ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ΒΑΣΙΚΟΥ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

Ευστάθιος Στυλιάρης
Καθηγητής – Συντονιστής Εργαστηρίων Φυσικής Ι

Με την συνδρομή των Καθηγητών: Α. Καραμπαρμπούνη, Κ.Ν. Παπανικόλα
και του π. Ν. Μαμαλούγκου (ΕΔΙΠ)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ «Καίσαρ Δ. Αλεξόπουλος»

Διαδικτυακός Τόπος

Web: http://physlab.phys.uoa.gr

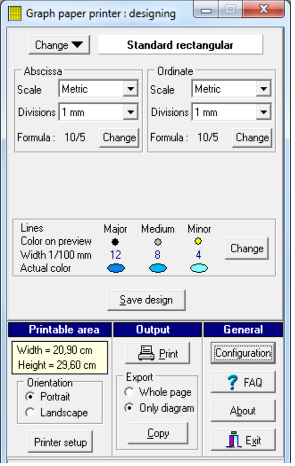
e-class: http://eclass.uoa.gr/courses/PHYS157/

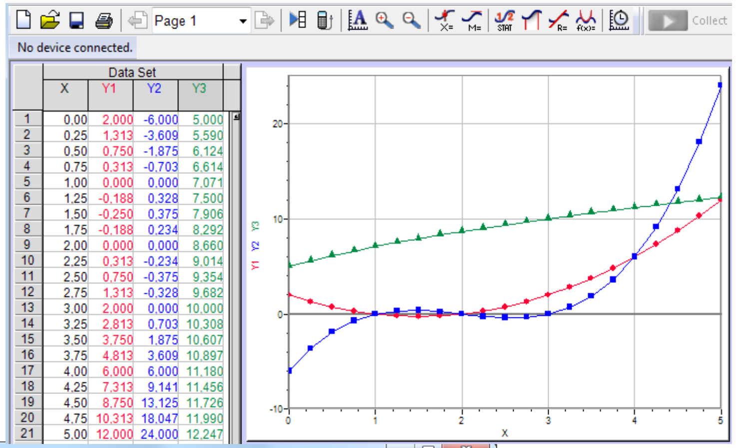
Διευθυντής Εργαστηρίου
Καθηγητής Έκτορας Νισταζάκης

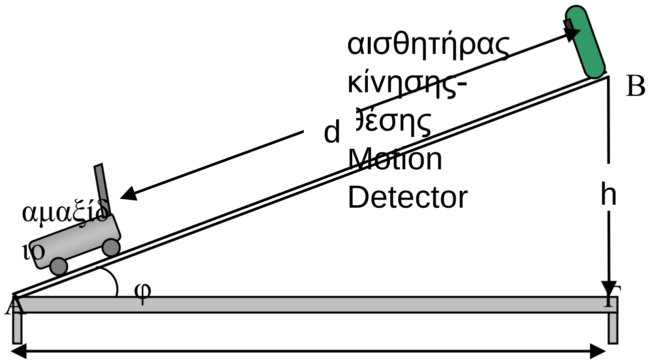
Συντονιστής Εργαστηρίων Φυσικής Ι
Ευστάθιος Στυλιάρης

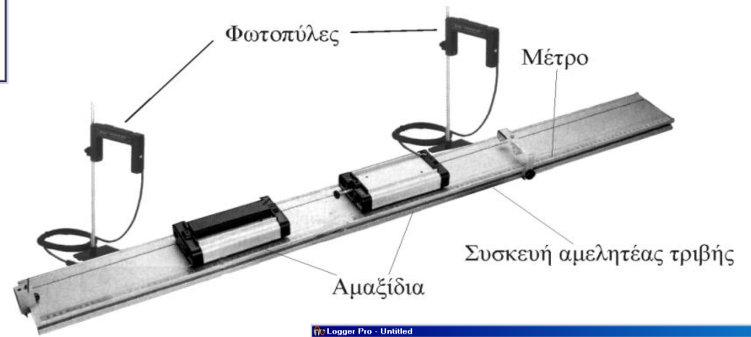
stiliaris@phys.uoa.gr

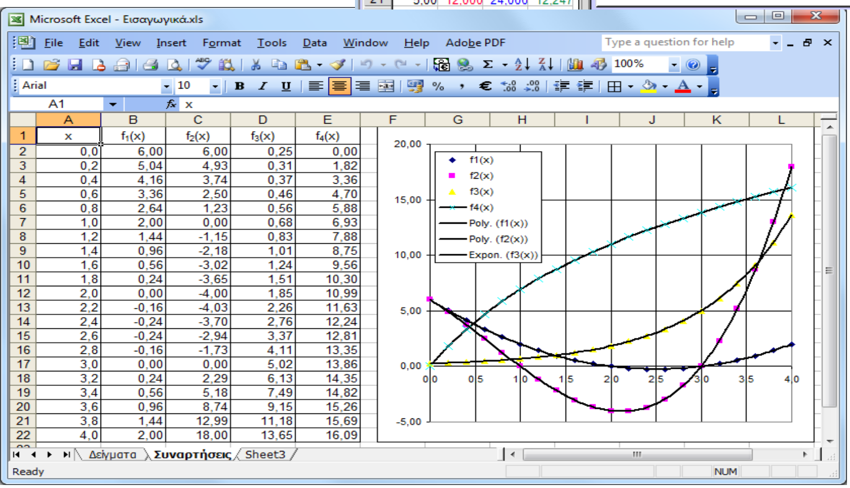
Τηλέφωνο Γραφείου: 210 - 727 6885

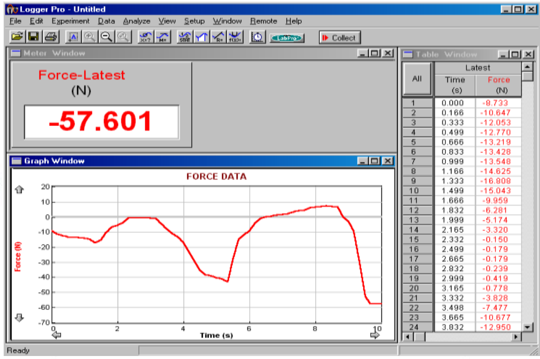

Graph paper printer : designing
Standard rectangular
Abscissa
Ordinate
Printable area
Output
General
Print
Configuration
Save design
Printer setup
Copy
About
Exit


No device connected.
Data Set
X
Y1
Y2
Y3


αισθητήρας κίνησης-θέσης
Motion Detector
d
B
h
αμαξίδιο
φ
A
Γ


Φωτοπύλες
Μέτρο
Συσκευή αμελητέας τριβής
Αμαξίδια

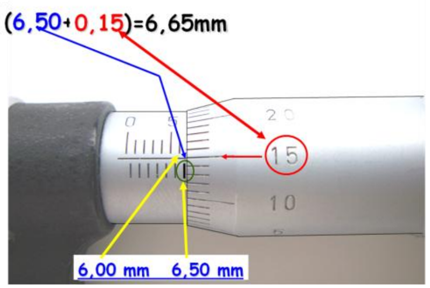

Microsoft Excel - Εισαγωγικά.xls
f1(x)
f2(x)
f3(x)
f4(x)
Poly. (f1(x))
Poly. (f2(x))
Expon. (f3(x))
Δείγματα
Συναρτήσεις
Sheet3


Logger Pro - Untitled
Force-Latest
(N)
-57.601
FORCE DATA
Time (s)


Made in Poland


0.00


ΑΣΦΑΛΕΙΑ
ΚΥΡΙΑ ΚΛΙΜΑΚΑ
ΣΤΕΛΕΧΟΣ
ΒΕΡΝΙΕΡΟΣ (ΚΙΝΗΤΗ ΚΛΙΜΑΚΑ)


(6,50+0,15)=6,65mm
15
6,00 mm
6,50 mm

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΔΙΑΛΕΞΕΩΝ

- Πειραματική Μέθοδος
- Μέτρηση και Πειραματική Αβεβαιότητα (Σφάλμα)
- Τύποι Σφαλμάτων: Στατιστικό & Συστηματικό Σφάλμα
- Διάδοση Σφαλμάτων
- Σύγκριση Θεωρίας & Πειράματος: Προσαρμογή Θεωρητικής Καμπύλης (Fit)

- Σχεδιασμός και Προετοιμασία Πειράματος
- Διεξαγωγή Μετρήσεων
- Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Διαδικασίες και Κανονισμοί του Εργαστηρίου Φυσικής

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Η Φυσική είναι πειραματική επιστήμη.

• Η γνώση μας για τον φυσικό κόσμο προέρχεται (όπως και για κάθε επιστήμη) από παρατήρηση ή από πείραμα.
• Απορρίπτουμε ή διευρύνουμε το ερμηνευτικό μας πλαίσιο (θεωρία ή πρότυπο / μοντέλο ώστε να συνάδει με τα πειραματικά δεδομένα)

Παρατήρηση: Η καταγραφή μεγεθών που αφορούν φαινόμενα μη ελεγχόμενα και συνήθως μη επαναλήψιμα (λ.χ. μια έκρηξη Supernova, κάποιος σεισμός).

Πείραμα: Η καταγραφή μεγεθών που αφορούν φαινόμενα ελεγχόμενα και επαναλήψιμα (π.χ. η μέτρηση της θερμικής αγωγιμότητας κάποιου υλικού, η σκέδαση σωματίων από κάποιο πυρήνα ...)

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Πότε και με ποια βεβαιότητα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κάποιο πειραματικό αποτέλεσμα απορρίπτει ή επιβεβαιώνει κάποια θεωρητική πρόβλεψη;

Θεωρητική Πρόβλεψη: Ισοδύναμο με συγκεκριμένη πρόταση ή αριθμητικό αποτέλεσμα που μπορεί όμως να απορριφθεί πειραματικά.

Πειραματικό αποτέλεσμα: Ισοδύναμο με αποτέλεσμα μέτρησης. **Πάντα** χαρακτηρίζεται από κάποια **αβεβαιότητα** (σφάλμα).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ

Θεωρητική Πρόβλεψη: Ισοδύναμο με συγκεκριμένη πρόταση ή αριθμητικό αποτέλεσμα που μπορεί να απορριφθεί πειραματικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Το ηλεκτρόνιο είναι σταθερό (στο χρόνο) σωμάτιο.
- Το πρωτόνιο έχει χρόνο ημιζωής 4 x 10^{34} έτη.
- Σώματα μαζών M και m έλκονται με δύναμη: $\left|\vec{F}\right| = G\dfrac{Mm}{R^2}$
- Η περίοδος (T) συστήματος ελατηρίου (K) και μάζας m είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{m/K}$$

- Η ακτίνα του πυρήνα του μολύβδου είναι: $R = 5.82 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

Πειραματικό αποτέλεσμα: Ισοδύναμο με αποτέλεσμα μέτρησης. **Πάντα** χαρακτηρίζεται από κάποια **αβεβαιότητα** (**σφάλμα**).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Το πρωτόνιο έχει χρόνο ημιζωής **μεγαλύτερο** από: 4.6×10^{33} έτη (90% CL*)
- Η ακτίνα του πυρήνα του μολύβδου είναι: $R = (5.795 \pm 0.015) \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$

Θεωρητική Πρόβλεψη $R = 5.82 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$

*Confidence Level = επίπεδο εμπιστοσύνης

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ (Κλασική Φυσική)

- Αποτέλεσμα ανεξάρτητο των οργάνων μέτρησης
- Αποτέλεσμα ανεξάρτητο του παρατηρητή
- Να υπάρχει επαναληψιμότητα

Παράγοντες που επηρεάζουν

- Περιβάλλον και συνθήκες μέτρησης
- Όργανα Μέτρησης: Ακρίβεια και Βαθμονόμηση

Επανερχόμενοι στο προηγούμενο ερώτημα: Πώς και με ποια βεβαιότητα μπορούμε από τα πειραματικά δεδομένα να επιβεβαιώσουμε ή να απορρίψουμε μια θεωρητική πρόβλεψη;

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Πειραματικό αποτέλεσμα: Ισοδύναμο με αποτέλεσμα μέτρησης.
Πάντα χαρακτηρίζεται από κάποια αβεβαιότητα ή σφάλμα.

(τιμή) ± (σφάλμα / αβεβαιότητα)

Ή ακόμη καλύτερα

(τιμή) ± (στατιστικό σφάλμα) ± (συστηματικό σφάλμα)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Η μάζα του ηλεκτρονίου είναι:

$$\boxed{(0.51099906 \pm 0.00000015)\,\mathrm{MeV}}$$

Η παγκόσμια σταθερά βαρύτητας είναι:

$$\boxed{G = (6.673 \pm 0.011) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}}$$

ΟΡΓΑΝΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΙΣΘΗΤΗΡΕΣ

Ακρίβεια

Χαρακτηριστικό του οργάνου και της τεχνολογίας στην οποία βασίζεται.

Βαθμονόμηση

Μας οδηγεί στην ανάγκη αναγωγής των μετρήσεων μας σε σύγκριση με κάποια γνωστά (πρότυπα) μεγέθη.

Καταγραφή

- Παραδοσιακά (ο άνθρωπος σαν όργανο καταγραφής).
- Απευθείας σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Τότε τα όργανα μέτρησης αποκαλούνται «*αισθητήρες*».

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Πότε υπεισέρχεται στατιστική αβεβαιότητα σε μία μέτρηση φυσικού μεγέθους;

1. Σε φαινόμενα όπου το ίδιο το σύστημα χαρακτηρίζεται από διακυμάνσεις:

- Ο χρόνος ημιζωής ραδιενεργού πυρήνα
- Η διακύμανση της μέσης θερμοκρασίας κάποια συγκεκριμένη μέρα του χρόνου

2. Όπου η «ανάγνωση» του οργάνου εισάγει πολυπλοκότητα και αστάθμητους (χαοτικής συμπεριφοράς) παράγοντες:

- Η παρουσία θορύβου στο σήμα (λ.χ. σε ηλεκτρονικά όργανα)
- Η διακύμανση στον χρόνο της αντίδρασης του παρατηρητή

ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Τι καθορίζει την πειραματική αβεβαιότητα σε μία μέτρηση φυσικού μεγέθους;

- Η ακρίβεια του οργάνου μέτρησης
- Η βαθμονόμηση του οργάνου μέτρησης
- Ο μη απόλυτος έλεγχος (ή γνώση) των πειραματικών συνθηκών

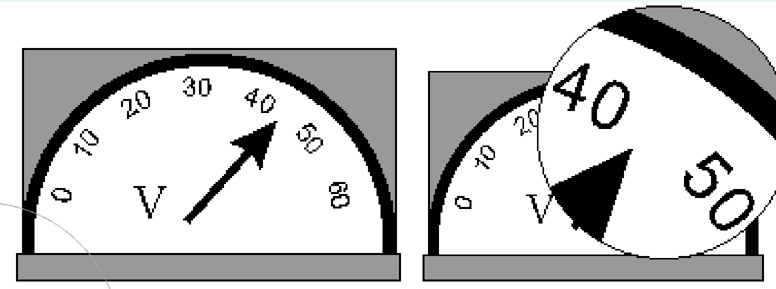
Η πειραματική αυτή αβεβαιότητα αναφέρεται ως «συστηματική».

Όσες φορές και να επαναλάβουμε μια τέτοια μέτρηση δεν είναι δυνατό να ξεπεράσουμε τους περιορισμούς αυτούς. Απλά επαναλαμβάνουμε το ίδιο σφάλμα.

ΤΟ ΣΦΑΛΜΑ ΑΝΑΓΝΩΣΗΣ ΩΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Τι καθορίζει το σφάλμα ανάγνωσης ενός οργάνου;

Για τα αναλογικά όργανα εξαρτάται από την απόσταση ανάμεσα στις υποδιαιρέσεις του οργάνου.



Για τα ψηφιακά όργανα συνήθως είναι το μισό του τελευταίου ψηφίου.

Ακρίβεια οργάνου είναι η αβεβαιότητα που προκύπτει λόγω της κατασκευής του οργάνου και συνήθως δίδεται από τον κατασκευαστή.

Κατά κανόνα το σφάλμα οργάνου είναι μικρότερο από το σφάλμα ανάγνωσης.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΤΡΟΠΟΣ ΓΡΑΦΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

(τιμή ± αβεβαιότητα)

$$G \pm \delta G = (6.673 \pm 0.011) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

τιμή (αβεβαιότητα)

$$G = 6.673\ (11) \times 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

$$\eta = \frac{\delta \bar{x}}{\bar{x}}$$

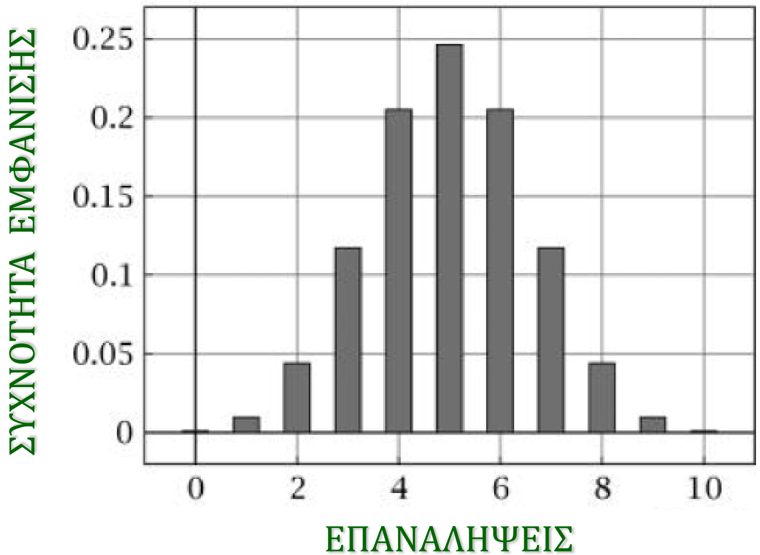
Απόλυτος αριθμός που μπορεί να εκφραστεί και ποσοστιαία.

$$\frac{\delta G}{G} = 0.00165 \ \text{ή}\ \frac{\delta G}{G} = 0.165\,\%$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Παραδείγματα διακριτών τιμών

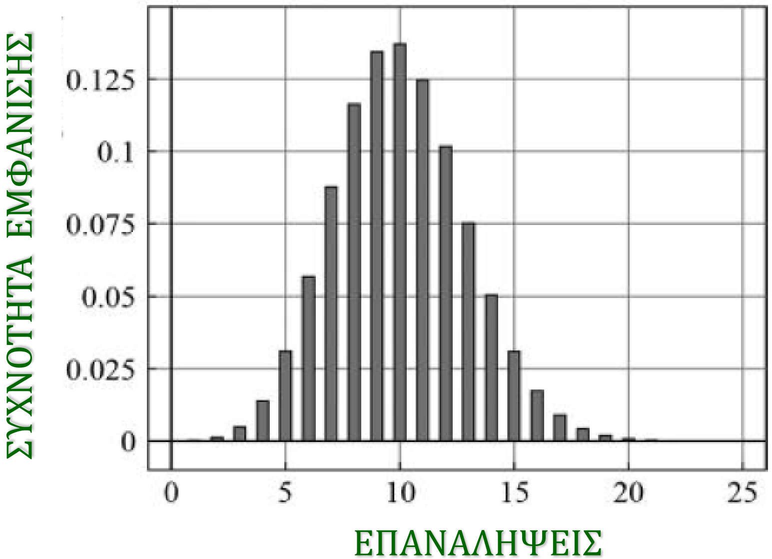
Ρίψη ενός νομίσματος



<u>Πείραμα</u>

Πόσες φορές έρχεται *«κεφαλή»* στις 10 ρίψεις

Ρίψη ενός ζαριού

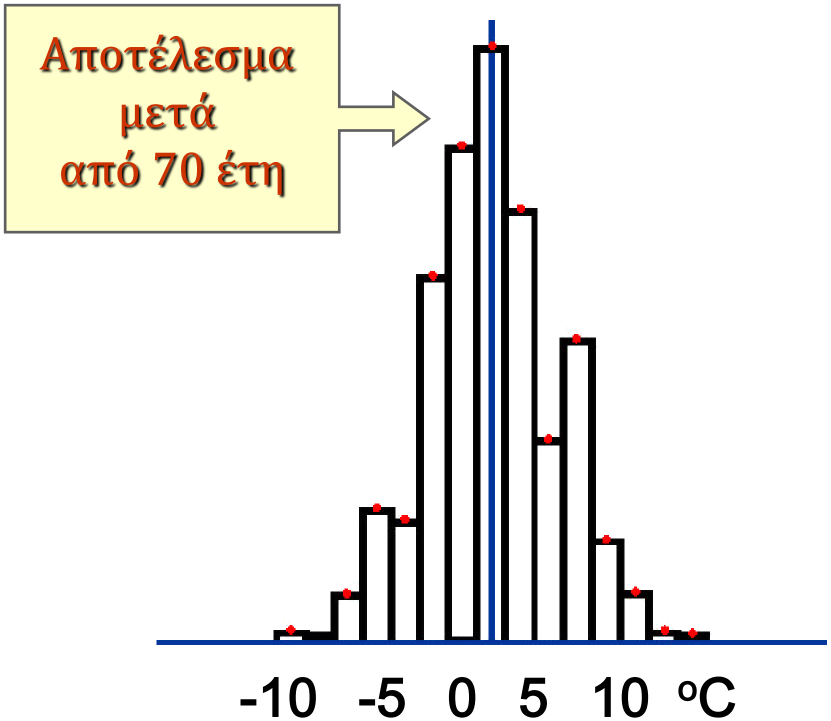


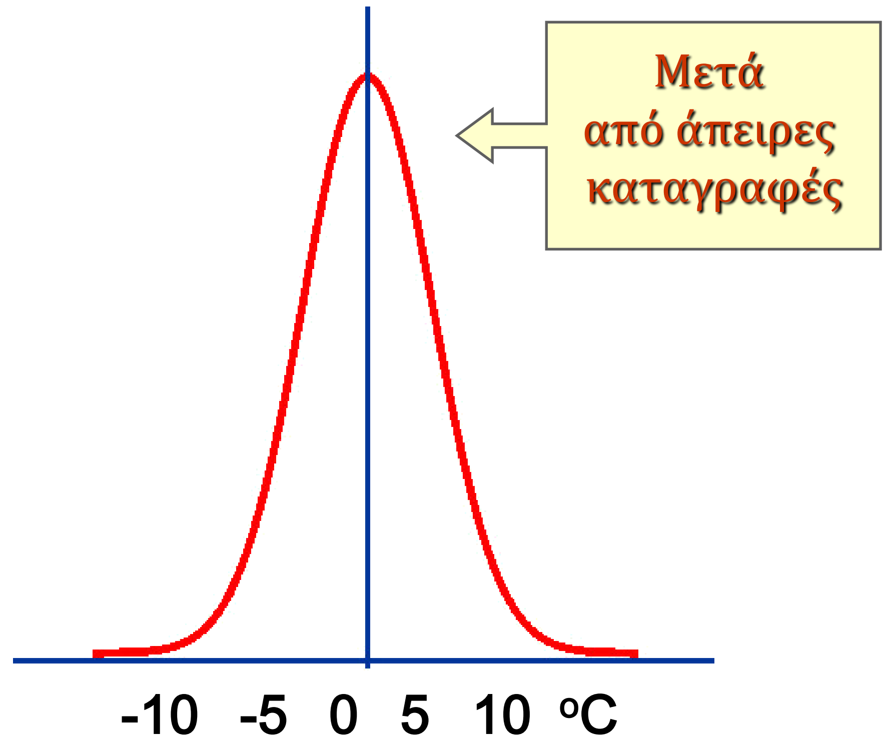
<u>Πείραμα</u>

Πόσες φορές έρχεται *«εξάρα»* στις 60 ρίψεις

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Παράδειγμα συνεχούς κατανομής: Καταγράφουμε τη μέση θερμοκρασία ενός τόπου σε συγκεκριμένη ημερομηνία για μια σειρά ετών

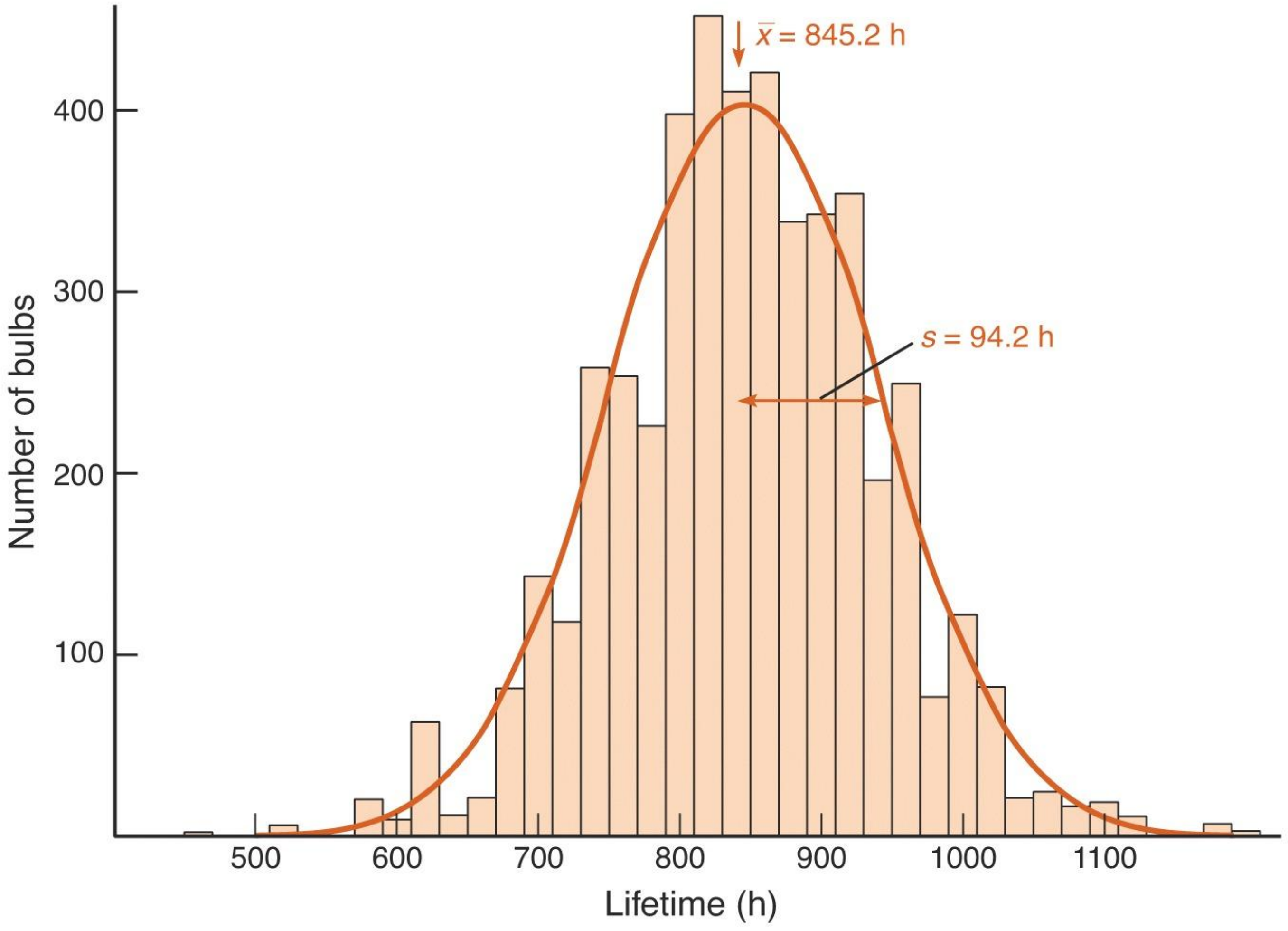




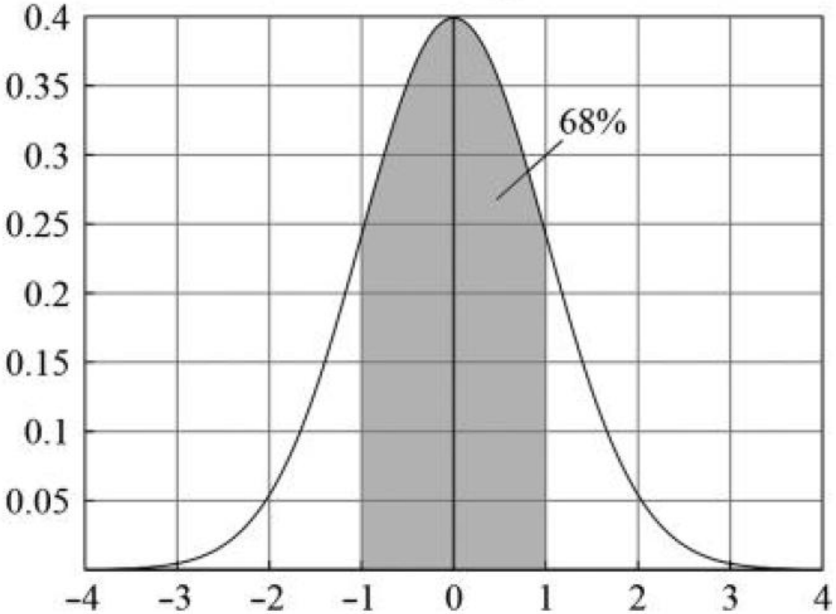
Σύμφωνα με την στατιστική θεωρία, αν το φαινόμενο είναι πραγματικά τυχαίο, η οριακή κατανομή (μετά από άπειρες μετρήσεις του φαινομένου) που θα προκύψει θα είναι μια κατανομή Gauss (κανονική κατανομή).

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Χρόνος ζωής λαμπτήρων πυρακτώσεως



ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (Gauss)



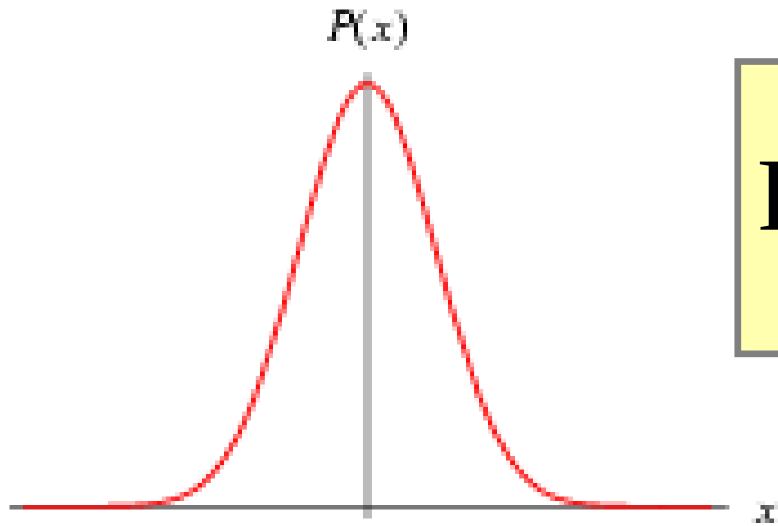
$$\frac{x-\mu}{\sigma}$$

Η ποσότητα (μ ± σ) μας υποδεικνύει ότι η πιθανότητα μια μέτρηση να βρίσκεται στο διάστημα αυτό είναι 68.3 %.

Η ποσότητα (μ ± 2σ) μας υποδεικνύει ότι η πιθανότητα μια μέτρηση να βρίσκεται στο διάστημα αυτό είναι 95.5 %.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$$

(μ ± 1σ): 68.30 %
(μ ± 2σ): 95.45 %
(μ ± 3σ): 99.73 %
(μ ± 4σ): 99.99 %



Κατανομή Gauss

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = 1$$

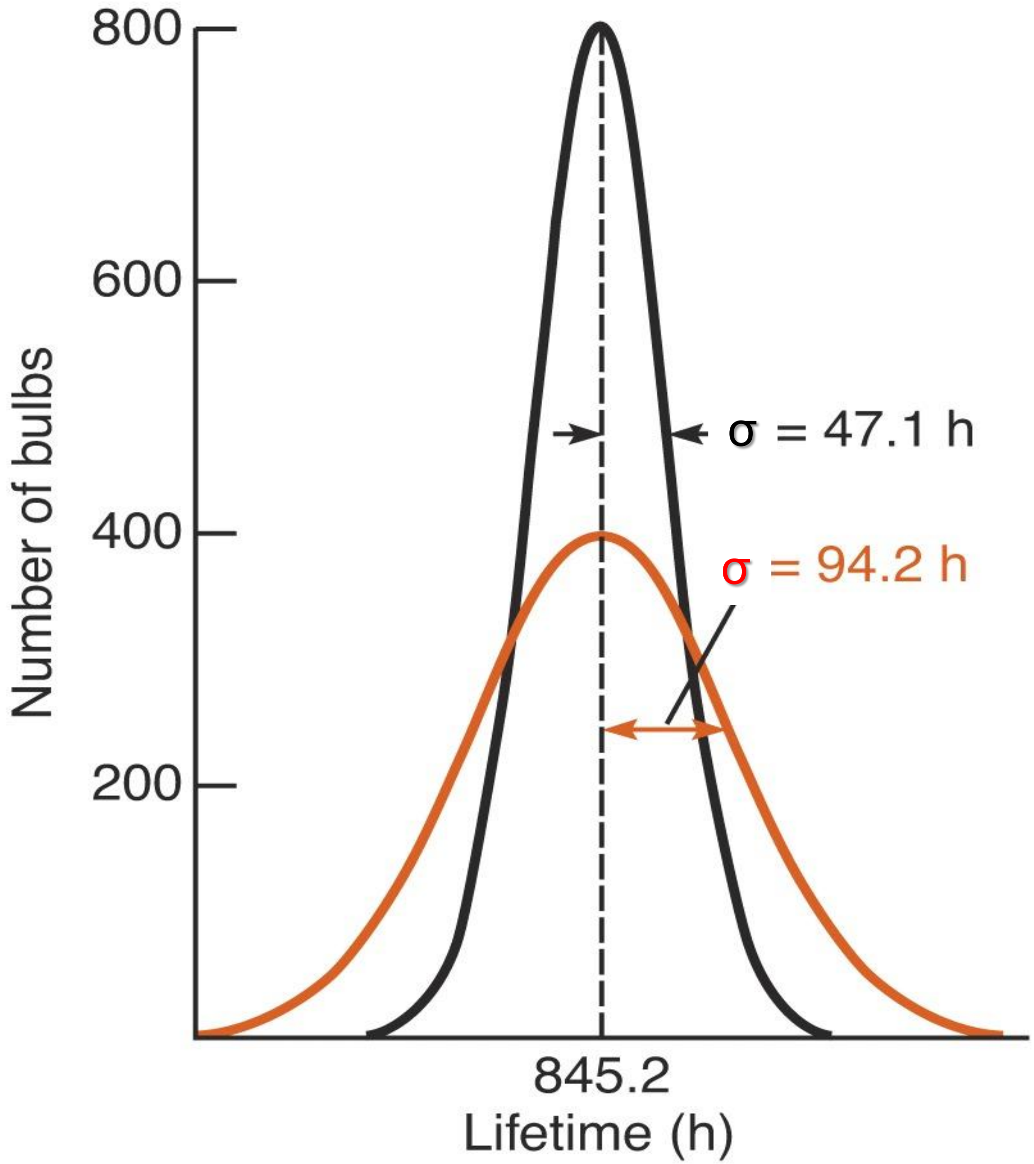
μ: μέση τιμή $\Rightarrow$ $\mu = \bar{x} = \langle x \rangle$

σ: τυπική ή μέση τετραγωνική απόκλιση $\Rightarrow$ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{(N-1)}}$

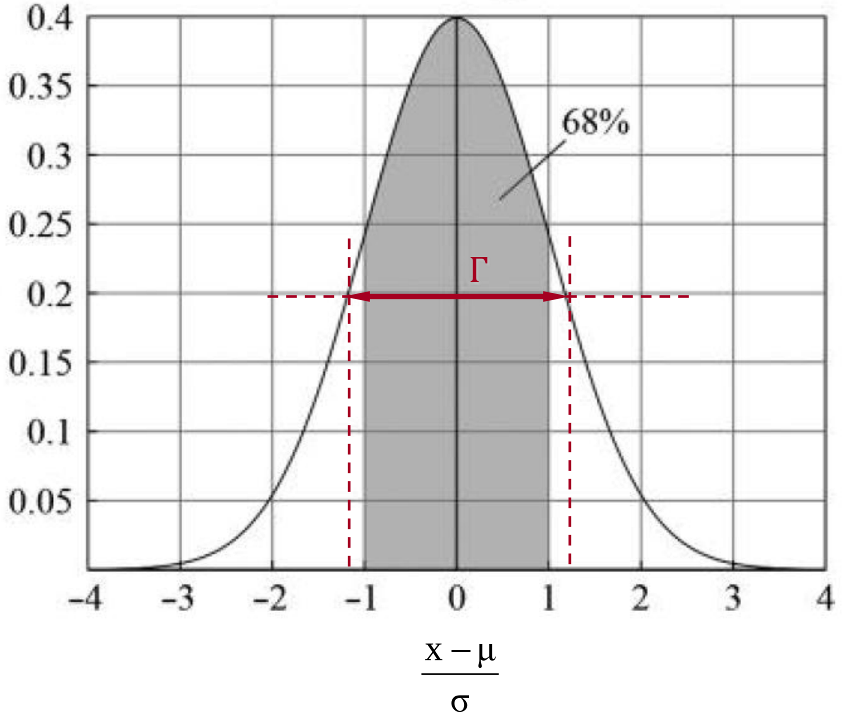
σ^2 : διασπορά

$\delta\bar{x}$: σφάλμα μέσης τιμής $\Rightarrow$ $\delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ



ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (Gauss)



$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$$

Full Width at Half Maximum
FWHM = Γ

$$f\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}f(0)$$

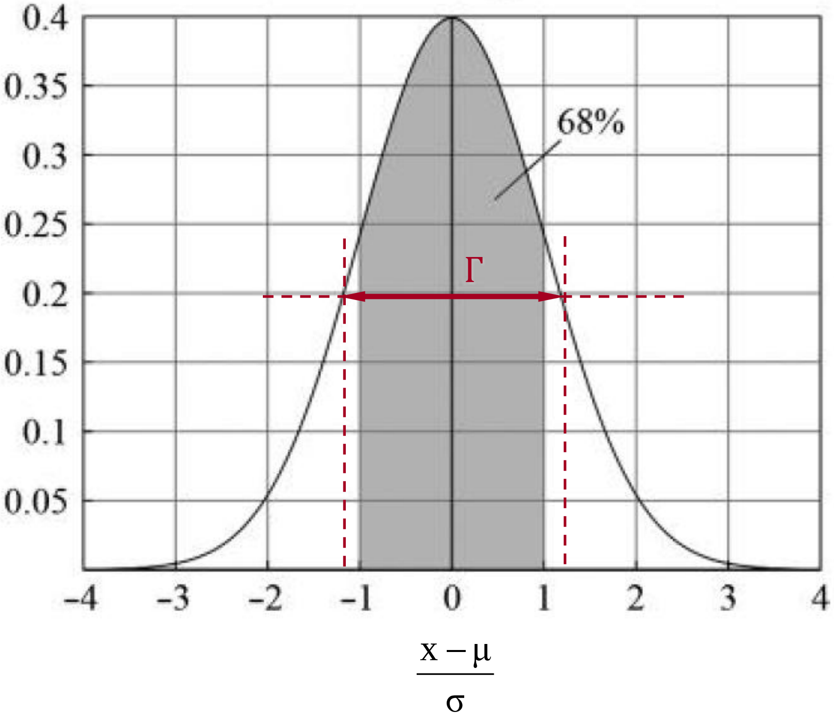
$$\Downarrow$$

$$\Gamma=2\sqrt{2\ln 2}\,\sigma$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma=2.35\,\sigma$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (Gauss)



$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$$

Απόδειξη

$$f\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}f(0)$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\Gamma/2)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{0^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow\quad e^{-\frac{(\Gamma/2)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{(\Gamma/2)^2}{2\sigma^2}=\ln 2$$

$$\Gamma=2\sqrt{2\ln 2}\,\sigma$$

Στατιστική Αβεβαιότητα

Έστω ότι μετρούμε N φορές την ίδια ποσότητα x και βρίσκουμε τις τιμές x_i, όπου i=1,2,..., N.

Μέση Τιμή

$$\bar{x} \equiv \langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Αβεβαιότητα (Σφάλμα) Μέσης Τιμής

$$\delta\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x} - x_i\right)^2}{N(N-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Δίνουμε σαν απάντηση:

(τιμή) ± (αβεβαιότητα)

$$\boxed{(\bar{x}) \pm (\delta\bar{x})}$$

Παράδειγμα: Μέτρηση του βάρους Β (σε Ν) ενός σώματος δίνει τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα για συνολικά 6 μετρήσεις:

10 **8** **11** **12** **10** **9**

i	B_i	$\bar{B} - B_i$	$(\bar{B} - B_i)^2$
1	10.0	0.0	0.0
2	8.0	+2.0	4.0
3	11.0	-1.0	1.0
4	12.0	-2.0	4.0
5	10.0	0.0	0.0
6	9.0	+1.0	1.0
	$\sum B_i = 60.0$	$\sum(\bar{B} - B_i) = 0.0$	$\sum(\bar{B} - B_i)^2 = 10.0$

$$\bar{B} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} B_i = \frac{1}{6}60.0 = 10.0$$

$$\delta\bar{B} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{B} - B_i)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{10}{6\cdot 5}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57735 \approx 0.6$$

$$\bar{B} \pm \delta\bar{B} = 10.0 \pm 0.6$$

Παράδειγμα: Μέτρηση του βάρους Β (σε Ν) ενός σώματος δίνει τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα για συνολικά 6 μετρήσεις:

10	8	11	12	10	9

i	B_i	$\overline{B} - B_i$	$\left(\overline{B} - B_i\right)^2$
1	10.0	0.0	0.0
2	8.0	+2.0	4.0
3	11.0	-1.0	1.0
4	12.0	-2.0	4.0
5	10.0	0.0	0.0
6	9.0	+1.0	1.0
	$\sum B_i = 60.0$	$\sum\left(\overline{B} - B_i\right) = 0.0$	$\sum\left(\overline{B} - B_i\right)^2 = 10.0$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\overline{B} - B_i)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} = 1.4142 \approx 1.4$$

$$\overline{B} \pm \delta\overline{B} = 10.0 \pm 0.6$$

Παράδειγμα: Κάποιος μετράει 6 φορές το μήκος ενός αντικειμένου και βρίσκει τις ακόλουθες τιμές (σε cm):

32.6	**32.6**	**32.6**	**32.5**	**32.6**	**32.6**

Με βάση τα προηγούμενα βρίσκει: $\overline{L} = 32.5833\ldots \quad \delta\overline{L} = 0.01713\ldots$

Και δίνει σαν αποτέλεσμα: $\overline{L} \pm \delta\overline{L} = 32.583 \pm 0.017$

Αν όλες οι μετρήσεις έδιναν 32.6
ποιό θα ήταν το σφάλμα της μέσης τιμής;
Μηδέν;

Αν το **σφάλμα ανάγνωσης** του οργάνου είναι **0.1cm** τότε η σωστή απάντηση είναι:

$$\overline{L} \pm \delta\overline{L} = 32.60 \pm 0.10$$

Στρογγυλοποίηση αποτελέσματος

Να αποδώσετε με στρογγυλοποίηση τα παρακάτω πειραματικά αποτελέσματα, τα οποία πριν την σωστή εκτίμηση των σημαντικών ψηφίων έχουν ως ακολούθως:

$\overline{x}$	$\delta\overline{x}$		$\overline{y}$	$\delta\overline{y}$		$\overline{z}$	$\delta\overline{z}$
1,2352	0,2436		123180	6890		0,0567	0,0168

$$\overline{x} \pm \delta\overline{x} = 1{,}24 \pm 0{,}24$$

$$\overline{y} \pm \delta\overline{y} = 123000 \pm 7000$$

$$\overline{z} \pm \delta\overline{z} = 0{,}057 \pm 0{,}017$$

ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Έστω παράγωγο φυσικό μέγεθος **u = f(x, y, z, ...)**, όπου **x, y, z, ...** είναι οι άμεσα μετρούμενες ποσότητες. Γνωρίζοντας τις μέσες τιμές και τα σφάλματα των μεγεθών αυτών

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots \qquad \text{και} \qquad \delta\bar{x}, \delta\bar{y}, \delta\bar{z}, \ldots$$

ισχύει:

$$\boxed{\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)}$$

Το σφάλμα της μέσης τιμής **δu** υπολογίζεται με τη βοήθεια των μερικών παραγώγων της συνάρτησης **u** ως προς τις μεταβλητές **x, y, z, ...** , οι οποίες δομούν συντελεστές βαρύτητας στην **τετραγωνική άθροιση** των επιμέρους σφαλμάτων **(διάδοση σφάλματος)**:

$$\boxed{\delta\bar{u} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta\bar{x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\delta\bar{y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\delta\bar{z}\right)^2 + \ldots}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Υπολογισμός της επιτάχυνσης σε ευθύγραμμη, ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, μέσω μέτρησης του αντίστοιχου διαστήματος **s** και χρόνου **t**.

$$a = \frac{2s}{t^2} \qquad \bar{s} = (35.20 \pm 0.10)\,\mathrm{m} \quad \bar{t} = (12.0 \pm 0.5)\,\mathrm{s}$$

Η μέση τιμή της επιτάχυνσης **a** υπολογίζεται:

$$\bar{a} = \frac{2\bar{s}}{\bar{t}^2} = \frac{2 \cdot 35.2}{12.0^2} = 0.48888\ldots\ \mathrm{m/s^2}$$

Το σφάλμα της μέσης τιμής **δa** υπολογίζεται:

$$\delta\bar{a} = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial s}\delta\bar{s}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t}\delta\bar{t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\delta\bar{s}\right)^2 + \left(\frac{-4s}{t^3}\delta\bar{t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{12^2}0.1\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 35.2}{12^3}0.5\right)^2} = 0.0407\ldots$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\bar{a} \pm \delta\bar{a} = (0.49 \pm 0.04)\ \mathrm{m/s^2}$$

ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Ο τύπος της διάδοσης σφάλματος για παράγωγο φυσικό μέγεθος **u = f(x, y, z)** της μορφής $\mathbf{u = x^{\lambda}\, y^{\mu}\, z^{\nu}}$ απλουστεύεται με τη χρήση του σχετικού σφάλματος.
Εύκολα αποδεικνύεται πως:

$$\frac{\delta\bar{u}}{\bar{u}} = \sqrt{\left(\lambda\frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\mu\frac{\delta\bar{y}}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\nu\frac{\delta\bar{z}}{\bar{z}}\right)^2}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα της επιτάχυνσης ισχύει δηλαδή:

$$\frac{\delta\bar{a}}{\bar{a}} = \sqrt{\left(\frac{\delta s}{s}\right)^2 + \left(2\frac{\delta t}{t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.1}{35.2}\right)^2 + \left(2\frac{0.5}{12}\right)^2} = 0.083381\ldots$$

και κατά συνέπεια: $\delta\bar{a} = 0.083381\cdot\bar{a} = 0.083381\cdot 0.48888 = 0.0407\ldots$

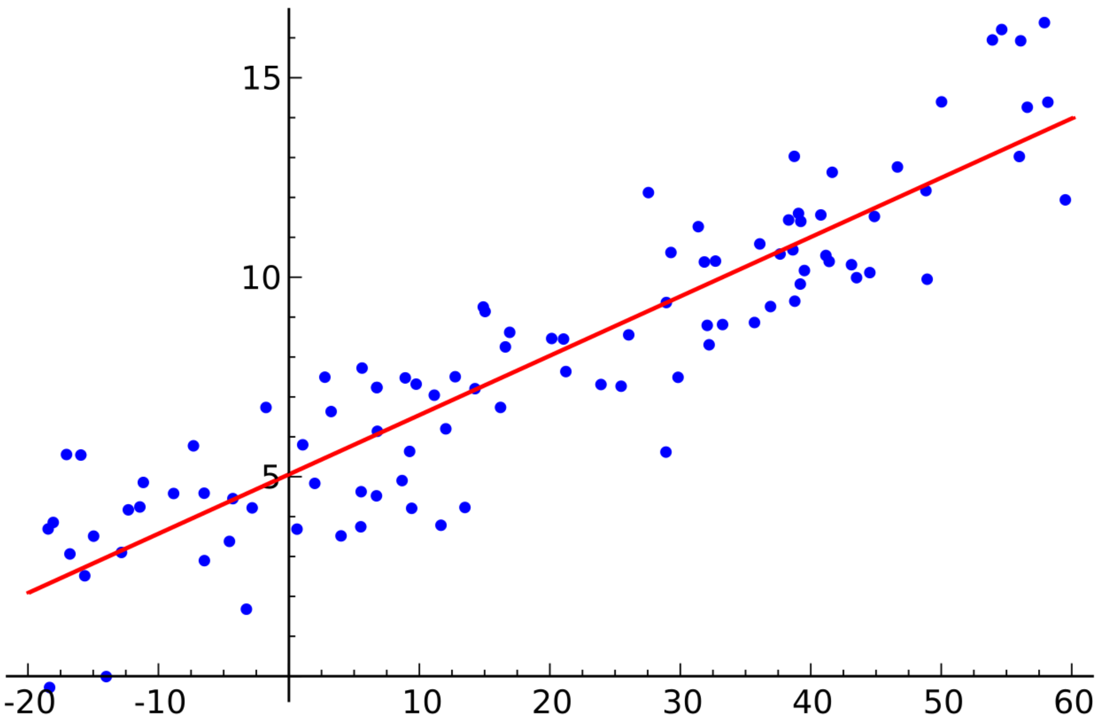
με τελικό αποτέλεσμα:

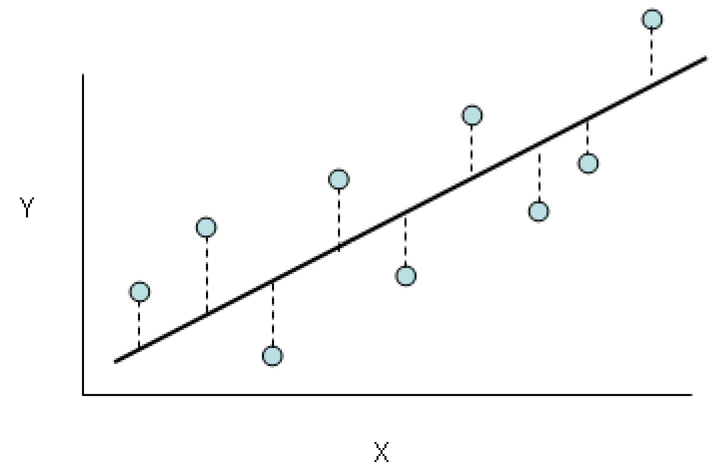
$$\bar{a} \pm \delta\bar{a} = (0.49 \pm 0.04)\ \text{m/s}^2$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Μέθοδος Μαθηματικής
Βελτιστοποίησης

Το κλασσικό πρόβλημα: Η βέλτιστη ευθεία που περιγράφει πειραματικά σημεία ενός γραμμικά εξαρτημένου φυσικού μεγέθους.





Απόκλιση Σημείου

$$\Delta y = y^{exp} - y^{th}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Μέθοδος Μαθηματικής
Βελτιστοποίησης

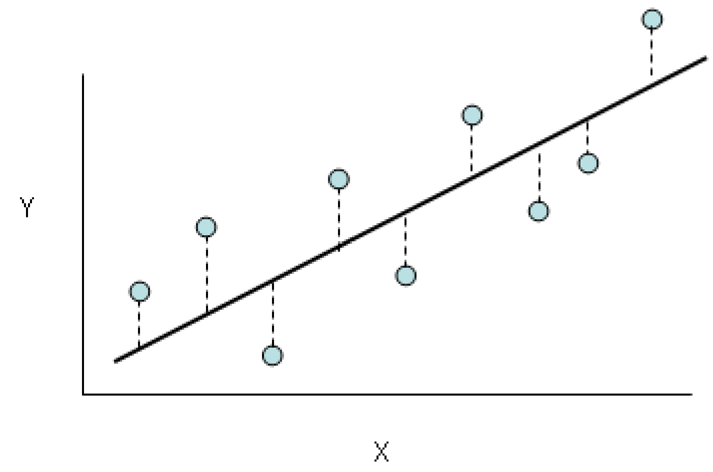
Επίλυση: Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους, η οποία ορίζεται ως το συνολικό άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων.

Συνάρτηση Κόστους

$$\chi^2 = \sum_i \left(y_i^{exp} - y_i^{th} \right)^2$$

$$\min \chi^2$$

Ελαχιστοποίηση του χ^2



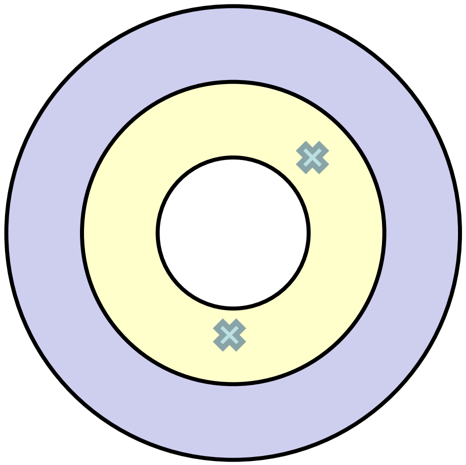
Απόκλιση Σημείου

$$\Delta y = y^{exp} - y^{th}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Μέθοδος Μαθηματικής
Βελτιστοποίησης

Ερώτημα: Γιατί το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων;

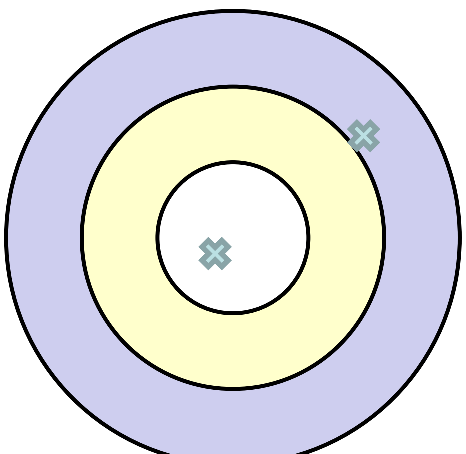


1ος Παίκτης

Άθροισμα Αποκλίσεων: $1 + 1 = 2$

Άθροισμα Τετραγωνικών Αποκλίσεων: $1^2 + 1^2 = 2$

Κερδίζει ο 1ος Παίκτης!

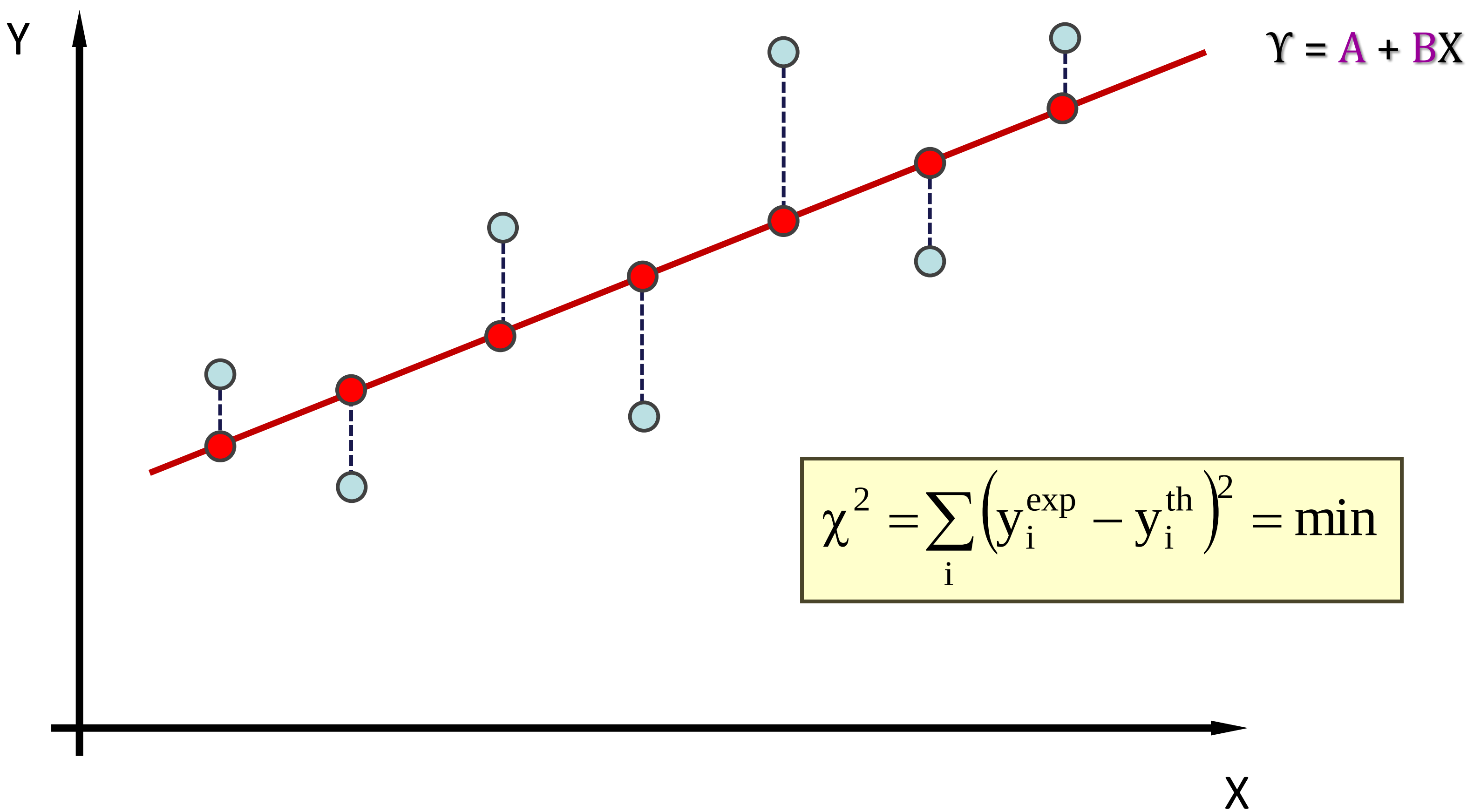


2ος Παίκτης

Άθροισμα Αποκλίσεων: $0 + 2 = 2$

Άθροισμα Τετραγωνικών Αποκλίσεων: $0^2 + 2^2 = 4$

Οι συντελεστές Α και Β της βέλτιστης ευθείας καθορίζονται από το κριτήριο ελαχιστοποίησης της συνάρτησης χ^2.



$$\chi^2 = \sum_i \left(y_i^{exp} - y_i^{th} \right)^2 = \min$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τα **A** και **B** και να χαράξουμε τη βέλτιστη ευθεία

$$y = A + Bx$$

όπου οι συντελεστές A και B δίνονται από τις σχέσεις:

$$A = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)}{N\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$B = \frac{N\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{N\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Τα σφάλματα των A και B (δA, δB) υπολογίζονται:

$$\delta A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}} \quad , \quad \delta B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}}$$

όπου:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - A - Bx_i\right)^2}{N-2}}$$

Εύρεση των παραμέτρων της ευθείας a και b

Εφόσον $$f(x) = a + b \cdot x \;\Rightarrow\; \chi^2 = \sum_{\iota=1}^{N} \left(\frac{a + bx_i - y_i}{\sigma_i} \right)^2 = \chi^2(a,b)$$

Η ελαχιστοποίηση της ποσότητας χ^2, η οποία εξαρτάται μόνο από τα a και b, επιτυγχάνεται με μηδενισμό των μερικών παραγώγων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{2\left[(a + bx_i) - y_i\right] \cdot 1}{\sigma_\iota^2} = 0 \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{2\left[(a + bx_i) - y_i\right] \cdot x_i}{\sigma_\iota^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\left[(a + bx_i) - y_i\right]}{\sigma_\iota^2} = 0 \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\left[(a + bx_i) - y_i\right] \cdot x_i}{\sigma_\iota^2} = 0 \end{array} \right\}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Καταλήγουμε έτσι στο γραμμικό σύστημα των δύο εξισώσεων ως προς a και b:

$$\begin{Bmatrix} a\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_\iota^2} + b\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_\iota^2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{\sigma_\iota^2} \\ a\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_\iota^2} + b\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{\sigma_\iota^2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i y_i}{\sigma_\iota^2} \end{Bmatrix}$$

Παρατηρούμε πως οι υπεισερχόμενοι συντελεστές είναι αθροίσματα δυναμοσειρών του *x* και ροπών του *y*. Αν για διευκόλυνση ορίσουμε αντίστοιχα

$$S_k = \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^k}{\sigma_\iota^2} \quad , \quad W_k = \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^k y_i}{\sigma_\iota^2}$$

τότε το σύστημα γράφεται:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} aS_0 + bS_1 = W_0 \\ aS_1 + bS_2 = W_1 \end{Bmatrix}}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Οι λύσεις του συστήματος αυτού δίνουν:

$$\left\{\begin{array}{l} aS_0 + bS_1 = W_0 \\ \\ aS_1 + bS_2 = W_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ a = \frac{\begin{vmatrix} W_0 & S_1 \\ W_1 & S_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}} \;,\; b = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & W_0 \\ S_1 & W_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}} \right\}$$

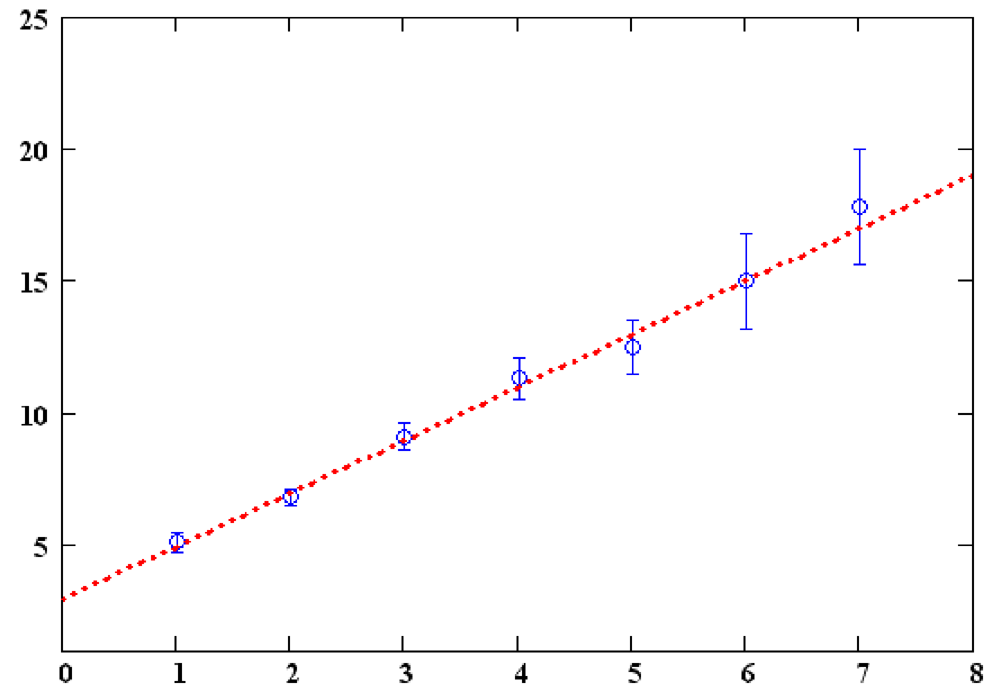
οι οποίες δίνουν τις προηγούμενες εκφράσεις για τις τιμές των a και b:

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{\sigma_i^2}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2} \;,\; b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i\cdot y_i}{\sigma_i^2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{\sigma_i^2}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2}$$

<u>Σημείωση:</u> Στην παραπάνω απόδειξη έχουν συμπεριληφθεί και τα σφάλματα των μετρήσεων σ_i, τα οποία παίζουν τον ρόλο συντελεστών βαρύτητας στην συνολική διαμόρφωση της ποσότητας χ^2.

Παράδειγμα για δεδομένα (N=7)

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 5.1 \\ 6.8 \\ 9.1 \\ 11.3 \\ 12.5 \\ 15.0 \\ 17.8 \end{pmatrix} \quad Err := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 0.8 \\ 1.0 \\ 1.8 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$



$$S(k) := \sum_{i=1}^{N} \frac{(X_i)^k}{(Err_i)^2} \qquad W(k) := \sum_{i=1}^{N} \frac{(X_i)^k \cdot Y_i}{(Err_i)^2}$$

$$\boxed{Y=a+bX}$$

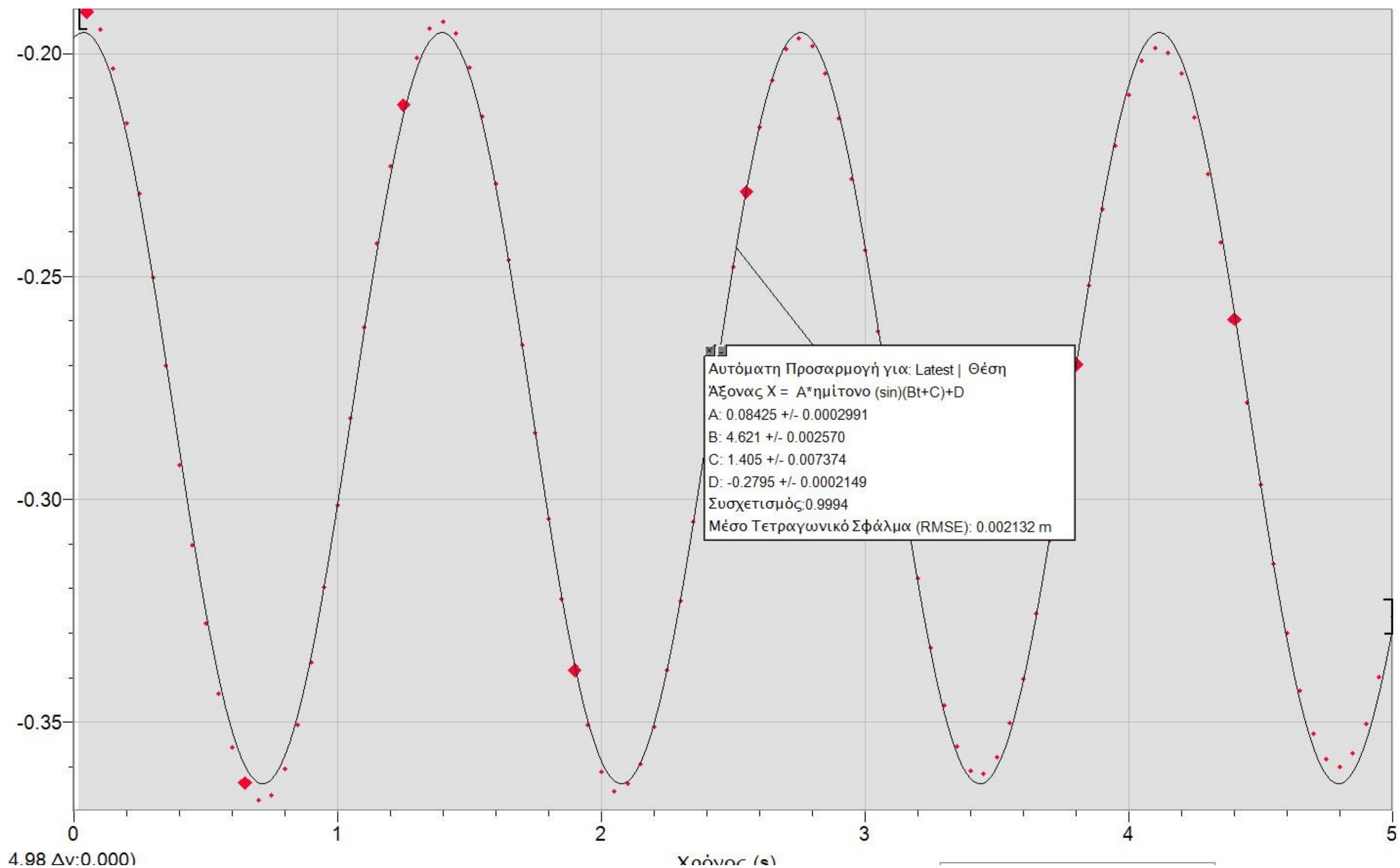
$$DD := \begin{pmatrix} S(0) & S(1) \\ S(1) & S(2) \end{pmatrix} \quad DA := \begin{pmatrix} W(0) & S(1) \\ W(1) & S(2) \end{pmatrix} \quad DB := \begin{pmatrix} S(0) & W(0) \\ S(1) & W(1) \end{pmatrix}$$

$$a := \frac{|DA|}{|DD|} \qquad b := \frac{|DB|}{|DD|}$$

$$a = 2.936 \qquad b = 2.009$$

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ
για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Για δοσμένη μάζα m μέτρηση της περιόδου T και της επιμήκυνσης του ελατηρίου Δx.



ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ
για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Για δοσμένη μάζα m μέτρηση της περιόδου T και της επιμήκυνσης του ελατηρίου Δx.

Καταγραφή των ταλαντώσεων για Δt = 5 sec (σύνολο 100 σημεία).

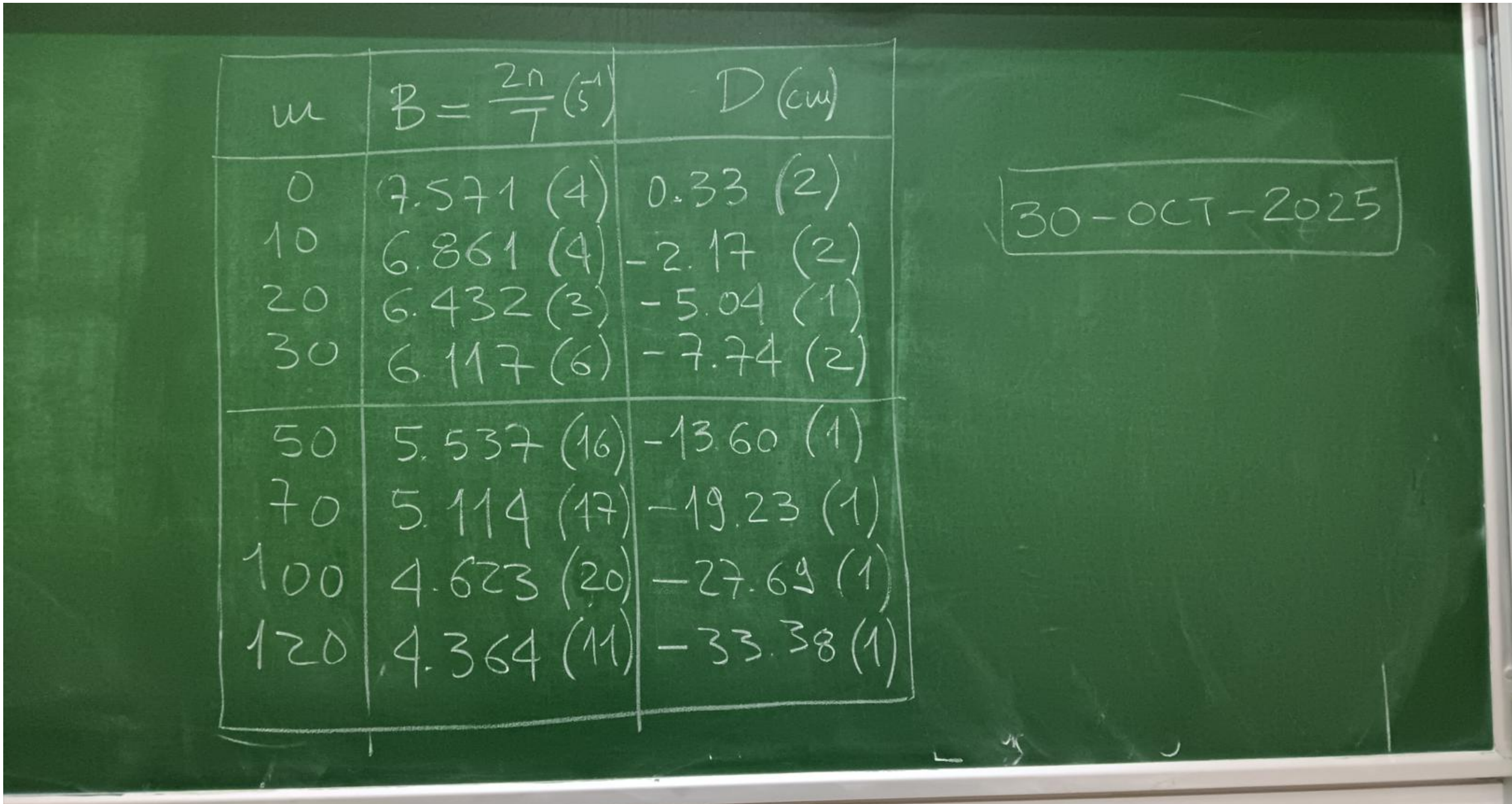
Προσαρμογή καμπύλης με τη μορφή

$$\boxed{A\sin(Bt + C) + D}$$

Πειραματικά δεδομένα της 30ης Οκτωβρίου 2025

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ

για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k



ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ
για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

$X_0 = 0.0033 \pm 10^{-4}$ m

m (kg)	2π/T (s^{-1})	D (m)	Δx (m)
0.000	7.571 ± 0.004	+ 0.0033 ± 0.0002	0.0000
0.010	6.861 ± 0.004	- 0.0217 ± 0.0002	0.0250
0.020	6.432 ± 0.003	- 0.0504 ± 0.0001	0.0537
0.030	6.117 ± 0.006	- 0.0774 ± 0.0002	0.0807
0.050	5.537 ± 0.016	- 0.1360 ± 0.0001	0.1393
0.070	5.114 ± 0.017	- 0.1923 ± 0.0001	0.1956
0.100	4.623 ± 0.020	- 0.2769 ± 0.0001	0.2802
0.120	4.364 ± 0.011	- 0.3338 ± 0.0001	0.3371

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ
για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Νόμος του Hooke: $F = mg = k\,\Delta x$

HOOKE's LAW

$$M := \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.010 \\ 0.020 \\ 0.030 \\ 0.050 \\ 0.070 \\ 0.100 \\ 0.120 \end{pmatrix} \qquad DX := \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0250 \\ 0.0537 \\ 0.0807 \\ 0.1393 \\ 0.1956 \\ 0.2802 \\ 0.3371 \end{pmatrix} \qquad F := M \cdot 9.81 \qquad F = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0981 \\ 0.1962 \\ 0.2943 \\ 0.4905 \\ 0.6867 \\ 0.9810 \\ 1.1772 \end{pmatrix}$$

$N := \text{length}(M)$ $\quad u := \text{slope}(DX, F)$ $\quad u = 3.472$ $\quad v := \text{intercept}(DX, F)$ $\quad v = 8.084 \times 10^{-3}$

$\Delta u = 0.0137$ $\qquad \Delta v = 2.465 \times 10^{-3}$

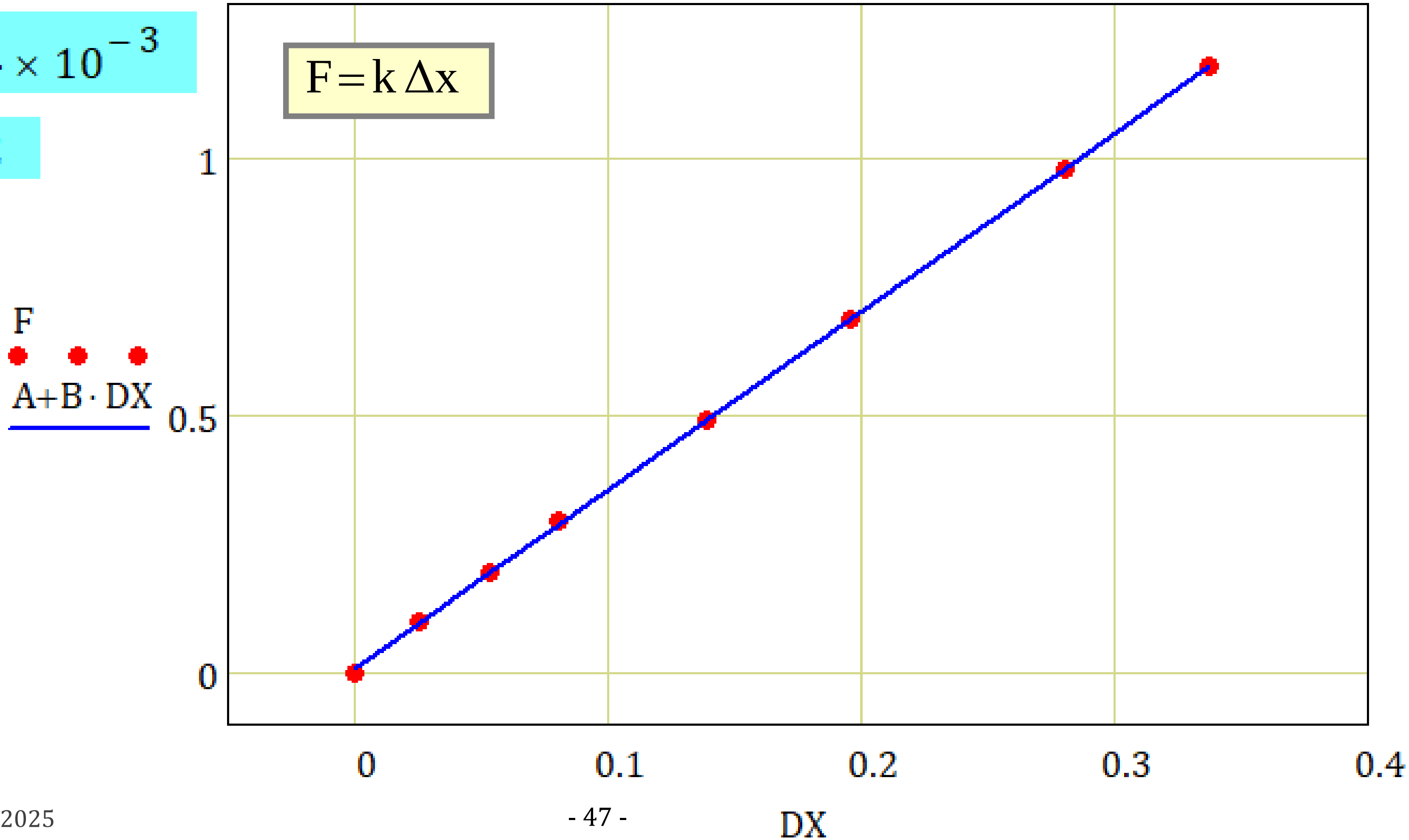
ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ

για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Νόμος του Hooke: $F = mg = k\,\Delta x$

$A = 8.084 \times 10^{-3}$

$B = 3.472$



ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ
για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Ταλάντωση Ελατηρίου: $T = 2\pi\,(m/k)^{1/2}$

OSCILLATOR's PERIOD

$$M := \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.010 \\ 0.020 \\ 0.030 \\ 0.050 \\ 0.070 \\ 0.100 \\ 0.120 \end{pmatrix} \qquad Tp := \begin{pmatrix} 7.571 \\ 6.861 \\ 6.432 \\ 6.117 \\ 5.537 \\ 5.114 \\ 4.623 \\ 4.364 \end{pmatrix} \qquad T2p := \left(\frac{1}{Tp}\right)^2$$

$$M0 := 0.000 \qquad MM := M + M0$$

$$T2p = \begin{pmatrix} 0.0174 \\ 0.0212 \\ 0.0242 \\ 0.0267 \\ 0.0326 \\ 0.0382 \\ 0.0468 \\ 0.0525 \end{pmatrix} \qquad MM = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.010 \\ 0.020 \\ 0.030 \\ 0.050 \\ 0.070 \\ 0.100 \\ 0.120 \end{pmatrix}$$

$N := \mathrm{length}(M)$ $\quad u := \mathrm{slope}(T2p, MM)$ $\quad v := \mathrm{intercept}(T2p, MM)$

$u = 3.473$ $\qquad v = -0.063$

$\Delta u = 0.034$ $\qquad \Delta v = 0.0012$

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ
για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Ταλάντωση Ελατηρίου: $T = 2\pi\,(m/k)^{1/2}$

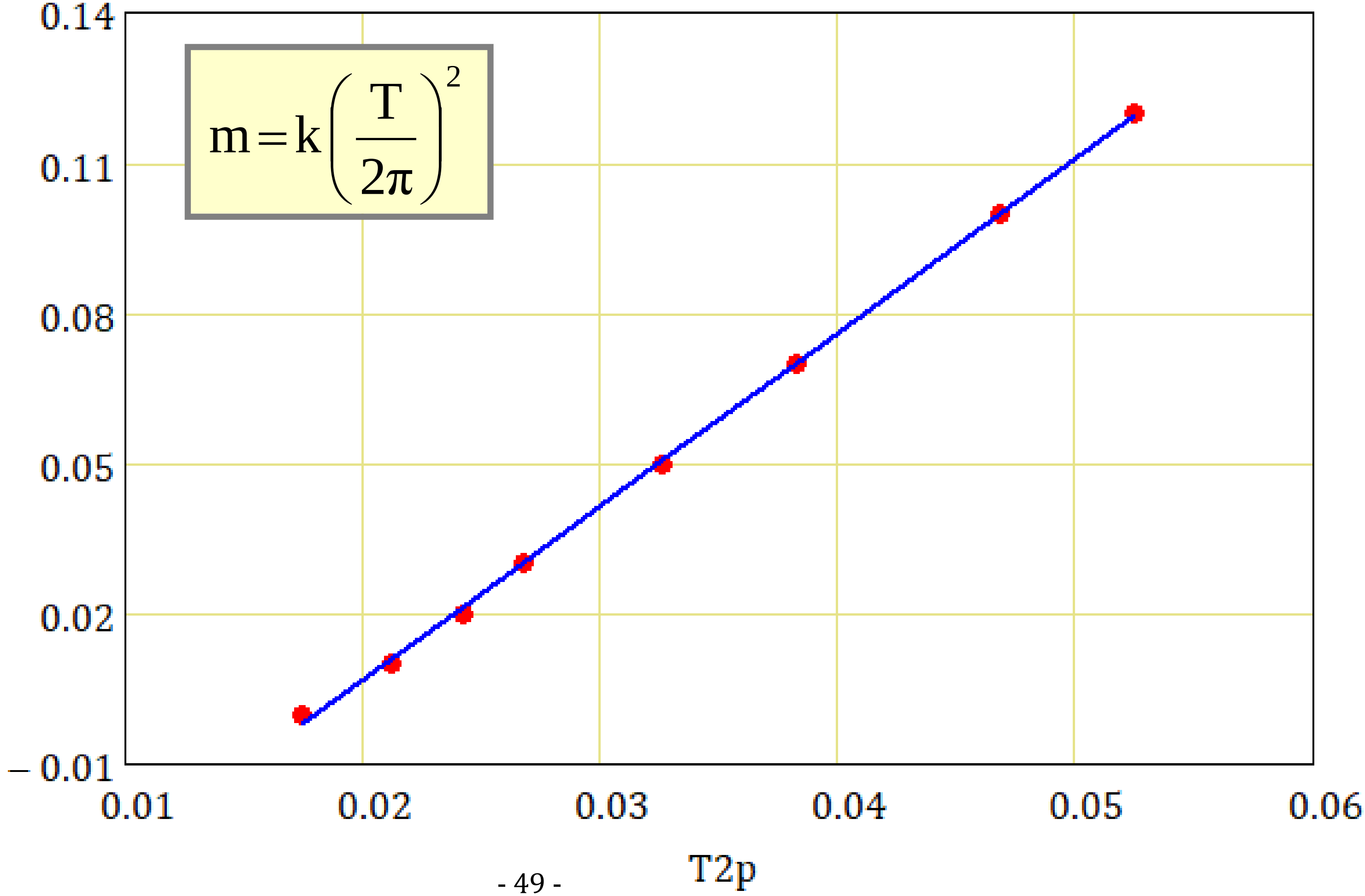
$A = -0.063$

$B = 3.473$

MM

$A + B \cdot T2p$

$T2p \rightarrow (T/2\pi)^2$



$$m = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ
για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Τελικά αποτελέσματα με ανάλυση ελαχίστων τετραγώνων

Νόμος του Hooke

$$\boxed{F = k\,\Delta x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k = (3.472 \pm 0.014)\ N/m}$$

Ταλάντωση Ελατηρίου

$$\boxed{m = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k = (3.473 \pm 0.034)\ N/m}$$

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ
για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Πώς συνοψίζονται τα δύο αυτά αποτελέσματα σε μια απάντηση;
(Συγκερασμός αποτελεσμάτων)

Νόμος του Hooke

$$k = (3.472 \pm 0.014)\ N/m$$

Ταλάντωση Ελατηρίου

$$k = (3.473 \pm 0.034)\ N/m$$

Μεθοδολογία: Σταθμισμένος μέσος όρος με συντελεστές βαρύτητας

$$w_1 = \frac{1}{\Delta x_1^2} \quad w_2 = \frac{1}{\Delta x_2^2} \quad \ldots \quad w_N = \frac{1}{\Delta x_N^2}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \qquad \Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_i}}$$

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ
για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Πώς συνοψίζονται τα δύο αυτά αποτελέσματα σε μια απάντηση;
(Συγκερασμός αποτελεσμάτων)

Νόμος του Hooke

$$k = (3.472 \pm 0.014)\ N/m$$

Ταλάντωση Ελατηρίου

$$k = (3.473 \pm 0.034)\ N/m$$

Μεθοδολογία: Σταθμισμένος μέσος όρος με συντελεστές βαρύτητας

$$w_1 = \frac{1}{0.014^2} = 5102$$

$$w_2 = \frac{1}{0.034^2} = 865$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} = \frac{5102 \cdot 3.472 + 865 \cdot 3.473}{5102 + 865} = 3.472145$$

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{\sum w_i}} = \sqrt{\frac{1}{5102+865}} = 0.01294$$

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ
για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Πώς συνοψίζονται τα δύο αυτά αποτελέσματα σε μια απάντηση;
(Συγκερασμός αποτελεσμάτων)

Νόμος του Hooke

$$\boxed{k = (3.472 \ \pm 0.014)\ N/m}$$

Ταλάντωση Ελατηρίου

$$\boxed{k = (3.473 \ \pm 0.034)\ N/m}$$

Μεθοδολογία: Σταθμισμένος μέσος όρος με συντελεστές βαρύτητας

Τελικό αποτέλεσμα συγκερασμού των δύο μετρήσεων:

$$\boxed{k = (3.472 \ \pm 0.013)\ N/m}$$

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΕΡΝΙΕΡΟΥ

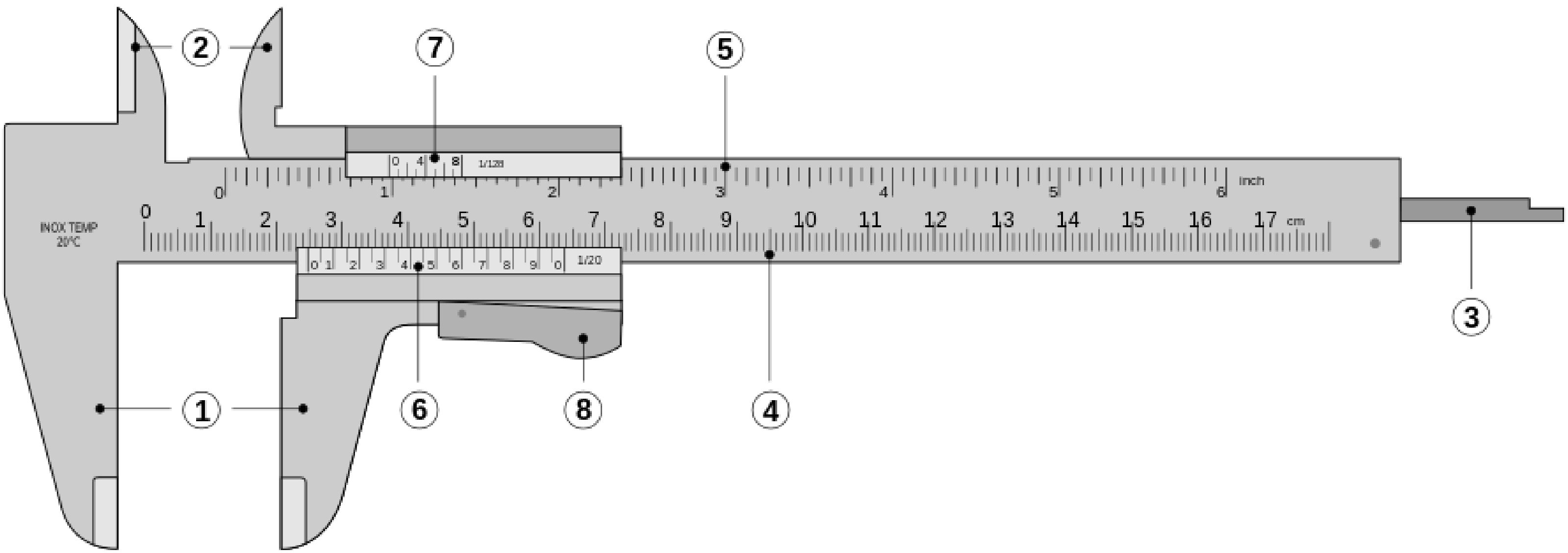
Pierre Vernier (1580–1637)

Άσκηση Α6

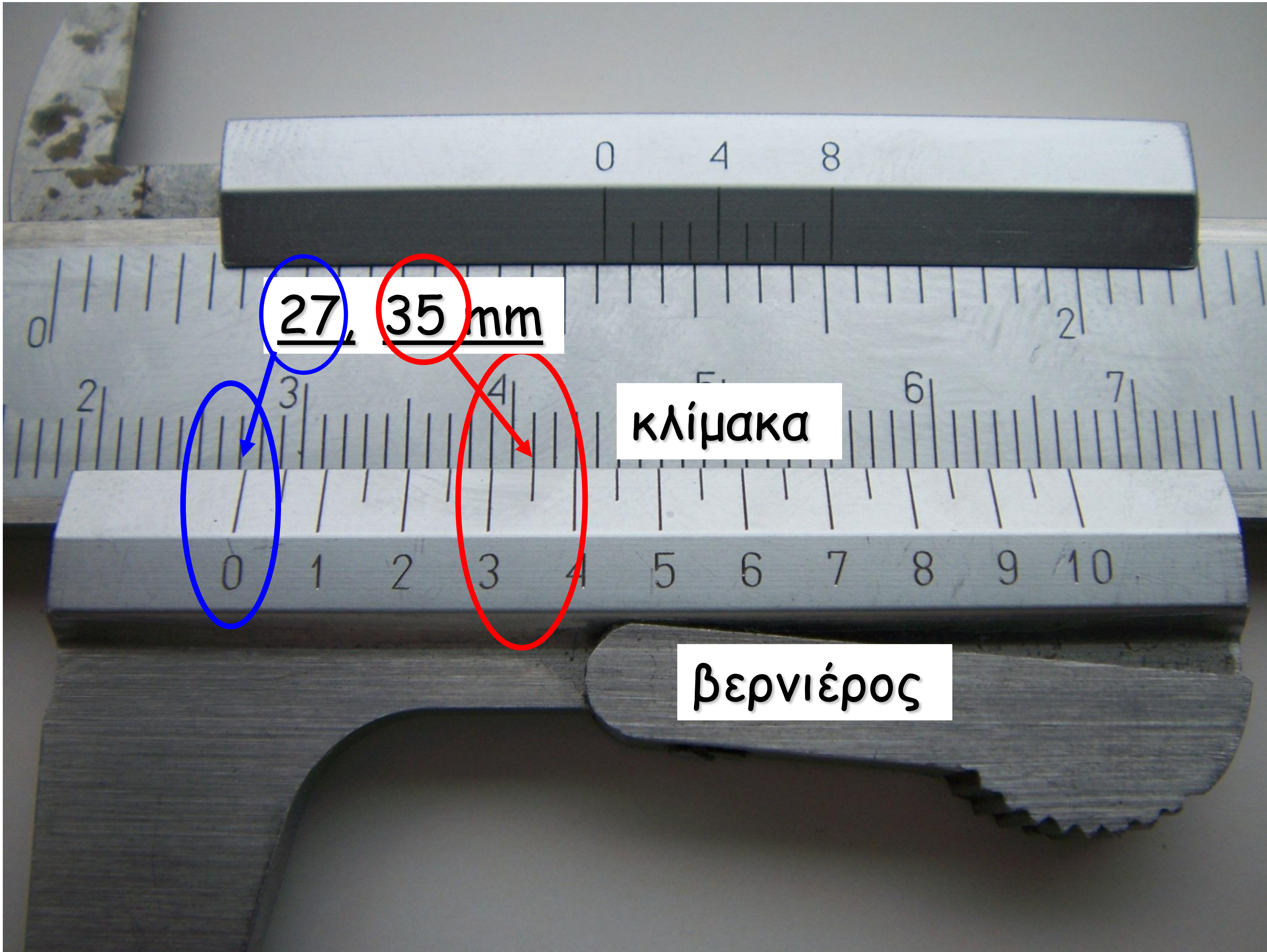
Παχύμετρο ή Διαστημόμετρο (Ακρίβειας 0.05mm)

Χρησιμοποιήθηκε αρχικά για τη μέτρηση μηκών με μεγαλύτερη ακρίβεια.

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΕΡΝΙΕΡΟΥ



- Έχει δύο κλίμακες: σταθερή (4) και κινητή (6) (βερνιέρου).
- Γινόταν αρχικά υποδιαίρεση της κλίμακας του βερνιέρου ώστε να αντιστοιχούν 10 υποδιαιρέσεις του σε 9 της κυρίας κλίμακας. Αυτό έδινε τη δυνατότητα να εκτιμηθεί με άνεση κλάσμα της κυρίας κλίμακας με ακρίβεια 1/10.
- Σήμερα οι υποδιαιρέσεις γίνονται στο 1/20 (0.05 ακρίβεια) και υπάρχουν και σε άλλες μετρήσεις π.χ. γωνιών.


27, 35 mm
κλίμακα
βερνιέρος

Μικρόμετρο

(0,01mm)

Άσκηση Α6

$$(6{,}50 + 0{,}15) = 6{,}65\,\mathrm{mm}$$