

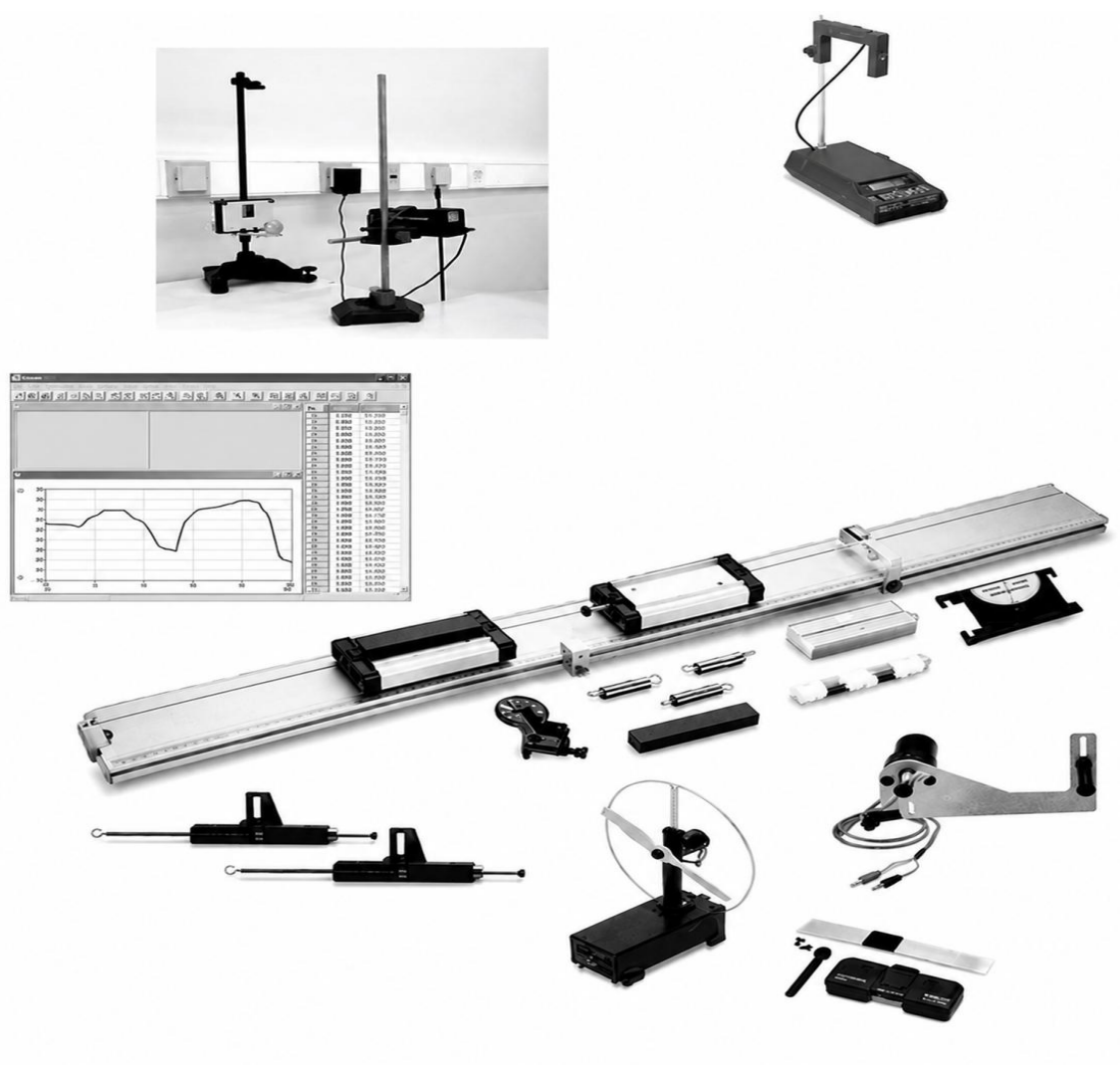
1837-2027
190
ΧΡΟΝΙΑ



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Εργαστήριο Φυσικής Ι



Ακαδημαϊκό έτος
2026-2027

Για τη συγγραφή του Εργαστηριακού Οδηγού του «Εργαστηρίου Φυσικής Ι» συνεργάστηκαν τα ακόλουθα μέλη και συνεργάτες του Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ (αλφαβητικά):

Θ. Αποστολάτος, Κ. Γαζέας, Χ. Γεωργάκη, Δ. Καραβόλα, Σ. Καρατάσου, Λ. Κουτσοκέρας, Ν. Μαμαλούγκος, Α. Μαντζιαφού, Μ. Πετροπούλου, Α. Πρωτονοταρίου, Η. Σακέλλης

Για την εγκατάσταση των ασκήσεων του «Εργαστηρίου Φυσικής Ι» συνεργάστηκαν τα ακόλουθα μέλη και συνεργάτες του Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ (αλφαβητικά):

Γ. Λαμπιθιανάκης, Κ. Φιλιππόπουλος, Ε. Χατζηκωντής

Διευθυντής Εργαστηρίου Φυσικής:

Καθηγητής Ε. Νισταζάκης (enistaz@phys.uoa.gr)

Συντονιστής Εργαστηρίου Φυσικής Ι:

Επίκ. Καθηγητής Η. Σακέλλης (e_sakel@phys.uoa.gr)

Ηλεκτρονική Τάξη (eclass) Βασικού Εργαστηρίου Φυσικής Ι (10ΥΚΟ05):

<https://eclass.uoa.gr/courses/PHYS157/>

Περιεχόμενα

Κανονισμός Λειτουργίας Εργαστηρίου Φυσικής Ι.	4
A1. Εισαγωγή στην επεξεργασία μετρήσεων, αβεβαιότητες, σφάλματα, στρογγυλοποιήσεις, γραφήματα.	7
A2. Εφαρμογή στην πειραματική διαδικασία (το απλό εκκρεμές).	21
A3. Προσδιορισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας και της ταχύτητας κινούμενου σώματος μέσω πειράματος σε κεκλιμένο επίπεδο.	32
A4. Μελέτη απλών ηλεκτρικών κυκλωμάτων συνεχούς.	45
A5. Μετρήσεις διαστάσεων σωμάτων - Υπολογισμός πυκνότητας και άνωσης.	58

Κανονισμός Λειτουργίας Εργαστηρίου Φυσικής Ι

Α. Γενικοί Κανόνες

Όλοι οι φοιτητές που παρακολουθούν το “Βασικό Εργαστήριο Φυσικής Ι” θα ΠΡΕΠΕΙ ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ να εγγραφούν στην ιστοσελίδα του στο eclass, <https://eclass.uoa.gr/courses/PHYS157>, ώστε να ενημερώνονται άμεσα για κάθε ανακοίνωση που αναρτάται.

ΕΓΓΡΑΦΗ και ΤΜΗΜΑΤΑ: Οι φοιτητές/τριες εγγράφονται μέσω του πιστοποιημένου ηλεκτρονικού συστήματος eclass του Εργαστηρίου Φυσικής Ι, όπου και αναφέρεται αναλυτικά η διαδικασία εγγραφής.

ΔΙΔΑΣΚΩΝ/-ΟΥΣΑ: Ο/Η Διδάσκων/-ουσα του κάθε τμήματος εργαστηριακής άσκησης, ενημερώνει τους φοιτητές/-τριες για το όνομά του/της, το γραφείο του/της, το email του/της, τις ώρες στις οποίες θα μπορούσαν να επικοινωνήσουν μαζί του/της για τυχόν απορίες καθώς και τον τρόπο πραγματοποίησης των εργαστηριακών ασκήσεων, και τις προθεσμίες παράδοσης των εργασιών.

ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: Κάθε φοιτητής/-τρια εκτελεί αριθμό ασκήσεων, χωρισμένων σε δύο κύκλους. Οι φοιτητές/τριες πληροφορούνται κατά την εγγραφή την πρώτη άσκηση και τη σειρά διαδοχής των ασκήσεων.

ΠΡΟΣΕΛΕΥΣΗ: Οι φοιτητές/-τριες προσέρχονται στην θέση τους **ακριβώς την ώρα έναρξης του Εργαστηρίου** σύμφωνα με το Ωρολόγιο Πρόγραμμα Μαθημάτων του Τμήματος Φυσικής. Αν προσέλθουν με **καθυστέρηση μεγαλύτερη των 5 λεπτών δεν επιτρέπεται να ασκηθούν και χρεώνονται με απουσία.**

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ: Ο/Η φοιτητής/-τρια όταν προσέρχεται, θα πρέπει να είναι **προετοιμασμένος/-η** για την Άσκηση που θα εκτελέσει, με βάση το κείμενο του Εργαστηριακού Οδηγού και τις σχετικές αναφορές. Ο/Η Διδάσκων/-ουσα, με προφορική ή γραπτή εξέταση, αξιολογεί την μελέτη και την προετοιμασία του/της φοιτητή/-τριας στην άσκηση που πρόκειται να πραγματοποιήσει. Η εξέταση μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε στην αρχή είτε στο μέσο είτε στο τέλος της διαδικασίας της άσκησης, ανάλογα με την κρίση του διδάσκοντα.

Αν ο/η φοιτητής/-τρια **δεν έχει προετοιμασθεί** για την άσκηση που θα εκτελέσει, αν **δεν γνωρίζει το φυσικό φαινόμενο/νόμο** το/ο οποίο/-ος μελετάται, **ή αν δεν μπορεί να περιγράψει τη διαδικασία πραγματοποίησης της άσκησης**, λαμβάνει **μηδενικό βαθμό στην προφορική εξέταση της συγκεκριμένης άσκησης.**

ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ: Το εργαστήριο διαρκεί 3 ώρες και οι φοιτητές/-τριες αξιοποιούν όλο τον χρόνο τους σύμφωνα με τις υποδείξεις του/της διδάσκοντα/-ουσας. Όταν οι φοιτητές/-τριες ολοκληρώσουν τις πειραματικές μετρήσεις τους, αρχίζουν τους υπολογισμούς, την επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων, κλπ.

Για την εκτέλεση της εργαστηριακής ασκήσεως ο/η φοιτητής/-τρια πρέπει να:

(α) Εκτελεί την άσκηση σύμφωνα με τις οδηγίες του φυλλαδίου και του/της διδάσκοντα/-ουσας καταγράφοντας τις πειραματικές μετρήσεις και

(β) Να απευθύνεται στον/στην διδάσκοντα/-ουσα για κάθε απορία που προκύπτει.

Μετά το πέρας της άσκησης οι φοιτητές/-τριες αποχωρούν, μόνο αφού το επιτρέψει ο/η Διδάσκων/-ουσα και αφού υπογράψει τις μετρήσεις τους.

Πριν αποχωρήσουν οι φοιτητές τακτοποιούν την πειραματική διάταξη ακριβώς στην κατάσταση που τη βρήκαν πριν στην έναρξη του εργαστηρίου τους.

ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ: Την ημέρα που θα πραγματοποιηθεί η επόμενη εργαστηριακή άσκηση ο/η κάθε φοιτητής/τρια υποχρεούται να παραδώσει την εργασία του στον/στην διδάσκοντα/-ουσα με τον/την οποίο/-α πραγματοποίησε την άσκηση. Η άσκηση αυτή μπορεί να υποβληθεί είτε εκτυπωμένη, είτε χειρόγραφη, είτε ηλεκτρονικά στο email του/της διδάσκοντα/-ουσας, ανάλογα με το τρόπο που έχει ζητήσει ο/η κάθε διδάσκοντας/-ουσα. Κάθε φοιτητής/-τρια υποβάλλει ατομική, πρωτότυπη, διαφορετική εργασία από κάθε άλλον/-η συνάδελφο του, ακόμα και αν ανήκουν στην ίδια εργαστηριακή ομάδα, για την οποία ισχύουν οπωσδήποτε τα ακόλουθα:

- Το συνολικό μέγεθος της εργασίας που θα παραδίδουν οι φοιτητές/-τριες **ΔΕΝ θα πρέπει να είναι μικρότερο από 5 σελίδες και ΔΕΝ θα πρέπει να ξεπερνάει τις 8 σελίδες** μαζί με τις αναφορές/πηγές που χρησιμοποιήθηκαν για τη συγγραφή της εργασίας και θα παρατίθενται οπωσδήποτε στο τέλος της.
- Η εργασία θα πρέπει οπωσδήποτε να περιλαμβάνει ελάχιστη θεωρία (υπάρχει στον εργαστηριακό οδηγό και στα συγγράμματα του μαθήματος) στην οποία θα αναφέρεται και θα εξηγείται το μελετώμενο φυσικό φαινόμενο, ενώ θα πρέπει να εμφανίζεται αναλυτικά η βιβλιογραφία που έχει χρησιμοποιηθεί για τη συγγραφή της.
- Στην εργασία θα πρέπει να αναφέρονται καθαρά οι φυσικοί νόμοι που μελετήθηκαν (αυτό είναι πολύ σημαντικό τμήμα της εργασίας),
- Στην εργασία θα πρέπει να αναφέρεται κατανοητά αλλά επιγραμματικά η πειραματική διαδικασία που ακολουθήθηκε,
- Στην εργασία θα πρέπει να αναφέρεται ο τρόπος και ο λόγος για τον οποίο ελήφθησαν τα συγκεκριμένα πειραματικά δεδομένα καθώς και πως θα χρησιμοποιηθούν κατά τη διάρκεια της μελέτης των δεδομένων,
- Στην εργασία θα πρέπει να αναφέρεται ο τρόπος με τον οποίο προέκυψαν τα αποτελέσματα από τα δεδομένα αυτά,
- Στην εργασία θα πρέπει να παρουσιάζονται, να εξηγούνται και να αναλύονται προσεκτικά τα συμπεράσματα (αυτό είναι πολύ σημαντικό κομμάτι της εργασίας),
- Στην εργασία θα πρέπει να απαντώνται οι ερωτήσεις που τυχόν έχουν τεθεί από τον διδάσκοντα κατά τη διάρκεια πραγματοποίησης της άσκησης στα ερωτήματα του διδάσκοντα,
- Στην εργασία θα πρέπει να απαντώνται οι ερωτήσεις του εργαστηριακού οδηγού,
- Στο τέλος της εργασίας θα πρέπει οπωσδήποτε να εμφανίζονται οι αναφορές/πηγές από τις οποίες διάβασε ο/η κάθε φοιτητής/-τρια για να ετοιμάσει την εργασία (αυτό είναι πολύ σημαντικό κομμάτι),
- Πάντα μαζί με την εργασία θα παραδίδονται/επισυνάπτονται και οι σελίδες (ή αντίγραφα τους) με τις υπογεγραμμένες από τον/την Διδάσκοντα/-ουσα, πειραματικές μετρήσεις.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ: Οι φοιτητές/-τριες βαθμολογούνται σε κάθε εργαστηριακή άσκηση. Ο βαθμός κάθε άσκησης προκύπτει από τον προφορικό βαθμό (δραστηριότητα στη άσκηση, γνώσεις κλπ., με βάρος **60%**) και από την γραπτή εργασία (με βάρος **40%**).

Αν φοιτητής/τρια δεν παραδώσει εγκαίρως την γραπτή εργασία, λαμβάνει μηδενικό βαθμό στη γραπτή εργασία (γραπτό) της συγκεκριμένης άσκησης. Παράταση στην παράδοση εργασίας δεν μπορεί να γίνει δεκτή.

Ο τελικός βαθμός του «Εργαστηρίου Φυσικής Ι» προκύπτει από τον βαθμό που θα λάβει ο/η φοιτητής/-τρια στις πέντε (5) εργαστηριακές ασκήσεις.

Συγκεκριμένα, κάθε εργαστηριακή άσκηση (συνολικά προφορικός βαθμός και γραπτή εργασία) μετράει το 20% του συνολικού βαθμού του «Εργαστηρίου Φυσικής Ι».

Αν φοιτητής/-τρια λάβει στο “**Βασικό Εργαστήριο Φυσικής Ι**” βαθμό μικρότερο του 5, το **επαναλαμβάνει ολόκληρο, σε επόμενο ακαδημαϊκό έτος.**

ΑΠΟΥΣΙΑ: Κάθε εργαστηριακή άσκηση ξεκινάει ακριβώς την ώρα που αναγράφεται στο ωρολόγιο πρόγραμμα και όχι 15 λεπτά αργότερα. Αν φοιτητής/τρια καθυστερήσει να προσέλθει για την πραγματοποίηση της άσκησης, περισσότερο από πέντε (5) λεπτά, **χρεώνεται με απουσία. Μία (1) μόνο απουσία** αναπληρώνεται από τον/την φοιτητή/-τρια μετά την ολοκλήρωση του συνόλου των Εργαστηριακών Ασκήσεων στη **Συμπληρωματική Εργαστηριακή Άσκηση**, σε ημέρα και ώρα που καθορίζεται από το Συντονιστή του αντίστοιχου Εργαστηρίου. Αν φοιτητής/-τρια χρεωθεί περισσότερες από μία απουσίες, **επαναλαμβάνει ολόκληρο το “Βασικό Εργαστήριο Φυσικής Ι” σε επόμενο ακαδημαϊκό έτος.**

ΑΝΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ: Σε περίπτωση μη καλής λειτουργίας των οργάνων και/ή για κάθε άλλο πρόβλημα οι φοιτητές/-τριες απευθύνονται **άμεσα** στον διδάσκοντα, ο οποίος, ή επιλύει το πρόβλημα, ή καλεί τα μέλη ΕΤΕΠ (Ηλεκτρονικοί Μηχανικοί στο Παρασκευαστήριο). Οι φοιτητές/-τριες και οι διδάσκοντες/-ουσες δεν πρέπει να προσπαθούν να διορθώσουν βλάβες που μπορεί να εμφανιστούν στις πειραματικές διατάξεις.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ το κάπνισμα, καθώς και κάθε είδους τρόφιμα, κλπ, στις αίθουσες και στους διαδρόμους των Εργαστηρίων.

A1. Εισαγωγή στην επεξεργασία μετρήσεων, αβεβαιότητες, σφάλματα, στρογγυλοποιήσεις, γραφήματα

Λέξεις κλειδιά: Μέτρηση, αβεβαιότητα, μέση τιμή, τυπική απόκλιση, διασπορά, σφάλμα, σχετικό σφάλμα, διάδοση σφάλματος, χάραξη και προσαρμογή καμπύλης σε γράφημα, κλίση καμπύλης.

Σκοπός της άσκησης

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση των φοιτητών με την επεξεργασία πειραματικών δεδομένων, την εκτίμηση σφαλμάτων και αβεβαιοτήτων και τη γραφική αναπαράσταση μετρήσεων.

Στοιχεία από τη θεωρία

Συνοπτικά περί πειραματικών μετρήσεων, μεγεθών, αβεβαιοτήτων, σφαλμάτων

Στην επιστήμη, **μέτρηση** είναι η σύγκριση της ποσότητας κάποιου φυσικού μεγέθους με ένα πρότυπο, δηλαδή σύγκριση με κάποια σταθερή ποσότητα του ίδιου φυσικού μεγέθους που αυθαίρετα έχει συμφωνηθεί (κατά "σύμβαση", δηλαδή κατά κοινή συμφωνία) να χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης.

Τα **μεγέθη** είναι ποσότητες που αντιστοιχούν σε φυσικά φαινόμενα. Τα μεγέθη χωρίζονται σε μονόμετρα και διανυσματικά. Τα μονόμετρα είναι τα μεγέθη που για να οριστούν χρειάζονται μόνο ένα αριθμό και μια μονάδα μέτρησης. Τα διανυσματικά απαιτούν κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά), μέτρο και σημείο εφαρμογής. Για παράδειγμα ορισμένα μονόμετρα μεγέθη είναι η μάζα, ο χρόνος, η θερμοκρασία και το ηλεκτρικό φορτίο, ενώ ορισμένα διανυσματικά είναι η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η μετατόπιση.

Τα μεγέθη μπορούν να χωριστούν σε συνεχή και διακριτά. Τα διακριτά μεγέθη λαμβάνουν συγκεκριμένες, μεμονωμένες τιμές, μεταβάλλονται με «άλματα» και δεν μπορούν να πάρουν ενδιάμεσες τιμές, π.χ. το αποτέλεσμα από τη ρίψη ενός ζαριού, τα αυτοκίνητα σε ένα πάρκινγκ κ.α.

Τα συνεχή μεγέθη μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα δεδομένο διάστημα, συμπεριλαμβανομένων όλων των δεκαδικών αριθμών και δεν παρουσιάζουν «άλματα» στη μεταβολή τους πχ ο χρόνος, η θερμοκρασία ενός σώματος κ.α.

Τα **θεμελιώδη φυσικά μεγέθη** είναι ένα ελάχιστο σύνολο από φυσικά μεγέθη τα οποία θεωρούνται εντελώς ανεξάρτητα μεταξύ τους και τα οποία είναι ικανά να ορίσουν όλα τα υπόλοιπα (παράγωγα) μεγέθη που μπορεί να χρειαστούν και χρησιμοποιούνται από την φυσική για την περιγραφή οποιουδήποτε φυσικού φαινομένου.

Συστήματα μονάδων μέτρησης. Ιστορικά οι άνθρωποι δημιούργησαν και χρησιμοποίησαν πολλά συστήματα μονάδων μέτρησης, αρχικά για την μέτρηση των αποστάσεων και για την μέτρηση ποσοτήτων όπως η μάζα (το βάρος) και ο όγκος για εμπορικούς και παρόμοιους σκοπούς. Από το 1960 έχει καθιερωθεί και ισχύει παγκοσμίως το σύστημα SI (Système International d'Unités), το οποίο περιλαμβάνει επτά θεμελιώδεις μονάδες (Πίνακας 1). Όλα τα άλλα φυσικά μεγέθη θεωρούνται παράγωγα και κάθε μονάδα μέτρησης τέτοιου μεγέθους μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των θεμελιωδών μονάδων. Ενδεικτικά φυσικά μεγέθη με τις μονάδες τους φαίνονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1. Ενδεικτικά θεμελιώδη και παράγωγα φυσικά μεγέθη με τις αντίστοιχες μονάδες μέτρησης.

Θεμελιώδες μέγεθος	Σύμβολο/μονάδα	Παράγωγο μέγεθος	Σύμβολο/μονάδα
Μήκος	1 m	Ενέργεια	1 J (= 1 kg·m ² /s ²)
Μάζα	1 kg	Ισχύς	1 W (= 1 J/s)
Χρόνος	1 s	Πίεση	1 N/m ²
Θερμοκρασία	1 K	Εμβαδόν	1 m ²
Ποσότητα ύλης	1 mol	Όγκος	1 m ³
Ένταση ηλ. ρεύματος	1 A	Πυκνότητα	1 kg/m ³
Φωτεινή ένταση	1 cd	Ροπή	1 N·m

Η ορολογία που σχετίζεται με την πειραματική αβεβαιότητα δεν χρησιμοποιείται πάντα με την ίδια σαφήνεια και συνέπεια. Στη συνέχεια παρατίθενται αρκετοί από τους βασικούς όρους, για να αναδειχτεί η σημασία των όρων αυτών και το εύρος του νοήματός τους. Οι ορισμοί έχουν ληφθεί από ένα σύνολο αναφορών που αντιπροσωπεύουν την θεματική ενότητα της ανάλυσης σφαλμάτων (error analysis).

Μετρούμενο Μέγεθος (measurand). Το μέγεθος που πρόκειται να μετρηθεί.

Μέτρηση (measurement). Η διαδικασία πειραματικού προσδιορισμού μίας ή περισσότερων τιμών που μπορούν εύλογα να αποδοθούν σε ένα μέγεθος.

Πραγματική τιμή μιας ποσότητας (true value of a quantity). Τιμή που είναι συνεπής με τον ορισμό μιας συγκεκριμένης ποσότητας. Η πραγματική τιμή είναι εκ φύσεως **απροσδιόριστη**, και με τον όρο αυτό εννοούμε μια τιμή που θα παίρναμε από την τέλεια μέτρηση. Αποτελεί την τιμή που προσεγγίζεται από ένα μεγάλο αριθμό μετρήσεων χωρίς συστηματικά σφάλματα.

Μέση τιμή (mean value). Είναι βάσει της πιθανότητας ο σταθμισμένος μέσος όρος ενός συνόλου τιμών ή μιας κατανομής πιθανοτήτων. Η μέση τιμή καλείται επίσης αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής. Για N μετρήσεις x_i με $i=1, \dots, N$, η αριθμητική μέση τιμή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

Διακύμανση (variance). Το μέτρο της διασποράς ή μεταβλητότητας ενός συνόλου δεδομένων x_i , $i=1, \dots, N$, με την μορφή της μέσης τιμής των τετραγωνικών αποκλίσεων των δεδομένων από την μέση τιμή τους. Όταν τα δεδομένα καλύπτουν το σύνολο του πληθυσμού, η διακύμανση υπολογίζεται από την σχέση:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

Όταν το σύνολο των δεδομένων είναι μόνο ένα υποσύνολο του πληθυσμού, η διακύμανση καλείται διακύμανση δείγματος και εκτιμάται καλύτερα από την σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (3)$$

Τυπική Απόκλιση (standard deviation). Το μέτρο της διασποράς (σκέδασης) των δεδομένων που υπολογίζεται από την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης τους. Έτσι, η τυπική απόκλιση για το σύνολο του πληθυσμού υπολογίζεται από την σχέση:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (4)$$

και η τυπική απόκλιση δείγματος (sample standard deviation) δίνεται από την σχέση:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (5)$$

Τυπικό σφάλμα (standard error) (Τυπική απόκλιση της μέσης τιμής - standard deviation of mean value). Η τυπική απόκλιση μιας στατιστικής συνάρτησης, εδώ της μέσης τιμής. Το τυπικό σφάλμα ορίζεται δηλαδή ως η τυπική απόκλιση δείγματος διαιρούμενη με την τετραγωνική ρίζα του πλήθους των δεδομένων, και επομένως δίνεται από την σχέση:

$$SE = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (6)$$

Σφάλμα μέτρησης (error of measurement). Η διαφορά ανάμεσα σε μια μέτρηση και την (άγνωστη) πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους.

Αβεβαιότητα μέτρησης (uncertainty of measurement). Η απουσία τελείως τεκμηριωμένης γνώσης. Είναι μια παράμετρος που σχετίζεται με το αποτέλεσμα μιας μέτρησης, και χαρακτηρίζει την διασπορά των τιμών που θα μπορούσαν λογικά να αποδοθούν στο μετρούμενο μέγεθος. Η αβεβαιότητα περιλαμβάνει γενικά πολλές συνιστώσες οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν από τις πειραματικές τυπικές αποκλίσεις που βασίζονται σε επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις (Τύπου A εκτίμηση) ή από τις τυπικές αποκλίσεις που υπολογίζονται από κατανομές πιθανοτήτων βάσει εμπειρίας ή άλλης πληροφορίας (Τύπου B εκτίμηση). Ο όρος αβεβαιότητα προτιμάται σε σχέση με τον όρο σφάλμα μέτρησης, επειδή το ακριβές σφάλμα ως προς την άγνωστη πραγματική τιμή δεν μπορεί γενικά να είναι γνωστό, ενώ η αβεβαιότητα μπορεί να εκτιμηθεί. (διεθνή πρότυπα ISO, 34).

Μια εκτίμηση της αβεβαιότητας μιας μέτρησης δίνεται συνήθως ως ένα εύρος τιμών μέσα στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται η πραγματική τιμή, για ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Για παράδειγμα, το διάστημα ± 1 s αντιστοιχεί περίπου σε επίπεδο εμπιστοσύνης 68% για κανονική κατανομή. Η εκτίμηση αυτή μπορεί να βασίζεται είτε στους περιορισμούς των οργάνων μέτρησης είτε στις στατιστικές διακυμάνσεις των μετρήσεων. είτε στους

Απόλυτη αβεβαιότητα (absolute uncertainty). Το ποσό (συνχνά με την μορφή $\pm \delta x$) που μαζί με την μετρούμενη τιμή, υποδεικνύει το εύρος στο οποίο είναι περισσότερο πιθανό να βρίσκεται η πραγματική τιμή.

Σχετική αβεβαιότητα (relative (fractional) uncertainty). Η απόλυτη αβεβαιότητα διαιρούμενη με την μετρούμενη τιμή, που συνήθως εκφράζεται σαν ποσοστό ή σε parts per million (ppm).

Τυπική αβεβαιότητα (standard uncertainty). Η αβεβαιότητα του αποτελέσματος μιας μέτρησης που εκφράζεται ως μια τυπική απόκλιση.

Ακρίβεια/Πιστότητα (precision). Ο βαθμός της συνέπειας και της συμφωνίας ανάμεσα σε ανεξάρτητες μετρήσεις μιας ποσότητας κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Η ακρίβεια α-

ποτελεί ένα μέτρο του πόσο καλά έχει προσδιοριστεί ένα αποτέλεσμα (χωρίς καμιά αναφορά σε μια θεωρητική ή πραγματική τιμή), και της εργαστηριακής επαναληπτικότητας ενός αποτελέσματος. Η καταλληλότητα της κλίμακας μιας συσκευής μέτρησης επηρεάζει γενικά την συνέπεια των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, ως εκ τούτου και η χρήση του όρου ακρίβεια. Εντούτοις, και σύμφωνα με τα ISO δεν συνιστάται η χρήση του όρου για την περιγραφή επιστημονικών οργάνων μέτρησης λόγω της ευρείας χρήσης του όρου στην καθομιλουμένη.

Ορθότητα/ακρίβεια μέτρησης (accuracy of measurement). Είναι η εγγύτητα ή συμφωνία ανάμεσα σε μια μετρούμενη και την πραγματική τιμή.

Τυχαίο Σφάλμα (random error). Σφάλμα που προκύπτει κατά την καταγραφή μιας πραγματικής τιμής x ως $x+\epsilon$, όπου ϵ είναι οι παρατηρούμενες τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής. Όταν η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής ϵ είναι μηδέν, λέμε ότι το σφάλμα είναι αμερόληπτο (unbiased). Συγκρίνετε με το Συστηματικό σφάλμα.

Συστηματικό Σφάλμα (systematic error). Η διαφορά ανάμεσα στην πραγματική τιμή μιας ποσότητας και την τιμή στην οποία συγκλίνει η μέση τιμή επαναλαμβανόμενων μετρήσεων καθώς παίρνουμε όλο και περισσότερες μετρήσεις. Είναι το σφάλμα που προκύπτει όταν το αποτέλεσμα μέτρησης μιας ποσότητας της οποίας η τιμή είναι x φαίνεται να είναι της μορφής $f(x)$, όπου f είναι μια συγκεκριμένη συνάρτηση.

Σχετικό σφάλμα (relative error). Το σφάλμα μιας μέτρησης διαιρούμενο με την πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Το σχετικό σφάλμα αναφέρεται συνήθως σαν ποσοστό. Στη θέση της πραγματικής (άγνωστης) τιμής χρησιμοποιούμε την μέση τιμή δηλαδή παίρνουμε το σχετικό σφάλμα της μέσης τιμής.

Σημαντικά ψηφία (significant figures). Όλα τα ενδιάμεσα ψηφία συμπεριλαμβανομένου του πρώτου μη μηδενικού ψηφίου από τα αριστερά, έως το τελευταίο ψηφίο (π.χ. ο αριθμός 0.06310 έχει 4 σημαντικά ψηφία.)

Δεκαδικές θέσεις (decimal places). ο αριθμός των ψηφίων στα δεξιά της δεκαδικής υποδιαστολής.

Κατανομή Gauss (Gaussian distribution) ή **Κανονική κατανομή** (normal distribution) Είναι μια συνεχής κατανομή πιθανότητας με συμμετρικό σχήμα καμπάνας, η οποία χαρακτηρίζεται από τη μέση τιμή μ και την τυπική απόκλιση σ . Οι τιμές συγκεντρώνονται περισσότερο γύρω από τη μέση τιμή, ενώ η πυκνότητα πιθανότητας μειώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από αυτήν και τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

Συνάρτηση κατανομής (distribution function). Η συνάρτηση F που σχετίζεται με κάποια τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την πιθανότητα $F(X)$ ότι η τυχαία μεταβλητή να παίρνει μια τιμή όχι μεγαλύτερη από X . Η συνάρτηση κατανομής που σχετίζεται με ένα σύνολο δεδομένων με αριθμητικές τιμές περιγράφει την πιθανότητα $F(X)$ ότι μια τιμή που επιλέγεται τυχαία (δηλ. ομοιόμορφα και ανεξάρτητα) από τις τιμές των δεδομένων θα έχει μια τιμή μικρότερη ή ίση του X . Είναι επίσης γνωστή ως αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Εμπειρική Συνάρτηση Κατανομής (empirical distribution function). Μια συνάρτηση κατανομής από ένα σύνολο δεδομένων.

Η **τυχαία αβεβαιότητα**, e_R του αποτελέσματος μιας μέτρησης ορίζεται ως $\pm t\sigma$, όπου σ είναι η τυπική απόκλιση της μέτρησης και t είναι η στατιστική τιμή που αντιστοιχεί στην επιλεγμένη πιθανότητα. Για τον προσδιορισμό της τιμής t χρησιμοποιούμε την κατανομή t του Student και ισούται περίπου με 2 για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Επομένως η τυχαία αβεβαιότητα δίνεται από τον εξής τύπο: $(e_R)_{95} = \pm 2\sigma$.

Η **συστηματική αβεβαιότητα**, e_s ορίζεται το άνω όριο του συστηματικού σφάλματος.

Επομένως η **συνολική αβεβαιότητα** της μέτρησης U εκφράζει το διάστημα (εύρος των τιμών) μέσα στο οποίο η πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους είναι πιθανόν να κυμαίνεται με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, υπολογίζεται (διεθνές πρότυπο ISO 5168):

$$U = \sqrt{e_r^2 + e_s^2}. \quad (7)$$

Μέση τιμή, τυπική απόκλιση, σφάλματα

Παραθέτουμε τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες έννοιες και σχέσεις σε μια πειραματική μας μέτρηση. Έστω η ποσότητα x που μετρούμε N φορές και λαμβάνουμε τιμές x_i ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$). Τότε η τιμή που βρίσκεται πιο κοντά στην "πραγματική" είναι η μέση τιμή που δίδεται όπως είδαμε από την σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (8)$$

Όμως δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αποτέλεσμα μας συμπίπτει με την (άγνωστη) "πραγματική" τιμή. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε την αβεβαιότητα, δηλαδή μια περιοχή τιμών του x όπου εντός της εντοπίζεται αυτή η πραγματική τιμή. Δηλαδή:

$$x = \bar{x} \pm \delta \bar{x} \quad (9)$$

Η τυπική αβεβαιότητα της μέσης τιμής, λόγω της τυχαίας διασποράς των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (10)$$

όπου s είναι η τυπική απόκλιση του δείγματος και δίνεται από τη σχέση:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (11)$$

Εφόσον η κατανομή της μέσης τιμής μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά κανονική, το διάστημα $x = \bar{x} \pm \delta\bar{x}$ αντιστοιχεί προσεγγιστικά σε επίπεδο κάλυψης 68%.

Στρογγυλοποιήσεις και σημαντικά ψηφία. Λαμβάνουμε υπόψη την ακρίβεια των χρησιμοποιούμενων μεθόδων και οργάνων, εφαρμόζοντας τον εξής κανόνα: Από την πιθανότερη (μέση) τιμή και το σφάλμα, στρογγυλοποιούμε το σφάλμα μέχρι να μας μείνει ένα ψηφίο, το μεγαλύτερο, που είναι διάφορο του μηδενός (ένα σημαντικό ψηφίο). Στην συνέχεια, στην πιθανότερη (μέση) τιμή αφήνουμε τελευταίο το ψηφίο της ίδιας τάξης μεγέθους κάνοντας κι εδώ στρογγυλοποίηση. Αν το πρώτο σημαντικό ψηφίο του σφάλματος είναι το 1 ή το 2 κρατάμε (αντίστοιχα) και ένα επιπλέον ψηφίο στο σφάλμα και στη μέση τιμή.

Κανόνες στρογγυλοποιήσεων για κάποιον αριθμό, εντοπίζοντας το σημαντικό (υπό στρογγυλοποίηση) ψηφίο που μας ενδιαφέρει και εξετάζοντας το αμέσως επόμενο ψηφίο (δεξιά):

- [i] Αν αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 5, αυξάνουμε το σημαντικό ψηφίο κατά μία μονάδα και παραλείπουμε τα υπόλοιπα. (για δύο δεκαδικά, το 2.365 γίνεται 2.37).
- [ii] Αν αυτό είναι μικρότερο από 5, αφήνουμε το σημαντικό ψηφίο όπως είναι και παραλείπουμε τα υπόλοιπα (για τρία δεκαδικά, το 3.8763 γίνεται 3.876).

Σχετική αβεβαιότητα ονομάζεται ο λόγος: $\eta = \frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}$, είναι καθαρός αριθμός και συνήθως αποδίδεται σε ποσοστιαίες μονάδες. Έτσι λοιπόν ένα σφάλμα θεωρείται μικρό αν $\eta \sim 5\%$, ενώ μεγάλο αν $\eta > 10\%$. Τούτο βεβαίως ισχύει αν το σφάλμα ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις των πειραματικών στόχων. Δηλαδή αν έχουμε την ακρίβεια που απαιτείται στο συγκεκριμένο πείραμα.

Διάδοση αβεβαιοτήτων. Συχνά στις εκπαιδευτικές εργαστηριακές ασκήσεις, αλλά και στα ερευνητικά πειράματα, η άμεση μέτρηση κάποιων μεγεθών χρησιμεύει στον έμμεσο υπολογισμό κάποιων άλλων με την χρήση γνωστών τύπων. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $\lambda = f(x,y,z,...)$ όπου τα μεγέθη $x,y,z,...$ έχουν αβεβαιότητες α-

ντίστοιχα δx , δy , δz ,... Τότε για μικρές και ανεξάρτητες αβεβαιότητες των μεγεθών ισχύει:

$$\delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta z\right)^2 + \dots} \quad (12)$$

όπου $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ η μερική παράγωγος της συνάρτησης λ ως προς x . Δηλαδή για να υπολογίσουμε την $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ παραγωγίζουμε κανονικά την συνάρτηση λ ως προς x θεωρώντας όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους (y , z κλπ) σαν σταθερές κ.ο.κ. για τις υπόλοιπες μερικές παραγώγους.

Συνοπτικές οδηγίες για τη σχεδίαση γραφημάτων

Είναι σημαντικό να ακολουθούνται οι παρακάτω απλοί κανόνες στη σχεδίαση γραφημάτων:

- Επιλέγεται ποιος συγκεκριμένος άξονας θα αποδίδει έκαστο μέγεθος.
- Επιλέγεται κατάλληλο εύρος τιμών για κάθε άξονα, όχι απαραίτητως ίδια για κάθε γράφημα, ώστε με την σχεδίαση του γραφήματος να γίνεται εκμετάλλευση όλου του χώρου, για την καλύτερη αναγνωσιμότητα των σημείων και καμπυλών. Συνηθες μέγεθος ενός διαγράμματος είναι περίπου το A5 (μισό A4 ή μισή σελίδα).
- Η τομή των αξόνων δεν είναι κατ' ανάγκη το (0,0), αλλά όποιο ορίζει καλύτερα το πεδίο τιμών του μεγέθους που μετρούμε.
- Σημειώνονται πρώτα τα χαρακτηριστικά των αξόνων: μεγέθη, μονάδες, φορά τιμών αξόνων και κλίμακα.
- Χρησιμοποιείται λογαριθμικό ή ημιλογαριθμικό χαρτί για παρουσίαση αποτελεσμάτων με μεγάλο δυναμικό εύρος (δηλ. οι τιμές που τα χαρακτηρίζουν έχουν διακύμανση σε πολλές τάξεις μεγέθους) ή για σχέσεις που μπορούν να γραμμικοποιηθούν κατάλληλα, όπως εκθετικές σχέσεις σε ημιλογαριθμικούς άξονες ή σχέσεις δύναμης σε λογαριθμικούς άξονες..
- Κάθε σημείο (x,y) σχεδιάζεται με ευκρίνεια επάνω στο διάγραμμα με την αβεβαιότητα (error bar) που το συνοδεύει (δx , δy). Δεν χαράσσονται βοηθητικές παράλληλες με τους άξονες ούτε σημειώνονται επιπλέον στους άξονες οι συντεταγμένες κάθε πειραματικού σημείου.

- Χαράσσεται ή προσαρμόζεται η καμπύλη που περιγράφει καλύτερα τη συνολική τάση των πειραματικών δεδομένων, σύμφωνα με το κατάλληλο φυσικό μοντέλο. Δεν είναι απαραίτητο η καμπύλη καλύτερης προσαρμογής να διέρχεται από κάθε πειραματικό σημείο ή από όλα τα error bars. Δε σχεδιάζονται τεθλασμένες γραμμές, οι οποίες δεν υπακούν σε κάποιο φυσικό νόμο.
- Δεν επεκτείνεται η χάραξη της καμπύλης πέραν των άκρων πειραματικών σημείων, εκτός και αν ζητείται «πρόβλεψη» σε τιμές της μεταβλητής εκτός του πεδίου που έχει μετρηθεί.

Εκτέλεση της άσκησης (στο εργαστήριο)

Για την εκτέλεση της άσκησης απαιτείται πρωτίστως επιμελής προετοιμασία με την μελέτη του φυλλαδίου θεωρίας σφαλμάτων και του υλικού των εισαγωγικών διαλέξεων. Σε κάθε φοιτητή δίνεται ένα φύλλο εργασίας με πίνακες πειραματικών δεδομένων. Μέσα στο εργαστήριο θα γίνουν ασκήσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν μαθηματικούς υπολογισμούς μέσης τιμής, σφάλματος και σχετικού σφάλματος, δευτερογενείς υπολογισμούς συνθέτων μεγεθών, διάδοση σφάλματος και στρογγυλοποιήσεις.

Στη συνέχεια ζητούνται γραφικές παραστάσεις, με προσεκτική χάραξη αξόνων (κλίμακες, μετατόπιση αρχής), απεικόνιση των σημείων, απεικόνιση των σφαλμάτων αυτών, χάραξη ευθείας (για γραμμικές σχέσεις δεδομένων) με την μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων (MET), χάραξη και προσαρμογή καμπύλης (συναρτήσεις ή ποιοτικές χαράξεις), υπολογισμοί κλίσης (θετικής και αρνητικής) σε δεδομένο σημείο της καμπύλης.

Τα φύλλα εργασίας ελέγχονται από τον διδάσκοντα ενώ εξηγούνται και αναλύονται σε βάθος τυχόν λάθη σε αυτά. Μπορεί να χρειαστεί να γίνει επανυπολογισμός, ή επανασχεδίαση γραφημάτων βάσει των συγκεκριμένων παρατηρήσεων και εξηγήσεων του διδάσκοντα. Τα φύλλα εργασίας θα χρειαστούν για τη συγγραφή της εργαστηριακής αναφοράς στο σπίτι.

Συγγραφή εργαστηριακής αναφοράς (στο σπίτι)

Μετρήσεις, υπολογισμοί, σφάλματα

- 1.Ο κάθε φοιτητής δημιουργεί ένα έγγραφο εργαστηριακής αναφοράς, όπου θα έχει εξώφυλλο με όλα τα στοιχεία του (όνομα, ΑΜ, τμήμα στο οποίο ανήκει, ημερομηνία διεξαγωγής της άσκησης, επιβλέποντα του τμήματος, κτλ).
- 2.Η εργαστηριακή αναφορά θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει τον σκοπό της άσκησης, με σύντομη θεωρητική εισαγωγή, περιγραφή της άσκησης και των μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν στην άσκηση.
- 3.Οι φοιτητές καθαρογράφουν από το φύλλο εργασίας τους πίνακες που έχουν ελεγχθεί από τον διδάσκοντα στο εργαστήριο.
- 4.Πραγματοποιούνται και παρουσιάζονται καθαρογραμμένοι όλοι οι μαθηματικοί υπολογισμοί, συνεκτιμώντας τα σφάλματα και πραγματοποιώντας διάδοση σφάλματος.
- 5.Στο τέλος της αναφοράς αναγράφονται τα τελικά σχόλια και συμπεράσματα που προκύπτουν από τα αποτελέσματα των μετρήσεων και των υπολογισμών της άσκησης με βάση όσα έχουν συζητηθεί στο εργαστήριο.

Γραφήματα

- 6.Ο κάθε φοιτητής δημιουργεί τρία (3) γραφήματα που ζητούνται στο φύλλο εργασίας (είτε αυτά που έγιναν στο εργαστήριο, είτε δημιουργεί εκ νέου καθαρά γραφήματα στο σπίτι).
- 7.Για τη δημιουργία των γραφημάτων ακολουθούνται οι οδηγίες σχεδίασης γραφημάτων (προσθήκη πειραματικών μετρήσεων, εισαγωγή σφαλμάτων (error bars), σχεδίαση και προσαρμογή βέλτιστης καμπύλης στο γράφημα, υπολογισμός κλίσης καμπύλης κτλ).
- 8.Η διαδικασία επαναλαμβάνεται σε γραμμική και ημιλογαριθμική κλίμακα (χαρτί μιλιμετρέ και ημιλογαριθμικό αντίστοιχα) σύμφωνα με τις υποδείξεις της κάθε άσκησης.
- 9.Στο τέλος της αναφοράς αναγράφονται τα τελικά σχόλια και συμπεράσματα που προκύπτουν από τα διαγράμματα που σχεδιάστηκαν (πχ ποιο γράφημα εξυπηρετεί καλύτερα στην ανάδειξη των πειραματικών μετρήσεων).

Ερωτήσεις για συζήτηση και σχολιασμό

10. Η εργαστηριακή αναφορά θα πρέπει να περιλαμβάνει και όλες τις απαντήσεις στις ερωτήσεις που δίνονται στο τέλος της κάθε ενότητας.

Ερωτήσεις

1. Έχουμε N μετρήσεις της ίδιας ποσότητας με το αντίστοιχο σφάλμα τους δN . Είναι το ίδιο εάν βγάλουμε το μέσο όρο των N μετρήσεων και υπολογίσουμε το σφάλμα του μέσου όρου ή μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας το μέσο όρο των επιμέρους σφαλμάτων δN ; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.
2. Στο εργαστήριο εκτελέστηκαν δύο ασκήσεις με μετρήσεις μήκους και χρόνου με απώτερο σκοπό τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας (άσκηση 2 και 3). Συγκρίνετε και σχολιάστε τη μεθοδολογία και το αποτέλεσμα των δύο ασκήσεων. Ποια θεωρείτε ως πιο αξιόπιστη μέθοδο;
3. Μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της άσκησης 2 στην άσκηση 3 (και αντίστροφα) και γιατί;
4. Ποια είναι τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του χιλιοστομετρικού και ημιλογαριθμικού χαρτιού στη γραφική απεικόνιση πειραματικών μετρήσεων;
5. Σε ποιες περιπτώσεις θα χρησιμοποιούσατε γραμμικό, ημιλογαριθμικό ή λογαριθμικό χαρτί για την απεικόνιση των μετρήσεων σε ένα πείραμα;

Βιβλιογραφία

- 1.Εργαστήριο Φυσικής, Τμήμα Φυσικής, ΕΚΠΑ. Θεωρία σφαλμάτων. Εκπαιδευτικό φυλλάδιο.
- 2.Τμήμα Φυσικής, ΕΚΠΑ. Εισαγωγικές διαλέξεις. Εκπαιδευτικό φυλλάδιο.
- 3.Τρικαλινός Χ. (2017). Εισαγωγή στη Θεωρία Σφαλμάτων.
- 4.Αραβαντινός Α. Σφάλματα και στατιστική επεξεργασία πειραματικών μετρήσεων – Γραφικές παραστάσεις, κλίση καμπύλης, μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής.

A2: Εφαρμογή στην πειραματική διαδικασία (το απλό εκκρεμές)

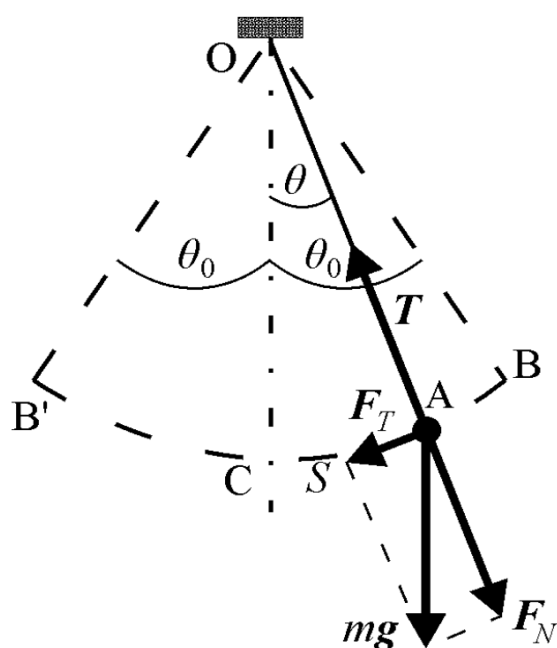
Σκοπός της άσκησης

Με αφορμή τη μελέτη του απλού εκκρεμούς, η παρούσα άσκηση αποσκοπεί στην εξοικείωση με τη διαδικασία λήψης πειραματικών μετρήσεων και την πρακτική εφαρμογή της θεωρίας σφαλμάτων. Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί στον υπολογισμό των φυσικών μεγεθών μαζί με τα αντίστοιχα σφάλματά τους. Πιο συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιηθεί ένα εκκρεμές για τον πειραματικό προσδιορισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας g από την περίοδο ταλάντωσής του. Στοιχεία από τη θεωρία

Σύμφωνα με τον ορισμό «το απλό εκκρεμές αποτελείται από σώμα αμελητέων διαστάσεων και μάζας m που κρέμεται με νήμα μήκους l και αμελητέας μάζας από σταθερό

σημείο O » (βλ. Σχήμα 1). Αν το σώμα αυτό απομακρυνθεί αρχικά από τη θέση ισορροπίας, στη θέση B , ώστε το νήμα να σχηματίζει γωνία θ_0 με την κατακόρυφο OC και αφεθεί ελεύθερο θα εκτελεί ταλαντώσεις μεταξύ του B και της συμμετρικής θέσης B' (αν αγνοήσουμε τις κάθε είδους τριβές). Αυτό σημαίνει ότι το σωματίδιο κινείται σε τόξο κύκλου που έχει ακτίνα $l = OA$ και πάνω του ασκούνται το βάρος του mg και η τάση T του νήματος.

Η εφαπτομενική συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης είναι:



$$F_T = -mg \sin \theta \quad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομενικής κίνησης είναι $F_T = m\alpha_T$ και επειδή το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά θα ισχύει:

$$\alpha_T = l \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2)$$

Επομένως, αν πάρουμε υπόψη μας ότι η F_T έχει φορά αντίθετη της φοράς της μετατόπισης ($S = CA$) βρίσκουμε ότι:

$$ml \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = -mg \sin \theta \quad (3)$$

ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΔΙΝΕΙ ΤΕΛΙΚΑ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (4)$$

Για μικρές γωνίες ισχύει ότι $\sin \theta \approx \theta$ και η παραπάνω εξίσωση (4) λαμβάνει την προσεγγιστική μορφή:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (5)$$

Λύση της διαφορικής εξίσωσης (5) είναι η:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

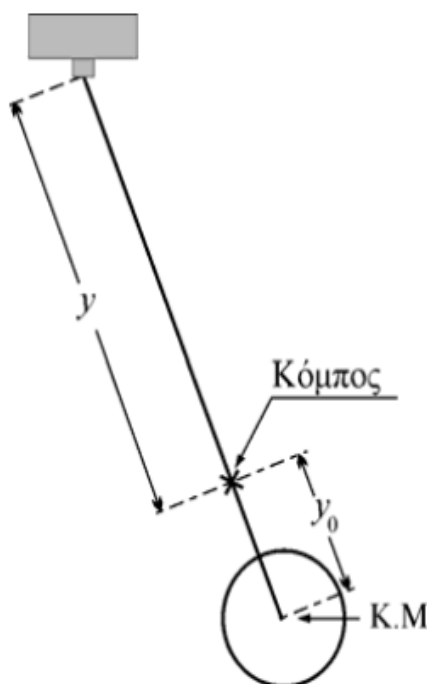
όπου $\omega = \sqrt{g/l}$, ενώ οι γωνίες θ_0 και φ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Από αυτό τελικά λαμβάνουμε:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{l/g} \quad (7)$$

Η παραπάνω σχέση (7) υποδηλώνει ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη της γωνίας θ και ισχύει μόνο για μικρές γωνίες. Στην περίπτωση ταλάντωσης με μεγάλη γωνία η προσεγγιστική σχέση (7) δεν ισχύει, ενώ υπάρχει εξάρτηση της περιόδου με τη γωνία θ . Για όλες τις γωνίες η επιτάχυνση του εκκρεμούς δίδεται από τη σχέση (4). Για μικρές γωνίες, η προσεγγιστική σχέση (5) περιγράφει μεγαλύτερες τιμές γωνιακής επιτάχυνσης από την σχέση (1) διότι $\sin(\theta) < \theta$.

Πειραματική διάταξη



Σχήμα 1: Σχεδιάγραμμα εκκρεμούς

Στην πειραματική μέτρηση του μήκους l ενός εκκρεμούς, ερχόμαστε αντιμέτωποι με μια σημαντική πρακτική δυσκολία, η οποία είναι ότι κάθε πραγματικό (φυσικό) εκκρεμές είναι διαφορετικό από το απλό εκκρεμές που συζητήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Ακόμη και αν υποθέσουμε ότι η μάζα του νήματος είναι αμελητέα, το σώμα που αναρτάται (η σφαίρα) έχει συγκεκριμένες γεωμετρικές διαστάσεις και δεν αποτελεί υλικό σημείο. Σύμφωνα με τους νόμους της Μηχανικής, το Κέντρο Μάζας (Κ.Μ.) της σφαίρας κινείται σαν να ήταν συγκεντρωμένη εκεί όλη η μάζα του σώματος. Συνεπώς, το μήκος l θα έπρεπε να ορίζεται ως η απόσταση από το σημείο ανάρτησης μέχρι το Κ.Μ. της σφαίρας. Ωστόσο, ο ακριβής εντοπισμός του Κ.Μ είναι εξαιρετικά δύσκολος στην πράξη. Η σφαίρα συχνά δεν είναι ομογενής, δεδομένου ότι η προσθήκη ενός αγκίστρου ή η διάνοιξη οπής για το δέσιμο του νήματος μεταβάλλει την κατανομή της μάζας της.

Προκειμένου να ξεπεράσουμε τη δυσκολία του ακριβούς προσδιορισμού του Κ.Μ, εφαρμόζουμε το εξής. Δημιουργούμε έναν μικρό κόμπο ή ένα διακριτό σημάδι πάνω στο νήμα, σε κοντινή απόσταση από τη σφαίρα (περίπου 5 έως 10 cm). Με τον τρόπο αυτό,

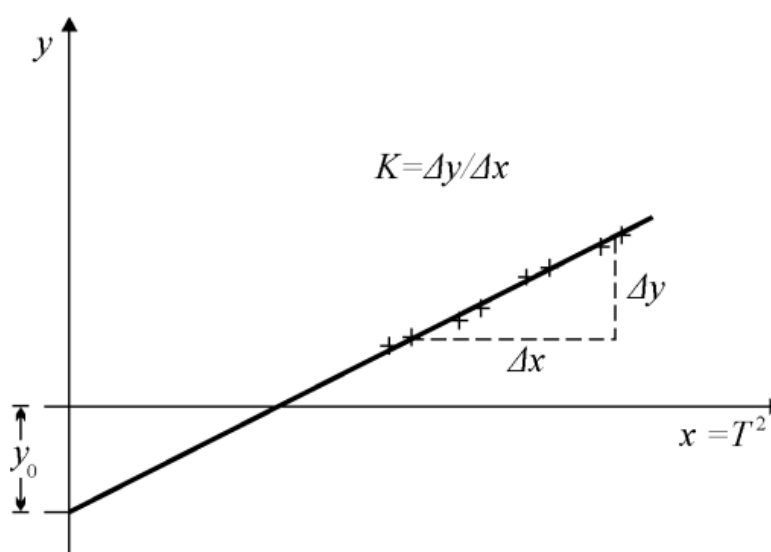
ορίζουμε δύο νέες αποστάσεις αναφοράς, την απόσταση y του κόμπου από το σημείο ανάρτησης και την απόσταση y_0 του κόμπου από το Κ.Μ της σφαίρας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Η τεχνική αυτή μας επιτρέπει να μεταβάλουμε το συνολικό μήκος του εκκρεμούς μετρώντας την εύκολα μετρούμενη απόσταση y , ενώ το άγνωστο τμήμα y_0 παραμένει σταθερό.

Σύμφωνα με την εισαγωγή των y και y_0 το συνολικό μήκος γίνεται $l = y + y_0$. Εάν λύσουμε την (7) ως προς l βρίσκουμε $y + y_0 = l = g(T^2/4\pi^2)$, οπότε εάν χαράξουμε την ευθεία $y = \frac{g}{4\pi^2}T^2 - y_0$ (βλ. Σχήμα 3) μπορούμε να υπολογίσουμε το g από την κλίση της ευθείας που εκφράζει τη γραμμική σχέση μεταξύ y και T^2 , καθώς και το y_0 από την τομή της αντίστοιχης ευθείας με τον άξονα y .

Στην πραγματικότητα η σφαίρα εκτελεί τόσο μεταφορική όσο και περιστροφική κίνηση, δηλαδή αποτελεί ένα φυσικό εκκρεμές. Κατ' επέκταση η περίοδος ταλάντωσης δίδεται, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner, από τη σχέση:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (8)$$

όπου I η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα ανάρτησης.



Σχήμα 3: Γραφική απεικόνιση της ευθείας $y = \frac{g}{4\pi^2} T^2 - y_0$

Πειραματική Διαδικασία

1. Στερεώνουμε το νήμα με τον κόμπο στο σημείο ανάρτησης επιλέγοντας κάθε φορά διαφορετικές τιμές του y . Για κάθε μήκος y , εκτρέπουμε την σφαίρα κατά γωνία θ όχι μεγαλύτερη από 10° και την αφήνουμε ελεύθερη. Μετά από 2-3 αιωρήσεις και αφού βεβαιωθούμε ότι η ταλάντωση είναι ορθή (δηλαδή ομαλή χωρίς κραδασμούς και σε ένα επίπεδο), ξεκινούμε το χρονόμετρο την στιγμή που η σφαίρα βρίσκεται σε μέγιστο πλάτος ταλάντωσης και μετρούμε το συνολικό χρόνο των 10 περιόδων (10T).
2. Οι μετρήσεις μας γίνονται για διάφορα μήκη του y : 1,0 m, 0,8 m, 0,6 m, 0,4 m και 0,2 m. Σημειώστε στον πίνακα 1 τις τιμές των χρόνων για τα παραπάνω μήκη. Συνιστάται να αφήσετε το μήκος 0.6m τελευταίο, γιατί θα πραγματοποιηθούν επιπλέον μετρήσεις σε αυτό το μήκος. Μην ξεχάσετε να μετρήσετε το y_0 για το δικό σας πείραμα!
3. Για μήκος $y = 0,6 \text{ m}$ κάντε 5 μετρήσεις του χρόνου για 10 περιόδους (10T).
4. Για μήκος $y = 0,6 \text{ m}$ κάντε 5 μετρήσεις του χρόνου για 1 περίοδο (1T).

5. Πάλι για μήκος $y = 0,6 \text{ m}$ κάντε 5 μετρήσεις του χρόνου για 1 περίοδο, αλλά με μεγάλη αρχική γωνία εκτροπής $\theta > 60^\circ$.
6. Βρείτε το $\bar{T}$ και $\bar{T}^2$ για μια περίοδο από τις μετρήσεις σας και συμπληρώστε τις υπόλοιπες στήλες του Πίνακα 1.

Πίνακας 1

$y \text{ (m)}$	$(10T)_1 \text{ (s)}$	$(10T)_2 \text{ (s)}$	$(10T)_3 \text{ (s)}$	$(10T)_4 \text{ (s)}$	$(10T)_5 \text{ (s)}$	$\bar{T} \text{ (s)}$	$\bar{T}^2 \text{ (s}^2\text{)}$
1.0							
0.8							
0.4							
0.2							
0.6							

$y \text{ (m)}$	$(1T)_1 \text{ (s)}$	$(1T)_2 \text{ (s)}$	$(1T)_3 \text{ (s)}$	$(1T)_4 \text{ (s)}$	$(1T)_5 \text{ (s)}$	$\bar{T} \text{ (s)}$	$\bar{T}^2 \text{ (s}^2\text{)}$
0.6							
0.6 ($\theta > 60^\circ$)							

Ανάλυση Μετρήσεων

1. Υπολογίστε τη μέση τιμή της περιόδου και την αβεβαιότητά της, για κάθε μια από τις διαφορετικές μετρήσεις στα 0.6m. Δείξτε τα αποτελέσματα σας με την σωστή μορφή, στρογγυλοποιημένα. Σχολιάστε συγκριτικά όλα τα αποτελέσματα και τις αβεβαιότητές τους, που προέκυψαν για μήκος 0.6 m.

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i, \delta\bar{T} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}{N(N-1)}} \quad (9)$$

2. Υπολογισμός της σταθεράς g με τη γραφική μέθοδο
 - i. Σε χιλιοστομετρικό χαρτί να απεικονίσετε τις 5 μετρήσεις του μήκους y με το τετράγωνο της περιόδου T .
 - ii. Χαράξτε με το κανόνα την ακριβέστερη κατά το δυνατόν ευθεία $y = A + Bx$ όπου y τα μήκη από τον κόμβο μέχρι το σημείο ανάρτησης και $x = T^2$.
 - iii. Από την κλίση B υπολογίστε το g
 - iv. Από το συντελεστή A υπολογίστε το y_0 . Να το συγκρίνετε με την απευθείας μέτρηση που κάνατε στο εργαστήριο.
 - v. Σε λογαριθμικό χαρτί, απεικονίστε το y με την περίοδο T . Χαράξτε την καμπύλη. Τι μορφή έχει η καμπύλη αυτή και γιατί; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
3. Υπολογισμός της σταθεράς g με το σφάλμα της από τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων.
 - i. Εφαρμόζοντας τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων, υπολογίστε τα A και B με τα σφάλματα δA και δB και από εκεί βρείτε τη τιμή του g με το σφάλμα του δg . Επίσης υπολογίστε με στρογγυλοποίηση το σχετικό σφάλμα του g (%).
4. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας για την εύρεση του g από τις δύο παραπάνω μεθόδους. Επίσης σχολιάστε το αποτέλεσμα σας σε σχέση με την βιβλιογραφική τιμή του g .

Ερωτήσεις

1. Με αφετηρία τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, να αποδείξετε ότι η έκφραση που δίνει το σχετικό σφάλμα του g ως συνάρτηση των σχετικών σφαλμάτων του μήκους και της περιόδου είναι: $\frac{\delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2}$,
2. Τι είναι συστηματικό και τι τυχαίο σφάλμα; Δώστε παραδείγματα από τη συγκεκριμένη πειραματική διάταξη.
3. Τι νόημα έχει να μετράμε 10 περιόδους αντί για 1 περίοδο; Ποιο σφάλμα στη μέτρηση της περιόδου μειώνεται με αυτόν τον τρόπο;
4. Θα περιμένετε οι τιμές της περιόδου που υπολογίσατε τρεις φορές με το μήκος στα 0.6 m να είναι ίδιες; Σε ποια από τις τρεις περιπτώσεις περιμένουμε να έχουμε μικρότερο και σε ποια μεγαλύτερο σφάλμα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
5. Αν αυξήσουμε την γωνία ταλάντωσης θ σε πολύ μεγάλες τιμές τι περιμένετε, ποιοτικά, να συμβεί; Ποια εξίσωση από τις παραπάνω τίθεται σε αμφιβολία και γιατί; Τι βρήκατε από τις μετρήσεις σας με μεγάλη γωνία; Ποιοτικά, υπάρχει διαφοροποίηση στη σωστή κατεύθυνση;

Συγγραφή εργαστηριακής αναφοράς (στο σπίτι)

- 1.Ο φοιτητής δημιουργεί ένα έγγραφο εργαστηριακής αναφοράς, όπου θα έχει εξώφυλλο με όλα τα στοιχεία του (όνομα, ΑΜ, τμήμα στο οποίο ανήκει, ημερομηνία διεξαγωγής της άσκησης, επιβλέποντα του τμήματος, κτλ)
- 2.Η εργαστηριακή αναφορά θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει τον σκοπό της άσκησης, με σύντομη θεωρητική εισαγωγή, περιγραφή της άσκησης, της πειραματικής διάταξης και των μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν στην άσκηση.
- 3.Οι φοιτητές καθαρογράφουν τους πίνακες που έχουν δοθεί από τον διδάσκοντα στο φύλλο εργασίας (για τις μετρήσεις μήκους και χρόνου).
- 4.Πραγματοποιούνται και παρουσιάζονται όλοι οι μαθηματικοί υπολογισμοί (μέσες τιμές σφάλματα, στρογγυλοποίηση), συνεκτιμώντας τα σφάλματα στις μετρήσεις, ενώ γίνεται διάδοση σφάλματος όπου είναι απαραίτητο.

5. Στο τέλος της αναφοράς αναγράφονται τα τελικά σχόλια και συμπεράσματα που προκύπτουν από τα αποτελέσματα των μετρήσεων και των υπολογισμών της άσκησης.
6. Ο φοιτητής δημιουργεί διάγραμμα ευθείας $y = f(T^2)$ (για τα μήκη 1 m, 0.8 m, 0.6 m, 0.4 m, 0.2 m στα οποία μετρήθηκαν 10T). Να ακολουθηθούν οι οδηγίες σχεδίασης γραφημάτων (προσθήκη πειραματικών μετρήσεων, εισαγωγή σφαλμάτων (error bars), σχεδίαση και προσαρμογή βέλτιστης καμπύλης στο γράφημα, υπολογισμός κλίσης καμπύλης κτλ). Από το διάγραμμα να γίνει υπολογισμός του g από την κλίση και y_0 από το A της ευθείας $y = Bx + A$.
7. Ο φοιτητής δημιουργεί διάγραμμα ευθείας $y = f(T)$ σε λογαριθμικό χαρτί και να γίνει σχολιασμός της καμπύλης που προκύπτει.
8. Να γίνει υπολογισμός του g και του αντίστοιχου σφάλματος με την MET.
9. Στο τέλος της αναφοράς να γίνει ένας συγκεντρωτικός πίνακας και να αναγραφούν τα τελικά σχόλια και συμπεράσματα που προκύπτουν από τα διαγράμματα που σχεδιάστηκαν.
10. Να απαντηθούν όλες οι ερωτήσεις της άσκησης.

Βιβλιογραφία

1. Alonso–Finn, Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική, τ. 1, §§ 5.5–5.11, 10.4, 12.3–12.6.
2. H. D. Young, Πανεπιστημιακή Φυσική, τ. 1, §§ 3.1–3.3, 13.1–13.7.
3. O’Hanian, Φυσική, τ. 1, §§ 4.1–4.4, 15.1–15.6.
4. Serway, Φυσική, τ. 1, §§ 6.1–6.2, 13.1, 13.4, 13.6–13.7.
5. Berkeley, Μαθήματα Φυσικής, τ. 1, § 7.1.
6. Halliday–Resnick, Φυσική, τ. 1, §§ 15.1–15.6.

A3. Προσδιορισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας και της ταχύτητας κινούμενου σώματος μέσω πειράματος σε κεκλιμένο επίπεδο

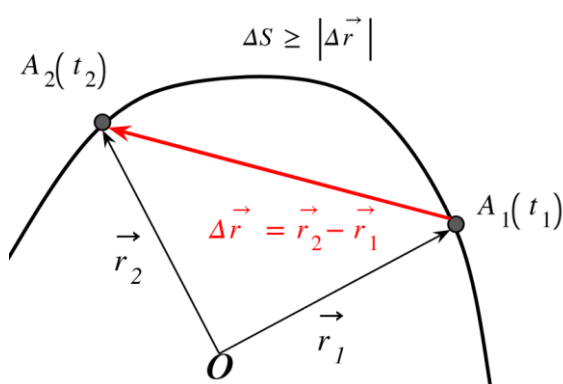
Λέξεις κλειδιά: Επιτάχυνση της βαρύτητας - Κεκλιμένο επίπεδο - Τριβή - Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση - Μέση ταχύτητα - Στιγμιαία ταχύτητα

Σκοπός της άσκησης

Σκοπός της άσκησης είναι ο πειραματικός προσδιορισμός βασικών φυσικών μεγεθών, όπως η επιτάχυνση της βαρύτητας, η μέση και η στιγμιαία ταχύτητα σώματος που εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Οι φοιτητές/φοιτήτριες θα εξοικειωθούν επίσης με αισθητήρες και εξειδικευμένο λογισμικό για την καταγραφή και επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων.

Στοιχεία από τη θεωρία

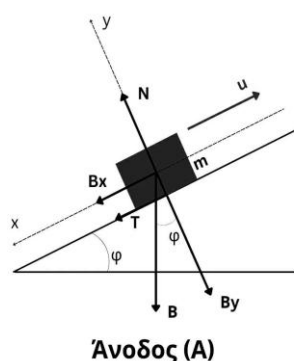
Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται συνοπτικά στοιχεία από την θεωρία που σχετίζονται με τα εκτελούμενα πειράματα.



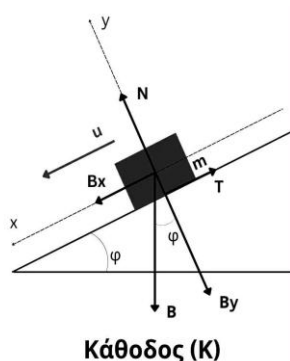
Μέση και στιγμιαία ταχύτητα. Έστω σώμα που κινείται επί τροχιάς, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ μετακινείται από την θέση A_1 στη θέση A_2 έχοντας διανύσει απόσταση Δs . Η **μέση** ταχύτητα ενός κινούμενου σώματος είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται ως το πηλί-

κο της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα στο οποίο αυτή πραγματοποιείται, $\vec{u}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$. Αντίθετα, **στιγμιαία** ταχύτητα είναι η ταχύτητα του κινούμενου σώματος σε μια **συγκεκριμένη** χρονική στιγμή και προκύπτει ως το όριο της μέσης ταχύτητας όταν το χρονικό διάστημα τείνει στο μηδέν, $\vec{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \vec{r} / \Delta t)$.

Στην εργαστηριακή άσκηση εξετάζεται η ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, στην οποία η στιγμιαία ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο (βλ. σχέση 2α) και επομένως διαφέρει μεταξύ σημείων της τροχιάς. Επιπλέον, η μέση ταχύτητα σε ένα χρονικό διάστημα ισούται με τον μέσο όρο των στιγμιαίων ταχυτήτων στα άκρα του διαστήματος. Συνεπώς, όσο μικρότερο είναι το χρονικό (ή ισοδύναμα χωρικό) διάστημα στο οποίο υπολογίζεται η μέση ταχύτητα, τόσο καλύτερα αυτή προσεγγίζει τη στιγμιαία ταχύτητα σε ένα συγκεκριμένο σημείο της τροχιάς.



Άνοδος (Α)



Κάθοδος (Κ)

Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο (μικρών τριβών). Έστω σώμα μάζας m το οποίο ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ με μικρές τριβές. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος B , η τριβή T και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N (βλ. διπλανό σχήμα). Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου (άξονας x), προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης για την **άνοδο (Α)** και την **κάθοδο (Κ)**:

$$B_x + T = m \cdot a_{x,A} \quad (1\alpha), \quad B_x - T = m \cdot a_{x,K} \quad (1\beta)$$

Στην ιδανική περίπτωση, όπου η τριβή είναι αμελητέα ($T = 0$), οι επιταχύνσεις κατά την άνοδο και κάθοδο είναι ίσες και δίνονται από: $a_{x,A} = a_{x,K} = g_x = g \cdot \sin \varphi$ (1γ). Στη

γενική περίπτωση, όπου η τριβή δεν είναι μηδενική, οι επιταχύνσεις κατά την άνοδο και την κάθοδο διαφέρουν. Ωστόσο, ο **μέσος όρος** τους, $\alpha_x = (\alpha_{x,A} + \alpha_{x,K})/2$, είναι ανεξάρτητος από την τριβή και δίνεται από $\alpha_x = g \cdot \sin(\varphi)$ (1δ)

Σημείωση: Οι σχέσεις (1γ) και (1δ) ισχύουν για σώμα που **ολισθαίνει** στο κεκλιμένο επίπεδο. Για σώματα με περιστρεφόμενους τροχούς (όπως το αμαξίδιο της άσκησης), πρέπει να εξετάζονται χωριστά οι περιπτώσεις **ολίσθησης** και **κύλισης χωρίς ολίσθηση**, καθώς η τριβή δεν έχει τον ίδιο φυσικό ρόλο στις δύο περιπτώσεις (βλ. Βιβλιογραφία [3], Κεφ. 8).

Στην περίπτωση της **κύλισης χωρίς ολίσθηση** ο μέσος όρος των επιταχύνσεων κατά την άνοδο και την κάθοδο δίνεται από $\alpha_x = g \cdot \sin(\varphi)/(1 + \beta)$ (1ε), όπου $\beta = I/(Mr^2)$ (1ζ) με I τη συνολική ροπή αδράνειας των τροχών ως προς τους άξονες περιστροφής τους, M τη συνολική μάζα του αμαξιδίου και r την ακτίνα των τροχών.

Η στιγμιαία ταχύτητα και η θέση του κινούμενου σώματος γράφονται γενικά ως:

$$u_x = u_{x,0} + a_x \cdot (t - t_0) \quad (2\alpha), \quad S = x_0 + u_{0,x} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot (t - t_0)^2 \quad (2\beta)$$

όπου x_0 και $u_{0,x}$ η θέση και στιγμιαία ταχύτητα του κινούμενου σώματος αντίστοιχα στο χρόνο t_0 , και a_x η συνιστώσα της επιτάχυνσης παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο. Στην **ειδική περίπτωση** μηδενικών τριβών, μηδενικής αρχικής ταχύτητας $t_0 = 0$ και $x_0 = 0$, η σχέση (2β) καταλήγει στην $g = \frac{2 \cdot S}{\sin \varphi \cdot t^2}$ (3).

Πειραματική διάταξη

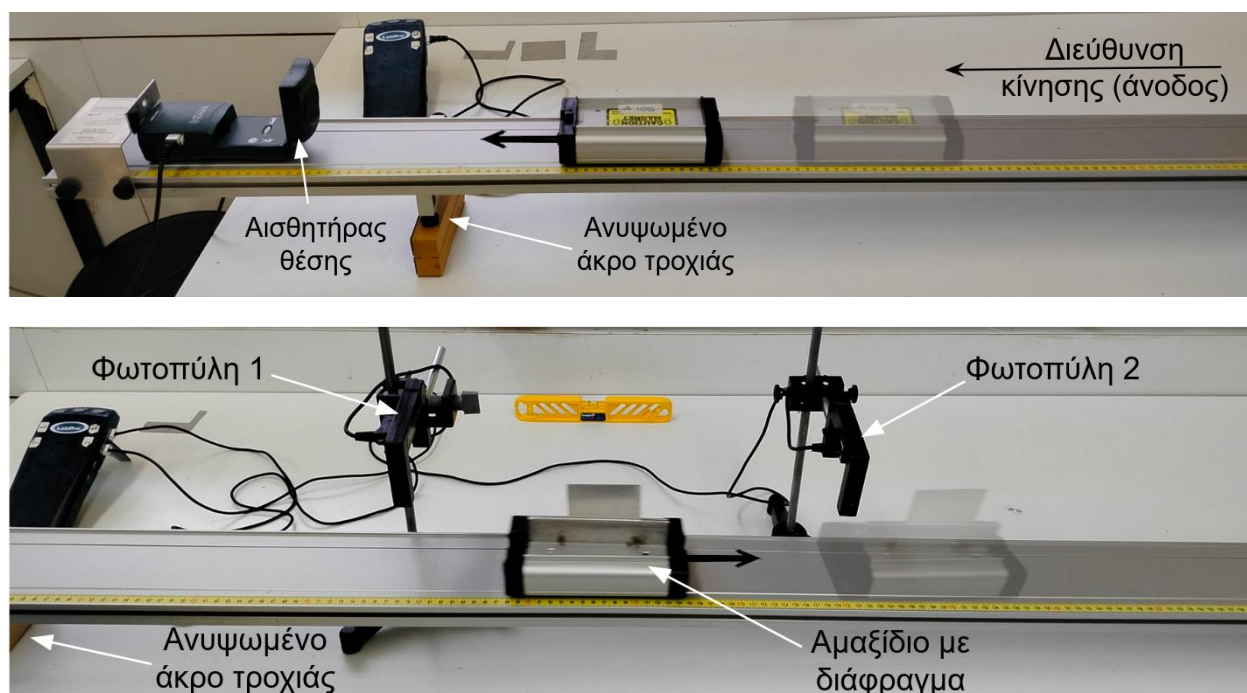
Στην Εικόνα 1 παρουσιάζονται τα στοιχεία που θα χρησιμοποιηθούν στην πειραματική διάταξη των Πειραμάτων 1 και 2:

(1) Επίπεδη τροχιά μήκους 2 m, χαμηλών τριβών, με προσαρμοσμένη μετροταινία. (2) Τετράτροχο αμαξίδιο, (3) Πρόσθετο ύψος τροχιάς (τουβλάκι), (4) Αλφάδι, (5) Αισθητήρας θέσης, (6) Κόμβος σύνδεσης αισθητήρων, (7) Φωτοπύλη, (8) Στήριγμα φωτοπύλης, (9) Στήριγμα διαφράγματος, (10) Διαφράγματα.



Εικόνα 1: Στοιχεία πειραματικής διάταξης.

Στην Εικόνα 2 παρουσιάζονται στιγμιότυπα από την εκτέλεση των Πειραμάτων 1 και 2. Στις επιμέρους εικόνες αναγράφονται τα κύρια στοιχεία της διάταξης.



Εικόνα 2: Στιγμιότυπα από τις πειραματικές διατάξεις του Πειράματος 1 (πάνω) και Πειράματος 2 (κάτω).

Πειραματική διαδικασία

Πείραμα 1: Προσδιορισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας μέσω της μελέτης κινούμενου αμαξιδίου σε κεκλιμένο επίπεδο

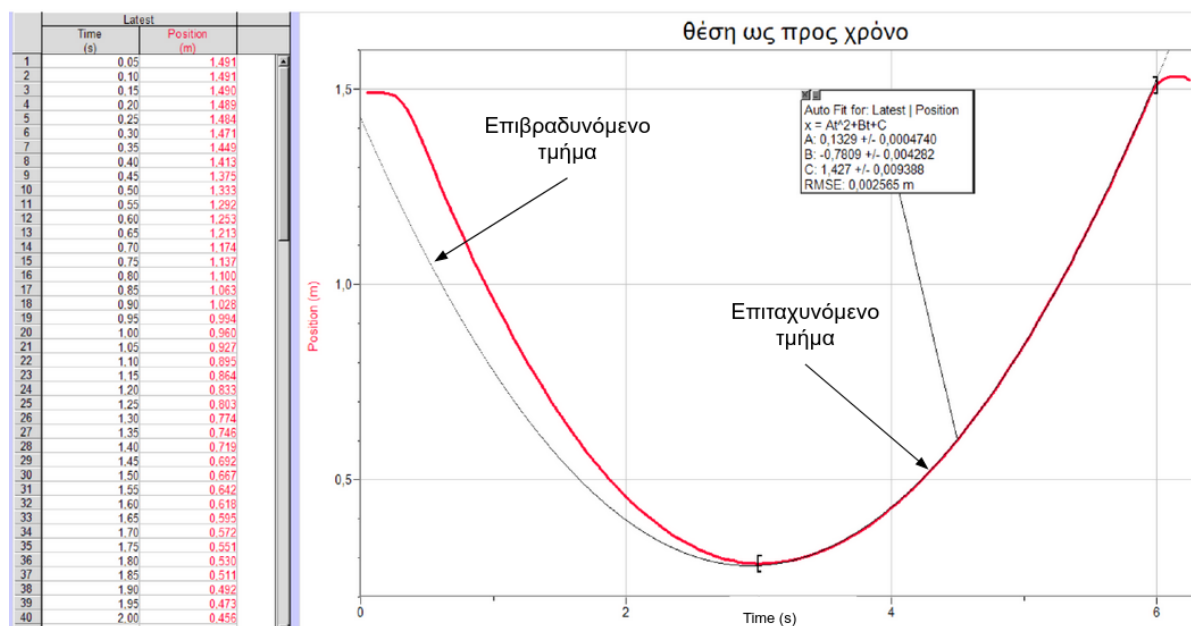
Σκοπός του πειράματος είναι ο πειραματικός προσδιορισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας ($g \pm \delta g$) μέσω της μελέτης ενός κινούμενου αμαξιδίου σε κεκλιμένο επίπεδο μικρών τριβών.

Πειραματική διάταξη και εκτέλεση

Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα για τη **συναρμολόγηση** της διάταξης και την **εκτέλεση** του πειράματος:

1. Δημιουργήστε ένα κεκλιμένο επίπεδο με την τοποθέτηση του πρόσθετου ύψους (βλ. αντικείμενο 3 στην Εικόνα 1). Τοποθετήστε τον αισθητήρα θέσης στο υψηλότερο άκρο της τροχιάς (Εικόνα 2). Μετρήστε την κατακόρυφη ανύψωση h και το αντίστοιχο μήκος L της κεκλιμένης τροχιάς, ώστε να προσδιορίσετε το $\sin\phi=h/L$ και την αβεβαιότητά του.
2. Τοποθετήστε το αμαξίδιο (βλ. αντικείμενο 2 στην Εικόνα 1) σε απόσταση $d > 1,5\text{ m}$ από τον αισθητήρα.
3. Ενεργοποιήστε το λογισμικό Logger Pro και ανοίξτε το αρχείο **a4_2_motion_s-t.cmbi** που βρίσκεται στην επιφάνεια εργασίας του υπολογιστή. Ελέγξτε ότι η λήψη των μετρήσεων (Data-Collection) έχει ρυθμιστεί ως εξής: Διάρκεια (Length): 8 s και Ρυθμός δειγματοληψίας (Sampling Rate): 20 δείγματα/s.
4. Η **λήψη** μετρήσεων ξεκινά πατώντας το κουμπί *Collect*. Κατά τη διάρκεια της λήψης των μετρήσεων, **ωθήστε το αμαξίδιο ώστε να αποκτήσει αρχική ταχύτητα** προς την κατεύθυνση του αισθητήρα. Η λήψη των μετρήσεων τερματίζεται αυτόματα μετά από 8 s από την έναρξή της.

5. Λάβετε ορισμένες **δοκιμαστικές** μετρήσεις ώστε να εξοικειωθείτε με το μέτρο της αρχικής ώθησης που πρέπει να παρέχετε στο αμαξίδιο ώστε να λάβετε **ικανό αριθμό μετρήσεων** κατά την άνοδο και κάθοδο.



Εικόνα 3: Πειραματικές μετρήσεις (στήλες) και γραφική παράσταση θέσης - χρόνου του αμαξιδίου (λεπτή μαύρη καμπύλη). Η προσαρμοσμένη καμπύλη στα δεδομένα που αντιστοιχούν στο τμήμα της επιταχυνόμενης κίνησης έχει σχεδιαστεί με κόκκινο χρώμα.

6. Κατά την εκτέλεση του πειράματος, οι τιμές των μετρήσεων καταγράφονται αυτόματα στις αντίστοιχες στήλες, ενώ ταυτόχρονα παράγεται η γραφική παράσταση¹ θέσης - χρόνου, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3. Θα παρατηρήσετε ότι η καμπύλη που προκύπτει δεν είναι συμμετρική. Σκεφτείτε πού μπορεί να οφείλεται η ασυμμετρία της καμπύλης.
7. Επιλέξτε το επιταχυνόμενο τμήμα της κίνησης, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3, και πραγματοποιήστε προσαρμογή καμπύλης στα δεδομένα (*Curve Fit* → *Quadratic* → *Try Fit* → *OK*). Καταγράψτε τις τιμές όλων των παραμέτρων που προκύπτουν από την προσαρμογή. Επαναλάβετε τη διαδικασία για το επιβραδυνόμενο τμήμα της κίνησης. [Σκεφτείτε

¹ Για την απεικόνιση του γραφήματος σε όλη την διαθέσιμη επιφάνεια ενεργοποιήστε την αυτόματη κλιμάκωση (Autoscale).

γιατί η πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού (Quadratic) είναι κατάλληλη για την προσαρμογή].

- Επιλέξτε περίπου **10 μετρήσεις** θέσης - χρόνου από το επιταχυνόμενο τμήμα της κίνησης που καταγράφηκαν κατά τη διάρκεια του πειράματος. Οι μετρήσεις δεν είναι απαραίτητο να είναι χρονικά ισαπέχουσες.

Ανάλυση δεδομένων

- Να υπολογίσετε το $\sin\varphi \pm \delta(\sin\varphi)$.

Χρησιμοποιώντας τις τιμές των παραμέτρων που προκύπτουν από την προσαρμογή στο **βήμα 7** να υπολογίσετε την επιτάχυνση με το σφάλμα της κατά την άνοδο του αμαξιδίου στο κεκλιμένο επίπεδο ($a_A \pm \delta a_A$). Προσδιορίστε με ποια φυσικά μεγέθη σχετίζονται οι παράμετροι της καμπύλης $S(t) = At^2 + Bt + C$ (βλ. εξίσωση 2β).

- Επαναλάβετε το προηγούμενο βήμα για την κάθοδο του αμαξιδίου ($a_K \pm \delta a_K$). Συγκρίνετε με το προηγούμενο αποτέλεσμα και σχολιάστε τα ευρήματά σας.
- Συνδυάζοντας κατάλληλα τους υπολογισμούς σας για τα $a_A \pm \delta a_A$ και $a_K \pm \delta a_K$ (βλ. **σχέση 1δ**), να προσδιορίσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας με το σφάλμα της $g \pm \delta g$.
- Χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις του **βήματος 8** και την **σχέση (3)** να υπολογίσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας με το σφάλμα της μέσω διάδοσης σφαλμάτων. Η πρώτη επιλεγμένη μέτρηση θα χρησιμοποιηθεί ως αρχική συνθήκη.
- Να παρουσιάσετε τις μετρήσεις σας σε πίνακα, συμπεριλαμβάνοντας τα αντίστοιχα σχετικά σφάλματα $\delta t/t, \delta S/S, \delta(\sin\varphi)/\sin\varphi, \delta g/g$. Παρατηρήστε ότι μετρήσεις σε χρόνο κοντά στην αρχική χρονική στιγμή παρουσιάζουν ιδιαίτερα μεγάλο σχετικό σφάλμα $\delta g/g$. Να εξηγήσετε την πιθανή αιτία αυτού του αποτελέσματος.

Πείραμα 2: Προσδιορισμός μέσης και στιγμιαίας ταχύτητας μέσω της μελέτης κινούμενου αμαξιδίου σε κεκλιμένο επίπεδο

Σκοπός του πειράματος είναι ο πειραματικός προσδιορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινούμενου σώματος που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Πειραματική διάταξη και εκτέλεση

Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα για τη **συναρμολόγηση** της διάταξης και την **εκτέλεση** του πειράματος:

1. Διατηρήστε το κεκλιμένο επίπεδο όπως στο Πείραμα 1 και τοποθετήστε το διάφραγμα στο αμαξίδιο (αντικείμενα 9 και 10 στην Εικόνα 1).
2. Επιλέξτε ένα σημείο x_1 κοντά στο μέσο της τροχιάς και μετρήστε την ακριβή απόστασή του από την αρχή της κλίμακας χρησιμοποιώντας τη μετροταινία.
3. Τοποθετήστε τις δύο φωτοπύλες στα στηρίγματά τους (αντικείμενα 7 και 8 στην Εικόνα 1) συμμετρικά ως προς το x_1 σε ίσες αποστάσεις από αυτό. Μετρήστε και καταγράψτε τη συνολική απόσταση D μεταξύ των φωτοπυλών η οποία αρχικά καθορίζεται στα **120 cm**. Επιλέξτε ένα **σταθερό σημείο εκκίνησης** x_0 , κοντά στην αρχή της τροχιάς, και καταγράψτε τη θέση του.
4. Ενεργοποιήστε το λογισμικό Logger Pro και ανοίξτε το αρχείο **a4_3_v_average_1.cmb**. Εξοικειωθείτε με τις καταγραφές (χρόνοι διέλευσης από κάθε φωτοπύλη και συνολικός χρόνος μεταξύ τους).
5. Ξεκινήστε τη λήψη μετρήσεων με το πλήκτρο *Collect*. Αφήστε το αμαξίδιο να κινηθεί από το σημείο x_0 , **χωρίς αρχική ταχύτητα**. Ο καταγραφόμενος χρόνος αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα διέλευσης μεταξύ των δύο φωτοπυλών.

6. Επαναλάβετε τη μέτρηση συνολικά **5 φορές** από το ίδιο σημείο x_0 (πρώτη πεντάδα μετρήσεων). Συγκρίνετε τις τιμές των μετρηθέντων χρόνων και διερευνήστε τον ρόλο της επαναληπτικής μέτρησης στην εκτίμηση της πειραματικής αβεβαιότητας.
7. Μειώστε την απόσταση D κατά 20 cm, μετακινώντας συμμετρικά τις φωτοπύλες ως προς το x_1 , και επαναλάβετε τις μετρήσεις. Συνεχίστε μέχρι $D = 40$ cm. Τέλος, πραγματοποιήστε μια ακόμα πεντάδα μετρήσεων με τις φωτοπύλες στην ελάχιστη δυνατή απόσταση μεταξύ τους (μερικά εκατοστά).

Ανάλυση δεδομένων

1. Να εκτιμήσετε το σφάλμα της απόστασης των φωτοπυλών δD . Εξετάστε αν παραμένει σταθερό καθώς μειώνεται το D .
2. Για κάθε απόσταση D να υπολογίσετε: (α) το μέσο χρόνο διέλευσης με το αντίστοιχο σφάλμα ($t_{avg} \pm \delta t_{avg}$) και (β) τη μέση ταχύτητα του κινούμενου σώματος με το αντίστοιχο σφάλμα ($u_{avg} \pm \delta u_{avg}$), λαμβάνοντας υπόψη τα δD και δt_{avg} . Παρουσιάστε τα αποτελέσματα σε πίνακα.
3. Δημιουργήστε ένα γράφημα με τις πειραματικές μετρήσεις της μέσης ταχύτητας για διαφορετικές αποστάσεις των φωτοπυλών. Να απεικονίσετε τα σημεία με τα σφάλματά τους. Πώς μεταβάλλεται η αβεβαιότητα της $u_{avg}(D)$ καθώς μειώνεται η απόσταση D ;
4. Να σχεδιάσετε τη θεωρητική καμπύλη $u_{avg}(D)$ χρησιμοποιώντας τις τιμές των x_0 και x_1 καθώς και της επιτάχυνσης κατά την κάθοδο (Πείραμα 1) θεωρώντας μηδενική αρχική ταχύτητα. Πώς συγκρίνεται με τα πειραματικά δεδομένα; Ποια τιμή της $u_{avg}(D)$ προσεγγίζει καλύτερα τη στιγμιαία ταχύτητα του κινούμενου σώματος στο σημείο x_1 ;

Ερωτήσεις κατανόησης

Πείραμα 1

1. Μελετήστε τρεις διαφορετικές διατάξεις κίνησης σε κεκλιμένο επίπεδο: **(Α)** Ένα σώμα που ολισθαίνει στο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχετικό σχήμα της Θεωρίας. **(Β)** Ένα αμαξίδιο του οποίου οι τροχοί ολισθαίνουν (π.χ. λόγω πολύ λείας τροχιάς ή επειδή οι τροχοί είναι μπλοκαρισμένοι). **(Γ)** Ένα αμαξίδιο του οποίου οι τροχοί κυλίνουν χωρίς ολίσθηση. Θεωρήστε ότι οι τροχοί είναι άκαμπτοι.
 - a. Για κάθε διάταξη σχεδιάστε το διάνυσμα της τριβής στο/στα σημείο/α επαφής, χωριστά για άνοδο και κάθοδο. Ποιου τύπου τριβή δρα (κινητική ή στατική); Εξετάστε αν η φορά της τριβής μεταβάλλεται μεταξύ ανόδου και καθόδου. Σε ποιες διατάξεις αλλάζει φορά και σε ποιες παραμένει ίδια; Εξηγήστε τι καθορίζει τη φορά της τριβής σε κάθε περίπτωση: η **ταχύτητα** του σώματος ή η **επιτάχυνσή** του;
 - b. Σε κάθε διάταξη μετράμε το μέτρο της επιτάχυνσης σε άνοδο και κάθοδο και παίρνουμε τον μέσο όρο τους για να προσδιορίσουμε το g . Σε ποιες διατάξεις ο μέσος όρος των επιταχύνσεων οδηγεί στην τιμή $g \cdot \sin\phi$ και σε ποια όχι; Στις περιπτώσεις όπου υπάρχει απόκλιση, προς ποια κατεύθυνση μετατοπίζεται το αποτέλεσμα; Δηλαδή, ποιο είναι το πρόσημο του συστηματικού σφάλματος (**bias**) και ποια είναι η αιτία του;

Πείραμα 2

1. Δύο ομάδες πραγματοποίησαν το πείραμα υπό τις ίδιες συνθήκες, αλλά επέλεξαν διαφορετική θέση x_1 στο κεκλιμένο επίπεδο για τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας. Οι δύο ομάδες κατέληξαν σε διαφορετικές τιμές της στιγμιαίας ταχύτητας και θεώρησαν ότι κάποιο από τα αποτελέσματά τους ήταν λανθασμένο. Είναι βάσιμο αυτό το συμπέρασμα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Στον προσδιορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας ποιοι από τους παρακάτω παράγοντες επηρεάζουν την ακρίβεια στη μέτρηση: Η ακρίβεια του χρονομέτρου, το χρονομετρούμενο αντικείμενο ή το είδος της κίνησης;

Βιβλιογραφία

- 1.Εισαγωγή στη Θεωρία Σφαλμάτων, Εργαστήριο Φυσικής, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ).
- 2.D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Φυσική, τόμος Α': Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική, Εκδόσεις Gutenberg, 2021.
- 3.Κ. Φαράκος, Εισαγωγή στη Νευτώνεια Μηχανική, 4η έκδ., Εκδόσεις Τσότρας, 2023.
- 4.Logger Pro User's Manual, Version 2.1, Tufts University και Vernier Software & Technology.

A4. Μελέτη απλών ηλεκτρικών κυκλωμάτων συνεχούς

Σκοπός της άσκησης

Εξοικείωση με τις βασικές έννοιες του ηλεκτρισμού, με χρήση απλής οργανολογίας. Συγκεκριμένα θα διερευνηθεί η ισχύς του νόμου του Ohm, θα σχεδιαστούν συνδεσμολογίες προκειμένου να επαληθευθούν πειραματικά οι κανόνες του Kirchhoff και θα διερευνηθεί ο τρόπος που ένας πυκνωτής φορτίζεται ή εκφορτίζεται. Όλες οι μετρήσεις θα γίνουν με τη χρήση ψηφιακών πολυμέτρων.

Ο Νόμος του Ohm

Το υλικό ενός αγωγού (π.χ. ένα χάλκινο σύρμα) έχει τέτοια δομή σε ατομικό επίπεδο, ώστε κάποια από τα ηλεκτρόνια των ατόμων του να μπορούν να θεωρηθούν ελεύθερα, δηλαδή να μπορούν εύκολα να μετακινηθούν από άτομο σε άτομο. Η μετακίνηση αυτή λαμβάνει χώρα άτακτα (θερμική κίνηση) σε έναν απλό απομονωμένο αγωγό, ενώ, όταν εφαρμοστεί διαφορά δυναμικού στα άκρα του αγωγού, στην άτακτη θερμική κίνηση προστίθεται μια μικρή κατευθυνόμενη κίνηση των ηλεκτρονίων (κίνηση ολίσθησης). Η διαφορά αυτή δυναμικού ονομάζεται τάση και μετριέται σε V (volt). Το ρεύμα I που θα δημιουργηθεί από την οργανωμένη αυτή μετακίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων μετριέται σε A (ampere) και εκφράζει την ποσότητα φορτίου (των ελεύθερων ηλεκτρονίων) που διέρχεται από οποιαδήποτε διατομή του αγωγού στη μονάδα του χρόνου. Αλλάζοντας την τάση V , αλλάζει και το ρεύμα I , ακολουθώντας μια γραμμική σχέση της μορφής $I = (1/R)V$, όπου η ποσότητα R είναι η ηλεκτρική αντίσταση του συγκεκριμένου αγωγού. Για έναν ωμικό αγωγό και υπό σταθερές φυσικές συνθήκες, η R παραμένει σταθερή. Η αντίσταση εξαρτάται από το υλικό, τη γεωμετρία και τη θερμοκρασία του αγωγού. Για έναν ομογενή αγωγό σταθερής διατομής ισχύει $R = \rho L/A$, όπου ρ είναι η ειδική αντίσταση του υλικού. Η αντίσταση μετριέται σε Ω (ohm). $1\Omega = 1V/1A = 1V \cdot s/C$. Η παραπάνω γραμμική σχέση ονομάζεται νόμος του Ohm. Σε μη ωμικά στοιχεία η σχέση μεταξύ τάσης και ρεύματος δεν είναι γραμμική. Επομένως ο λόγος V/I δεν παραμένει σταθερός

και ο νόμος του Ohm με σταθερή αντίσταση R δεν ισχύει. Στην ορολογία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων είναι χρήσιμο να διακρίνουμε τον αντιστάτη από την ηλεκτρική αντίσταση. Ο αντιστάτης (resistor) είναι το ηλεκτρικό στοιχείο, ενώ η ηλεκτρική αντίσταση R είναι το φυσικό μέγεθος που χαρακτηρίζει το βαθμό στον οποίο το συγκεκριμένο στοιχείο περιορίζει τη διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος. Αντίθετα, η ειδική αντίσταση ρ είναι ιδιότητα του υλικού από το οποίο αποτελείται ο αγωγός. Η ιδιότητα αυτή οφείλεται κατ' ουσία στις συγκρούσεις των ελεύθερων ηλεκτρονίων με τα ιόντα του μεταλλικού πλέγματος τα οποία με τη σειρά τους δονούνται λόγω θερμοκρασίας. Η διεργασία αυτή μοιάζει με την ολίσθηση μιας μεταλλικής μπάλας (ανάλογη του φορέα φορτίου) σε ένα φλιπεράκι καθώς αυτή κατρακυλά σε ένα κεκλιμένο επίπεδο (η υψομετρική διαφορά είναι το ανάλογο της διαφοράς δυναμικού), αλλά προσκρούει σε εμπόδια στο δρόμο της που πάλλονται (κατ' αναλογία με τις θερμικές δονήσεις των ιόντων του αγωγού).

Κανόνες του Kirchhoff

Αν έχουμε κύκλωμα το οποίο αποτελείται από συνδυασμό αντιστάσεων, πηγών και πυκνωτών, αφού σημειώσουμε κατ' αρχήν αυθαίρετα τη φορά των ρευμάτων στο κύκλωμα, μπορούμε να υπολογίσουμε τα ρεύματα ή άλλα στοιχεία του κυκλώματος ακολουθώντας τους δύο Κανόνες του Kirchhoff, τον κανόνα των κόμβων και τον κανόνα των βρόχων:

1. Σύμφωνα με τον κανόνα των κόμβων¹, ο οποίος απορρέει από τον νόμο διατήρησης του φορτίου, το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων σε ένα κόμβο –θεωρώντας θετικά τα ρεύματα που έχουν φορά προς τον κόμβο και αρνητικά τα αντίθετα– ισούται με μηδέν.
2. Σύμφωνα με τον κανόνα των βρόχων², που εκφράζει τον νόμο διατήρησης της

¹ Στην παρούσα άσκηση ως κόμβο διακλάδωσης θα εννοούμε ένα σημείο στο οποίο συναντώνται τρεις ή περισσότεροι κλάδοι του κυκλώματος.

² Βρόχος θεωρείται οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή σε ένα κύκλωμα κατά μήκος της οποίας συναντάμε διάφορα στοιχεία του κυκλώματος (πηγές, αντιστάσεις κ.λπ.).

ενέργειας, το συνολικό αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών δυναμικού στα άκρα των στοιχείων, τα οποία συναντάμε κατά μήκος ενός κλειστού βρόχου ισούται με μηδέν, θεωρώντας ότι αν κατά την φορά που διατρέχουμε τον βρόχο:

- συναντήσουμε κάποια αντίσταση R , η οποία διαρρέεται με ρεύμα I με φορά, αυτήν της διαδρομής, η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης λαμβάνεται ως $-IR$, ενώ αν η φορά του ρεύματος είναι αντίθετη της διαδρομής, η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης λαμβάνεται ως $+IR$,
- συναντήσουμε κάποια πηγή τάσης (ή φορτισμένο πυκνωτή με τάση V στα άκρα του), έτσι ώστε κατά τη φορά που διατρέχουμε τη διαδρομή μεταβαίνουμε από το αρνητικό στο θετικό άκρο του στοιχείου, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του στοιχείου λαμβάνεται ως $+$ (δηλ. $+V$), ενώ στην αντίθετη περίπτωση η διαφορά δυναμικού στα άκρα του στοιχείου λαμβάνεται ως $-$ (δηλ. $-V$).

Γράφοντας κατάλληλο αριθμό ανεξάρτητων εξισώσεων από τους κανόνες του Kirchhoff και τις σχέσεις τάσης–ρεύματος των επιμέρους στοιχείων, σχηματίζουμε ένα σύστημα με τόσες ανεξάρτητες εξισώσεις όσοι είναι οι άγνωστοι. Οι φορές των ρευμάτων των κλάδων επιλέγονται αρχικά αυθαίρετα. Αν από τη λύση προκύψει αρνητική τιμή για κάποιο ρεύμα, αυτό σημαίνει ότι η πραγματική του φορά είναι αντίθετη από τη φορά αναφοράς που είχαμε επιλέξει.

Σύνθεση αντιστάσεων

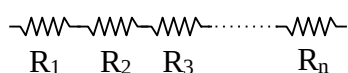
Συνήθως στα ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά κυκλώματα υπάρχουν αντιστάσεις που συνδέονται με διάφορους τρόπους μεταξύ τους. Βασιζόμενοι στους παραπάνω κανόνες του Kirchhoff μπορούμε να υπολογίσουμε την ισοδύναμη αντίσταση σε μια ορισμένη συνδεσμολογία αντιστάσεων. Σε κατάλληλες συνδεσμολογίες αντιστάσεων μπορούμε να αντικαταστήσουμε δύο ή και περισσότερες αντιστάσεις με μία ισοδύναμη αντίσταση, δηλαδή με μία αντίσταση της οποίας η επίδραση στο κύκλωμα θα είναι ίδια με την επίδραση των αντιστάσεων τις οποίες αντικαθιστούμε.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

Σε σειρά

n αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά δηλαδή όπως το ακόλουθο σχήμα, διερχόμενες όλες από το ίδιο ρεύμα, παρουσιάζουν ολική ισοδύναμη αντίσταση $R_{ολ}$:

$$R_{ολ} = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (1)$$

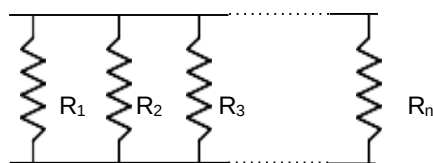


Σχ. 1: Συνδεσμολογία αντιστάσεων σε σειρά.

Παράλληλα

n αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα δηλαδή όπως το ακόλουθο σχήμα, τοποθετημένες έτσι ώστε να έχουν κοινή διαφορά δυναμικού στα άκρα τους, παρουσιάζουν ολική ισοδύναμη αντίσταση $R_{ολ}$:

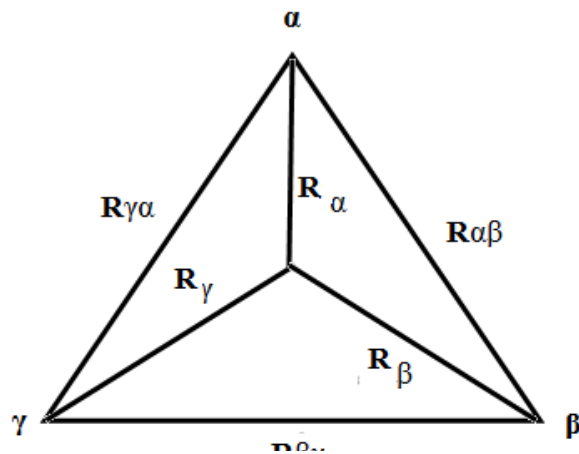
$$1/R_{ολ} = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n. \quad (2)$$



Σχήμα 2: Συνδεσμολογία αντιστάσεων παράλληλα.

Άλλου είδους σύνδεση αντιστάσεων

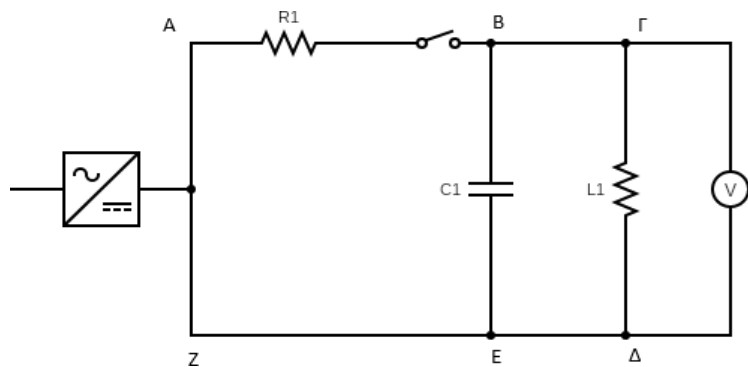
Οι επιμέρους αντιστάσεις μπορεί να είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε οποιοδήποτε ζευγάρι από αυτές ούτε να διαρρέονται από κοινό ρεύμα (σύνδεση σε σειρά) ούτε να έχουν κοινή τάση στα άκρα τους (παράλληλη σύνδεση), βλ. Σχ. 3. Αυτό συμβαίνει όταν στους ενδιάμεσους κόμβους υπάρχουν διακλαδώσεις και τα στοιχεία δεν συνδέονται ανά ζεύγη στους ίδιους δύο κόμβους. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη έκφραση που να δίνει την ισοδύναμη αντίσταση της συνδεσμολογίας και πρέπει να γίνει χρήση των κανόνων του Kirchhoff για το συγκεκριμένο κύκλωμα προκειμένου να προσδιοριστεί αυτή.



Σχήμα 3: Συνδεσμολογία αντιστάσεων άλλου είδους (καμία από τις 6 αντιστάσεις δεν είναι συνδεδεμένη με κάποια άλλη παράλληλα (ώστε να έχουν κοινή τάση), αλλά ούτε και σε σειρά (ώστε να διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα)).

Φόρτιση/Εκφόρτιση πυκνωτή

Ο πυκνωτής είναι μια απλή ηλεκτρική διάταξη που αποτελείται από δύο αγωγούς, μονωμένους τον έναν απ' τον άλλο με τη βοήθεια κάποιου μονωτικού (μη αγωγίμου) υλικού. Εφόσον οι αγωγοί δεν συνδέονται μεταξύ τους θα ανέμενε κανείς ότι ένας πυκνωτής δεν θα διαρρεόταν από ρεύμα αν δημιουργούσαμε μια διαφορά δυναμικού στα άκρα του, τους δύο, δηλαδή,



Σχ. 4: Διάταξη φόρτισης/εκφόρτισης πυκνωτή.

αγωγούς που ονομάζονται οπλισμοί του πυκνωτή. Σε έναν ιδανικό πυκνωτή δεν υπάρχει αγωγίμο ρεύμα μέσω του μονωτικού υλικού μεταξύ των οπλισμών. Κατά τη φόρτιση και την εκφόρτιση, όμως, υπάρχει ρεύμα στους ακροδέκτες του πυκνωτή. Έτσι, κατά τη διάρκεια «γεμίσματος» των δύο οπλισμών του με αντίθετα φορτία, το κύκλωμα που περιλαμβάνει τον πυκνωτή διαρρέεται από ένα χρονομεταβαλλόμενο ρεύμα. Σε μόνιμη κατάσταση συνεχούς τάσης το ρεύμα του ιδανικού πυκνωτή μηδενίζεται. Η τελική τάση στα άκρα του εξαρ-

τάται απ' το κύκλωμα στο οποίο είναι συνδεδεμένος. Ένας πυκνωτής χαρακτηρίζεται από τη χωρητικότητά του C , η οποία ορίζεται ως ο λόγος του μέτρου του φορτίου Q σε έναν από τους δύο οπλισμούς προς τη διαφορά δυναμικού V μεταξύ των δύο οπλισμών:

$$C = Q/V \quad (3)$$

Η χωρητικότητα μετριέται σε Farad (F). $1F = 1C/1V$ και είναι εξαιρετικά μεγάλη μονάδα. Οι συνήθεις πυκνωτές έχουν χωρητικότητα στο εύρος nF ($10^{-9} F$) ως μF ($10^{-6} F$).

Φανταστείτε για παράδειγμα το κύκλωμα του παραπάνω σχήματος. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος $q(0) = 0$, οπότε αντιστοίχως είναι $V_C(0) = 0$. Μόλις κλείσουμε τον διακόπτη, ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται μέσω τροφοδοτικού συνεχούς τάσης E (AC/DC converter), ενώ ταυτόχρονα η αντίσταση R που συνδέεται παράλληλα με τον πυκνωτή διαρρέεται από ρεύμα και μάλιστα μεταβαλλόμενο αφού ο πυκνωτής που φορτίζεται έχει την ίδια τάση με την αντίσταση αυτή. Με εφαρμογή του 2ου κανόνα του Kirchhoff στον βρόχο ABEZA θα είναι:

$$E - I R_1 - V_C = 0 \Rightarrow E - \frac{dQ(t)}{dt} R_1 - \frac{q(t)}{C} = 0. \quad (4)$$

Έστω $Q(t)$ το συνολικό φορτίο που έχει διέλθει από τον κλάδο AB μέχρι τη χρονική στιγμή t και $q(t)$ το φορτίο του πυκνωτή. Η ροή αυτών των δύο φορτίων δεν συμπίπτει αφού μέρος του ρεύματος $d(Q(t))/dt$ το οποίο διαρρέει τον κλάδο AB θα διατρέξει τον κλάδο BΓΔΕ που περιλαμβάνει την αντίσταση R , αλλά οι δύο αυτές ροές (ρεύματα) μπορούν να συσχετιστούν μέσω του 1ου κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο B. Με συνδυασμό της παραπάνω σχέσης με την εξίσωση του βρόχου προκύπτει διαφορική εξίσωση ως προς $q(t)$, με τη λύση της οποίας δεν θα ασχοληθούμε εδώ, αφού γνωρίζουμε πως πρακτικά μετά από κάποιο χρονικό διάστημα ο πυκνωτής θα έχει φορτιστεί με

$V_C(\infty) = E \cdot R_{L1} / (R_{L1} + R_1)$ και ο κλάδος του πυκνωτή BE θα πάψει να διαρρέεται στη συνέχεια από κάποιο ρεύμα.

Αν στη συνέχεια ανοίξουμε το διακόπτη, το κομμάτι EZAB θα «βγει» εκτός κυκλώματος και ο πυκνωτής θα μείνει συνδεδεμένος απλώς με την αντίσταση R . Έτσι ο 2ος κανόνας του Kirchhoff γι' αυτό το απλό εναπομένον κύκλωμα BΓΔΕB θα μπορεί να λάβει τη μορφή:

$$V_C + i R = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} R = 0 \quad (5)$$

που με μια απλή αναδιάταξη όρων καταλήγει στη διαχωρισμένη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \quad (6)$$

η οποία με τη σειρά της με ολοκλήρωση καταλήγει στην

$$\int_{q(0)}^{q(t)} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \left(\frac{q(t)}{q(0)} \right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow q(t) = q(0)e^{-t/(RC)} \quad (7)$$

Μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε και την εξέλιξη της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q(0)}{C} e^{-t/(RC)} \quad (8)$$

Η ποσότητα $q(0)/C$ αντιπροσωπεύει την αρχική τάση του πυκνωτή. Οπότε γνωρίζουμε πως ο πυκνωτής εκφορτίζεται σύμφωνα με το εκθετικό νόμο:

$$V_C(t) = V_C(0)e^{-t/(RC)}. \quad (9)$$

Η σταθερά $\tau = RC$ έχει μονάδες χρόνου, ονομάζεται σταθερά χρόνου του κυκλώματος $R-C$ και χαρακτηρίζει τη χρονική κλίμακα που διέπει το φαινόμενο της εκφόρτισης. Για $t = \tau = RC$, το φορτίο και η τάση του πυκνωτή έχουν μειωθεί στο $1/e \approx 36.8\%$ των αρχικών τους τιμών.

Πειραματική διαδικασία

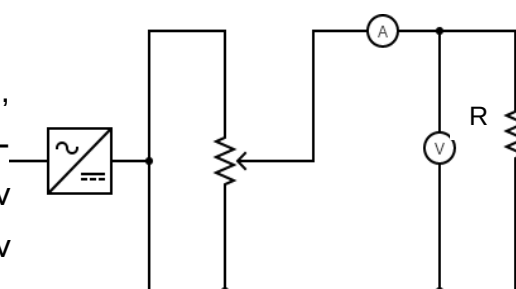
Στον πάγκο εργασίας σας θα βρείτε ένα τροφοδοτικό (220V AC $\rightarrow$ 3-12 V DC) με επιλογή τάσεων εξόδου, πολύμετρα (που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βολτόμετρα, ως αμπερόμετρα ή ως ωμόμετρα ρυθμίζοντας αναλόγως τον επιλογέα της κλίμακας που μας ενδιαφέρει), καλώδια, καθώς και μια πλακέτα που περιλαμβάνει, μια μεταβλητή αντίσταση 0-1000Ω, διάφορες άλλες αντιστάσεις R_1 , R_2 , L_1 , καθώς και έναν πυκνωτή C . Όλα τα παραπάνω στοιχεία φέρουν στα άκρα τους υποδοχείς καλωδίων, ώστε να μπορείτε να τα

συνδέσετε σχηματίζοντας ένα κύκλωμα. Για πρακτικούς λόγους μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κόκκινους ακροδέκτες στο θετικό άκρο του τροφοδοτικού και μαύρους στο αρνητικό. Σε όλες τις μετρήσεις που θα εκτελέσετε οι τάσεις που θα μετρηθούν είναι τάξης μερικών V και τα ρεύματα μερικών δεκάδων mA . Θα πρέπει να προσέχετε ώστε τα μεν βολτόμετρα να συνδέονται παράλληλα με τον κλάδο στα άκρα του οποίου επιθυμείτε να μετρήσετε την τάση, ενώ τα αμπερόμετρα σε σειρά με τον κλάδο του οποίου επιθυμείτε να μετρήσετε την ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει.

Πείραμα 1

Επαλήθευση του νόμου του Ohm

1. Πραγματοποιούμε τη συνδεσμολογία του Σχ. 5, επιλέγοντας μια από τις αντιστάσεις της πλακέτας ως την αντίσταση R του κυκλώματος. Το μεν βολτόμετρο είναι συνδεδεμένο παράλληλα με την αντίσταση, ενώ το αμπερόμετρο είναι συνδεδεμένο σε σειρά με το κομμάτι του κυκλώματος που περιλαμβάνει το βολτόμετρο και την αντίσταση³ . Σκοπός είναι



Σχ. 5: Διάταξη Πειράματος 1

η μέτρηση της αντίστασης R μέσω εφαρμογής του νόμου του Ohm. Ρυθμίζουμε το τροφοδοτικό σε συνεχή τάση εξόδου 12 V.

2. Ρυθμίζουμε την μεταβλητή αντίσταση ώστε να έχουμε μια σειρά από 10 διαφορετικές μετρήσεις της τάσης V , και αντιστοίχως του ρεύματος I , φροντίζοντας να καλύψουμε όσο γίνεται πιο ομοιόμορφα ολόκληρο το εύρος των δυνατών μετρούμενων τάσεων.

3. Βάσει των μετρήσεων, μαζί με τα αντίστοιχα σφάλματα, σχεδιάζουμε ένα γράφημα της καμπύλης $I = f(V)$.

4. Εκτιμήστε, από την κλίση της αντίστοιχης ευθείας ελαχίστων τετραγώνων, την αντίσταση R .

5. Χρησιμοποιώντας ένα πολύμετρο, ως ωμόμετρο, μετρήστε την αντίσταση R , έχοντας φροντίσει να την αποσυνδέσετε από το κύκλωμα της προηγούμενης συνδεσμολογίας.

6. Συγκρίνετε τις δύο παραπάνω τιμές της R .

7. Ποια είναι η ονομαστική τιμή της R βάσει του χρωματικού της κώδικα;

³ Εναλλακτικά, θα μπορούσε να συνδεθεί το αμπερόμετρο σε σειρά απευθείας με την αντίσταση R και το βολτόμετρο να συνδεθεί παράλληλα στα άκρα του κλάδου με την αντίσταση και το αμπερόμετρο (βλ. ερωτήσεις 5,6).

Πείραμα 2

Επαλήθευση του 1ου και 2ου κανόνα Kirchhoff

1. Πραγματοποιούμε είτε τη συνδεσμολογία του Σχ. 6α είτε αυτήν του Σχ. 6β. Ο υπεύθυνος της άσκησης θα σας υποδείξει ποια συνδεσμολογία να κατασκευάσετε.

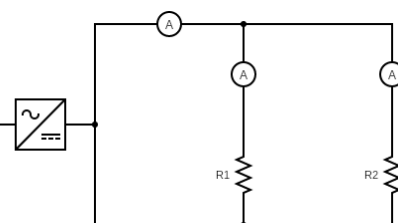
2. Αν επιλέξετε τη συνδεσμολογία του Σχ. 6α:

Τα αμπερόμετρα A_1 , A_2 είναι συνδεδεμένα σε σειρά με την κάθε μία αντίσταση, ενώ το αμπερόμετρο A_0 είναι συνδεδεμένο σε σειρά με το κομμάτι του κυκλώματος που περιλαμβάνει τις δύο αντιστάσεις και τα αμπερόμετρα A_1 , A_2 .

- Μετρήστε τις ενδείξεις των τριών αμπερομέτρων A_0 , A_1 , A_2 και ελέγξτε αν ισχύει ο 1ος κανόνας του Kirchhoff.

- Υπολογίστε τη διαφορά $A_0 - (A_1 + A_2)$ και το σφάλμα αυτής. Πόσο θα έπρεπε θεωρητικά να είναι αυτή;

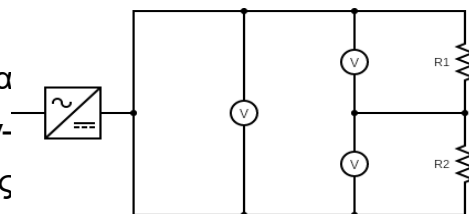
- Αφού πρώτα αποσυνδέσετε από το κύκλωμα το τροφοδοτικό, αποσυνδέστε και τις δύο αντιστάσεις R_1 , R_2 , από το κύκλωμα και μετρήστε την κάθε μια αντίσταση ξεχωριστά καθώς και την ολική αντίσταση των δύο, όταν αυτές είναι συνδεδεμένες όπως στο Σχήμα (τα αμπερόμετρα θεωρούνται πως έχουν μηδενική εσωτερική αντίσταση, οπότε μπορείτε να αγνοήσετε την παρουσία τους θεωρώντας ότι οι ακροδέκτες τους είναι απλώς συνδεδεμένοι με σύρμα μηδενικής αντίστασης).



Σχ. 6α: Διάταξη Πειράματος 2α

Αν επιλέξετε τη συνδεσμολογία του Σχ. 6β:

Τώρα τα βολτόμετρα V_1 , V_2 είναι συνδεδεμένα παράλληλα με την κάθε μία αντίσταση, ενώ το βολτόμετρο V_0 είναι συνδεδεμένο παράλληλα με όλο το κομμάτι του κυκλώματος που περιλαμβάνει τις δύο αντιστάσεις και τα βολτόμετρα V_1 , V_2 .



Σχ. 6β: Διάταξη Πειράματος 2β

- Μετρήστε τις ενδείξεις των τριών βολτομέτρων V_0 , V_1 , V_2 και ελέγξτε αν ισχύει ο 2ος κανόνας του Kirchhoff.

- Υπολογίστε τη διαφορά $V_0 - (V_1 + V_2)$ και το σφάλμα αυτής. Πόσο θα έπρεπε θεωρητικά να είναι η διαφορά αυτή;

- Αφού πρώτα αποσυνδέσετε από το κύκλωμα το τροφοδοτικό, αποσυνδέστε τις δύο αντιστάσεις R_1 , R_2 , από το κύκλωμα και μετρήστε την κάθε μια αντίσταση ξεχωριστά καθώς και την ολική αντίσταση των δύο, όταν αυτές είναι συνδεδεμένες όπως στα αντίστοιχα σχήματα (τα βολτόμετρα θεωρούνται πως έχουν άπειρη εσωτερική αντίσταση, οπότε μπορείτε να αγνοήσετε εντελώς την παρουσία τους).

Πείραμα 3

Εκφόρτιση πυκνωτή

1. Πραγματοποιούμε το κύκλωμα του Σχ. 4, χρησιμοποιώντας τον πυκνωτή C και την αντίσταση που στην πλακέτα αναφέρεται ως L_1 . **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Φροντίστε ο πυκνωτής να είναι συνδεδεμένος ώστε να φορτιστεί με τη σωστή πολικότητα (το $-$ του πυκνωτή να είναι συνδεδεμένο με τον ακροδέκτη που συνδέεται με τον αρνητικό πόλο του τροφοδοτικού). Ως R_1 στο κύκλωμα φόρτισης χρησιμοποιήστε οποιαδήποτε από τις αντιστάσεις που στην πλακέτα αναγράφονται ως R_1 ή R_2 .
2. Φροντίστε το σημείο B του κυκλώματος να είναι συνδεδεμένο με τέτοιο τρόπο ώστε το κομμάτι του κυκλώματος με τον πυκνωτή, την αντίσταση L_1 και το βολτόμετρο, να μπορεί να αποσυνδεθεί από το υπόλοιπο κύκλωμα.
3. Μόλις η τάση στα άκρα του πυκνωτή φτάσει πλησίον των $9V$ (αυτό θα συμβεί αρκετά γρήγορα αφού εκτελέσετε τη συνδεσμολογία), μετρήστε αυτή την τάση και ξεκινώντας το χρονόμετρο ταυτόχρονα με την αποσύνδεση του σημείου B , αρχίστε να μετράτε και να καταγράφετε την τάση του πυκνωτή κάθε $30s$ για 10 συνεχή λεπτά (20 μετρήσεις).
4. Σχεδιάστε την καμπύλη $\ln[V(t)/V(0)]$ ως συνάρτηση του χρόνου t .
5. Με εφαρμογή των σχέσεων της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων εκτιμήστε τη σταθερά χρόνου RC από την κλίση της ευθείας, και μετά από μέτρηση με ωμόμετρο της αντίστασης $R = R_{L1}$, υπολογίστε τη χωρητικότητα του πυκνωτή C . (Μπορείτε να αγνοήσετε την αντίσταση του βολτομέτρου καθώς αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίσταση R .)

Ερωτήσεις

1. Με χρήση των κανόνων του Kirchhoff αποδείξτε τις εξισώσεις των σύνθετων αντιστάσεων (1) και (2).
2. Πώς επηρεάζει η επιλογή της αντίστασης R_1 στο κύκλωμα του (Σχ. 4α) την τελική τάση $V_C(\infty)$ και (β) τη σταθερά χρόνου φόρτισης του πυκνωτή;
3. Δείξτε ότι η σταθερά χρόνου $\tau = RC$ έχει διαστάσεις χρόνου αντικαθιστώντας τις μονάδες χωρητικότητας και αντίστασης βάσει του ορισμού των αντίστοιχων ποσοτήτων.
4. Να επαληθεύσετε με απευθείας αντικατάσταση ότι η εξίσωση (5) αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης (4).
5. Συγκρίνετε τη συνδεσμολογία του Σχ. 6 με αυτήν που θα είχαμε αν το αμπερόμετρο συνδεόταν σε σειρά με την αντίσταση και στη συνέχεια το βολτόμετρο συνδεόταν παράλληλα στο κομμάτι του κυκλώματος που θα αφορούσε το αμπερόμετρο και την αντί-

σταση. Εξηγήστε ποιο από τα δύο όργανα στην κάθε μία από τις δύο προαναφερθείσες συνδεσμολογίες δεν μετράει ακριβώς το ρεύμα ή την τάση της αντίστασης. Εκτιμήστε το λάθος που γίνεται σε κάθε μία από τις δύο συνδεσμολογίες κατά τον υπολογισμό της αντίστασης R μέσω της χρήσης των ενδείξεων των δύο οργάνων και την εφαρμογή του νόμου του Ohm.

6. Αν μια αντίσταση είναι $R = 1 \text{ k}\Omega$ και χρησιμοποιηθεί η συνδεσμολογία του Σχ. 6 υπολογίστε το λάθος της μέτρησης αυτής αν η αντίσταση του βολτομέτρου είναι $R_v = 2 \text{ M}\Omega$. Αντίστοιχα, αν χρησιμοποιηθεί η εναλλακτική συνδεσμολογία που περιγράφηκε στο ερώτημα 5 (και στην υποσημείωση 4) για την μέτρηση της ίδιας αντίστασης μέσω του νόμου του Ohm, εκτιμήστε την απόλυτη και τη σχετική (%) απόκλιση της μετρούμενης τιμής R από την πραγματική τιμή, αν η αντίσταση του αμπερομέτρου είναι $R_A = 1 \Omega$.

Βιβλιογραφία

1. R. A. Serway, J. W. Jewett, Φυσική για Επιστήμονες και Μηχανικούς, σχετικές ενότητες για τον νόμο του Ohm, τους νόμους του Kirchhoff και τη φόρτιση και εκφόρτιση πυκνωτή.
2. R. Alonso, E. J. Finn, Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική, σχετικές ενότητες για τον νόμο του Ohm, τους νόμους του Kirchhoff και τη φόρτιση και εκφόρτιση πυκνωτή.
3. Φυσική Β΄ Λυκείου – Γενικής Παιδείας, Ν. Αλεξάκης κ.ά., ΙΤΥΕ «Διόφαντος», κεφ. 1 και κεφ. 2.
4. Wikipedia, Ohm's Law, διαδικτυακό άρθρο.

Α5. Μετρήσεις διαστάσεων σωμάτων - Υπολογισμός πυκνότητας και άνωσης

Σκοπός της άσκησης

Θα μελετηθεί το φαινόμενο της άνωσης σώματος που είναι βυθισμένο μερικώς ή πλήρως μέσα σε υγρό. Προκειμένου να ολοκληρωθεί η μελέτη θα απαιτηθεί η μέτρηση όγκων και μέσω αυτών θα γίνει ο υπολογισμός της πυκνότητας υλικών. Η ακριβής μέτρηση των διαστάσεων θα πραγματοποιηθεί με τη χρήση παχυμέτρου και μικρομέτρου. Από τις μετρούμενες διαστάσεις θα υπολογιστούν οι όγκοι των σωμάτων.

Στοιχεία από τη θεωρία

Πυκνότητα υλικού

Τα διάφορα υλικά, ανεξαρτήτως αν πρόκειται για στερεά, υγρά, ή αέρια χαρακτηρίζονται από διαφορετική πυκνότητα δηλαδή από διαφορετική αναλογία μάζας προς όγκο:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

Αν ένα υλικό δεν είναι ομοιογενές, αλλά αποτελείται από άλλα υλικά υπό μορφή μίγματος, η πυκνότητα ενδέχεται να μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο αυτού. Στην περίπτωση αυτή η τοπική πυκνότητα αλλάζει εντός του υλικού και μπορεί να οριστεί σε διαφορετική μορφή σε κάποιο σημείο $\vec{x}$ εντός του υλικού ως

$$\rho(\vec{x}) = \frac{dm(\vec{x})}{dV} \quad (2)$$

Αν μετρήσουμε τη μάζα κάποιων αντικειμένων που αποτελούνται από ένα δεδομένο υλικό, τότε αυτή θα είναι ανάλογη του όγκου του εκάστοτε αντικειμένου, με συντελεστή αναλογίας την πυκνότητα του εν λόγω υλικού:

$$m = \rho V \quad (3)$$

Αν πρόκειται για αντικείμενα από διαφορετικά υλικά τότε στο διάγραμμα $m(V)$, τα αντικείμενα διαφορετικών υλικών θα βρίσκονται σε ευθείες διαφορετικής κλίσης (λόγω διαφορετικής πυκνότητας).

Ο νόμος του Αρχιμήδη για την άνωση

Όταν ένα στερεό σώμα βυθιστεί μέσα σε υγρό (στην περίπτωση μας νερό) τότε δέχεται δυνάμεις πίεσης σε ολόκληρη την επιφάνειά του (βλ. Σχ. 1), η συνισταμένη των οποίων κατευθύνεται προς τα άνω και ισούται με το βάρος του υγρού το οποίο εκτοπίζει το σώμα καθώς αυτό βυθίζεται στο υγρό.

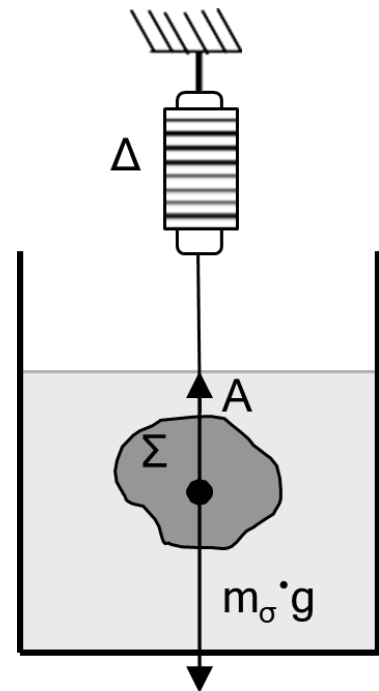
$$\vec{A} = \hat{z} \rho_v g V = \hat{z} \rho_v g V_{\beta v \theta} \quad (4)$$

Η δύναμη αυτή ονομάζεται άνωση και προκύπτει ως η συνισταμένη των υδροστατικών πιέσεων που ασκούνται στα τοιχώματα του αντικειμένου. Η υδροστατική πίεση του υγρού αυξάνεται με το βάθος. Κατ' ουσίαν, η άνωση έχει ως προέλευση τη δύναμη της βαρύτητας που ασκείται στο υγρό από τη Γη το οποίο με τη σειρά του πιέζει τα τοιχώματα του βυθισμένου αντικειμένου.

Το γιατί η δύναμη της άνωσης δίνεται από την παραπάνω έκφραση και έχει πάντα κατεύθυνση προς τα άνω μπορεί να εξηγηθεί με το ακόλουθο επιχείρημα. Σε βάθος h η υδροστατική πίεση ισούται με $p = \rho_v g h$ και μετράει το βάρος της υπερκείμενης στήλης υγρού $B = \rho_v g V$ ανά μονάδα επιφάνειας, δηλαδή της διατομής της στήλης S . Έτσι εφόσον $V = h S$, θα είναι $p = B/S = \rho_v g h$. Αν από το βυθισμένο στερεό αντικείμενο αποκόψουμε μια μικροσκοπική (μικρής διατομής δS) κατακόρυφη στήλη, τότε οι κατακόρυφες δυνάμεις που ασκούνται στο άνω και το κάτω άκρο της στήλης έχουν συνισταμένη

$$(p_{\text{κάτ}} \delta S - p_{\text{άνω}} \delta S) \hat{z} = \rho_v g (H_{\text{κάτ}} - H_{\text{άνω}}) \delta S \hat{z} = \rho_v g \delta V \hat{z}, \quad (5)$$

όπου $\delta V = H \delta S$ ο όγκος της προαναφερθείσας στήλης. Αν λάβουμε υπόψη ότι οι κάτω και άνω βάσεις της στήλης ενδέχεται να είναι λοξές (όχι οριζόντιες) και επομένως όχι ίσες με δS , η εκάστοτε κατακόρυφη δύναμη ισούται με την προβολή της δύναμης πίεσης $p \delta S_{\text{λοξ}}$ στον κατακόρυφο άξονα. Όμως $\delta S_{\text{λοξ}} \cos \varphi = \delta S$ (βλ. Σχ. 2). Οι δε οριζόντιες συνιστώσες των δυ-



Σχήμα 1: Όταν ένα στερεό σώμα βυθίζεται σε υγρό δέχεται από αυτό άνωση ανάλογη του όγκου του βυθιζόμενου σώματος.

νάμεων πίεσης αλληλοαναιρούνται από όλες τις στοιχειώδεις επιφάνειες που βρίσκονται στο ίδιο βάθος.

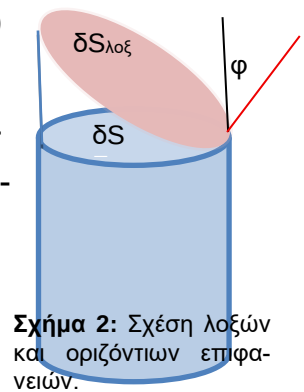
Ως εκ τούτου η συνισταμένη όλων των δυνάμεων πίεσης είναι κατακόρυφη και ισούται με το άθροισμα όλων των κατακόρυφων δυνάμεων των επί μέρους στηλών, δηλαδή

$$\vec{A} = \hat{z} \rho_v g V_{\beta v \theta}$$

(6)

Προφανώς αν το σώμα είναι μισοβυθισμένο, η άνωση οφείλεται της δυνάμεις πίεσης μόνο στην παράπλευρη (βρεχόμενη) και την κάτω επιφάνεια του σώματος. Ο αντίστοιχος όγκος που δίνει την άνωση σχετίζεται με τον όγκο του μέρους του σώματος που είναι βυθισμένο στο υγρό.

Η άνωση εξηγεί την πλευστότητα των θαλάσσιων σκαφών, ακόμη και αυτών που είναι πολύ βαριά και κατασκευάζονται κυρίως από μέταλλο. Το βάρος του σκάφους οφείλεται στη συνολική μάζα των τοιχωμάτων του και των αντικειμένων που βρίσκονται στο εσωτερικό του, ενώ η άνωση είναι ίση με το βάρος του νερού που εκτοπίζεται από το βυθισμένο τμήμα του σκάφους. Αν και η πυκνότητα του μετάλλου είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτή του νερού, ο όγκος του σκάφους είναι πολύ μεγαλύτερος από τον όγκο του μετάλλου από το οποίο είναι κατασκευασμένο, με αποτέλεσμα η μέση πυκνότητά του να μπορεί να είναι μικρότερη από την πυκνότητα του νερού. Μια επιπλέον παράμετρος που σχετίζεται με την ευστάθεια του σκάφους είναι η ροπή που δημιουργούν οι δυνάμεις του βάρους και της άνωσης όταν το σκάφος αποκλίνει από τη θέση ισορροπίας του. Για να είναι το σκάφος ευσταθές, η ροπή αυτή πρέπει να τείνει να το επαναφέρει στη θέση ισορροπίας, με την καρίνα προσανατολισμένη της τα κάτω. Η διατήρηση του κέντρου βάρους αρκετά χαμηλά συμβάλλει στη δημιουργία της της ροπής επαναφοράς. Αυτό επιτυγχάνεται, μεταξύ άλλων, με την τοποθέτηση των μεγαλύτερων μαζών του σκάφους όσο το δυνατόν χαμηλότερα.



Σχήμα 2: Σχέση λοξών και οριζόντιων επιφανειών.

Πειραματική Διάταξη

Στον πάγκο εργασίας θα βρείτε σετ διαφόρων κυλίνδρων με διαφορετικά μεγέθη, παχύμετρο, ζυγό, ογκομετρικό σωλήνα, μεταλλικό κύλινδρο αναρτημένο από σύρμα, πτυσσόμενη βάση ζυγού.

Βερνιέρος



Σχήμα 3: Ένα παχύμετρο και λεπτομέρεια του βερνιέρου του.

Μια πολύ ευφυής μέθοδος για την μέτρηση μηκών με πολύ μεγάλη ακρίβεια, αρκετά μεγαλύτερη από εκείνη που μπορεί κανείς να διακρίνει με γυμνό μάτι, είναι ο βερνιέρος που υπάρχει στα κινητά μέρη των παχύμετρων και ορισμένα είδη μικρόμετρων, δηλαδή στα μηχανικά όργανα που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση μικρών, σχετικά, μηκών, παχών και ανοιγμάτων. Ο βερνιέρος αποτελεί μια δεύτερη κλίμακα προσαρμοσμένη στο κινητό μέρος του οργάνου με αποστάσεις μεταξύ των διαδοχικών του ενδείξεων που δεν ταιριάζουν ακριβώς με τις αποστάσεις μεταξύ των ενδείξεων της κύριας κλίμακας οι οποίες αντιστοιχούν σε πραγματικές αποστάσεις (π.χ. χιλιοστόμετρα). Οι ενδείξεις (χαραγές) της κινητής κλίμακας είναι έτσι φτιαγμένες ώστε μόνο μια εξ αυτών να ταιριάζει με μια από τις ενδείξεις της κύριας κλίμακας. Η συγκεκριμένη ένδειξη της κινητής κλίμακας υποδεικνύει το κλάσμα της πραγματικής θέσης μεταξύ των δύο διαδοχικών ενδείξεων της κύριας κλίμακας στις οποίες βρίσκεται η ένδειξη «0» της κινητής κλίμακας. Έτσι, για παράδειγμα στο Σχ. 3 (δεξιά), διακρίνεται το κλάσμα 0.35 που αντιστοιχεί στην ένδειξη 3.5 της κινητής κλίμακας που ταιριάζει καλύτερα από οποιαδήποτε άλλη σε κάποια ένδειξη της κύριας κλίμακας. Εφόσον το «0» της κινητής κλίμακας βρίσκεται μεταξύ των ενδείξεων 27 και 28 mm, το μήκος που έχει μετρήσει το παχύμετρο είναι 27,35 mm. Η διακριτική ικανότητα του συγκεκριμένου παχύμετρου είναι 1/20 mm, πολύ μικρότερη δηλαδή από την υποδιάρθρωση 1 mm της κύριας κλίμακας. Αντίστοιχα, στο Σχ. 4 (δεξιά) φαίνεται η μέτρηση με ένα μικρόμετρο, όπου στην περίπτωση αυτή η κινη-

τή κλίμακα είναι κοχλιωτά περιστρεφόμενη μπροστά από την κύρια κλίμακα στην οποία εμφανίζονται ενδείξεις (χαραγές) ανά μισό mm. Η ένδειξη της περιστρεφόμενης κλίμακας, η οποία συμπίπτει με την κεντρική χαραγή της κύριας κλίμακας, δείχνει το επιπλέον κλάσμα του μισού χιλιοστού που πρέπει να προστεθεί στην τελευταία ένδειξη της κύριας κλίμακας. Στη λεπτομέρεια που φαίνεται η τελευταία ένδειξη της σταθερής κλίμακας αντιστοιχεί σε 6.5 mm και η ένδειξη της κινητής κλίμακας αντιστοιχεί στο κλάσμα 15/50 του μισού χιλιοστού. Έτσι η μέτρησή του ισοδυναμεί με $6.50 + (15/50) \times 0.50\text{mm} = 6.65\text{mm}$.



Σχήμα 4: Ένα μικρόμετρο και λεπτομέρεια των κλιμάκων του

Το μικρόμετρο θα το χρησιμοποιήσετε για να εξοικειωθείτε με την ανάγνωση των κλιμάκων του μικρομέτρου, μετρώντας το πάχος διάφορων καθημερινών αντικειμένων. Έχοντας εξοικειωθεί με την ανάγνωση των οργάνων, θα χρησιμοποιήσετε το παχύμετρο για να μετρήσετε τις διαμέτρους και τα ύψη των διαφόρων κυλίνδρων που υπάρχουν στον πάγκο εργασίας, προκειμένου να υπολογίσετε τον όγκο αυτών και στη συνέχεια μέσω αυτού την πυκνότητα του υλικού από το οποίο αποτελείται ο καθένας εξ αυτών.

Ζυγός

Στο εργαστήριο θα χρησιμοποιήσετε ηλεκτρονικό ζυγό με διακριτική ικανότητα 0.01 g^1 . Θα πρέπει να επισημανθεί ότι ένας ζυγός (ηλεκτρονικός ή μηχανικός) αποκρίνεται στη δύναμη που ασκείται πάνω του. Αν, για παράδειγμα, πιέσουμε έναν ζυγό, η ένδειξή του θα μεταβλη-

¹ Προφανώς τα γραμμάρια g είναι μονάδα μέτρησης μάζας και όχι δύναμης. Επειδή είμαστε συνηθισμένοι στο γεγονός ότι το βάρος ενός αντικείμενου είναι μια δύναμη έλξης που ασκείται από τη Γη προς το αντικείμενο και η οποία βρίσκεται σε αναλογία με τη μάζα του αντικείμενου με σχεδόν σταθερό παράγοντα αναλογίας σε οποιοδήποτε τόπο, πολλές φορές χρησιμοποιούμε τη μάζα του αντικείμενου ως αντίστοιχο του βάρους του. Για παράδειγμα ένα αντικείμενο μάζας 1g έχει βάρος $10^{-3}\text{ kg} \times 9.81\text{m/s}^2 = 0.00981\text{N}$.

θεί ανάλογα με τη δύναμη με την οποία τον πιέζουμε. Πιο ορθό είναι να πούμε ότι η λειτουργία του ζυγού βασίζεται στη δύναμη αντίδρασης που ασκεί η πλάκα του σε οποιοδήποτε αντικείμενο ασκεί πίεση σε αυτήν. Κατά τη συνήθη ζύγιση, ο ζυγός είναι βαθμονομημένος ώστε να εμφανίζει την αντίστοιχη μάζα σε μονάδες μάζας.

Πειραματική διαδικασία

Πείραμα 1

1. Εξοικειωθείτε αρχικά με την ανάγνωση του μικρομέτρου μετρώντας το πάχος μερικών λεπτών αντικειμένων (νομισμάτων, φύλλου χαρτιού, κλπ.). Προσδιορίστε τη διακριτική ικανότητα του οργάνου και την αβεβαιότητα που θα χρησιμοποιήσετε στις μετρήσεις. Ελέγξτε αν υπάρχει κάποιο συστηματικό σφάλμα στη μέτρηση του μικρομέτρου. Ελέγξτε, δηλαδή, αν απουσία αντικειμένου μέτρησης, η ένδειξη του μικρομέτρου είναι μηδέν.
2. Χρησιμοποιήστε τον ηλεκτρονικό ζυγό που υπάρχει στον πάγκο εργασίας, αφού πρώτα τον ενεργοποιήσετε, μετρώντας τη μάζα διαφόρων καθημερινών αντικειμένων (το στυλό σας, ένα φύλλο χαρτί, κ.λπ.). Σημειώστε τη διακριτική ικανότητα του ζυγού και την αβεβαιότητα μέτρησης που θα χρησιμοποιήσετε.
3. Μετρήστε με το μικρόμετρο και σημειώστε το πάχος (διάμετρο d) των έγχρωμων κυλίνδρων που βρίσκονται στον πάγκο εργασίας σας. Ελέγξτε αν η διάμετρος αυτών διαφοροποιείται από κύλινδρο σε κύλινδρο. Στη συνέχεια καταγράψτε το ύψος h του καθενός και τη μάζα m του καθενός μαζί με τις αβεβαιότητες μέτρησής τους σε έναν πίνακα της μορφής:

ΕΤΙΚΕΤΑ	d (cm)	δd (cm)	h (cm)	δh (cm)	m (g)	δm (g)	V (cm ³)	δV (cm ³)

Στην στήλη V συμπληρώστε τον όγκο του εκάστοτε κυλίνδρου. (Ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο της επιφάνειας βάσης επί το ύψος αυτού, δηλαδή, ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με $V=\pi(d^2/4)h$.) Σημειώστε επίσης την αβεβαιότητα μέτρησης της μάζας, καθώς και αυτές του ύψους και της διαμέτρου. Όπως κάθε ποσότητα που ορίζεται ως το γινόμενο άλλων ποσοτήτων, τη σχετική αβεβαιότητα του όγκου θα ισούται με

$$\frac{\delta V}{V} = \sqrt{\left(\frac{2 \delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2}$$

ενώ η σχετική αβεβαιότητα της πυκνότητας θα είναι

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{V}\right)^2}.$$

4. Κατασκευάστε το γράφημα της μάζας του εκάστοτε κυλίνδρου ως συνάρτηση του όγκου του. Βρίσκονται όλα τα σημεία του γραφήματος αυτού κατά μήκος κάποιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων; Είναι όλοι οι κύλινδροι κατασκευασμένοι από το ίδιο υλικό; Υπολογίστε την πυκνότητα των υλικών των διαφόρων κυλίνδρων που εξετάσατε. Τέλος, υπολογίστε το σχετικό σφάλμα της πυκνότητας του εκάστοτε υλικού.

Πείραμα 2

Μέτρηση της άνωσης

1. Μετρήστε με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού ζυγού τη μάζα ενός ογκομετρικού σωλήνα γεμάτου με αρκετή ποσότητα νερού ώστε να μπορεί να βυθιστεί πλήρως ο αλουμινένιος κύλινδρος στο εσωτερικό του, χωρίς να χυθεί το νερό. Σημειώστε τον αρχικό όγκο V_0 του νερού. Εκτιμήστε την αβεβαιότητα προσδιορισμού του όγκου δV .
2. Μετρήστε τις απαραίτητες διαστάσεις του αλουμινένιου κυλίνδρου και υπολογίστε τον γεωμετρικό του όγκο V_k . Μετρήστε επίσης με τον ζυγό τη μάζα του M_k και υπολογίστε τις αντίστοιχες αβεβαιότητες.
3. Ενώ ο ογκομετρικός σωλήνας βρίσκεται πάνω στο ζυγό και μετριέται η αντίδραση που ασκεί ο ζυγός σε αυτόν, κρεμάστε από τον βραχίονα τον αλουμινένιο κύλινδρο πάνω από το άνοιγμα του σωλήνα και αρχίστε να ανεβάζετε την πτυσσόμενη βάση της ζυγαριάς με τον σωλήνα, ώστε ο κύλινδρος να εισέλθει στο εσωτερικό του σωλήνα, προσέχοντας ο κύλινδρος να βρίσκεται κοντά στο κέντρο του σωλήνα και μακριά από τα τοιχώματα αυτού. Όταν ο κύλινδρος έχει περίπου μισοβυθιστεί στο νερό, καταγράψτε την ένδειξη του όγκου του νερού $V_{1/2}$ στο σωλήνα, καθώς και την ένδειξη του ζυγού $N_{1/2}$.
4. Ανεβάστε και άλλο τον ζυγό με τον ογκομετρικό σωλήνα έτσι ώστε ολόκληρος ο κύλινδρος να βυθιστεί πλήρως στο υγρό, χωρίς όμως να ακουμπήσει στον πυθμένα του σωλήνα. Καταγράψτε τη νέα ένδειξη όγκου του νερού $V_{ολ}$ στον ογκομετρικό σωλήνα, καθώς και την ένδειξη του ζυγού $N_{ολ}$.

5. Συνεχίστε ανεβάζοντας ακόμη περισσότερο το ζυγό, ώστε ο κύλινδρος να «καθίσει» στον πυθμένα του σωλήνα (το νήμα από το οποίο κρέμεται ο κύλινδρος θα πάψει να είναι τεντωμένο). Καταγράψτε τη νέα ένδειξη όγκου $V_{\text{πυθ}}$ στον ογκομετρικό σωλήνα, καθώς και την ένδειξη του ζυγού $N_{\text{πυθ}}$.
6. Σχεδιάστε για τις τέσσερις φάσεις: (α) κύλινδρος εκτός σωλήνα, (β) κύλινδρος μισοβυθισμένος, (γ) κύλινδρος βυθισμένος, (δ) κύλινδρος στον πυθμένα, τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, στο νερό του ογκομετρικού σωλήνα και στον ζυγό. Γράψτε για κάθε διάγραμμα τη συνθήκη ισορροπίας.
7. Εξηγήστε γιατί η ένδειξη του ζυγού, όταν ο κύλινδρος βρίσκεται στον πυθμένα, δεν είναι ίση με εκείνη όταν ο κύλινδρος είναι απλώς βυθισμένος ολόκληρος.

Ερωτήσεις

1. Ένα παγάκι ισορροπεί στην επιφάνεια του νερού μέσα σε ένα ποτήρι που είναι γεμάτο μέχρι το χείλος του. Προφανώς μέρος του πάγου περισσεύει έξω από το νερό, όπως τα παγόβουνα. Αν αφήσετε το παγάκι να λιώσει θα χυθεί μέρος του νερού; Θα κατέβει η στάθμη του νερού; Θα μείνει το ποτήρι γεμάτο με νερό χωρίς να χυθεί καθόλου;
Αν θεωρήσουμε ότι στη Σελήνη το νερό και ο πάγος διατηρούν τις ίδιες πυκνότητες και παραμένουν στις αντίστοιχες φάσεις, ένα παγάκι στην επιφάνεια του νερού θα επιπλέει κρατώντας το ίδιο ποσοστό του όγκου του εκτός νερού;
2. Αν τοποθετήσουμε ένα ελαφρύ ποτήρι στο εσωτερικό ενός μπολ με το άνοιγμά του προς τα κάτω ώστε να εφαρμόζουν τα χείλη του στην επιφάνεια του μπολ και στη συνέχεια γεμίσουμε το μπολ με νερό, θα ανέλθει το ποτήρι λόγω άνωσης; Δοκιμάστε το.
3. Παρατηρήστε προσεκτικά τον βερνιέρο του παχυμέτρου (αν δεν το κάνατε στο εργαστήριο, χρησιμοποιήστε τη φωτογραφία της αντίστοιχης λεπτομέρειας του φυλλαδίου. Η έκταση της κινητής κλίμακας 0-10 σε τι μήκος της σταθερής (πραγματικής κλίμακας) αντιστοιχεί; Σκεφθείτε κατ' αναλογία κάθε ένδειξη της κινητής κλίμακας (ανά 0.5) σε τι μήκος (σε mm) αντιστοιχεί; Με ποια διακριτική ικανότητα, λοιπόν, μετράει μήκη το παχύμετρο;
4. Χρησιμοποιήστε την έκφραση για την άνωση για να εκτιμήσετε τον όγκο σας. Λάβετε ως δεδομένο ότι όταν πλέετε σε νερό πισίνας (όχι σε θαλασσινό) το 2% έως 5% του όγκου σας βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του νερού. Στη συνέχεια υπολογίστε την άνωση που δέχετε από τον αέρα μέσα στον οποίο βρίσκεστε. Πόσο λοιπόν είναι το πραγματικό σας βάρος (όχι αυτό που μετράει η ζυγαριά). Θεωρήστε ότι $\rho_{\text{αέρα}} \approx 1,2 \text{ kg/m}^3$
5. Από τις μετρήσεις που κάνατε στο πείραμα για τη μέτρηση της άνωσης εκτιμήστε την πυκνότητα του κυλίνδρου και από αυτήν αποφανθείτε για το υλικό από το οποίο αποτελείται αυτός.

Βιβλιογραφία

- 1.D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Φυσική, τόμος Α': Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική, Εκδόσεις Gutenberg, 2021.
- 2.R. A. Serway, J. W. Jewett, Φυσική για Επιστήμονες και Μηχανικούς, τόμος Ι: Μηχανική, αντίστοιχες ενότητες Μηχανικής.