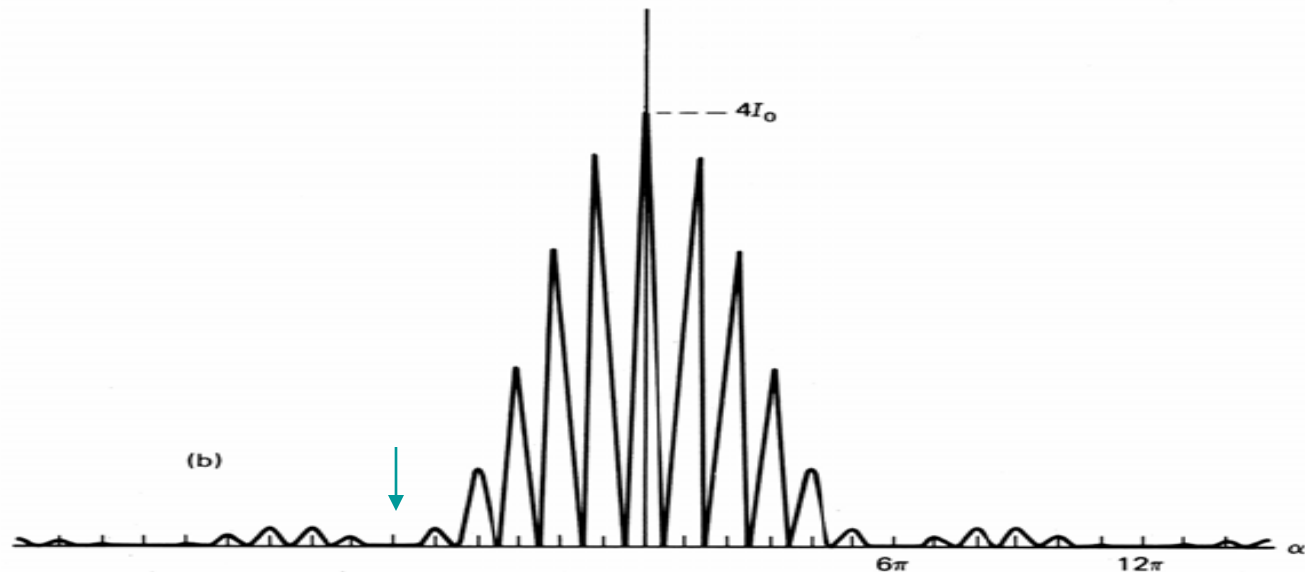
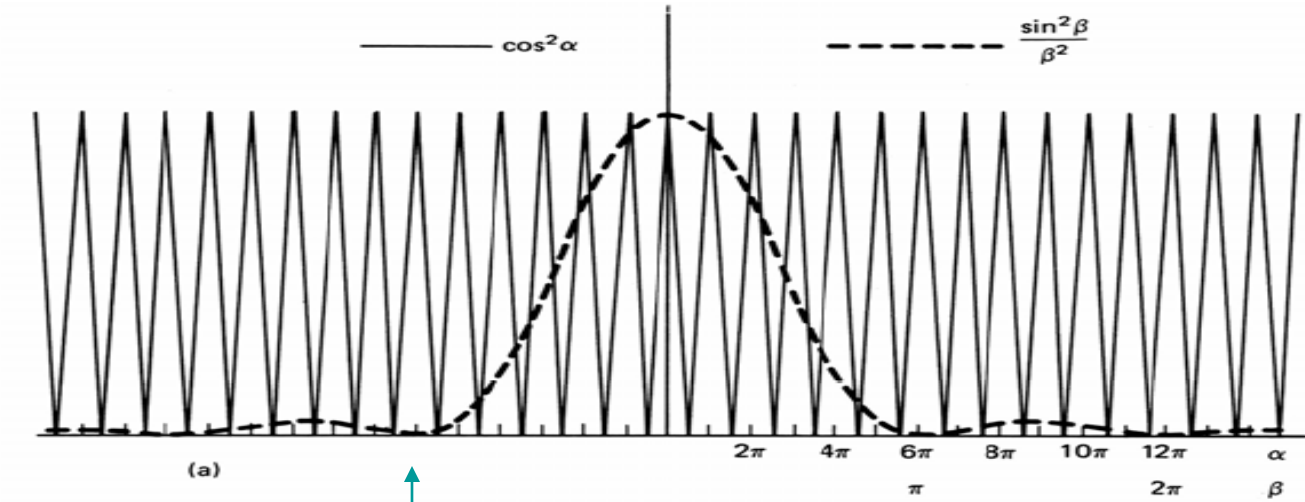
Όταν οι δυο συνθήκες ικανοποιούνται ταυτόχρονα, έχουμε “προσωρινή” απουσία κροσσών συμβολής

$$a = \left(\frac{p}{m} \right) b$$

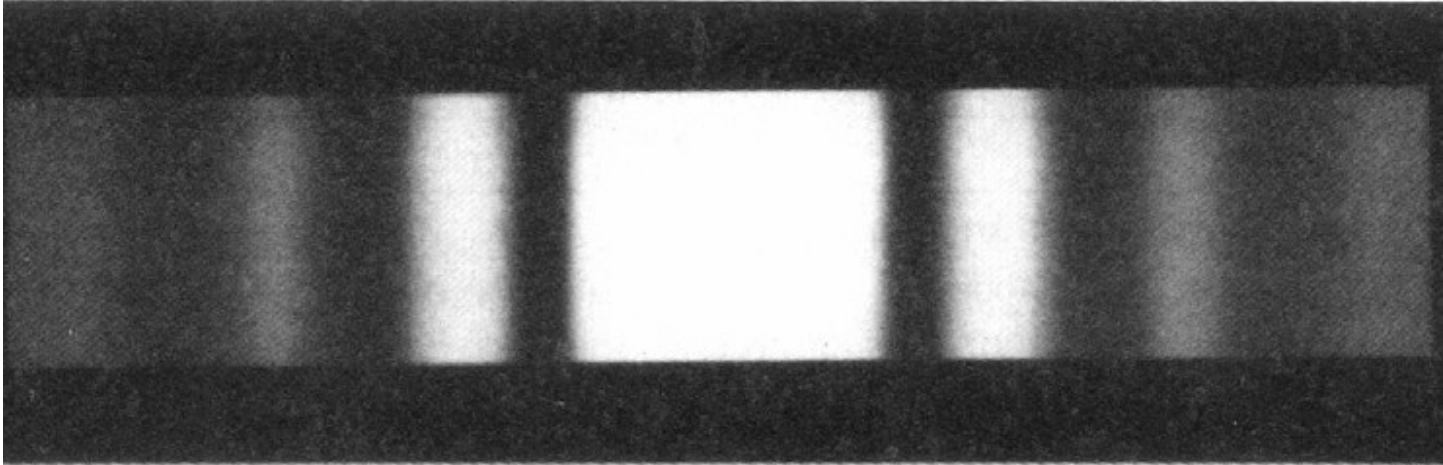
όταν η απόσταση των σχισμών είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του πάχους της μιας σχισμής, τότε η συνθήκη ικανοποιείται.

Για παράδειγμα, όταν $a=2b$, τότε $p=2m=\pm 2, \pm 4, \pm 6 \dots$

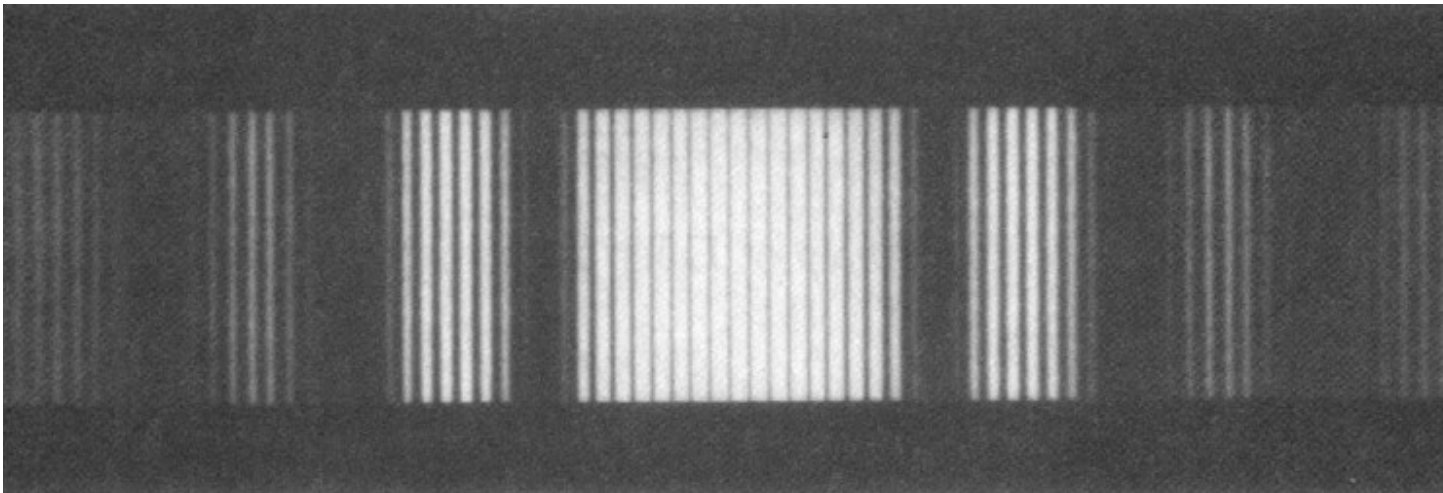
$$a=6b$$



Περίθλαση από σχισμή πλάτους b



Περίθλαση από δύο σχισμές πλάτους b



Περίθλαση από σχισμή πλάτους b



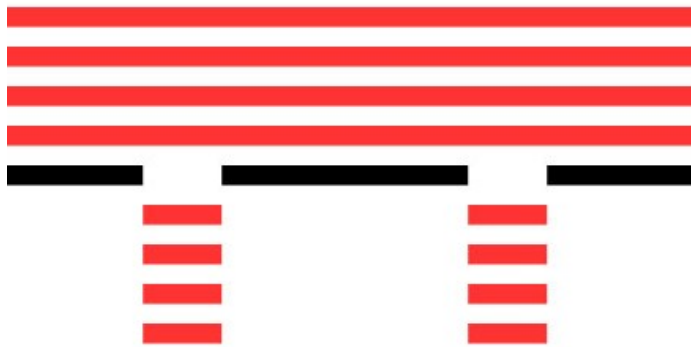
Περίθλαση από δύο σχισμές πλάτους b



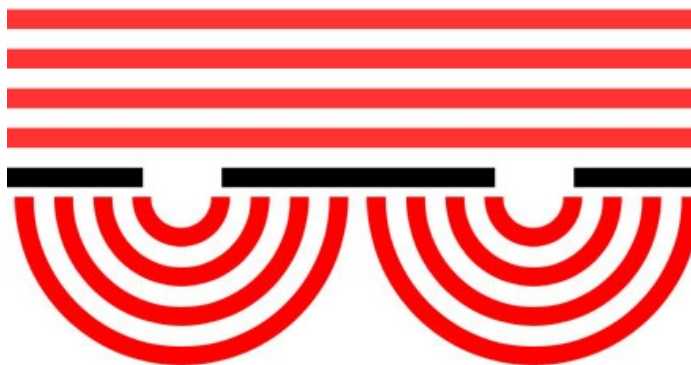
• Συμβολή του φωτός

Παράλληλο φως προσπίπτει σε επιφάνεια με δύο (απείρως) μικρά ανοίγματα

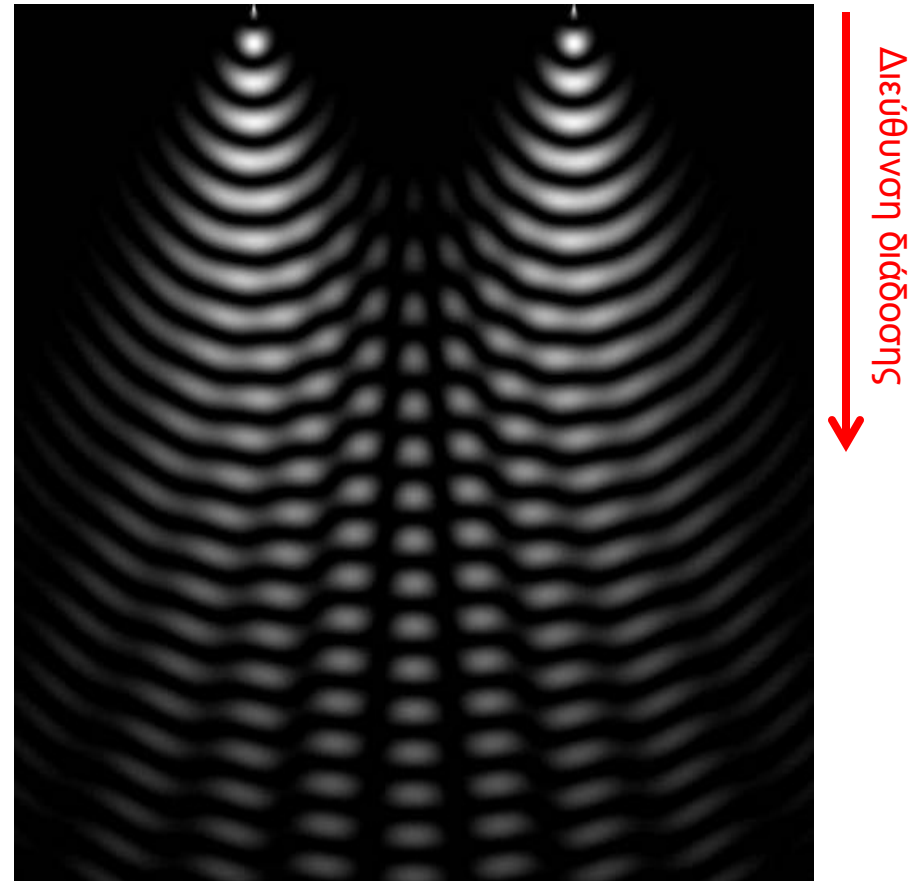
χωρίς συμβολή (όχι πραγματικό)



με συμβολή (πραγματικό)



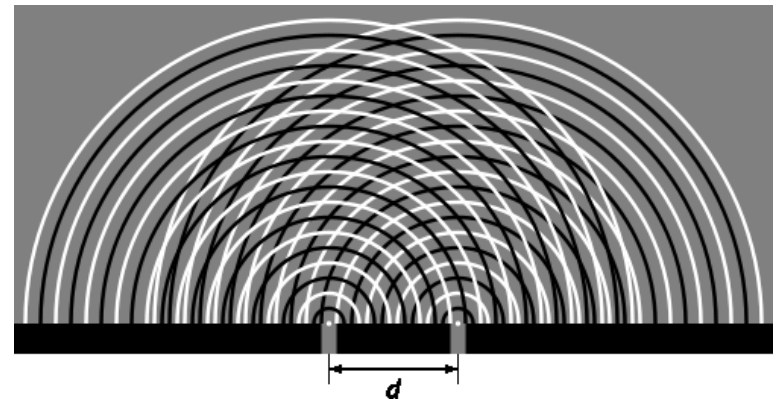
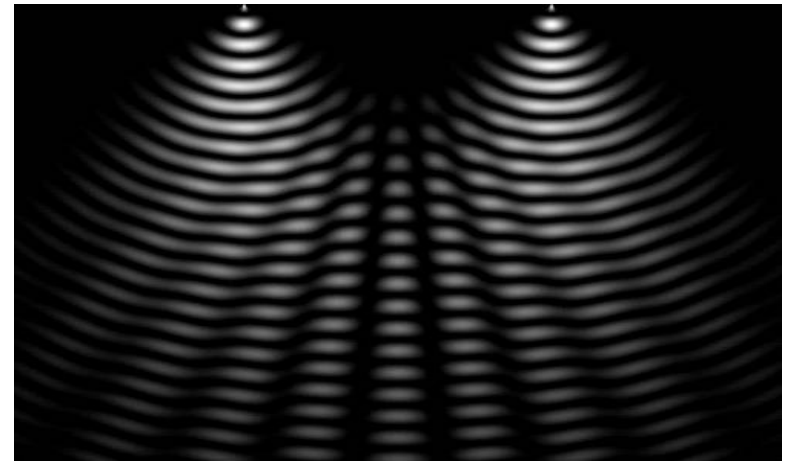
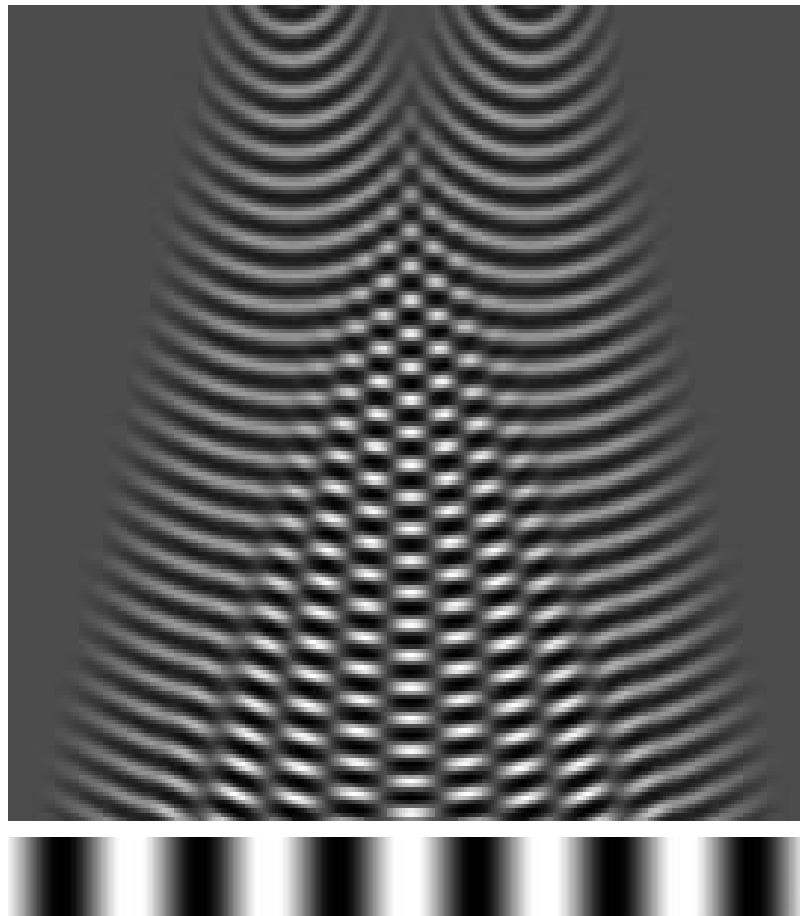
συμβολή (πραγματικό οπτικό αποτέλεσμα)



- Συμβολή του φωτός

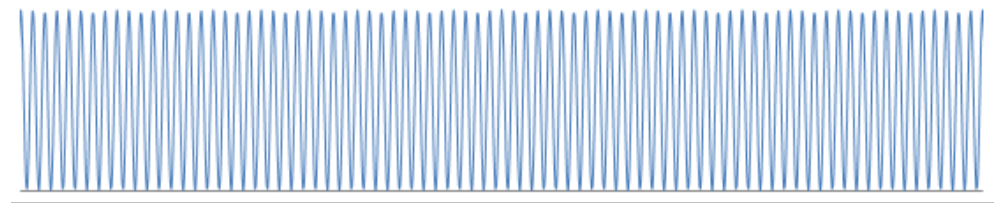
Παράλληλο φως προσπίπτει σε επιφάνεια με δύο (απείρω) μικρά ανοίγματα

Διεύθυνση διάδοσης
↓

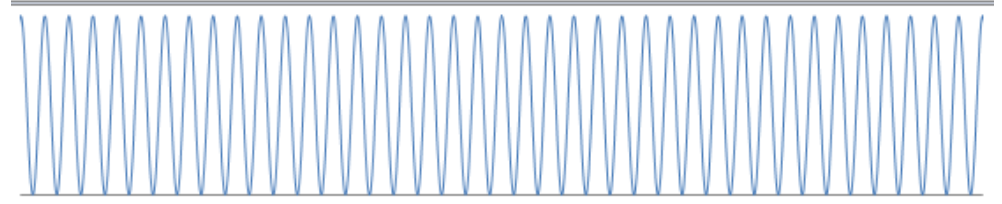


Συμβολή

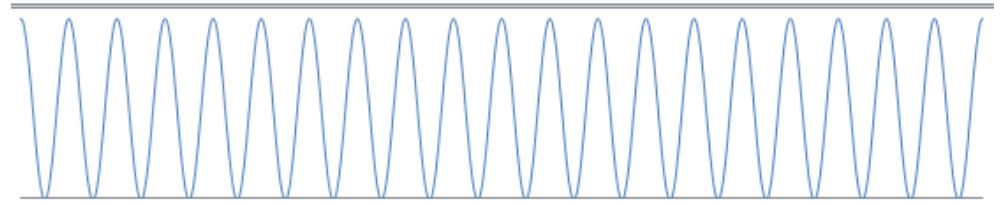
Συμβολή από 2 σχισμές σε απόσταση a



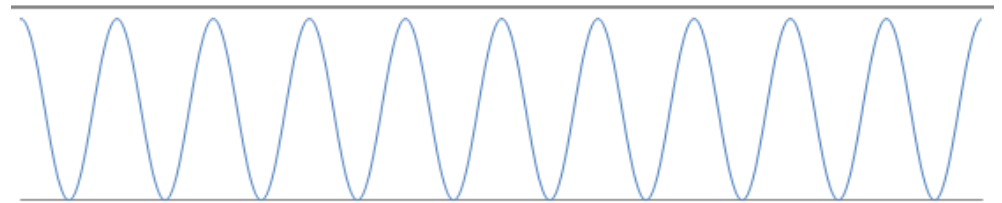
Συμβολή από 2 σχισμές σε απόσταση $a/2$



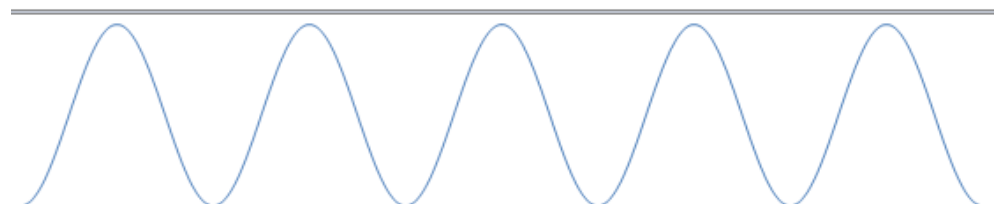
Συμβολή από 2 σχισμές σε απόσταση $a/4$



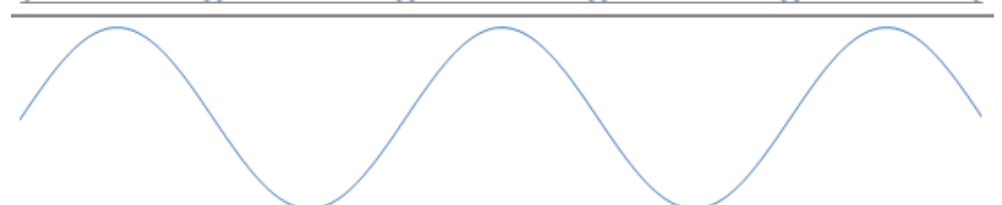
Συμβολή από 2 σχισμές σε απόσταση $a/8$



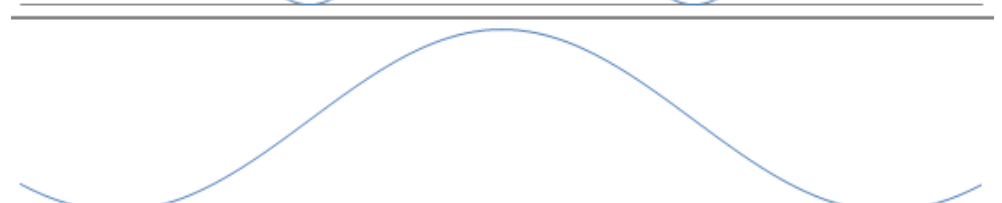
Συμβολή από 2 σχισμές σε απόσταση $a/16$



Συμβολή από 2 σχισμές σε απόσταση $a/32$

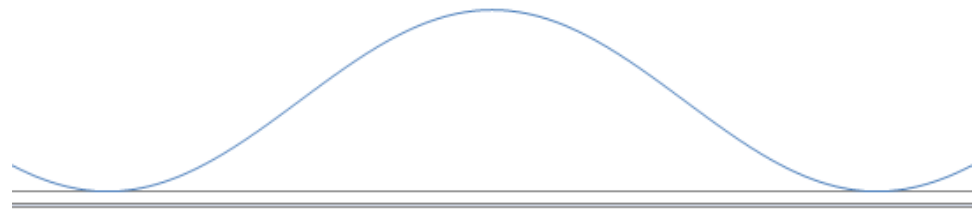


Συμβολή από 2 σχισμές σε απόσταση $a/64$

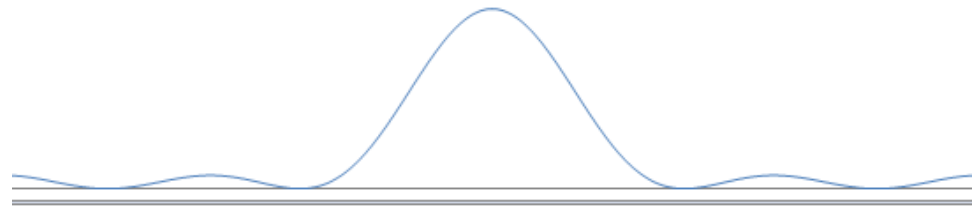


Περίθλαση

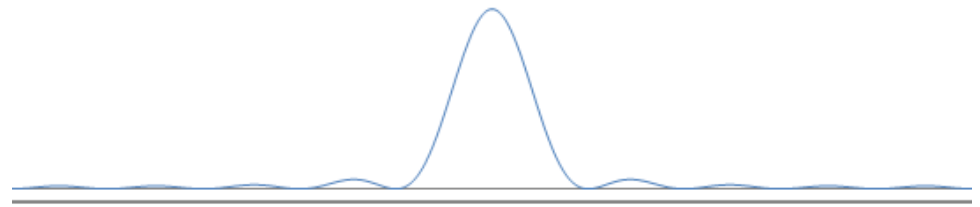
Περίθλαση από σχισμή πάχους $d/64$



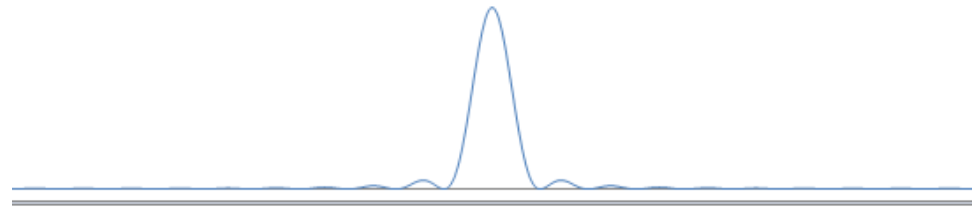
Περίθλαση από σχισμή πάχους $d/32$



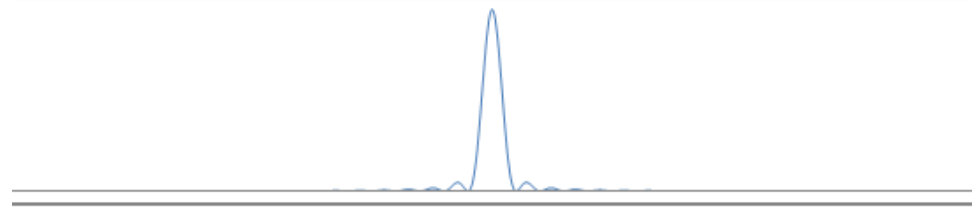
Περίθλαση από σχισμή πάχους $d/16$



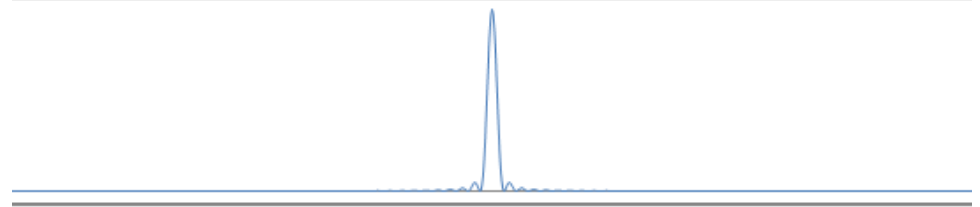
Περίθλαση από σχισμή πάχους $d/8$



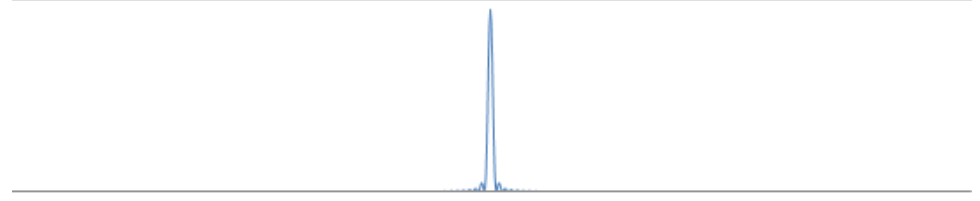
Περίθλαση από σχισμή πάχους $d/4$



Περίθλαση από σχισμή πάχους $d/2$



Περίθλαση από σχισμή πάχους d



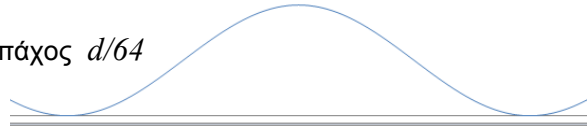
Περίθλαση και συμβολή

Περίθλαση από 1 σχισμή

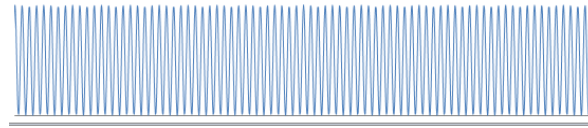
Συμβολή από 2 σχισμές

Περίθλαση και συμβολή

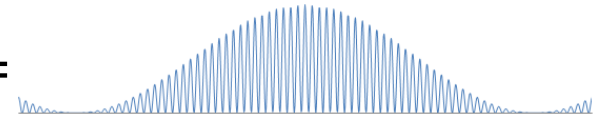
πάχος $d/64$



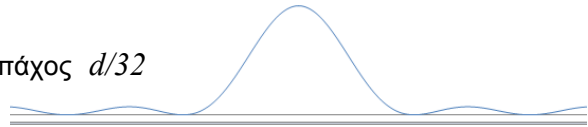
×



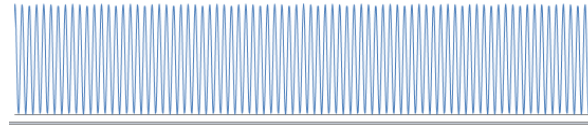
=



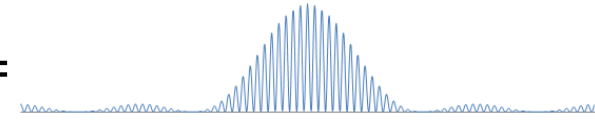
πάχος $d/32$



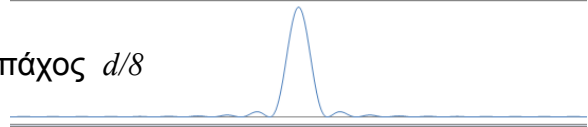
×



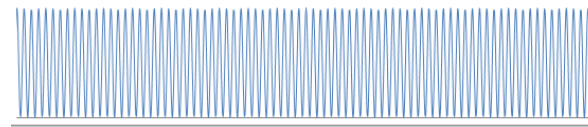
=



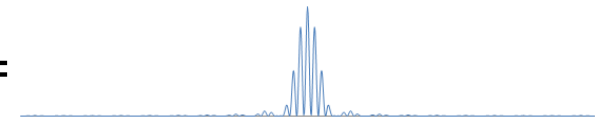
πάχος $d/8$



×

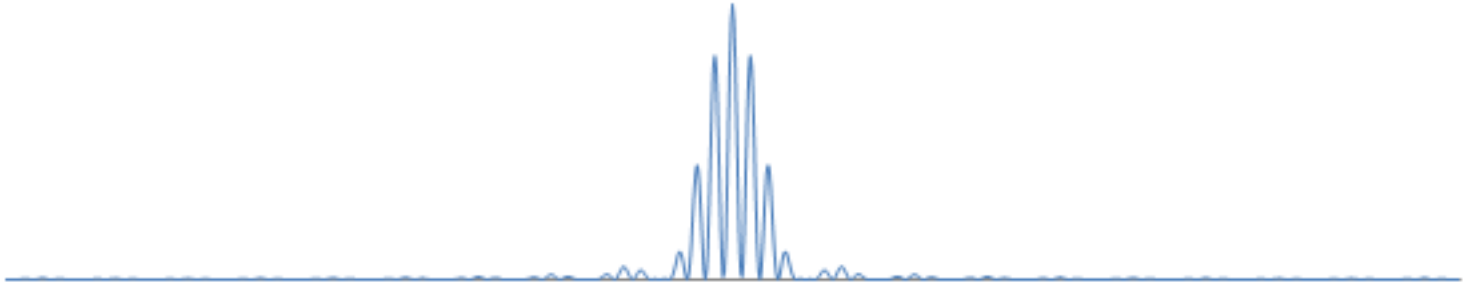


=

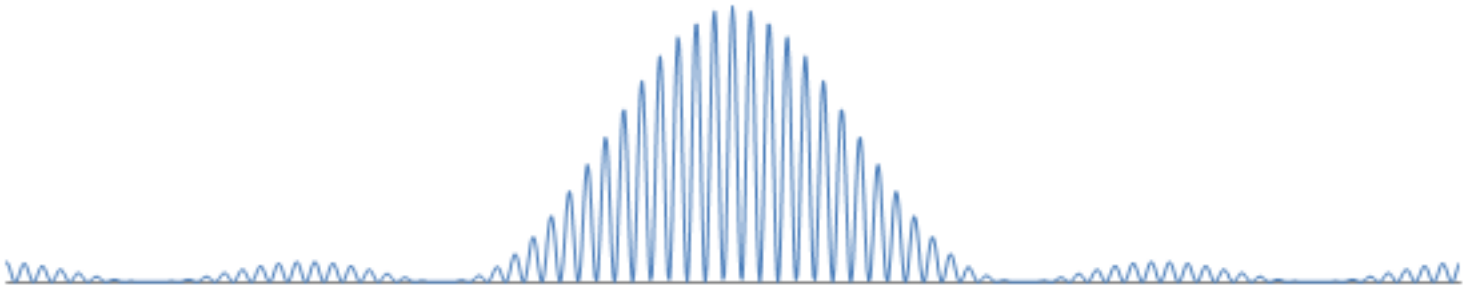


Περίθλαση και συμβολή

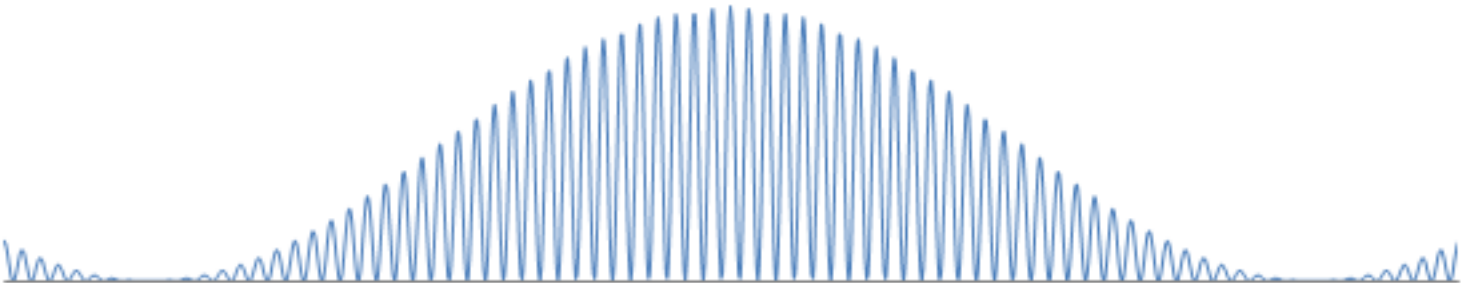
Περίθλαση και συμβολή από 2 σχισμές πάχους $d/8$ σε απόσταση α



Περίθλαση και συμβολή από 2 σχισμές πάχους $d/32$ σε απόσταση α



Περίθλαση και συμβολή από 2 σχισμές πάχους $d/64$ σε απόσταση α



Περίθλαση από πολλές σχισμές

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \sum_{j=1}^{N/2} \left\{ \int_{[-(2j-1)a-b]/2}^{[-(2j-1)a+b]/2} e^{isk \sin \theta} ds + \int_{[(2j-1)a-b]/2}^{[(2j-1)a+b]/2} e^{isk \sin \theta} ds \right\}$$

Καθώς το j αυξάνεται ένα ζεύγος σχισμών τίθεται κάτω από την αρχή του άξονα και επάνω (πρώτο και δεύτερο ολοκλήρωμα). Όταν $j=N/2$ όλες οι σχισμές έχουν υπολογισθεί.

Για τον κάθε όρο του αθροίσματος έχουμε:

$$K = \frac{1}{ik \sin \theta} \left\{ e^{-ik \sin \theta [(2j-1)a-b]/2} - e^{-ik \sin \theta [(2j-1)a+b]/2} \right\} + \frac{1}{ik \sin \theta} \left\{ e^{ik \sin \theta [(2j-1)a+b]/2} - e^{ik \sin \theta [(2j-1)a-b]/2} \right\}$$

$$K = \frac{b}{2i\beta} \left[e^{-i(2j-1)\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + e^{i(2j-1)\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \right]$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Euler

$$K = \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta) \{2 \cos[(2j-1)\alpha]\}$$

ή

$$K = 2b \frac{\sin \beta}{\beta} \operatorname{Re}[e^{i(2j-1)\alpha}]$$

Επιστρέφοντας στο άθροισμα, έχουμε

$$S = 2b \frac{\sin \beta}{\beta} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N/2} e^{i(2j-1)\alpha}$$

$$S = 2b \frac{\sin \beta}{\beta} \operatorname{Re}[e^{i\alpha} + e^{i3\alpha} + e^{i5\alpha} + \dots + e^{i(N-1)\alpha}]$$

γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο το $A=e^{i\alpha}$ και λόγο $r=e^{2i\alpha}$

$$\longrightarrow A \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right) = e^{i\alpha} \left[\frac{(e^{2i\alpha})^{N/2} - 1}{e^{2i\alpha} - 1} \right] = \frac{e^{iN\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}$$

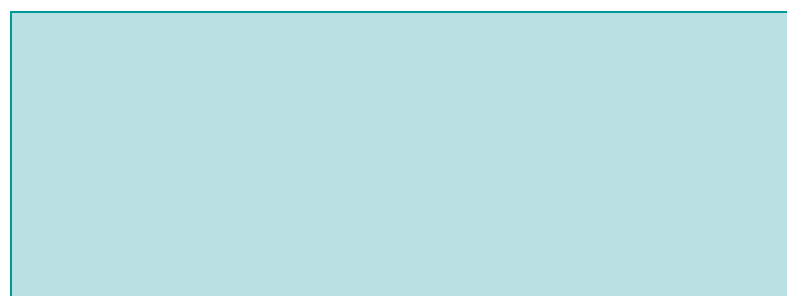
Χρησιμοποιώντας ξανά την εξίσωση του Euler η εξίσωση αυτή γράφεται

$$\frac{(\cos N\alpha - 1) + i \sin N\alpha}{2i \sin \alpha} = \frac{i(\cos N\alpha - 1) - \sin N\alpha}{-2 \sin \alpha}$$

της οποίας το πραγματικό τμήμα είναι $(\sin N\alpha)/(2 \sin \alpha)$. Τότε

$$S = b \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}$$

Παίρνοντας το τετράγωνο για την ένταση έχουμε την



όπου το I_0 περιέχει όλες τις σταθερές.

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

Ο παράγων β αντιστοιχεί στη γνωστή πια περίθλαση και καθορίζει το πλάτος των γραμμών συμβολής.

Ο όρος $(\sin N\alpha / \sin \alpha)^2$ καθορίζει την συμβολή μεταξύ των κυμάτων που προέρχονται από τις N σχισμές. Για $\alpha=0$ ή κάποιο πολλαπλάσιο του π , η έκφραση γίνεται απροσδιόριστη. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital για $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ έχουμε

$$\lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{N \cos N\alpha}{\cos \alpha} = \pm N$$

οπότε τα κύρια μέγιστα της συμβολής είναι ανάλογα του N^2 σε πλάτος.

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

Ο παράγων β αντιστοιχεί στη γνωστή πια περίθλαση και καθορίζει το πλάτος των γραμμών συμβολής.

Ο όρος $(\sin N\alpha / \sin \alpha)^2$ καθορίζει την συμβολή μεταξύ των κυμάτων που προέρχονται από τις N σχισμές. Για $\alpha=0$ ή κάποιο πολλαπλάσιο του π , η έκφραση γίνεται απροσδιόριστη. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital για $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ έχουμε

$$\lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{N \cos N\alpha}{\cos \alpha} = \pm N$$

οπότε τα κύρια μέγιστα της συμβολής είναι ανάλογα του N^2 σε πλάτος.

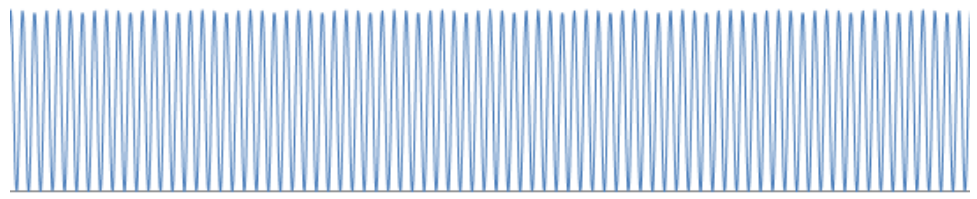
μέγιστα (συμβολής)

$$\alpha = \frac{p\pi}{N}, \text{ ή, } a \sin \theta = \frac{p\lambda}{N}, \quad p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

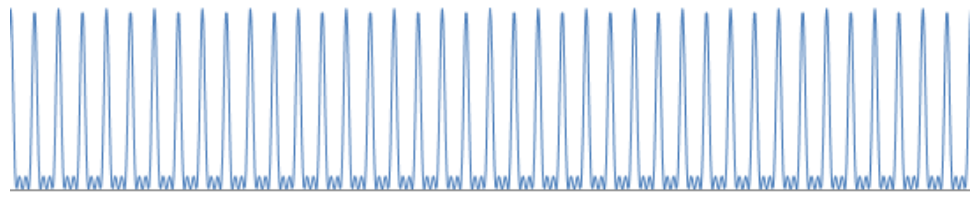
Κύρια μέγιστα έχουμε για $p=0, \pm N, \pm 2N, \dots$

Συμβολή

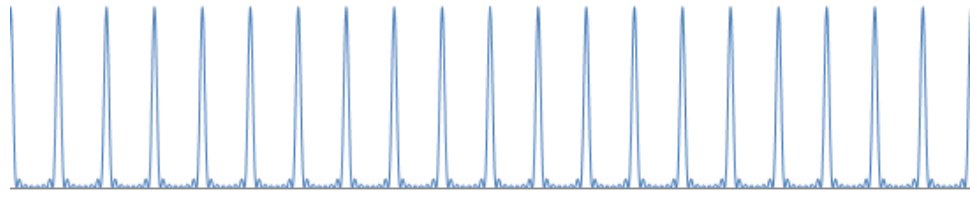
Συμβολή από 2 σχισμές



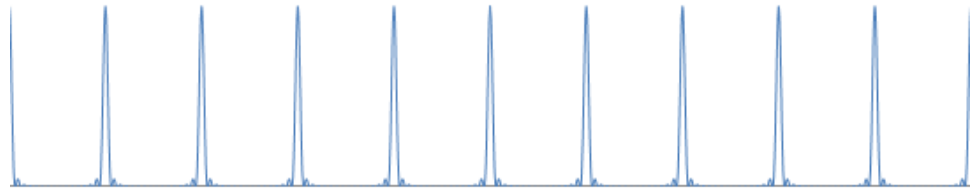
Συμβολή από 4 σχισμές



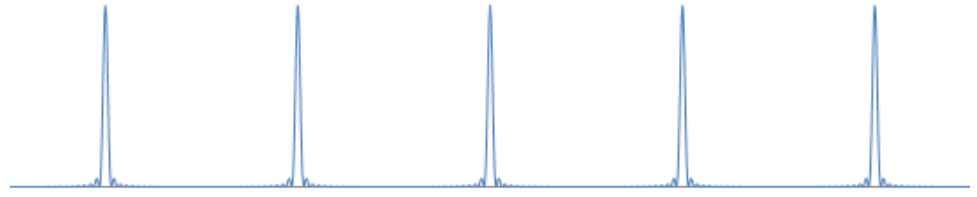
Συμβολή από 8 σχισμές



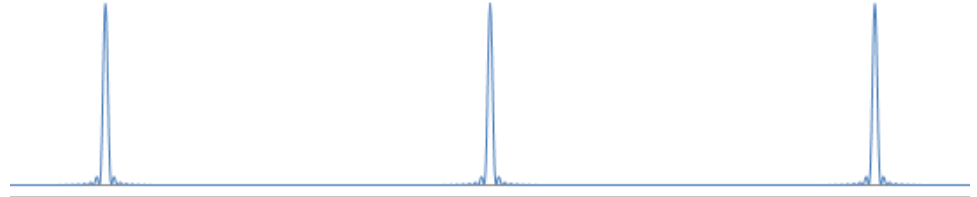
Συμβολή από 16 σχισμές



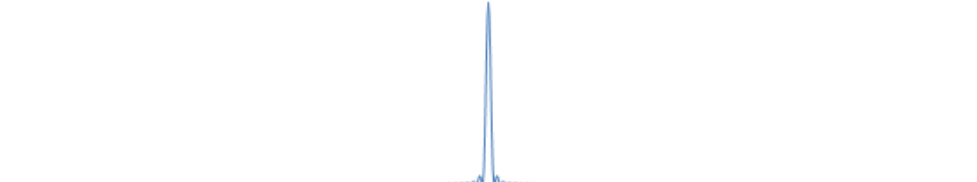
Συμβολή από 32 σχισμές

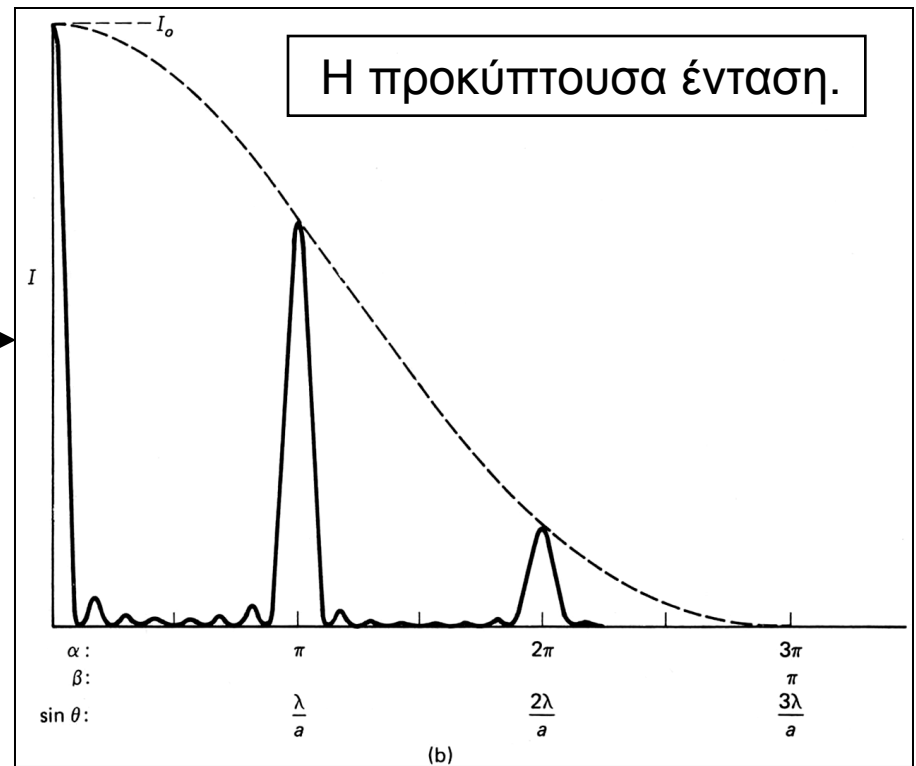
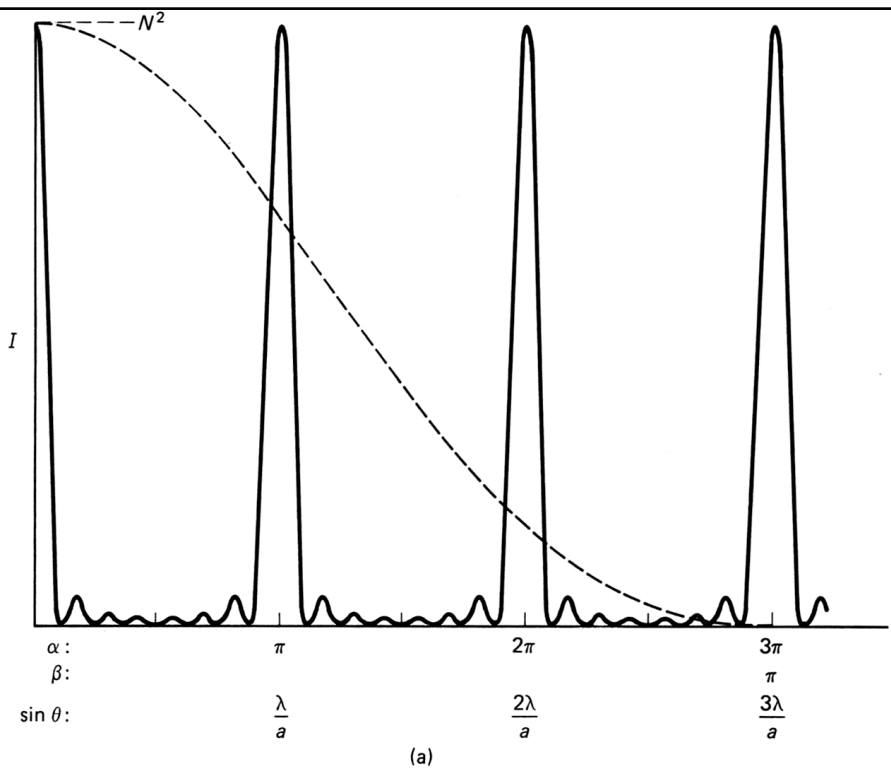


Συμβολή από 64 σχισμές



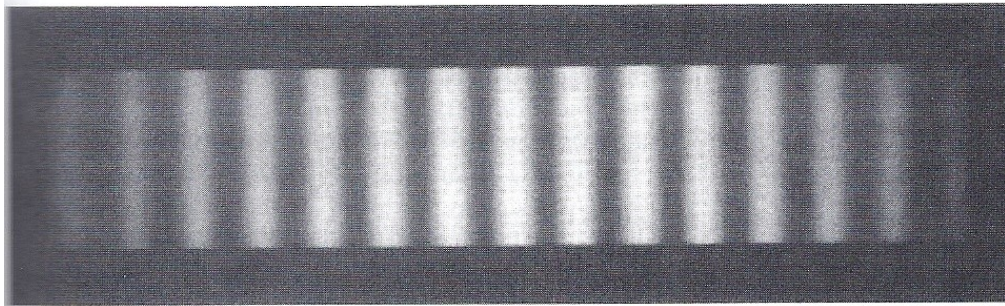
Συμβολή από 128 σχισμές



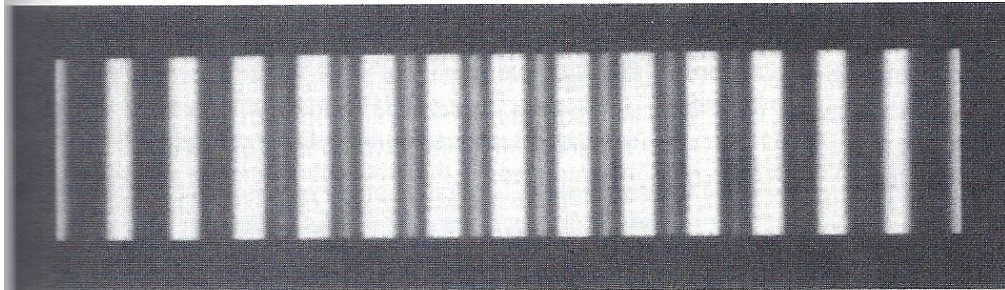


τα κυρίως μέγιστα απέχουν μεταξύ τους κατά $N-2$ μικρά μέγιστα

Συναρτήσεις συμβολής (πλήρης γραμμή)
και περίθλασης (διακεκομμένη γραμμή)
Fraunhofer όταν $N=8$ και $a=3b$.



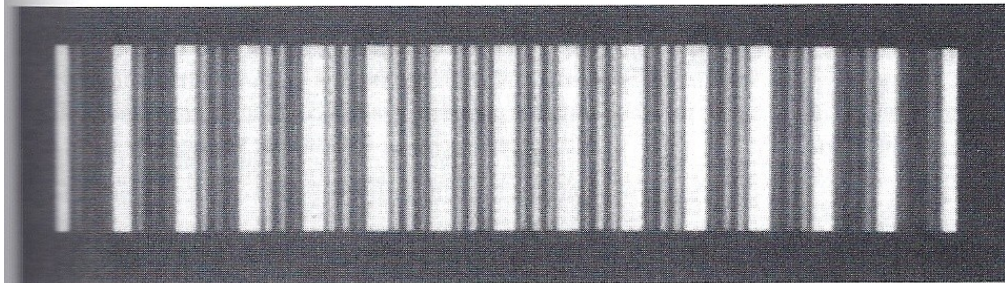
(a) $N = 2$



(b) $N = 3$



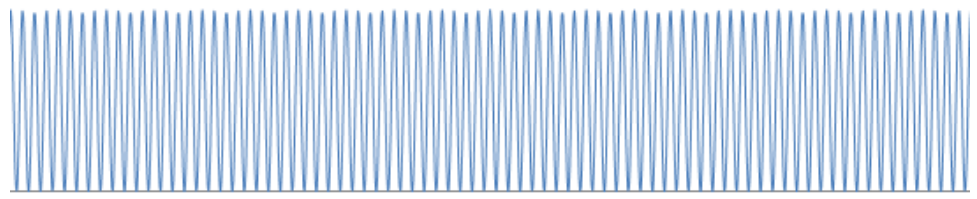
(c) $N = 4$



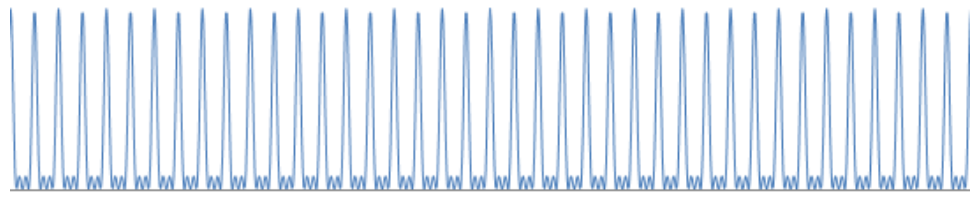
(d) $N = 5$

Συμβολή

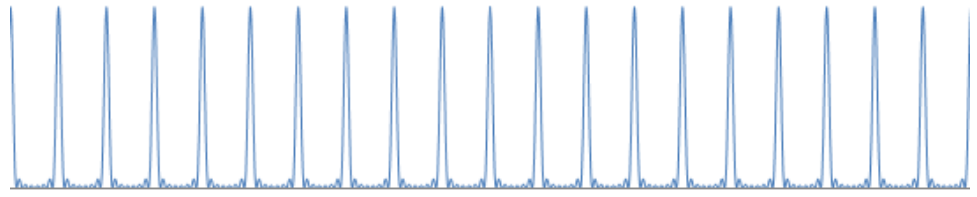
Συμβολή από 2 σχισμές



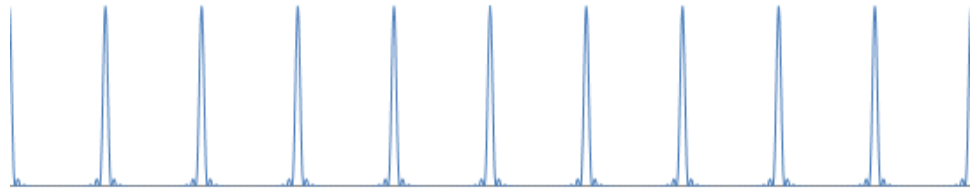
Συμβολή από 4 σχισμές



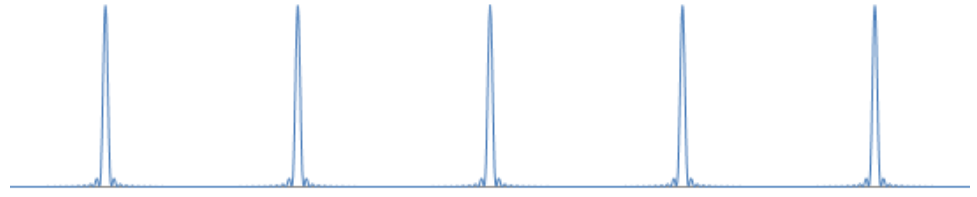
Συμβολή από 8 σχισμές



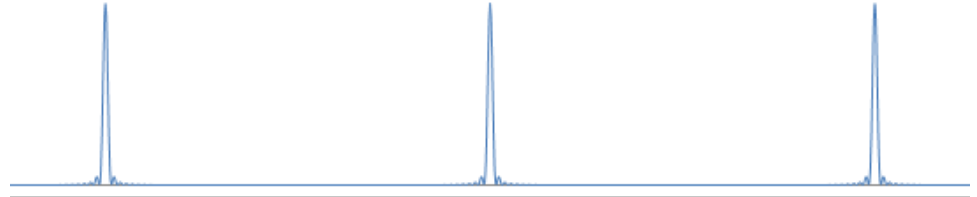
Συμβολή από 16 σχισμές



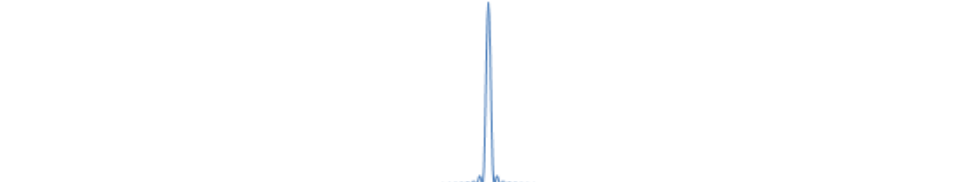
Συμβολή από 32 σχισμές

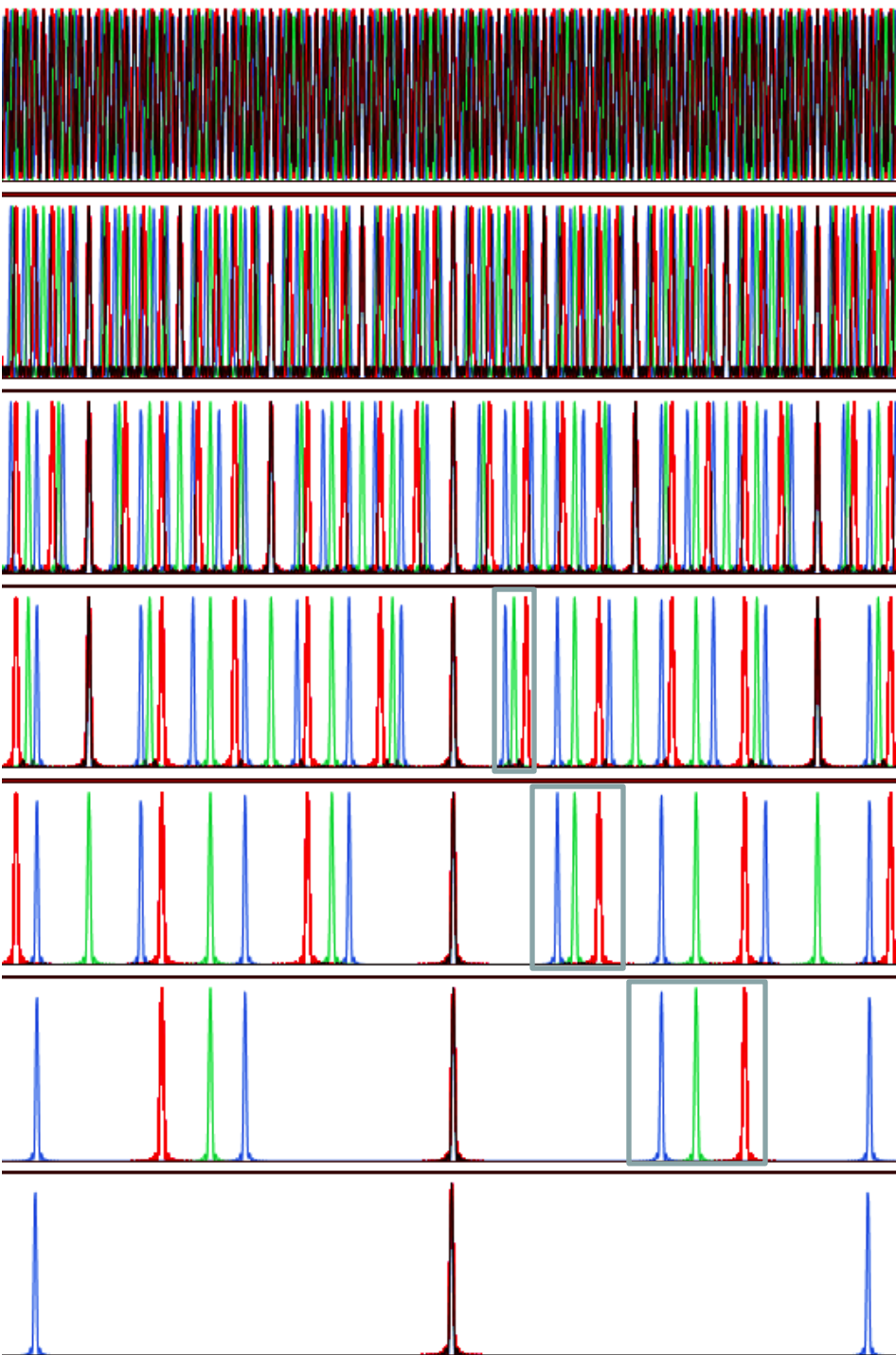


Συμβολή από 64 σχισμές



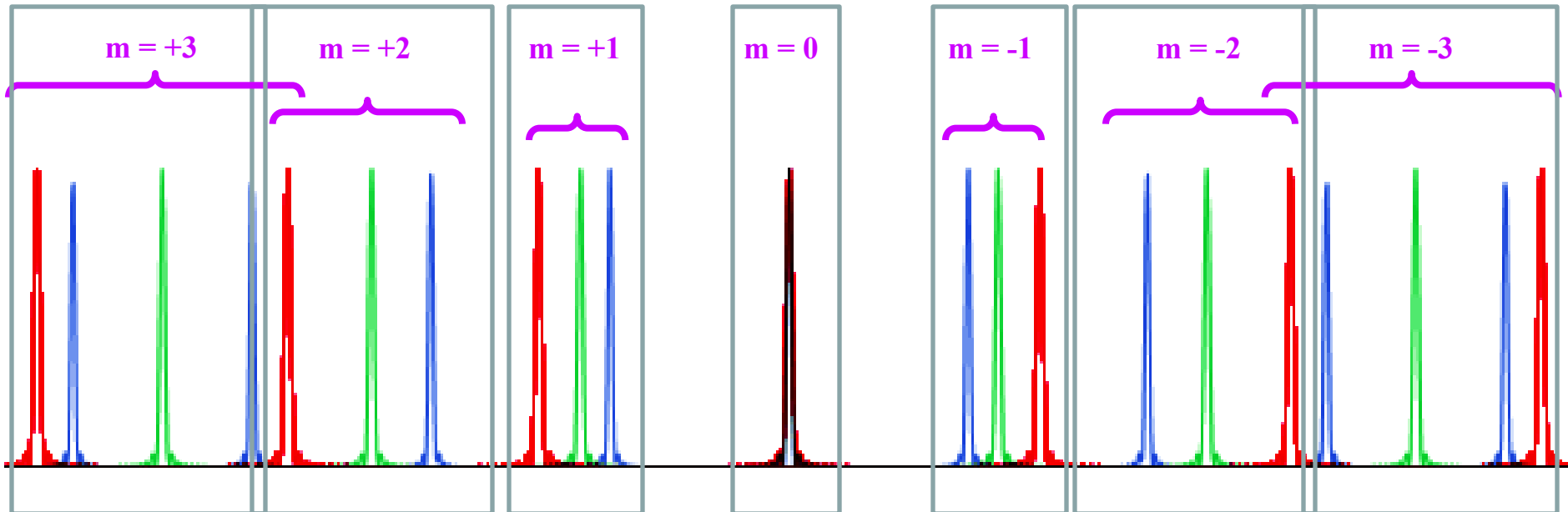
Συμβολή από 128 σχισμές





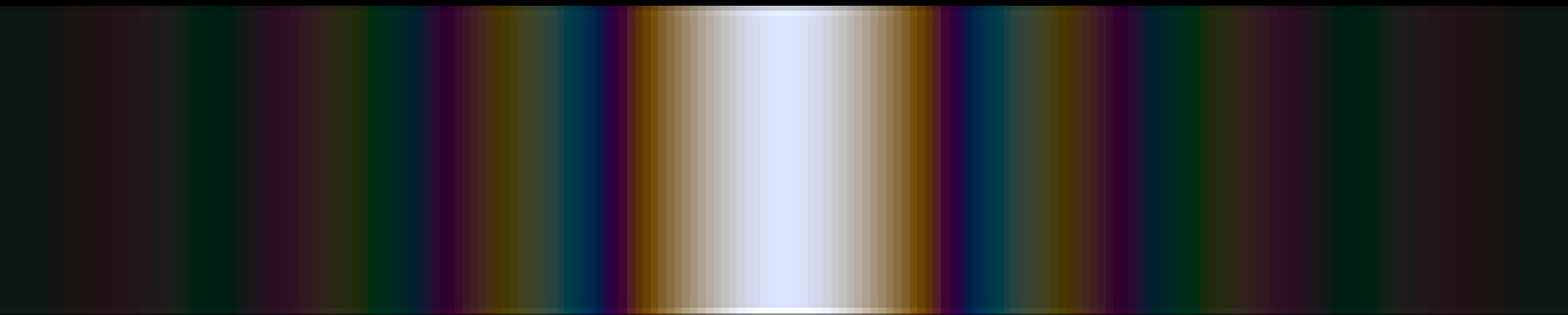
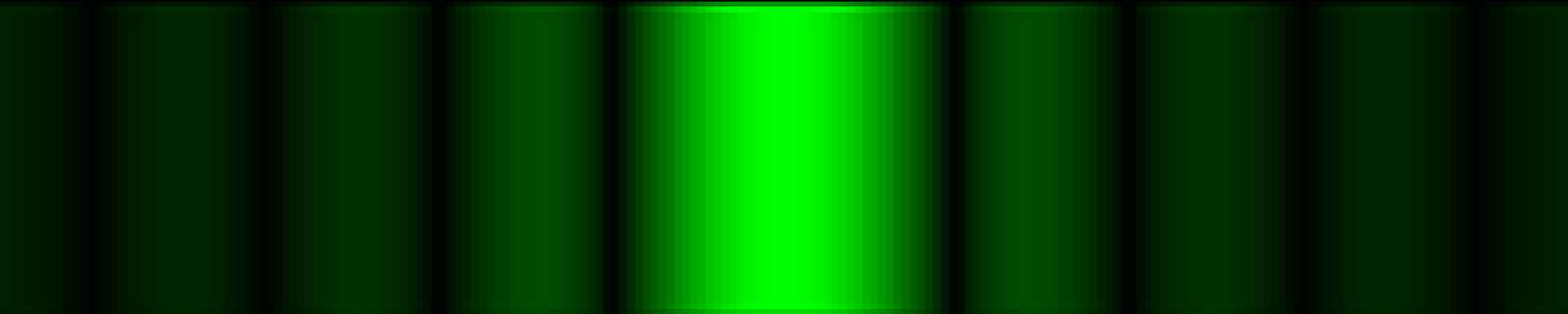
Συμβολή στο κυανό
Συμβολή στο πράσινο
Συμβολή στο ερυθρό

Φασματικές τάξεις από φράγμα περίθλασης



μονοχρωματικό φως

Περίθλαση από μία σχισμή

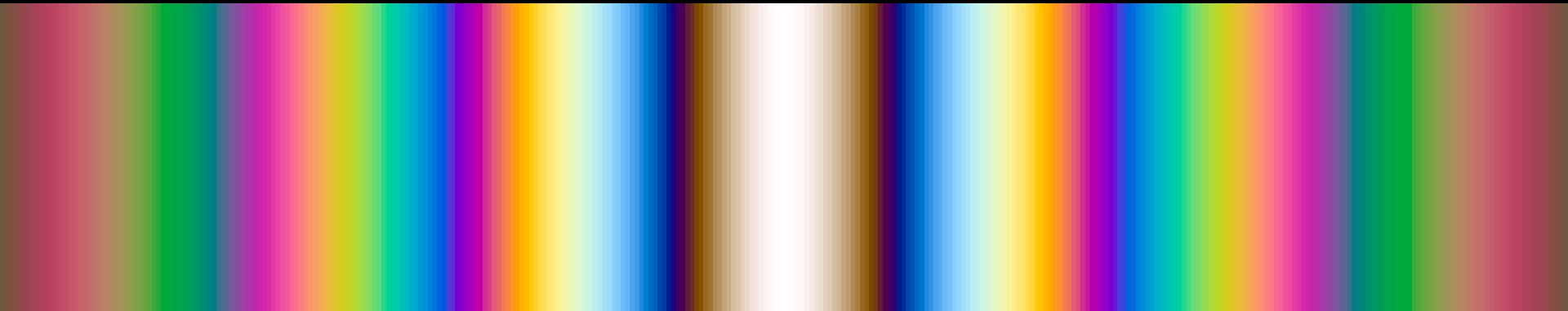
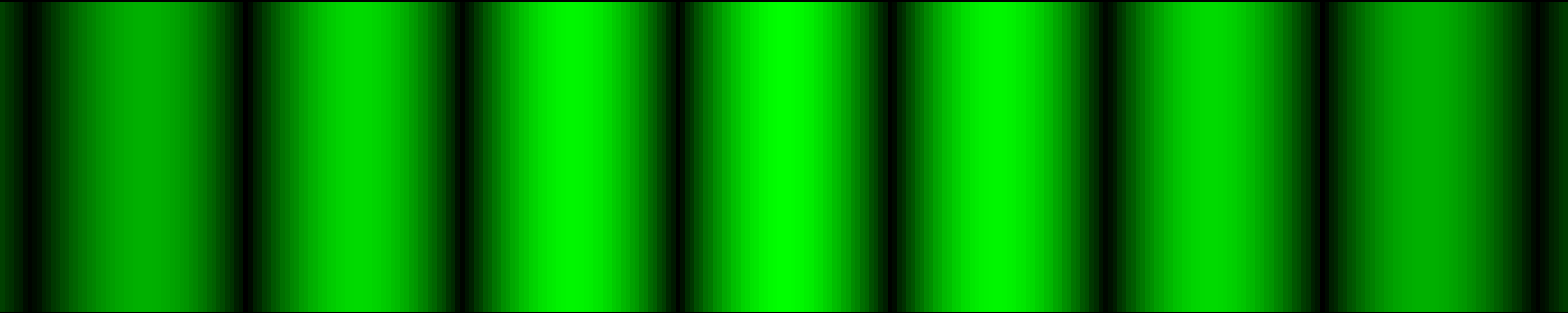


λευκό φως



μονοχρωματικό φως

Συμβολή από δύο σχισμές

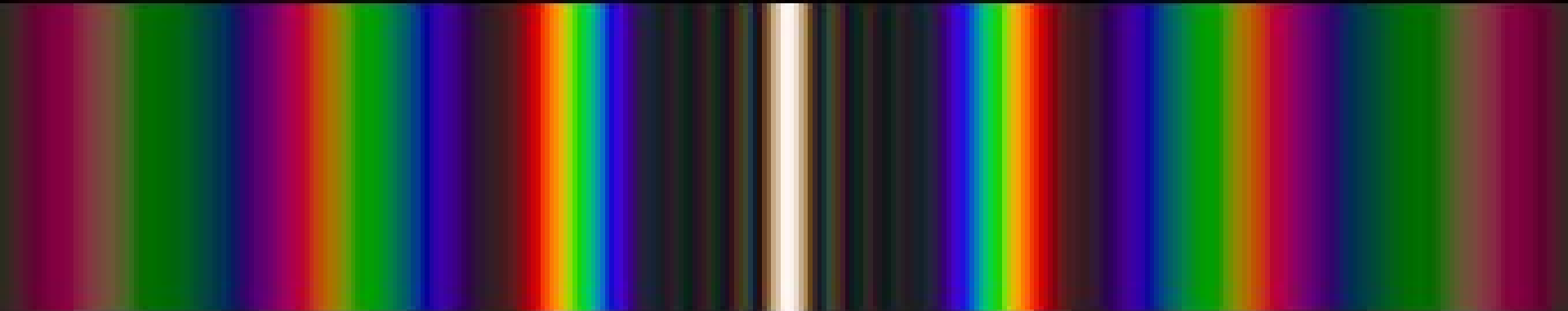
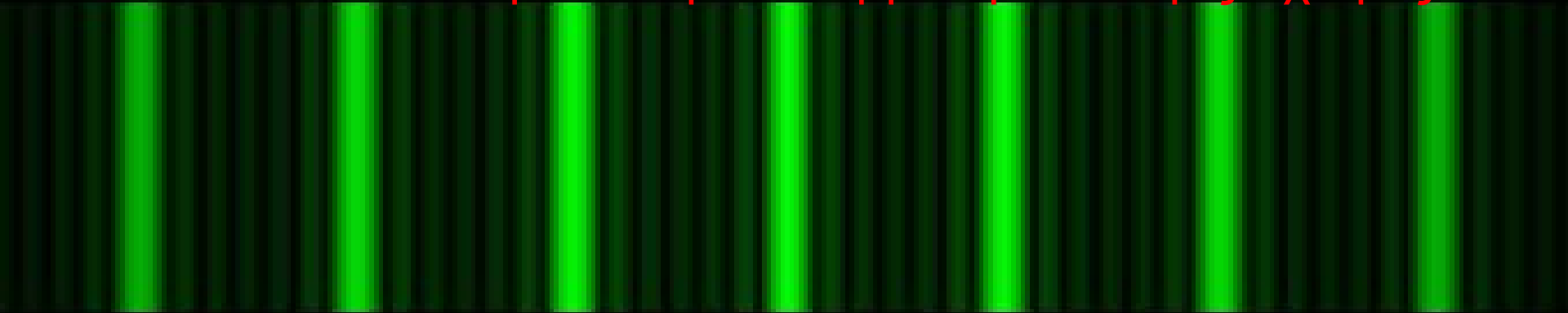


λευκό φως



μονοχρωματικό φως

Περίθλαση και συμβολή από λίγες σχισμές

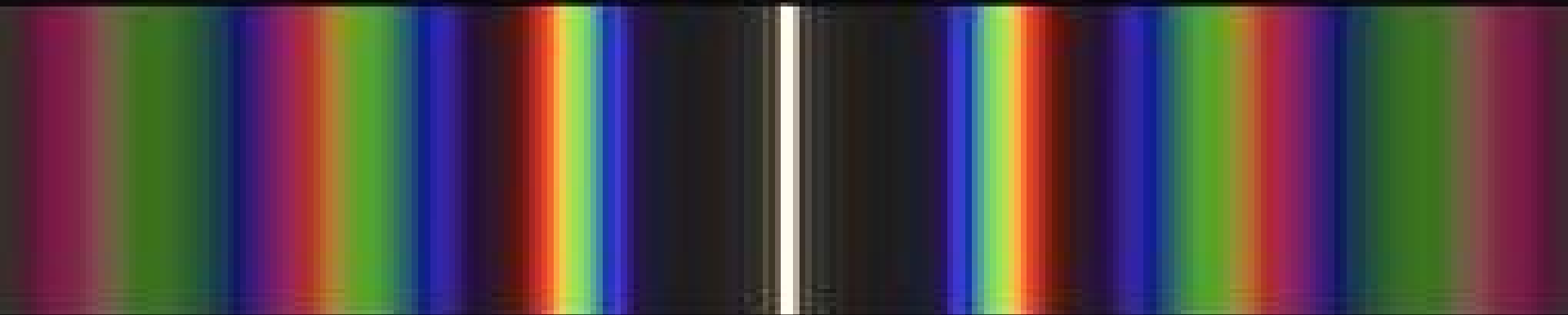


λευκό φως



Περίθλαση και συμβολή από πολλές σχισμές

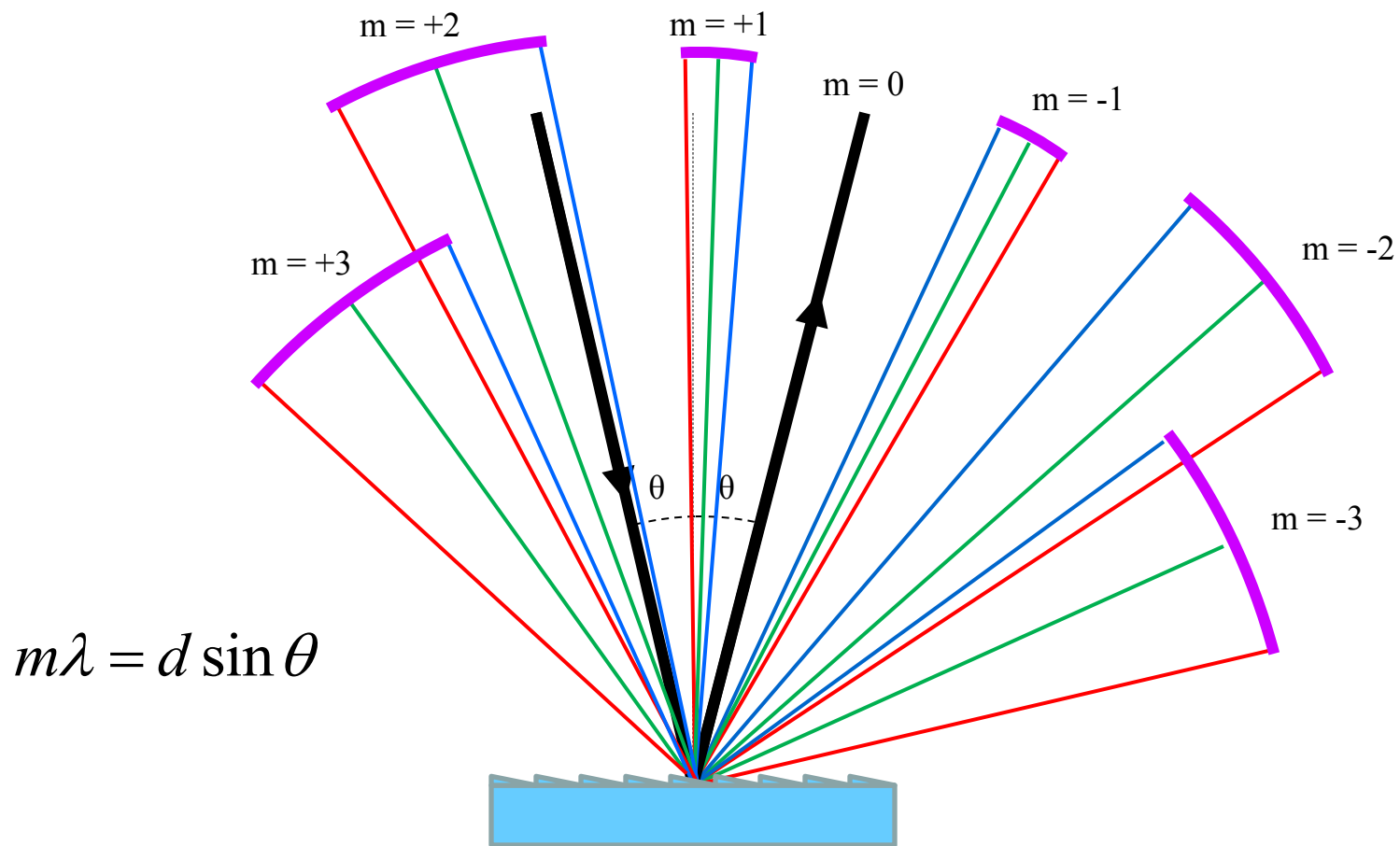
μονοχρωματικό φως



λευκό φως

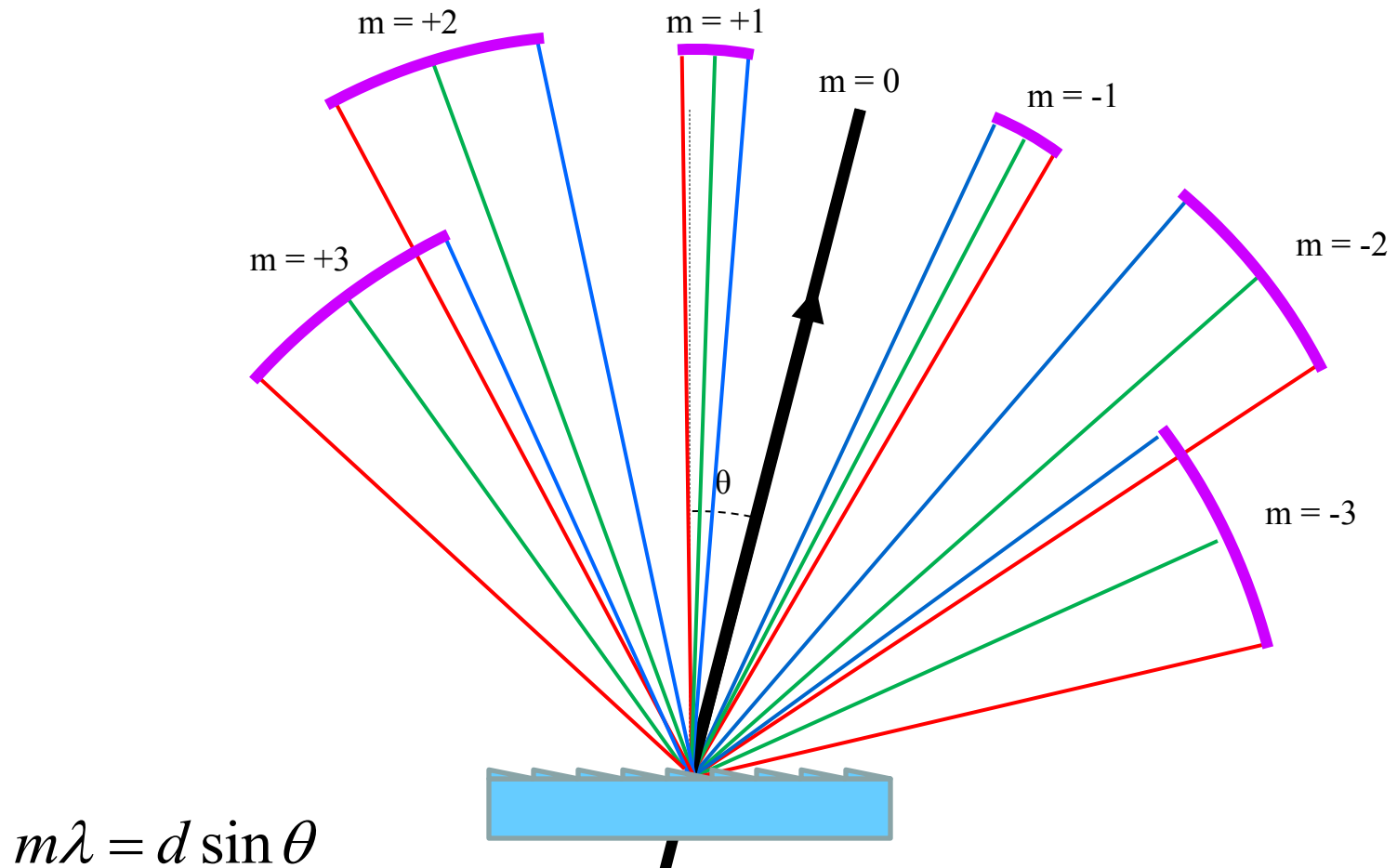


- Ανάλυση του φωτός λόγω περίθλασης



φράγμα ανάκλασης

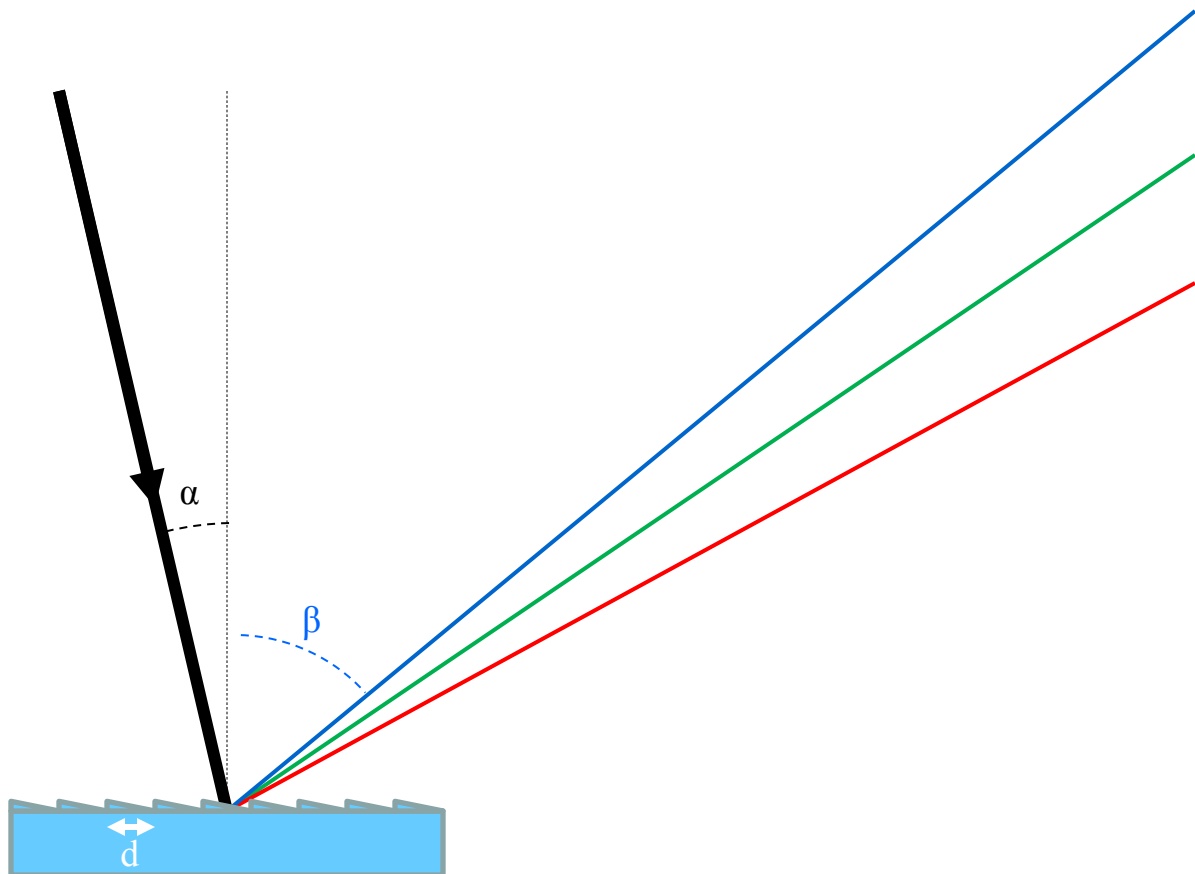
- Ανάλυση του φωτός λόγω περίθλασης



φράγμα διέλευσης

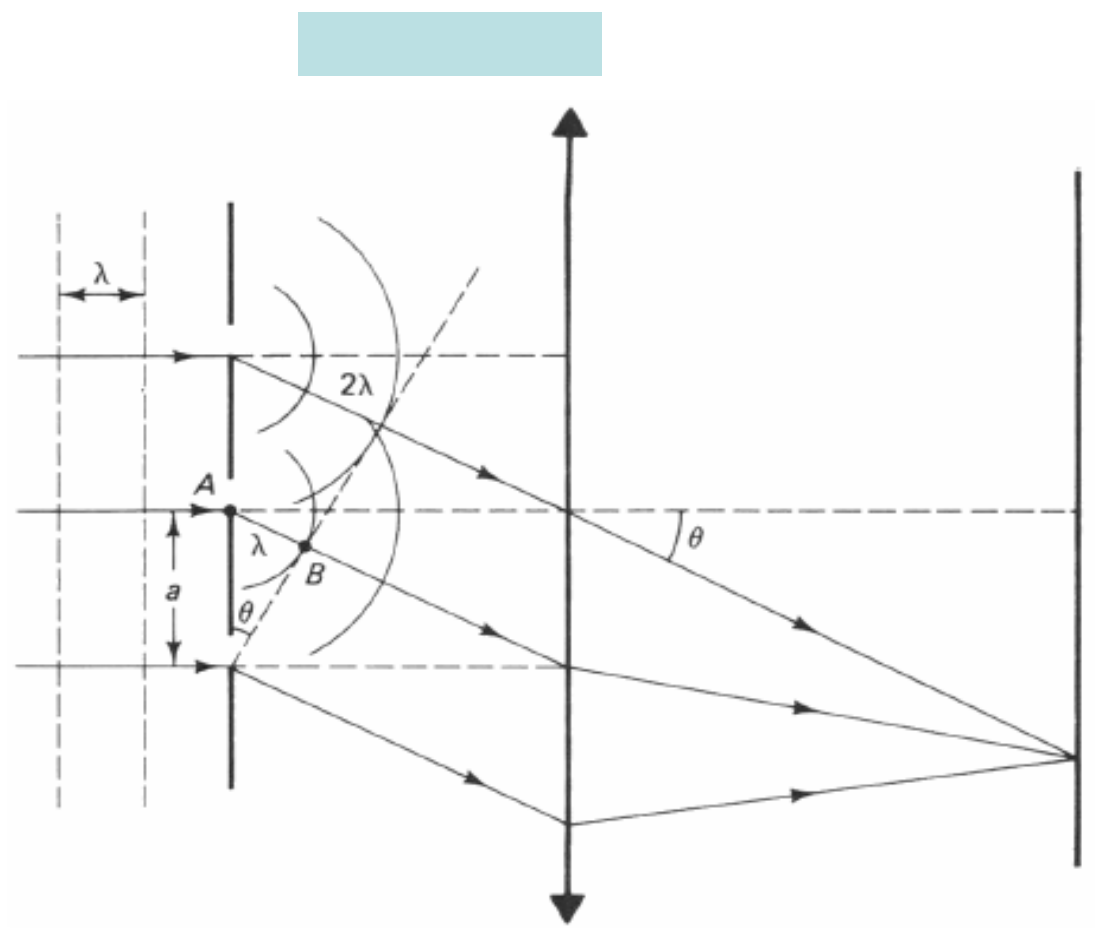
- Ανάλυση του φωτός λόγω περίθλασης

$$m\lambda = d(\sin a + \sin \beta)$$



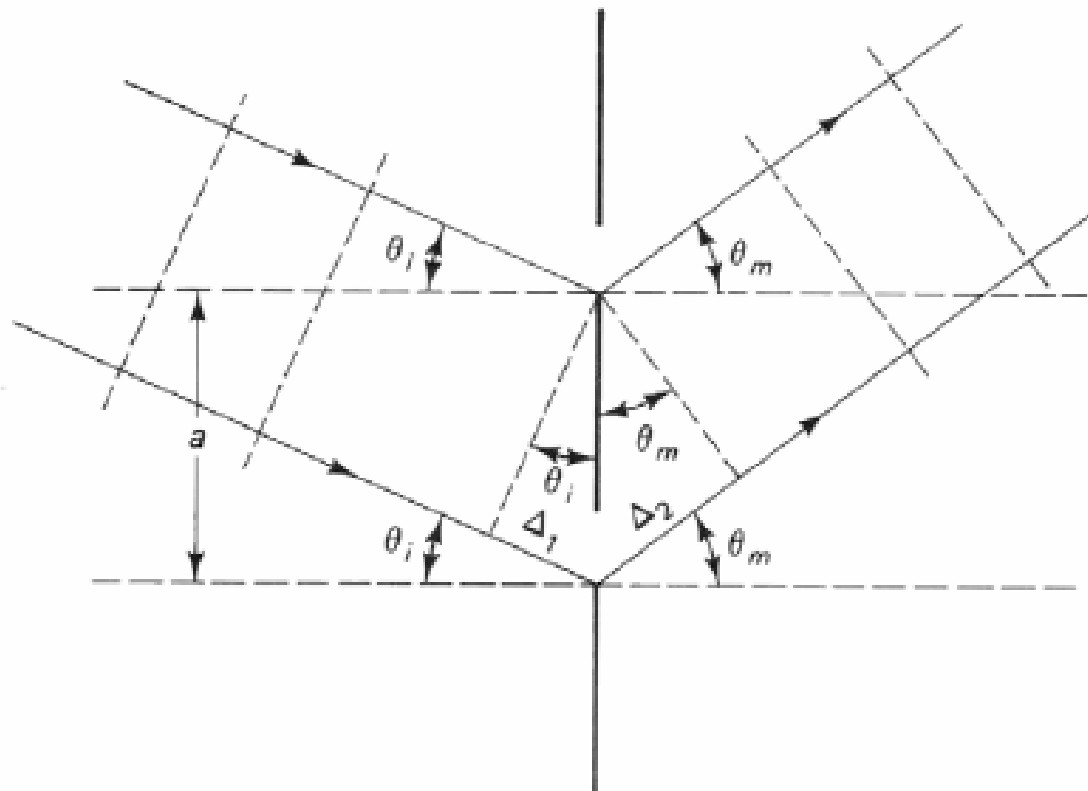
Μία πρακτική διάταξη που χρησιμοποιεί την περίθλαση από πολλές σχισμές είναι το λεγόμενο *οπτικό φράγμα* (diffraction grating) Σύμφωνα

με την εξίσωση (33), κύρια μέγιστα έχουμε για $p/N=m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, οπότε $\sin \theta = m \lambda / a$ είναι



. Διάγραμμα οπτικού φράγματος που φωτίζεται από ένα επίπεδο μονοχρωματικό κύμα. Φαίνεται ο σχηματισμός ενός πρώτης τάξεως μεγίστου.

Γενίκευση για τυχαία πρόσπτωση



όταν η διαφορά δρόμων $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = m\lambda$ όπου m ακέραιος, τότε

όλα τα περιθλώμενα κύματα είναι σε φάση και η εξίσωση

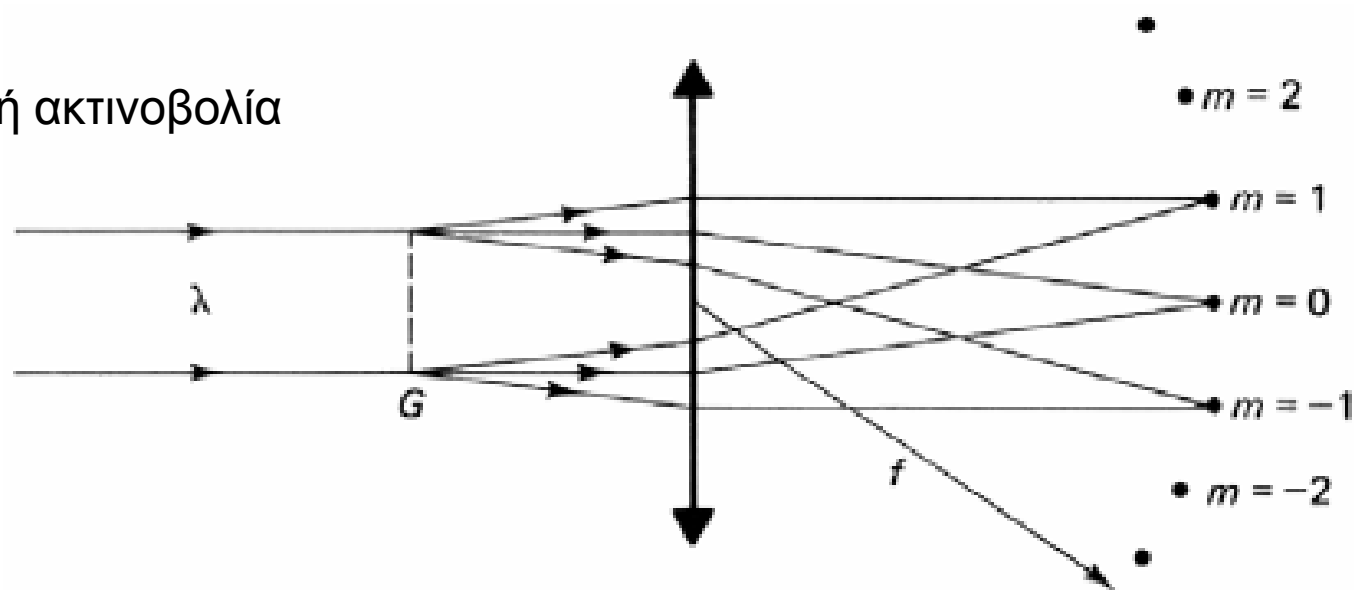
φράγματος γράφεται σαν:

$$a(\sin\theta_i + \sin\theta_m) = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Σύμφωνα με την εξίσωση αυτή, η μηδενική τάξη συμβολής, $m=0$, συμβαίνει για $\theta_m = -\theta_i$, για όλα τα λ . Συνεπώς, στο κεντρικό μέγιστο έχουμε φως απ' όλα τα μήκη κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

Για τάξεις με $m \neq 0$, συνεπώς, το φράγμα διαχωρίζει μεταξύ τους τα διάφορα μήκη κύματος της προσπίπτουσας φωτεινής δέσμης. Αυτή η ιδιότητα του φράγματος εξηγεί και την χρησιμότητά του ως συσκευής μέτρησης μηκών κύματος και φασματικής ανάλυσης.

Μονοχρωματική ακτινοβολία



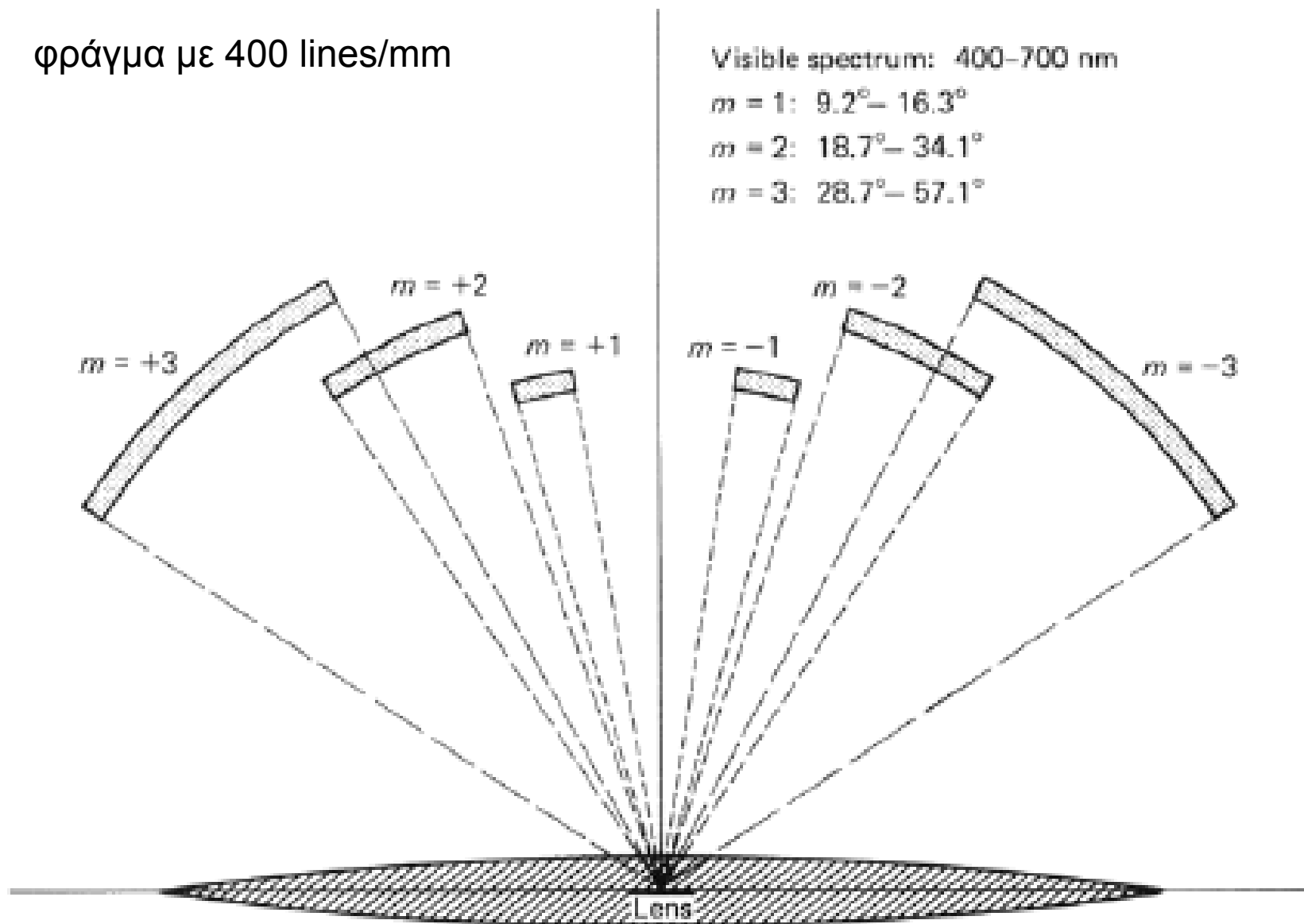
φράγμα με 400 lines/mm

Visible spectrum: 400–700 nm

$m = 1$: $9.2^\circ - 16.3^\circ$

$m = 2$: $18.7^\circ - 34.1^\circ$

$m = 3$: $28.7^\circ - 57.1^\circ$



Ελεύθερο φασματικό εύρος φράγματος

Η περιοχή μηκών κύματος σε μια συγκεκριμένη τάξη, που είναι ελεύθερη από επικαλύψεις από άλλες τάξεις, λέγεται **ελεύθερο φασματικό εύρος** (free spectral range), F .

Το μεγαλύτερο μη επικαλυπτόμενο μήκος κύματος λ_2 σε τάξη m συμπίπτει με την αρχή του φάσματος στην επόμενη (υψηλότερη) τάξη, δηλαδή

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{m}$$

Τότε, το free spectral range τάξης m δίνεται από τη σχέση:

$$F = \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_1 \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

όσο μεγαλύτερη η τάξη τόσο μικρότερο το ελεύθερο φασματικό εύρος F

Διασπορά φράγματος

$$\mathcal{D} \equiv \frac{d\theta_m}{d\lambda}$$

Η μεταβολή της θ_m συναρτήσει του λ δίνεται από την εξίσωση φράγματος

$$\mathcal{D} = \frac{m}{a \cos \theta_m}$$

Για κάθετη πρόσπτωση ($\theta_i = 0$), η εξίσωση φράγματος μπορεί να ενσωματωθεί στην σχέση

$$\mathcal{D} = \frac{m}{a \cos \theta} = \left(\frac{a \sin \theta}{\lambda} \right) \left(\frac{1}{a \cos \theta} \right) = \frac{\tan \theta}{\lambda}$$

Έτσι η διασπορά είναι στην πραγματικότητα ανεξάρτητη της σταθεράς του φράγματος για μια δεδομένη γωνία περίθλασης και αυξάνει ταχύτητα αυξανόμενου του θ .

Διακριτική ικανότητα φράγματος

Η μεγαλύτερη διασπορά δεν αρκεί από μόνη της για να διακρίνονται καλύτερα μεταξύ τους γειτονικά μήκη κύματος, εκτός αν οι ίδιες οι κορυφές έντασης είναι αρκετά αιχμηρές. Η τελευταία αυτή ιδιότητα περιγράφεται από την “διακριτική ικανότητα”.

$$R = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}}$$

Για κάθετη πρόσπτωση, και για το κύριο μέγιστο τάξης m .

$$a \sin\theta = m(\lambda + d\lambda)$$

Για να ικανοποιείται το κριτήριο Rayleigh πρέπει αυτή η κορυφή να συμπίπτει (ίδια θ) με το πρώτο ελάχιστο της κορυφής του γειτονικού μήκους κύματος στην ίδια τάξη, δηλ.

$$a \sin\theta = \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda$$

→

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = mN$$

$$R = m \cdot N = \left(\frac{a \sin\theta_m}{\lambda}\right) \frac{w}{a} \Rightarrow R = \frac{w \sin\theta_m}{\lambda}$$