

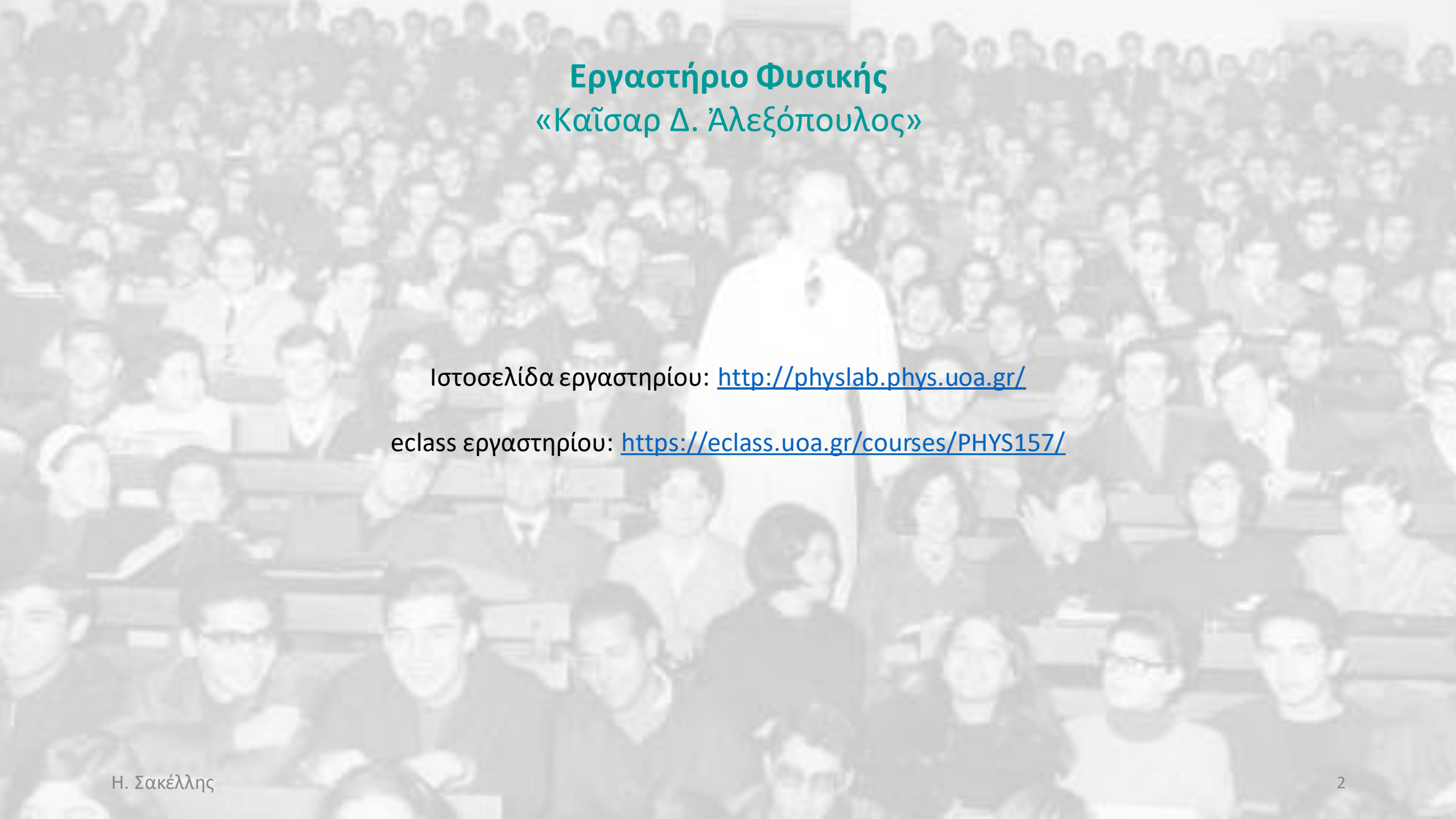


ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

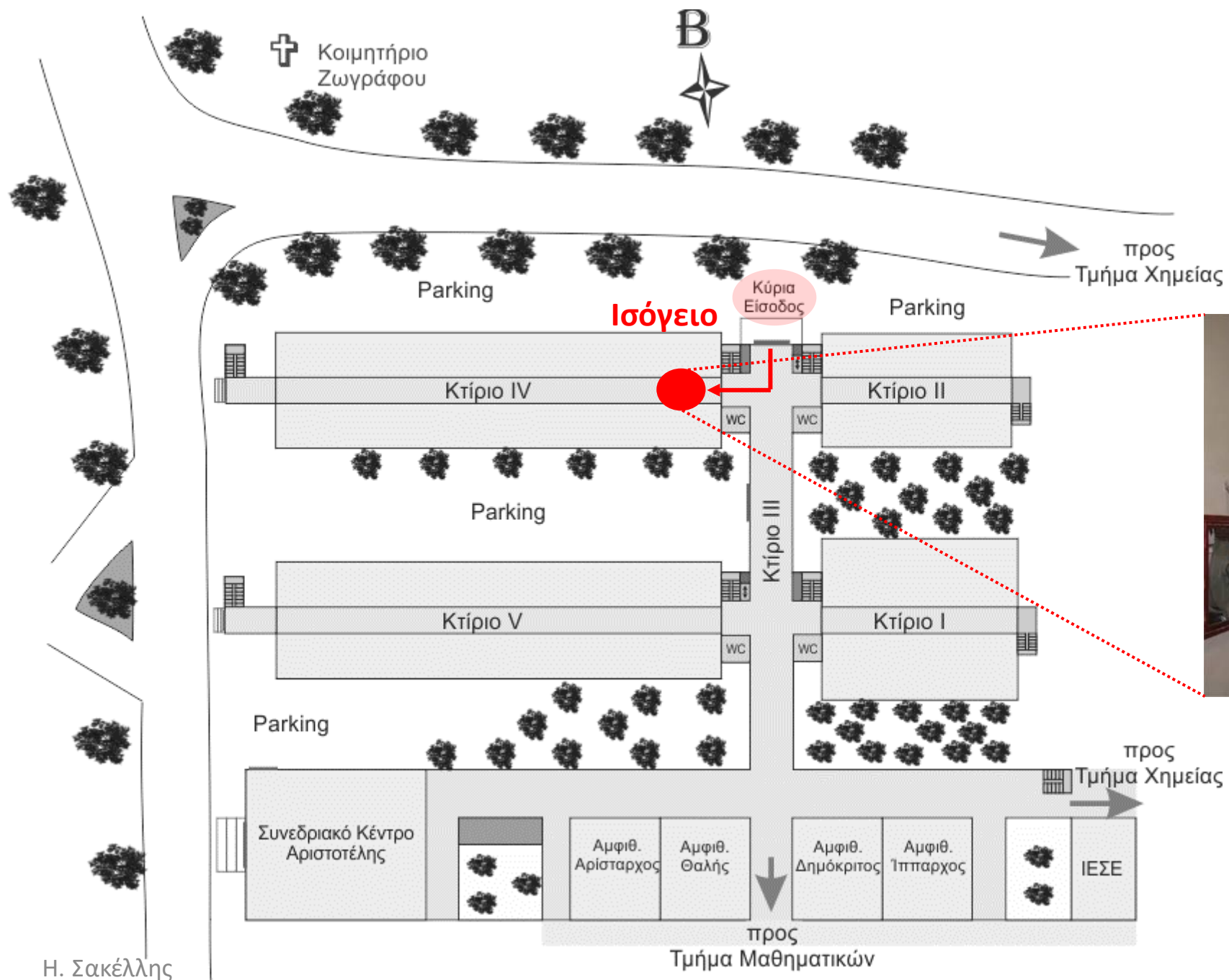
Εισαγωγικές Διαλέξεις Βασικού Εργαστηρίου Φυσικής Ι



Εργαστήριο Φυσικής «Καΐσαρ Δ. Ἀλεξόπουλος»

Ιστοσελίδα εργαστηρίου: <http://physlab.phys.uoa.gr/>

eclass εργαστηρίου: <https://eclass.uoa.gr/courses/PHYS157/>



Ασκήσεις Βασικού Εργαστηρίου Φυσικής Ι



- A₁**. Μετρήσεις, αβεβαιότητες, σφάλματα, στρογγυλοποιήσεις, γραφήματα
- A₂**. Εφαρμογή στη πειραματική διαδικασία (το απλό εκκρεμές)
- A₃**. Μελέτη κινηματικών μεγεθών με χρήση νέων τεχνολογιών (αισθητήρες και υπολογιστές)
- A₄**. Μελέτη και εξοικείωση με ηλεκτρικά κυκλώματα και οργανολογία
- A₅**. Μετρήσεις διαστάσεων σωμάτων και μάζας. Υπολογισμοί πυκνότητας, άνωσης και διάδοσης σφαλμάτων

Περιεχόμενα διαλέξεων

- 1. Ασφάλεια και επιστημονική μεθοδολογία**
- 2. Φυσικά μεγέθη, μονάδες SI και πειραματικές μεταβλητές**
- 3. Μέτρηση, μετρολογία και ιχνηλασιμότητα**
- 4. Όργανα μέτρησης και αβεβαιότητα ανάγνωσης**
- 5. Σφάλματα μέτρησης**
- 6. Αβεβαιότητα μέτρησης**
- 7. Στατιστική επεξεργασία μετρήσεων**
- 8. Σημαντικά ψηφία και στρογγυλοποίηση**
- 9. Διάδοση αβεβαιότητας**
- 10. Παρουσίαση και ανάλυση πειραματικών δεδομένων**
- 11. Συγγραφή εργαστηριακής αναφοράς**
- 12. Εφαρμογές σε εργαστηριακές ασκήσεις**
- 13. Βιβλιογραφία**

Κανονισμοί ασφάλειας εργαστηρίου 1/3



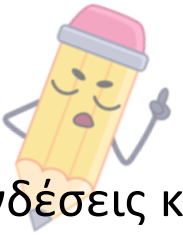
1. Γενικοί κανόνες

- Διαβάσετε τις βασικές οδηγίες της άσκησης πριν ξεκινήσετε.
- Δεν χρησιμοποιείτε και δεν τροποποιείτε εξοπλισμό που δεν γνωρίζετε χωρίς οδηγίες από τον επιβλέποντα.
- Δεν καταναλώνετε τρόφιμα ή ποτά στον εργαστηριακό χώρο.
- Αναφέρετε αμέσως οποιαδήποτε βλάβη, ασυνήθιστη λειτουργία ή ατύχημα.
- Στο τέλος της άσκησης αφήνετε τη διάταξη απενεργοποιημένη και τον χώρο τακτοποιημένο, σύμφωνα με τις οδηγίες του επιβλέποντα.
- Αν δεν είστε βέβαιοι για κάτι, ρωτήστε πριν ενεργήσετε.

2. Πριν ενεργοποιήσετε οποιαδήποτε συσκευή: ελέγξτε οπτικά τη διάταξη, βεβαιωθείτε ότι γνωρίζετε πώς απενεργοποιείται η διάταξη και εάν παρατηρήσετε κάτι ασυνήθιστο, μη χρησιμοποιήσετε τον εξοπλισμό και ενημερώστε τον επιβλέποντα.

3. Ενδυμασία: Μακριά μαλλιά, χαλαρά ρούχα, κορδόνια ή κοσμήματα πρέπει να συγκρατούνται όταν εργάζεστε κοντά σε κινούμενα μέρη. Προστατευτικά γυαλιά, γάντια ή ποδιά χρησιμοποιούνται όταν απαιτούνται.

Κανονισμοί ασφάλειας εργαστηρίου 2/3



4. Ηλεκτρική ασφάλεια: Στις ασκήσεις με ηλεκτρικά κυκλώματα: πραγματοποιείτε πρώτα τις συνδέσεις και μετά ενεργοποιείτε την τροφοδοσία, όπου απαιτείται, περιμένετε τον έλεγχο του κυκλώματος από τον επιβλέποντα, δεν αλλάζετε συνδέσεις όσο η τροφοδοσία είναι ενεργή, δεν βραχυκυκλώνετε τροφοδοτικά ή μπαταρίες, δεν αγγίζετε γυμνούς αγωγούς, δεν ανοίγετε ηλεκτρικές συσκευές ή τροφοδοτικά, δεν χρησιμοποιείτε συσκευή με φθαρμένο καλώδιο ή βύσμα. Όταν αφαιρείτε ένα καλώδιο, κρατάτε το βύσμα και όχι το ίδιο το καλώδιο. Τα χέρια πρέπει να είναι στεγνά όταν χειρίζεστε ηλεκτρικό εξοπλισμό. Εάν παρατηρήσετε καπνό, μυρωδιά καμένου, σπινθήρες ή υπερθέρμανση, διακόψτε την εργασία και ενημερώστε αμέσως τον επιβλέποντα.

5. Όργανα μέτρησης: Τα εργαστηριακά όργανα είναι συχνά ευαίσθητα και ακριβά. Μην ασκείτε υπερβολική δύναμη. Στο μικρόμετρο, για παράδειγμα, δεν σφίγγετε υπερβολικά το αντικείμενο. Δεν αλλάζετε ρυθμίσεις που δεν προβλέπονται από την άσκηση χωρίς να ρωτήσετε.

6. Νερό και γυάλινα αντικείμενα: Εάν χρησιμοποιείται νερό: απομακρύνετε άμεσα τυχόν νερό από τον πάγκο ή το δάπεδο, κρατάτε το νερό μακριά από ηλεκτρικές συσκευές. Ραγισμένα ή σπασμένα γυάλινα αντικείμενα δεν χρησιμοποιούνται. Εάν σπάσει γυαλί, δεν μαζεύετε τα θραύσματα με γυμνά χέρια. Ενημερώνετε τον επιβλέποντα.



7. Αν συμβεί κάτι απρόοπτο: Ο βασικός κανόνας είναι: **Σταματώ - δεν αυτοσχεδιάζω - ενημερώνω τον επιβλέποντα.** Αναφέρετε όχι μόνο τα ατυχήματα αλλά και περιστατικά που θα μπορούσαν να είχαν προκαλέσει ατύχημα. Έτσι μπορεί να διορθωθεί ένας κίνδυνος πριν επαναληφθεί.

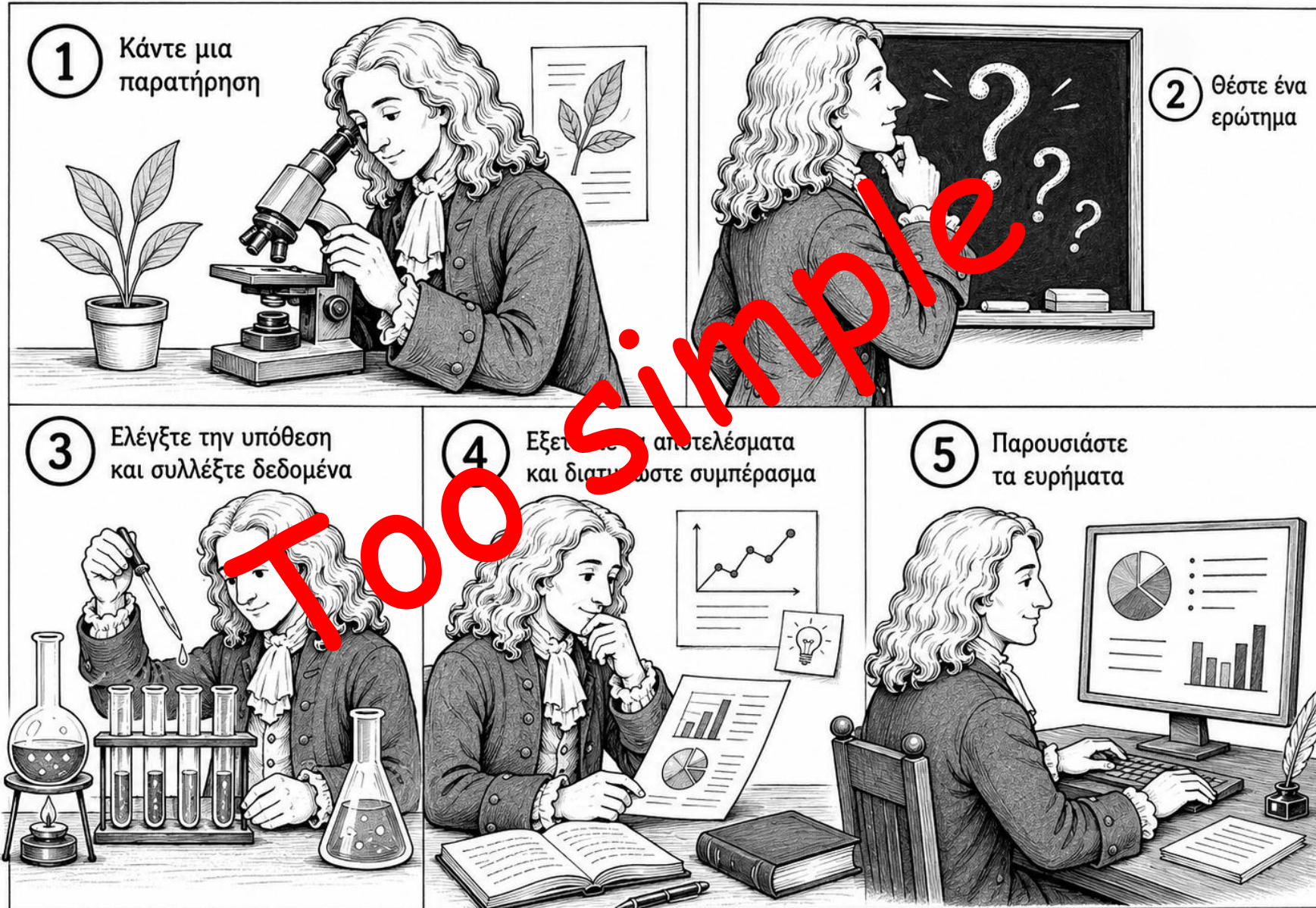
Ηλεκτροπληξία: Μην αγγίζετε άτομο που μπορεί να βρίσκεται ακόμη σε επαφή με ηλεκτρική τάση. Πρέπει πρώτα να διακοπεί με ασφαλή τρόπο η ηλεκτρική τροφοδοσία και να ειδοποιηθεί αμέσως ο επιβλέπων.

Καπνός ή πυρκαγιά: Ειδοποιείτε αμέσως το προσωπικό και ακολουθείτε τις οδηγίες εκκένωσης. Δεν επιχειρείτε κατάσβεση αν δεν έχετε εκπαιδευτεί κατάλληλα.

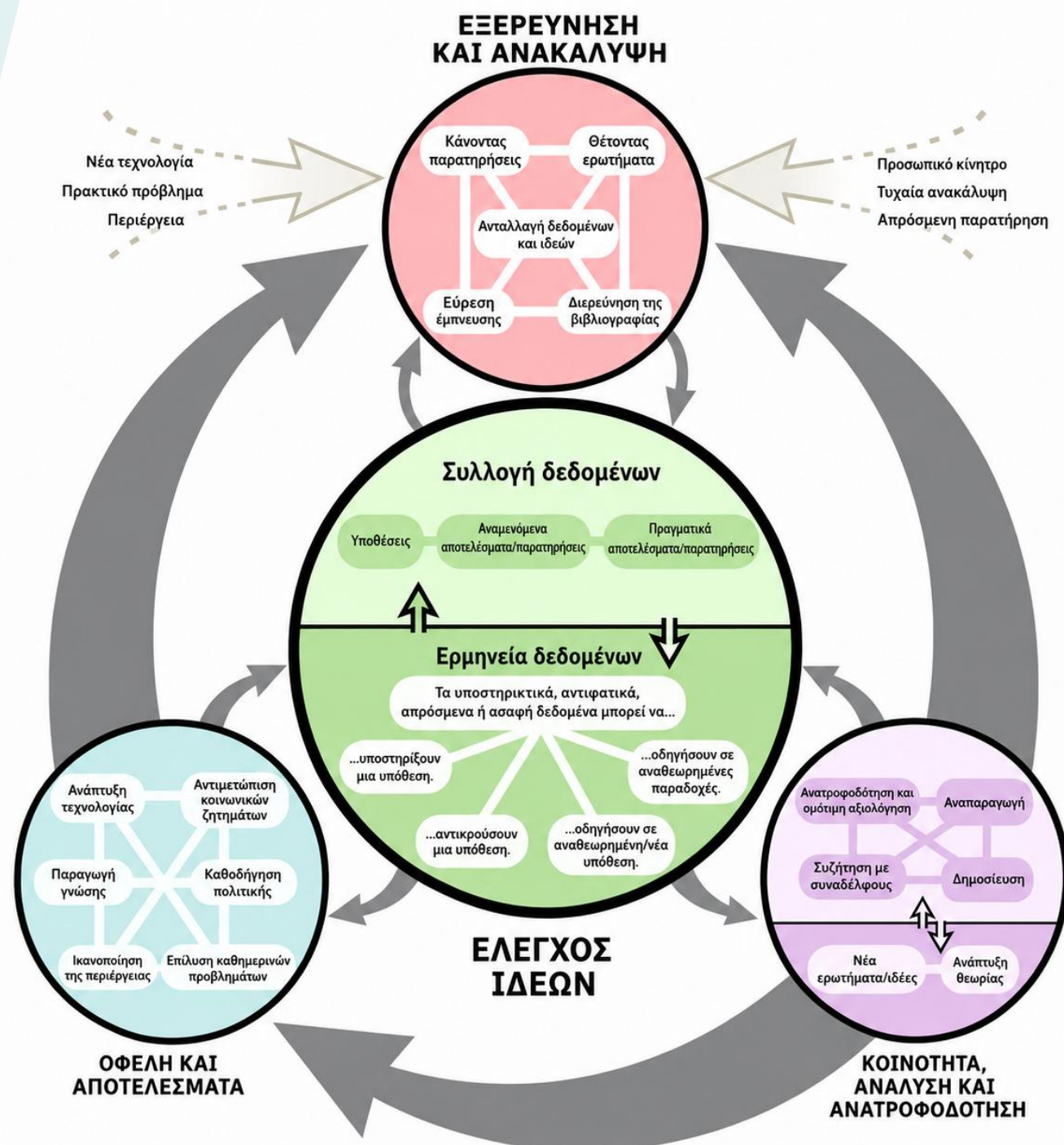
Σε σοβαρό περιστατικό μπορεί να κληθεί το 112.

8. Εκκένωση και σεισμός: Από την πρώτη εργαστηριακή συνάντηση πρέπει να γνωρίζετε πού βρίσκονται οι έξοδοι, ποια είναι η διαδρομή εκκένωσης, ποιος είναι ο καθορισμένος χώρος συγκέντρωσης. Σε περίπτωση εντολής εκκένωσης, αφήνετε τον χώρο χωρίς καθυστέρηση και ακολουθείτε τις οδηγίες του προσωπικού. Σε περίπτωση σεισμού δεν τρέχετε προς την έξοδο κατά τη διάρκεια της ισχυρής δόνησης. Προστατεύεστε από αντικείμενα που μπορεί να πέσουν και, μετά τη δόνηση, ακολουθείτε την οργανωμένη διαδικασία εκκένωσης. Πριν από κάθε πείραμα, ρωτήστε τον εαυτό σας: Τι πρόκειται να κάνω; Τι μπορεί να πάει στραβά; Τι πρέπει να είναι απενεργοποιημένο πριν αλλάξω κάτι; Πώς σταματά με ασφάλεια η διάταξη; Ποιον ενημερώνω αν παρουσιαστεί πρόβλημα;

Βήματα της Επιστημονικής Μεθόδου



Η Επιστημονική Μέθοδος



«Κάνουμε επιστήμη με γεγονότα, όπως φτιάχνουμε ένα σπίτι με πέτρες. Αλλά μία συσσώρευση γεγονότων δεν είναι επιστήμη, όπως ακριβώς ένας σωρός από πέτρες δεν είναι ένα σπίτι.»
Henri Poincaré (1902, Science and Hypothesis).



Τι είναι τα φυσικά μεγέθη;

Φυσικά μεγέθη είναι ποσότητες που αντιστοιχούν σε φυσικά φαινόμενα και μπορούν να πάρουν συνεχείς ή διακριτές τιμές.

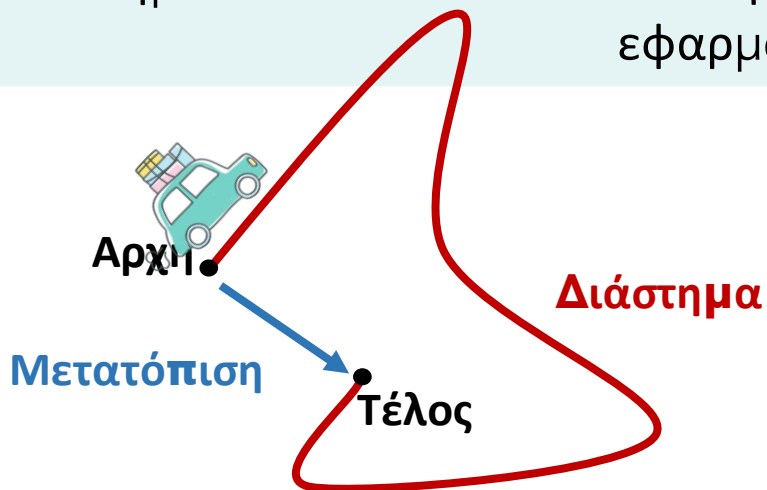
Τα φυσικά μεγέθη διακρίνονται σε

Μονόμετρα

Για να οριστούν χρειάζεται μόνο το μέτρο τους και η μονάδα μέτρησης.
π.χ. μάζα, χρόνος, ηλεκτρικό φορτίο, διάστημα

Διανυσματικά

Για να οριστούν πλήρως δεν αρκεί μόνο ένας αριθμός (μέτρο και μονάδα μέτρησης), αλλά και της κατεύθυνσης (διεύθυνση και φορά). **π.χ.** ταχύτητα, δύναμη, επιτάχυνση, μετατόπιση
Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις μπορεί να απαιτείται και το σημείο εφαρμογής, **π.χ.** για τη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα.



Πίνακας Θεμελιωδών Μονάδων στο SI μέχρι το 2019

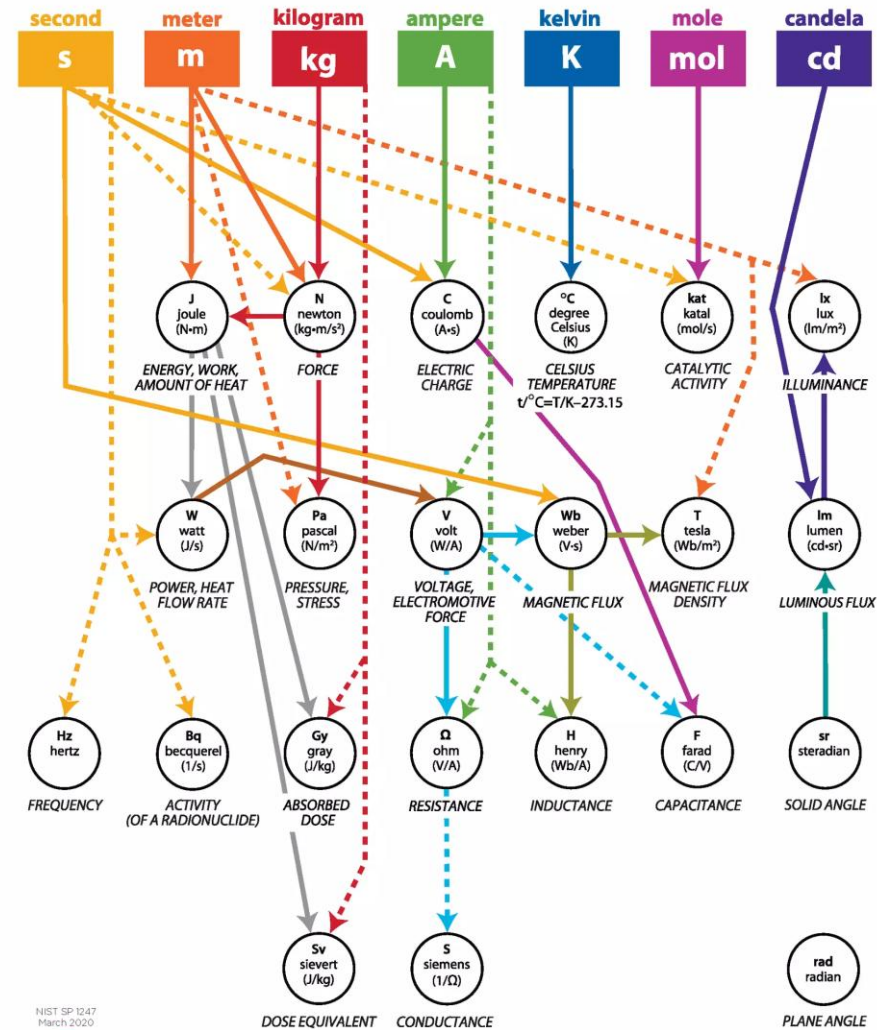
Φυσικό μέγεθος	Μονάδα	Ορισμός
Μήκος	meter (m)	Ένα μέτρο είναι η απόσταση που διανύει το φως στο κενό σε χρονικό διάστημα $1/299.792.458$ του δευτερολέπτου.
Μάζα	kilogram (kg)	Ένα χιλιόγραμμα είναι η μάζα του διεθνούς πρωτοτύπου του χιλιογράμμου, που φυλάσσεται στη Sèvres της Γαλλίας.
Χρόνος	second (s)	Ένα δευτερόλεπτο είναι η διάρκεια $9.192.631.770$ περιόδων της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη ατομική μετάπτωση του ατόμου ^{133}Cs .
Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	Ampere (A)	Ένα Ampere ρεύματος παράγει δύναμη $2 \cdot 10^{-7}$ Newton ανά μέτρο μήκους, όταν διατηρείται σε δύο ευθύγραμμους, παράλληλους αγωγούς απείρου μήκους και αμελητέας διατομής, σε απόσταση 1 m μεταξύ τους στο κενό.
Απόλυτη/Θερμοδυναμική ή Θερμοκρασία	Kelvin (K)	Η θερμοκρασία ορίζεται έτσι ώστε το τριπλό σημείο του νερού, όπου συνυπάρχουν στερεό, υγρό και αέριο νερό σε ισορροπία, να είναι 273,16 K και η θερμοκρασία του απόλυτου μηδενός να είναι 0 K.
Ένταση Φωτεινότητας	candela (cd)	Η candela ορίζεται θέτοντας ακριβώς την τιμή της φωτεινής απόδοσης $K_{\text{cd}} = 683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$ μονοχρωματικής ακτινοβολίας συχνότητας $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$.
Ποσότητα ύλης	mole (mol)	Ένα mole είναι ποσότητα σωματιδίων ίση με τον αριθμό των ατόμων που υπάρχουν σε ακριβώς $0,012 \text{ kg } ^{12}\text{C}$, δηλαδή περίπου $6,0221415 \cdot 10^{23}$ σωματίδια.

Αναθεωρημένος (2019) Πίνακας Θεμελιωδών Μονάδων στο SI

Φυσικό μέγεθος	Μονάδα	Ορισμός
Μήκος	meter (m)	Ένα μέτρο είναι η απόσταση που διανύει το φως στο κενό σε χρονικό διάστημα $1/299.792.458$ του δευτερολέπτου.
Μάζα	kilogram (kg)	Το kilogram είναι η μονάδα μάζας που καθιστά τη σταθερά του Planck ίση ακριβώς με $h=6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Εφόσον το μέτρο και το δευτερόλεπτο είναι ήδη ορισμένα, η ακριβής τιμή του h καθορίζει το kg.
Χρόνος	second (s)	Ένα δευτερόλεπτο είναι η διάρκεια $9.192.631.770$ περιόδων της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη ατομική μετάπτωση του ατόμου ^{133}Cs .
Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	Ampere (A)	Το Ampere είναι η μονάδα ρεύματος για την οποία το στοιχειώδες φορτίο έχει ακριβώς την τιμή $e=1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$. Δηλαδή 1 A αντιστοιχεί στη μεταφορά $1/(1.602176634 \cdot 10^{-19})$ στοιχειωδών φορτίων ανά δευτερόλεπτο.
Απόλυτη/Θερμοδυναμική Θερμοκρασία	Kelvin (K)	Το Kelvin είναι η μονάδα θερμοκρασίας που καθιστά τη σταθερά Boltzmann ίση ακριβώς με $k_B=1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. Εφόσον το Joule είναι ήδη καθορισμένο από kg, m και s, η τιμή του k_B καθορίζει το K.
Ένταση Φωτεινότητας	candela (cd)	Η candela ορίζεται θέτοντας ακριβώς την τιμή της φωτεινής απόδοσης $K_{cd}=683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$ μονοχρωματικής ακτινοβολίας συχνότητας $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$.
Ποσότητα ύλης	mole (mol)	Ένα mole είναι η ποσότητα ουσίας που περιέχει ακριβώς $6.02214076 \cdot 10^{23}$ στοιχειώδεις οντότητες. Επομένως η μονάδα mol καθορίζεται άμεσα από έναν ακριβή αριθμό σωματιδίων.

SI BASE UNITS

SI TRADITIONAL BASE UNITS **SI** DERIVED UNITS COHERENT DERIVED UNITS WITH SPECIAL NAMES AND SYMBOLS
 ——— MULTIPLICATION ——— DIVISION



NIST
 National Institute of
 Standards and Technology
 U.S. Department of Commerce
www.nist.gov

Πίνακας Παράγωγων Μονάδων στο SI

Φυσικό μέγεθος	Μονάδα	Σε άλλες μονάδες	Σε βασικές μονάδες SI
Συχνότητα	Hertz (Hz)	1/s	s^{-1}
Δύναμη	Newton (N)	-	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Πίεση	Pascal (Pa)	N/m^2	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
Ενέργεια, έργο, θερμότητα	Joule (J)	$N \cdot m$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Ισχύς, ροή ακτινοβολίας	Watt (W)	J/s	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
Ηλεκτρικό φορτίο	Coulomb (C)	-	$A \cdot s$
Ηλεκτρικό δυναμικό, διαφορά δυναμικού, ΗΕΔ	Volt (V)	W/A	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Ηλεκτρική αντίσταση	Ohm (Ω)	V/A	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Ηλεκτρική χωρητικότητα	Farad (F)	C/V	$kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2$

Σταθερά μεγέθη

Η σταθερά του Rydberg είναι $R_{\infty} = (10973731,568\,527 \pm 0,000\,073) \text{ m}^{-1}$ ενώ είναι γνωστή με εντυπωσιακά μεγάλη ακρίβεια εξακολουθεί να υπάρχει κάποια αβεβαιότητα στην τιμή της.

Οι φυσικές σταθερές που προσδιορίζονται πειραματικά συνοδεύονται από αβεβαιότητα. Αντίθετα, οι επτά σταθερές που χρησιμοποιούνται για τον ορισμό του SI έχουν **ακριβώς καθορισμένες αριθμητικές τιμές** και επομένως δεν έχουν αβεβαιότητα.

Παράδειγμα

Η ταχύτητα του φωτός στο κενό: $c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο: $e = 1,602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$

Σταθερά του Avogadro είναι $N_a = 6,02214076 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
(μετά το 2019 θεωρείται σταθερά)

Τι είναι ένα πείραμα;

Πείραμα είναι η μεθοδική, ελεγχόμενη αναπαραγωγή ενός φυσικού φαινομένου ή η σκόπιμη και ελεγχόμενη μεταβολή των συνθηκών ενός συστήματος, με σκοπό τη συλλογή εμπειρικών δεδομένων, τον έλεγχο (επαλήθευση ή διάψευση) μιας θεωρητικής υπόθεσης και την εξαγωγή ασφαλών επιστημονικών συμπερασμάτων.



Σε αντίθεση με την απλή και ενδεχομένως παθητική παρατήρηση στη φύση, στο πείραμα ο ερευνητής απομονώνει το σύστημα και ελέγχει ή μεταβάλλει συνειδητά τις παραμέτρους π.χ. θερμοκρασία.

Ποια είναι τα κριτήρια που πρέπει να πληροί ένα πείραμα;

- **Επαναληψιμότητα (Repeatability):** βαθμός συμφωνίας μεταξύ επαναλαμβανόμενων μετρήσεων που πραγματοποιούνται υπό τις ίδιες ή πολύ παρόμοιες συνθήκες.
- **Αναπαραγωγιμότητα (Reproducibility):** βαθμός συμφωνίας μεταξύ αποτελεσμάτων που λαμβάνονται υπό διαφορετικές συνθήκες, π.χ. από διαφορετικά εργαστήρια, χειριστές ή συστήματα μέτρησης.
- **Ορθότητα (Trueness):** Εγγύτητα της μέσης τιμής στην πραγματική τιμή (απουσία συστηματικών σφαλμάτων).
- **Έλεγχος Μεταβλητών:** Απομόνωση και διαχείριση εξωτερικών παραγόντων που επηρεάζουν το σύστημα.
- **Ποσοτικοποίηση Αβεβαιότητας:** αναγνώριση και αξιολόγηση των σημαντικών πηγών αβεβαιότητας και έκφραση της αβεβαιότητας του τελικού αποτελέσματος.

Βήματα ενός πειράματος στο πλαίσιο του εργαστηρίου

Φυσικό ερώτημα

Φυσικό ερώτημα: Τι θέλω να ελέγξω;

π.χ. "Η περίοδος του εκκρεμούς εξαρτάται από το μήκος του;"

Σχεδιασμός

Μεταβλητές: Τι αλλάζει και τι κρατώ σταθερό;

Μετρήσεις: Τι δείχνει το όργανο;

Ορίζουμε τι θα μεταβάλλεται, τι θα μετράται και ποιες συνθήκες πρέπει να μείνουν σταθερές.

Σφάλματα: Τι μπορεί να μετατοπίσει ή να διασπείρει τις τιμές;

Κρίση αποτελέσματος

Υπολογισμός: Πώς προκύπτει το ζητούμενο μέγεθος;

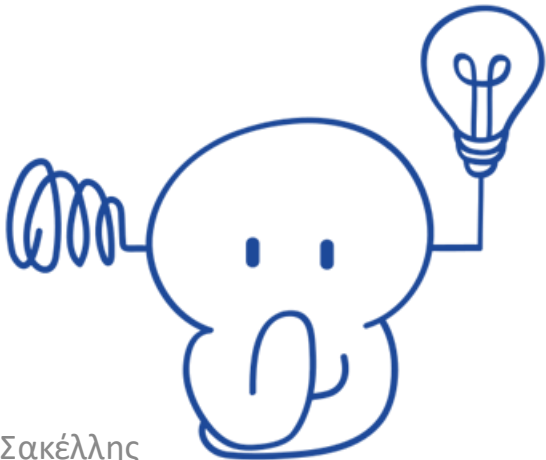
Αναφορά: τιμή $\pm$ αβεβαιότητα, μονάδες, σωστά δεκαδικά.

Συγκρίνουμε δεδομένα, μοντέλο και αβεβαιότητα.

Είδη πειραμάτων

Τα πειράματα διακρίνονται με βάση:

- Το είδος των δεδομένων σε ποιοτικά και ποσοτικά.
- Τη φύση του φαινομένου σε αιτιοκρατικά (ντετερμινιστικά) και σε στοχαστικά.
- Το σκοπό, σε πειράματα επίδειξης, μέτρησης, ελέγχου μοντέλου ή νόμου και σε διερευνητικά.
- Το βαθμό ελέγχου των συνθηκών, σε εργαστηριακό, πεδίου, ημιπειραματικό.



Τι είναι η μεταβλητή;

Μεταβλητή είναι μία ποσότητα ή ιδιότητα που μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές. Μπορεί να είναι μετρούμενο μέγεθος, ελεγχόμενη συνθήκη ή παράμετρος υπολογισμού.

Είδη μεταβλητών ανάλογα με

το ρόλο τους στο πείραμα

- Ανεξάρτητη μεταβλητή
- Εξαρτημένη μεταβλητή
- Ελεγχόμενη μεταβλητή
- Μη ελεγχόμενη/ παρεμβαίνουσα

το είδος των τιμών που παίρνουν

- Ποσοτική συνεχής μεταβλητή
- Ποσοτική διακριτή μεταβλητή
- Ποιοτική/κατηγορηματική ονομαστική μεταβλητή
- Ποιοτική /κατηγορηματική διατακτική μεταβλητή
- Μεταβλητή Λόγου
- Μεταβλητή Διαστήματος

Είδη μεταβλητών ανάλογα με το ρόλο τους στο πείραμα

Ανεξάρτητη μεταβλητή

Την επιλέγει ή τη μεταβάλλει ο πειραματιστής.
π.χ. μήκος L εκκρεμούς.

Ελεγχόμενη μεταβλητή

Είναι παράγοντες που παραμένουν σταθεροί.
π.χ. μάζα, γωνία, νήμα.

Εξαρτημένη μεταβλητή

Η ποσότητα που παρατηρούμε ή μετράμε ως απόκριση στη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής.
π.χ. η περίοδος εξαρτάται από το μήκος εκκρεμούς

Μη ελεγχόμενη/ Παρεμβαίνουσα

Είναι παράγοντες που δεν ελέγχθηκαν σωστά και αλλοιώνουν το αποτέλεσμα.
Συνδέονται τόσο με το μετρούμενο μέγεθος όσο και με τις μεταβλητές που αλλάζουν.
π.χ. πλάτος ταλάντωσης, τριβές.

Είδη μεταβλητών ανάλογα με το είδος των τιμών που παίρνουν

Ποσοτική συνεχής μεταβλητή

Παίρνει πρακτικά οποιαδήποτε αριθμητική τιμή
π.χ. μήκος, μάζα, χρόνος

Ποσοτική διακριτή μεταβλητή

Παίρνει ακέραιες ή μετρήσιμες τιμές
π.χ. αριθμός κρούσεων, counts ανιχνευτή

Ποιοτική/κατηγορηματική ονομαστική μεταβλητή

Κατηγορίες χωρίς φυσική σειρά
τύπος υλικού π.χ. Cu, Al

Ποιοτική /κατηγορηματική διατακτική μεταβλητή

Κατηγορίες με σειρά, όχι ίσα βήματα
π.χ. χαμηλή/μεσαία/υψηλή τραχύτητα

Μεταβλητή Λόγου

Έχει πραγματικό μηδέν και έχει νόημα ο λόγος
π.χ. Μάζα, μήκος

Μεταβλητή Διαστήματος

Το μηδέν είναι αυθαίρετο, άρα οι λόγοι δεν έχουν φυσικό νόημα, μόνο οι διαφορές π.χ.
θερμοκρασία σε °C, υψόμετρο, αρχή των αξόνων

Μετρούμενο μέγεθος, μεταβλητή και συνθήκη: τρεις διαφορετικοί ρόλοι

Μετρούμενο μέγεθος (measurand)

Το φυσικό μέγεθος που τελικά θέλουμε να εκτιμήσουμε. Μπορεί να μετρηθεί άμεσα ή να υπολογιστεί έμμεσα.

π.χ. πυκνότητα ρ ενός σώματος

Μεταβλητή

Μέγεθος που μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές μέσα στο πείραμα ή στο μοντέλο ανάλυσης.

π.χ. μάζα m , όγκος V , χρόνος T

Συνθήκη πειράματος

Ρύθμιση ή περιβαλλοντική κατάσταση που επηρεάζει τη μέτρηση. Δεν είναι πάντα “μεταβλητή” που μελετάμε, αλλά μπορεί να γίνει μεταβλητή αν την αλλάζουμε συστηματικά.

π.χ. θερμοκρασία, υγρασία, μηδενισμός οργάνου

Μέτρηση

Μέτρηση είναι η διαδικασία που έχει ως στόχο τον προσδιορισμό της τιμής μίας ποσότητας ενός φυσικού μεγέθους μέσω σύγκρισης με μία καθιερωμένη μονάδα μέτρησης, δηλαδή με κάποια σταθερή ποσότητα του ίδιου φυσικού μεγέθους.

Παράδειγμα

$$m = 0.7 \cdot 1\text{kg} = 0.7\text{kg}$$



Παλιό πρότυπο μάζας ενός κυλίνδρου κατασκευασμένο το 1879 από κράμα πλατίνας και ιριδίου.



Κάθε πειραματικό αποτέλεσμα αποτελείται υποχρεωτικά από:

[Αριθμητική τιμή] + [Αβεβαιότητα] + [Μονάδα]

Χωρίς αβεβαιότητα, μια μέτρηση είναι ατελής.



Καμία μέτρηση δεν μπορεί να μας δώσει με απόλυτη βεβαιότητα την πραγματική τιμή ενός φυσικού μεγέθους.

Με τα όργανα μέτρησης μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή ενός φυσικού μεγέθους όσο καλά επιτρέπουν η ακρίβεια και οι δυνατότητες του οργάνου που χρησιμοποιούμε.

Κάθε αποτέλεσμα μέτρησης αποτελεί μια εκτίμηση της πραγματικής τιμής και συνοδεύεται από κάποια αβεβαιότητα.



Σφαίρα εξαιρετικά καθαρού πυριτίου, που χρησιμοποιείται για την πρακτική υλοποίηση του kilogram στο νέο SI.

Μετρολογία: Η επιστήμη της μέτρησης

Η Μετρολογία είναι η επιστήμη που καθορίζει τις μονάδες, τα πρότυπα και τις διαδικασίες μέτρησης, διασφαλίζοντας την αξιοπιστία και τη συγκρισιμότητα των αποτελεσμάτων σε παγκόσμιο επίπεδο.

Διεθνείς Οργανισμοί & Πρότυπα:

BIPM (*Bureau International des Poids et Mesures*): Το Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών. Είναι ο θεματοφύλακας του Διεθνούς Συστήματος Μονάδων (SI) και διασφαλίζει την παγκόσμια ομοιομορφία των μετρήσεων.

ISO (*International Organization for Standardization*): Διεθνής οργανισμός που θέτει πρότυπα για τη διασφάλιση της ποιότητας και της ακρίβειας σε εργαστηριακές και βιομηχανικές διεργασίες.

EIM (*Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας*): Ο εθνικός φορέας της Ελλάδας, υπεύθυνος για τη διατήρηση των εθνικών προτύπων μέτρησης και τη διασύνδεσή τους με το διεθνές σύστημα.

Γιατί μας αφορούν τα πρότυπα;

Αυτή η Παγκόσμια Κοινή Γλώσσα των προτύπων διασφαλίζει ότι ένα χιλιοστό (1mm) ή ένα βολτ (1V) στο δικό μας πανεπιστημιακό εργαστήριο είναι ακριβώς το ίδιο με αυτό που μετρούν σε ένα ερευνητικό κέντρο στο Τόκιο ή στη NASA.

Η Μετρολογία διασφαλίζει ότι, ανεξάρτητα από το όργανο, το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι αντικειμενικό, επιστημονικά έγκυρο και ιχνηλάσιμο.

Τι είναι η ιχνηλασιμότητα;

Στη μετρολογία και τη φυσική, ιχνηλασιμότητα (metrological traceability) ορίζεται ως η ιδιότητα ενός αποτελέσματος μέτρησης να συνδέεται με ένα παγκόσμιο πρότυπο αναφοράς μέσω μιας αδιάσπαστης αλυσίδας διακριβώσεων (calibrations), όπου κάθε κρίκος της αλυσίδας προσθέτει τη δική του καταγεγραμμένη αβεβαιότητα.

Πώς λειτουργεί στην πράξη;



Αξιοπιστία: Αν σπάσει έστω και ένας κρίκος σε αυτή την αλυσίδα (π.χ. αν το όργανο δεν έχει ποτέ βαθμονομηθεί σωστά), τότε οι μετρήσεις σας χάνουν την επιστημονική τους εγκυρότητα και δεν μπορεί να τεκμηριωθεί η μετρολογική ιχνηλασιμότητα και περιορίζεται η δυνατότητα σύγκρισης και αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.



Όργανα μέτρησης

Οι διατάξεις που χρησιμοποιούμε για να κάνουμε μία μέτρηση λέγονται όργανα μέτρησης.

Η μέτρηση μπορεί να είναι **άμεση ή έμμεση** αν προκύπτει ως αποτέλεσμα άμεση σύγκρισης με κάποιο πρότυπο (χάρακας → μήκος) ή όχι (θερμόμετρο → διαστολή → θερμοκρασία).



Μετράνε τα όργανα τη πραγματική τιμή του μεγέθους;

Όχι, τα όργανα δεν μετράνε την «απόλυτη» ή «πραγματική» τιμή ενός μεγέθους.

Η «αληθής τιμή» (οντολογικά υπαρκτή ενώ επιστημολογικά όχι) είναι μια ιδεατή, φιλοσοφική έννοια που παραμένει άγνωστη και απρόσιτη στην πράξη, καθώς κάθε όργανο έχει πεπερασμένη ακρίβεια και επηρεάζεται από παράγοντες του περιβάλλοντος.

Γι' αυτόν τον λόγο, **ένα όργανο μας δίνει πάντα μια εκτίμηση της τιμής**, η οποία συνοδεύεται υποχρεωτικά από την αβεβαιότητά της (το εύρος μέσα στο οποίο πιθανότατα βρίσκεται η τιμή).

Αναλογικά και ψηφιακά όργανα

Το όργανο δεν δίνει "την αλήθεια". Δίνει ένδειξη με πεπερασμένη διακριτική ικανότητα και πιθανή μεροληψία.

Αναλογικά όργανα

- συνεχής κλίμακα ένδειξης
- η ανάγνωση επηρεάζεται από παράλλαξη
- η εκτίμηση γίνεται συνήθως στο μισό μικρότερης διαίρεσης

π.χ. αναλογικό παχύμετρο, αναλογικό πολύμετρο, χάρακας, θερμόμετρο υδραργύρου/οινοπνεύματος



Η. Σακέλλης



Ψηφιακά όργανα

- διακριτά βήματα ένδειξης
- δεν αφαιρεί αυτόματα τα συστηματικά σφάλματα
- χρειάζεται μηδενισμός, εύρος λειτουργίας και βαθμονόμηση

π.χ. ψηφιακό παχύμετρο, ψηφιακό χρονόμετρο, ψηφιακό πολύμετρο

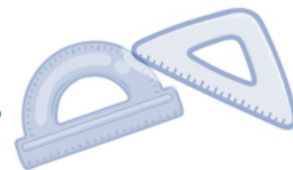


Αβεβαιότητα ανάγνωσης: Λόγω περιορισμένη διακριτική ικανότητα

Κατά την ανάγνωση ενός αναλογικού οργάνου, η μέτρηση επηρεάζεται από τη μικρότερη διαίρεση της κλίμακας και από το πόσο καλά μπορούμε να εκτιμήσουμε τη θέση του δείκτη ανάμεσα σε δύο διαβαθμίσεις. Για τον λόγο αυτό, κάθε ανάγνωση συνοδεύεται από μια **αβεβαιότητα ανάγνωσης**.

**Περιορισμένη διακριτική ικανότητα → Πηγή αβεβαιότητας ανάγνωσης
(θα ταξινομηθεί αργότερα ως αβεβαιότητα Τύπου Β)**

Παράδειγμα



Αν ένας χάρακας έχει μικρότερη διαίρεση 1mm, μια μέτρηση μπορεί να καταγραφεί για παράδειγμα ως 12,4cm, αλλά δεν είναι δικαιολογημένο να δοθούν πολλά επιπλέον δεκαδικά ψηφία, αφού η ίδια η κλίμακα δεν επιτρέπει τόσο λεπτομερή ανάγνωση.

Αβεβαιότητα ανάγνωσης: Λόγω παράλλαξης

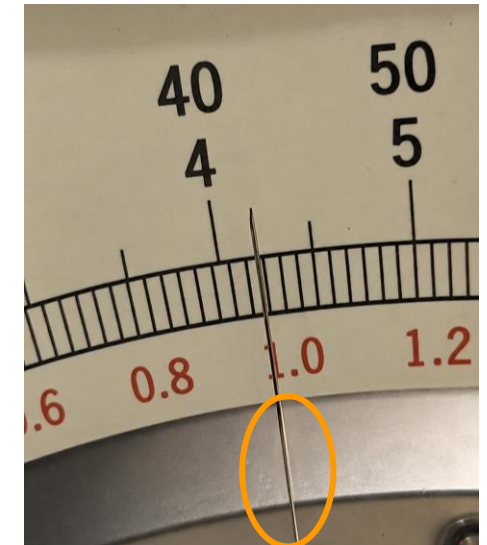
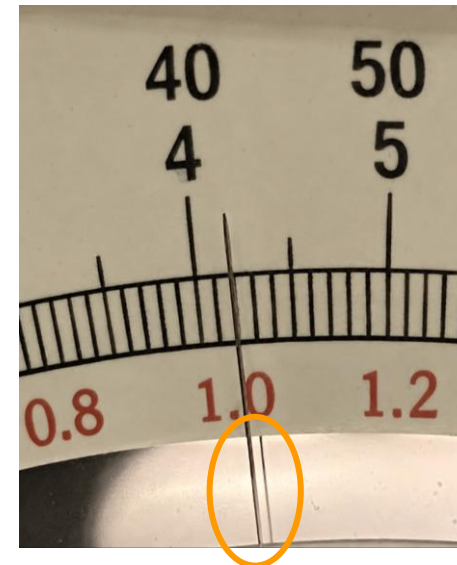
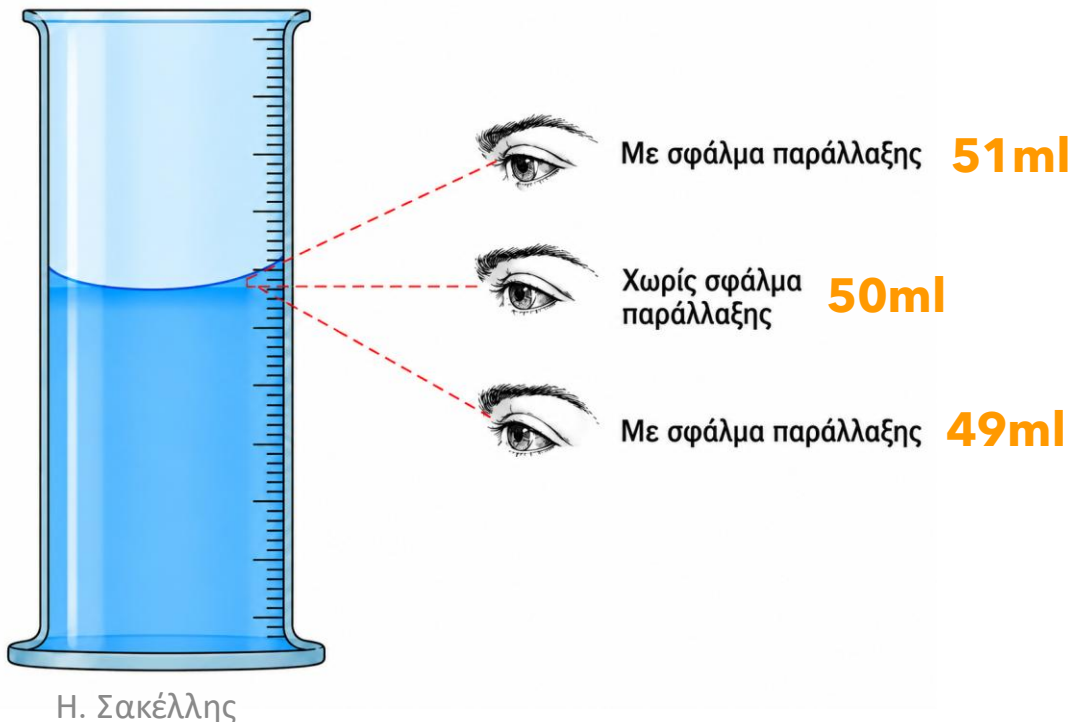
Η παράλλαξη είναι μία περίπτωση σφάλματος ανάγνωσης που εμφανίζεται όταν το μάτι δεν βρίσκεται κάθετα απέναντι από την κλίμακα. Τότε ο δείκτης φαίνεται να βρίσκεται σε διαφορετική θέση και μπορεί να διαβαστεί λανθασμένη τιμή.

Αβεβαιότητα παράλλαξης → Συστηματικό ή τυχαίο σφάλμα

Παραδείγματα

Με σφάλμα παράλλαξης

Χωρίς σφάλμα παράλλαξης



Σε ορισμένα αναλογικά όργανα υπάρχει ένας καθρέφτης πίσω από την κλίμακα/δείκτης.

Αβεβαιότητα Ανάγνωσης Αναλογικού Οργάνου

Πριν από κάθε στατιστική επεξεργασία, προσδιορίζεται η αβεβαιότητα του οργάνου μέτρησης (Αβεβαιότητα Τύπου Β).

Αναλογικά Όργανα (με κλίμακα και δείκτη)

Κανόνας: Η τυπική αβεβαιότητα ανάγνωσης ($u_{\text{οργ}}$) λαμβάνεται συνήθως (θεωρώντας στο πλαίσιο του εργαστηρίου την κανονική κατανομή) το ήμισυ ($\pm \frac{1}{2}$) της ελάχιστης διαίρεσης d , δηλαδή το όριο ανάγνωσης λόγω της οπτικής εκτίμησης του παρατηρητή ανάμεσα στις γραμμές.

Παραδείγματα

- Ένα θερμόμετρο με ελάχιστη διαίρεση 0.1°C έχει όριο ανάγνωσης $\pm 0.05^\circ\text{C}$ και τυπική αβεβαιότητα $u_{\text{οργ}} = 0.05^\circ\text{C}$
- Ένας μετρητής στροφών με κλίμακα ανά 10rpm έχει όριο ανάγνωσης $\pm 5\text{rpm}$ και τυπική αβεβαιότητα $u_{\text{οργ}} = 5\text{rpm}$



Ανάλογα με το πως εκτιμούμε ότι κατανέμονται οι τιμές μέσα στα όρια ενός οργάνου (π.χ. η διακριτική ικανότητα ή η υποδιαίρεση μιας κλίμακας) επιλέγουμε την κατάλληλη κατανομή (Κανονική/Gaussian, Ορθογώνια/Ομοιόμορφη, Τριγωνική κ.α.) ώστε αυτά τα όρια ανάγνωσης αν μετατραπούν σωστά σε τυπική αβεβαιότητα. Μια συνήθης και μετρολογικά φυσική επιλογή, όταν γνωρίζουμε μόνο ότι η τιμή βρίσκεται μέσα στα όρια $\pm d/2$, είναι η ομοιόμορφη κατανομή οπότε $u_{\text{οργ}} = d/\sqrt{12}$

Αβεβαιότητα Ανάγνωσης Ψηφιακού Οργάνου

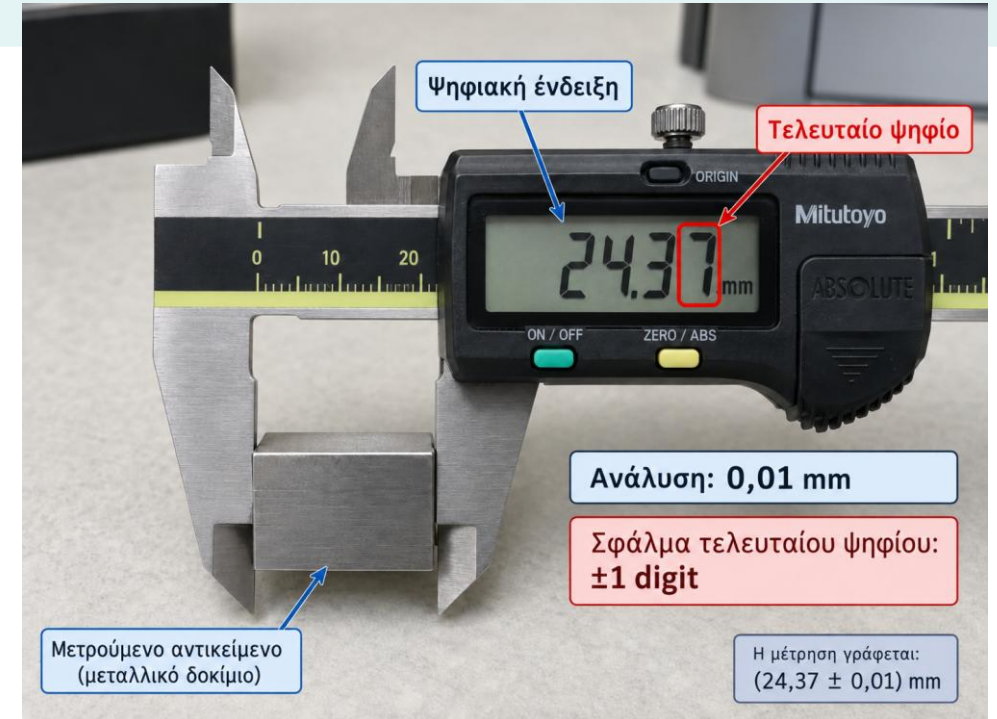
Ψηφιακά Όργανα (με οθόνη ενδείξεων)

Κανόνας: Η μικρότερη μεταβολή που μπορεί να εμφανιστεί στην οθόνη καθορίζεται από το τελευταίο ψηφίο της ένδειξης και αποτελεί τη διακριτική ικανότητα του οργάνου.

Στο πλαίσιο του εργαστηρίου, όταν δεν δίνονται άλλες προδιαγραφές από τον κατασκευαστή, η αβεβαιότητα ανάγνωσης μπορεί να λαμβάνεται ίση με ± 1 μονάδα του τελευταίου ψηφίου.

Παραδείγματα

- Ένας ηλεκτρονικός ζυγός που δείχνει 12.45g έχει αβεβαιότητα ανάγνωσης ± 0.01 g.
- Ένα ψηφιακό χρονόμετρο που γράφει 1504s έχει αβεβαιότητα ανάγνωσης ± 1 s.



Γνωριμία με τα όργανα μέτρησης & τους αισθητήρες



Φωτοπύλη



Η φωτοπύλη (photogate) αποτελείται από έναν πομπό φωτός και έναν φωτοανιχνευτή, τοποθετημένους αντικριστά πάνω στο ίδιο πλαίσιο. Ο πομπός εκπέμπει μια στενή, συνήθως υπέρυθρη, δέσμη προς τον φωτοανιχνευτή. Όταν ένα σώμα περάσει από το άνοιγμα της φωτοπύλης, παρεμβάλλεται στη διαδρομή της δέσμης και τη διακόπτει. Το ηλεκτρονικό κύκλωμα της φωτοπύλης καταγράφει τη χρονική στιγμή έναρξης και λήξης της διακοπής.

Τόσο οι φωτοπύλες όσο και οι αισθητήρες κίνησης σε μια μονάδα διασύνδεσης (interface/data-logger). Η μονάδα αυτή λαμβάνει το ηλεκτρικό σήμα από τον αισθητήρα ή τη φωτοπύλη, το μετατρέπει σε ψηφιακά δεδομένα και τα στέλνει στον υπολογιστή.



Αισθητήρας κίνησης



Ο αισθητήρας κίνησης (motion detector) λειτουργεί συνήθως με υπερήχους. Εκπέμπει έναν σύντομο παλμό υπερήχων προς το κινούμενο σώμα. Ο παλμός ανακλάται στο σώμα και επιστρέφει στον αισθητήρα. Το όργανο μετρά τον χρόνο διαδρομής του παλμού, δηλαδή τον χρόνο από την εκπομπή μέχρι την επιστροφή του.

Ηλεκτρονικός ζυγός



Ο ηλεκτρονικός ζυγός μετρά τη μάζα μέσω ενός στοιχείου φόρτισης (πολύ λεπτές μεταλλικές αντιστάσεις, συνήθως σε μορφή μικρού ζιγκ-ζαγκ). Το βάρος του σώματος προκαλεί μικρή ελαστική παραμόρφωση, η οποία μεταβάλλει την αντίσταση μετρητών παραμόρφωσης. Η μεταβολή μετατρέπεται σε ηλεκτρικό σήμα και, μετά από βαθμονόμηση, εμφανίζεται ως μάζα στην οθόνη.

Πολύμετρο



Πριν από κάθε μέτρηση πρέπει να ελέγχουμε:

1. Σε ποια υποδοχή βρίσκονται οι ακροδέκτες,
2. Ποια λειτουργία έχει επιλεγεί,
3. Ποια περιοχή μέτρησης χρησιμοποιούμε,
4. Αν το κύκλωμα είναι ενεργό ή όχι.
5. Σε μέτρηση αντίστασης ή συνέχειας περιμένουμε να εκφορτιστούν τυχόν πυκνωτές πριν ακουμπήσουμε τους ακροδέκτες.

Μετά από μέτρηση ρεύματος είναι καλή πρακτική να επιστρέφουμε το κόκκινο καλώδιο στην υποδοχή V/Ω.



Ένα πολύ συχνό λάθος είναι να έχει μείνει ο κόκκινος ακροδέκτης στην υποδοχή μέτρησης ρεύματος (1A, 10A, 20A ή mA) και ο χρήστης μετά να προσπαθήσει να μετρήσει τάση. Αυτό μπορεί να λειτουργήσει ουσιαστικά ως **βραχυκύκλωμα**.

Πολύμετρο - Λειτουργία ως Βολτόμετρο



Λειτουργία ως Βολτόμετρο

- Συνδέεται **παράλληλα** με το στοιχείο στα άκρα του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε τάση.
- Επιλέγουμε σωστά **DC** ή **AC** και κατάλληλη κλίμακα.
- Αν δεν γνωρίζουμε την τάση, ξεκινάμε από τη μεγαλύτερη κλίμακα.
- Στη μέτρηση συνεχούς τάσης προσέχουμε και την πολικότητα.

Πολύμετρο - Λειτουργία ως Αμπερόμετρο

Λειτουργία ως Αμπερόμετρο

- Συνδέεται **σε σειρά** με το κύκλωμα, ώστε το ρεύμα να περνά μέσα από το πολύμετρο.
- Πρέπει να χρησιμοποιείται η σωστή υποδοχή του ακροδέκτη, π.χ. **mA** ή **A** ή **10 A**, και να επιλέγεται η σωστή κλίμακα.
- Δεν συνδέουμε ποτέ το αμπερόμετρο απευθείας παράλληλα σε μια πηγή τάσης, γιατί μπορεί να προκληθεί πολύ μεγάλο ρεύμα και να καταστραφεί η ασφάλεια ή το όργανο.



Πολύμετρο - Λειτουργία ως Ωμόμετρο



Λειτουργία ως Ωμόμετρο

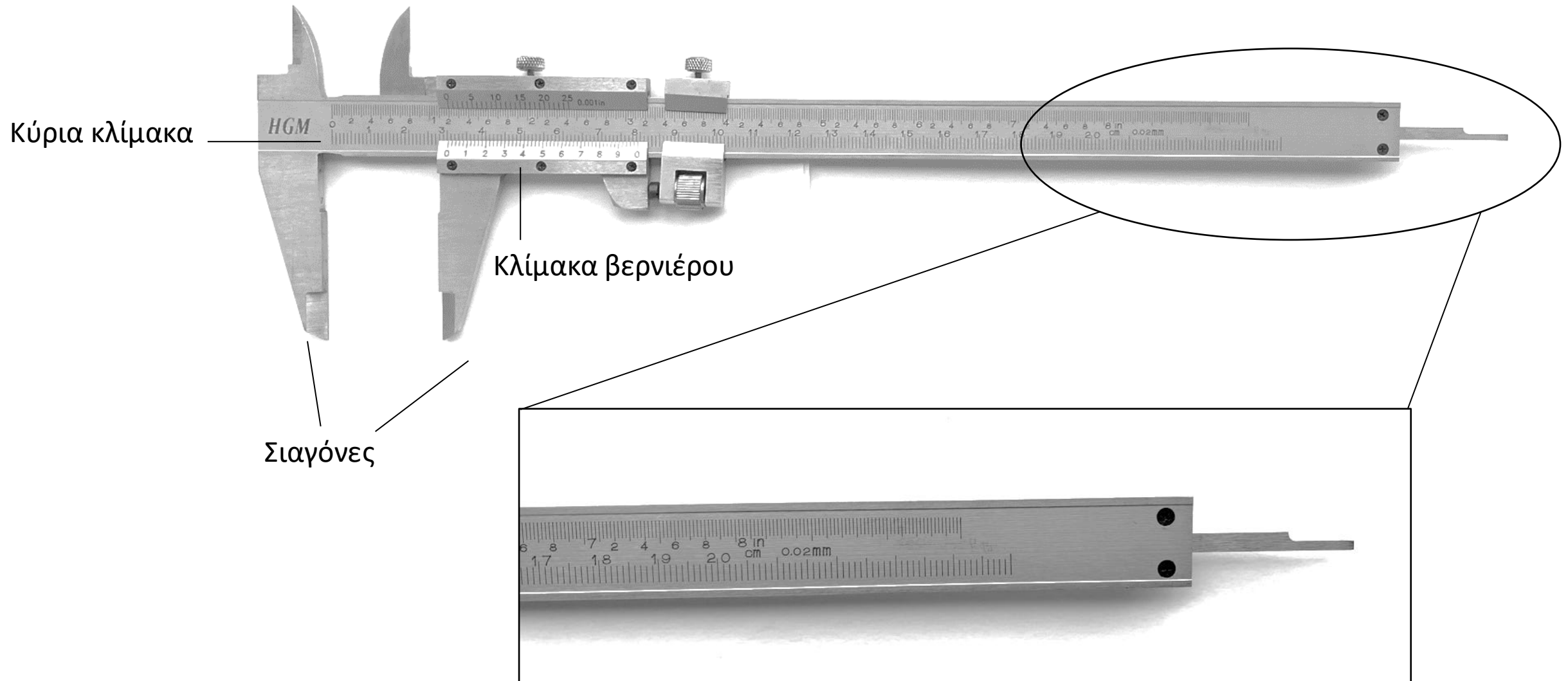
- Η μέτρηση γίνεται μόνο όταν το κύκλωμα είναι **χωρίς τροφοδοσία**.
- Το εξάρτημα που μετράμε καλό είναι να είναι απομονωμένο από το υπόλοιπο κύκλωμα, τουλάχιστον από τη μία πλευρά, ώστε άλλες παράλληλες διαδρομές να μην αλλοιώνουν τη μέτρηση.

Πολύμετρο - Λειτουργία συνέχειας κυκλώματος



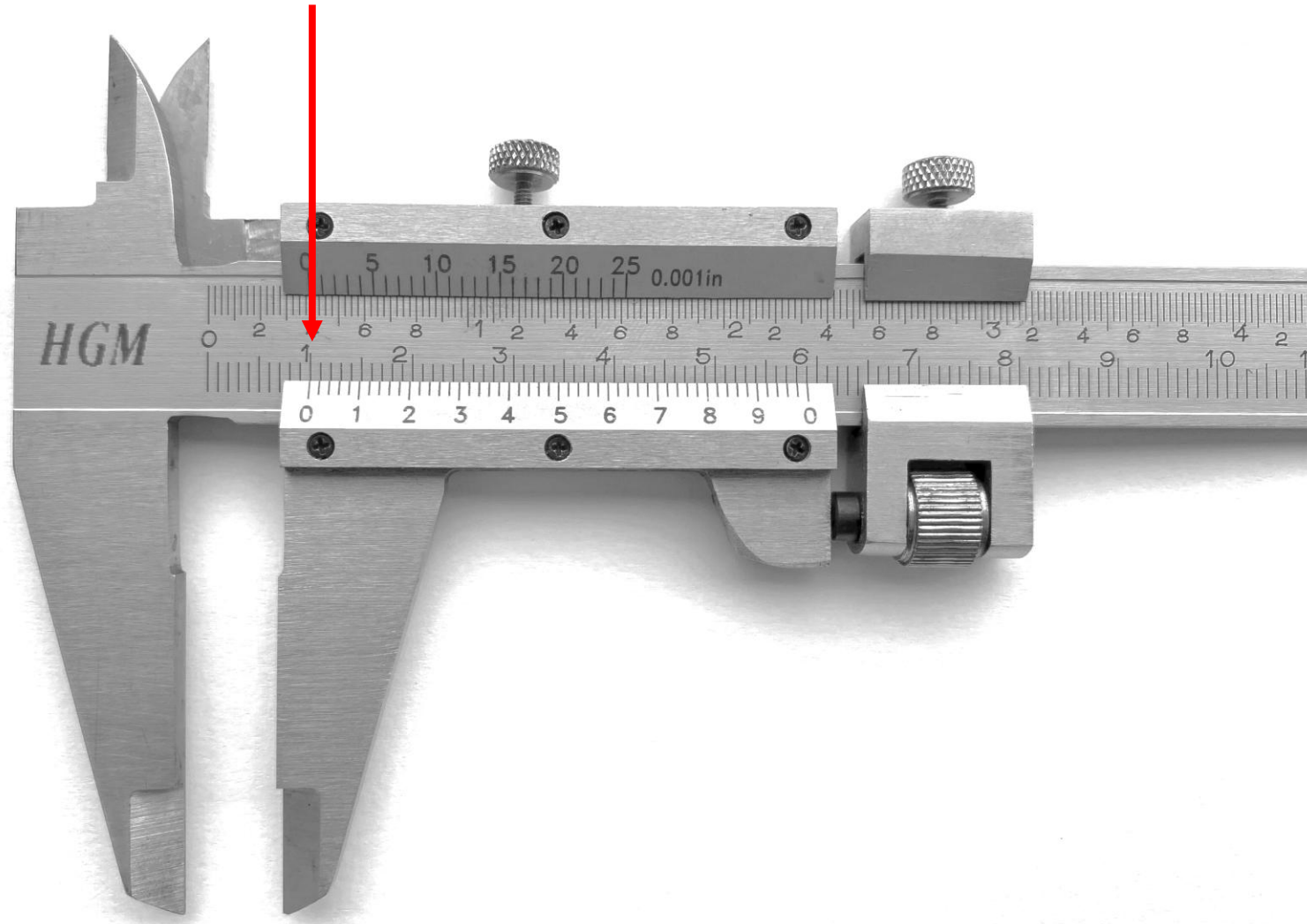
Η λειτουργία συνέχειας κυκλώματος χρησιμοποιείται για να ελέγξουμε αν υπάρχει ηλεκτρικά αγωγίμη σύνδεση μεταξύ δύο σημείων. Το πολύμετρο εφαρμόζει μια μικρή εσωτερική τάση και μετρά την αντίσταση ανάμεσα στους ακροδέκτες. Αν η αντίσταση είναι πολύ μικρή, συνήθως ακούγεται ένα χαρακτηριστικό ηχητικό σήμα, που δείχνει ότι το κύκλωμα είναι συνεχές. Χρησιμοποιείται συχνά για έλεγχο καλωδίων, ασφαλειών, διακοπών και συνδέσεων. Η μέτρηση πρέπει να γίνεται με το κύκλωμα **χωρίς τροφοδοσία**.

Παχύμετρο Vernier

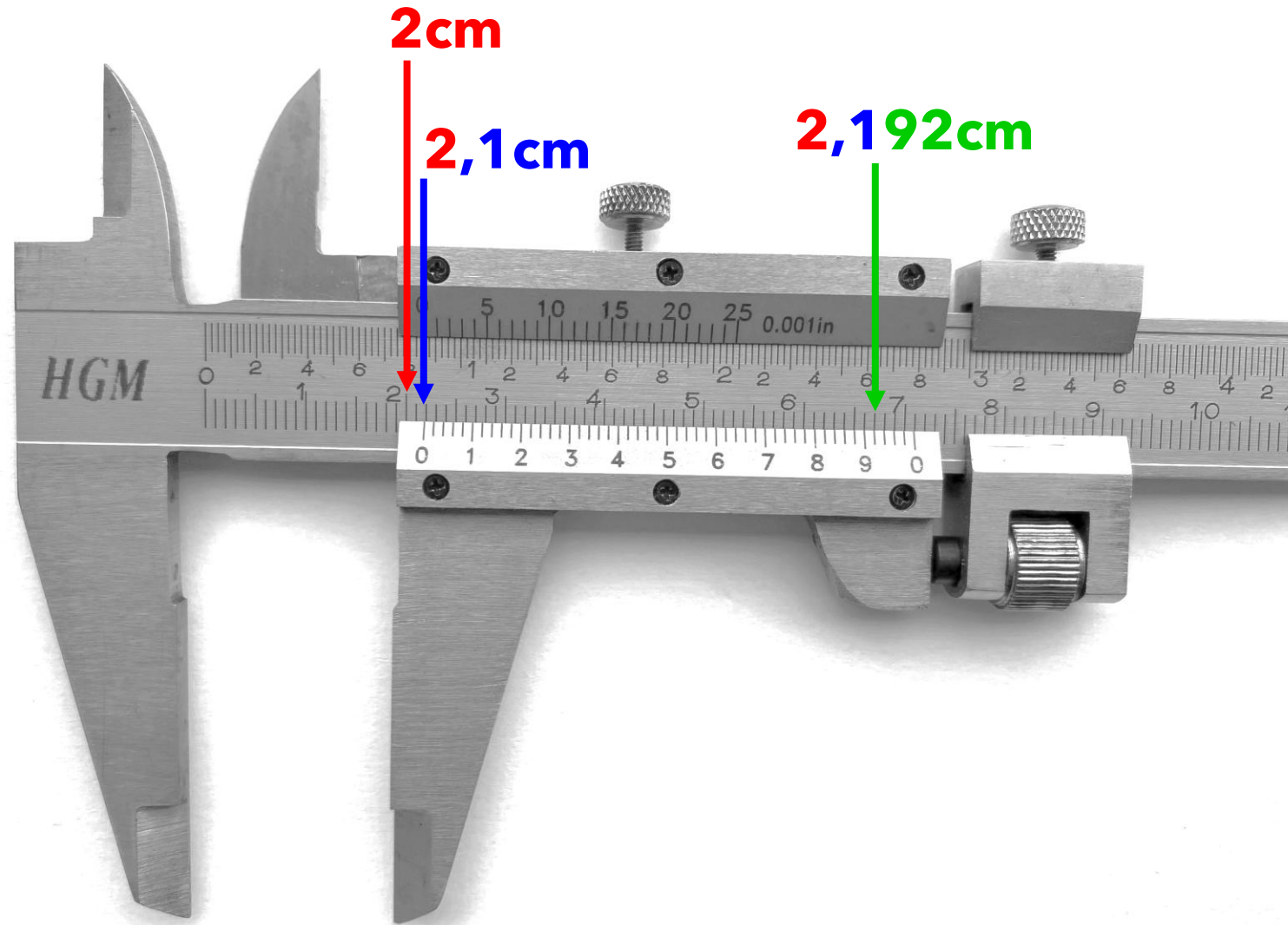


Παχύμετρο - παράδειγμα 1

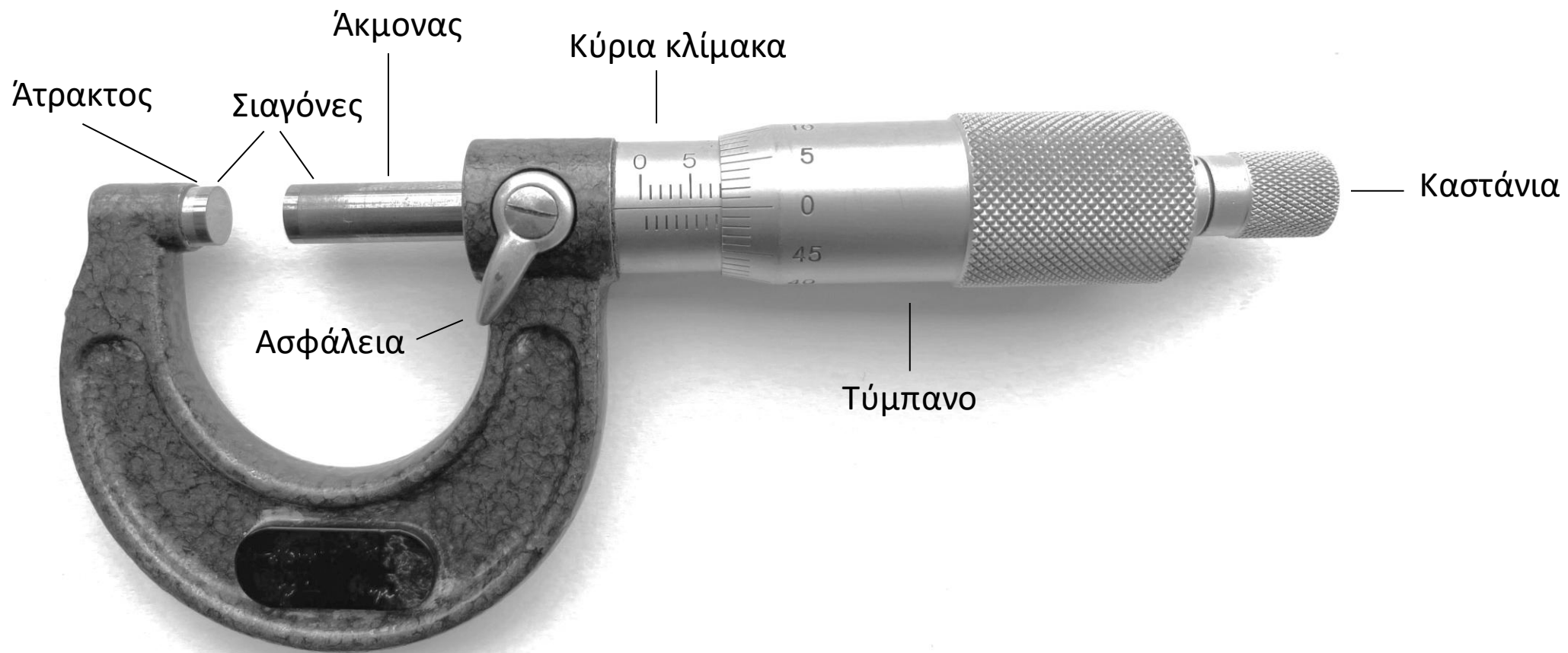
1,000cm



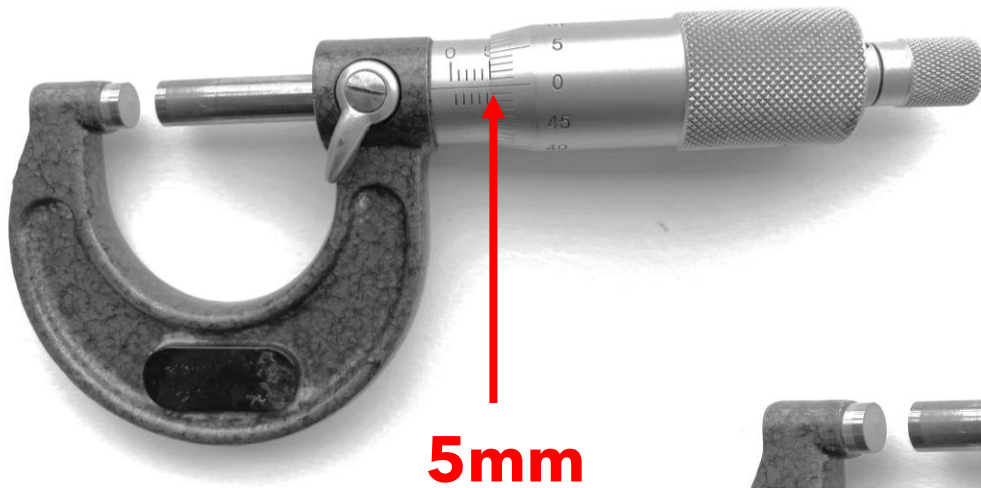
Παχύμετρο - παράδειγμα 2



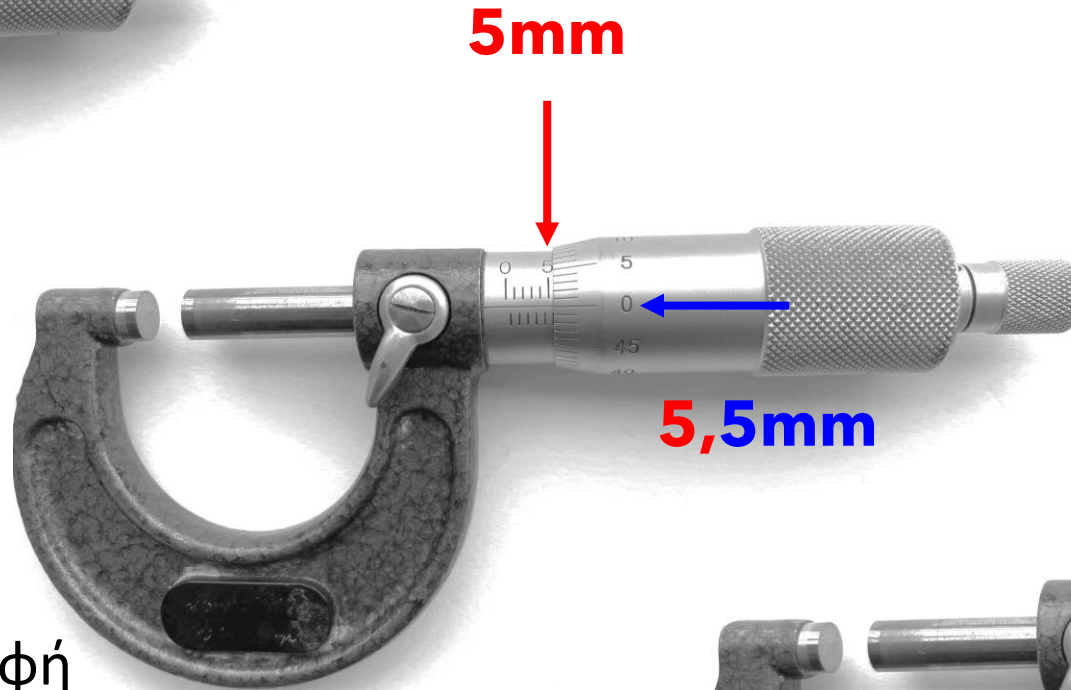
Μικρόμετρο



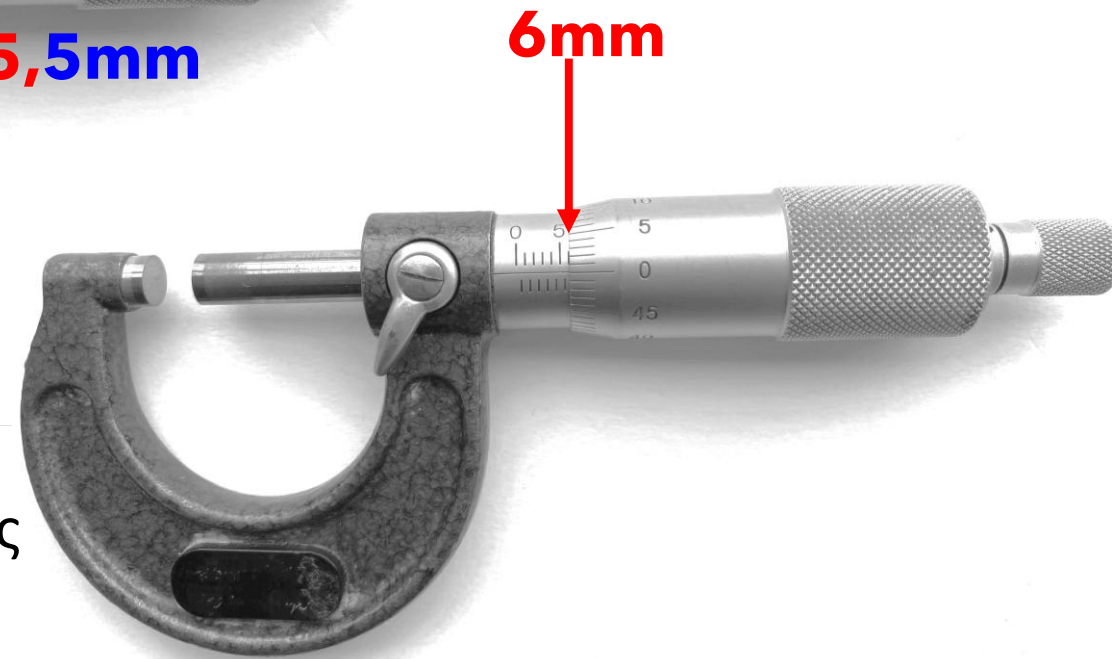
Μικρόμετρο - παράδειγμα 1



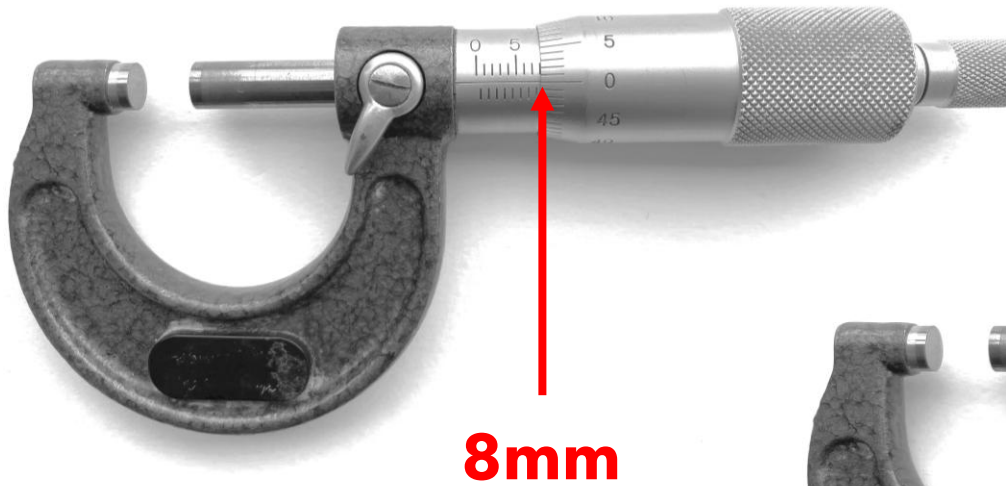
Μετά από μία περιστροφή
του τυμπάνου



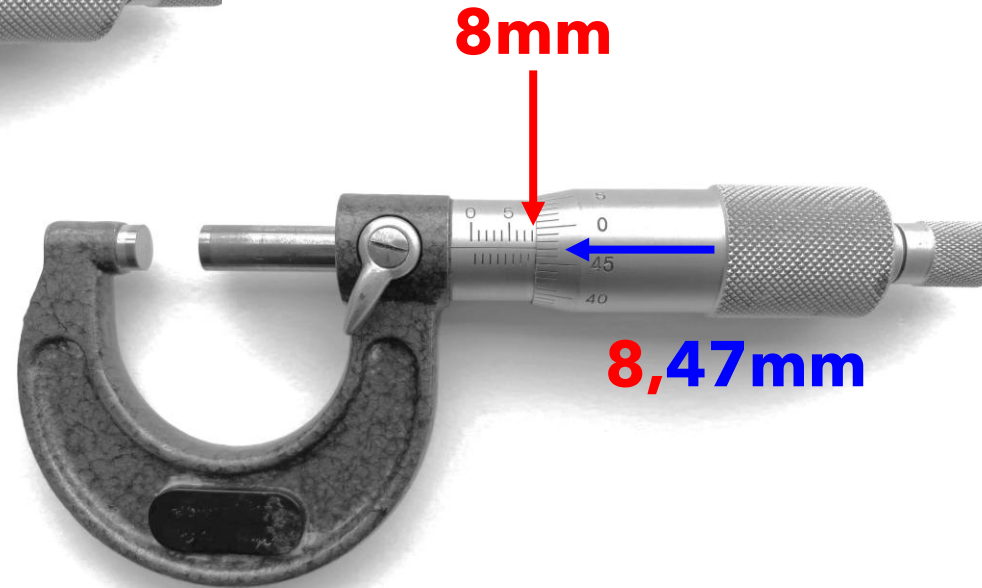
Μετά από δύο περιστροφές
του τυμπάνου



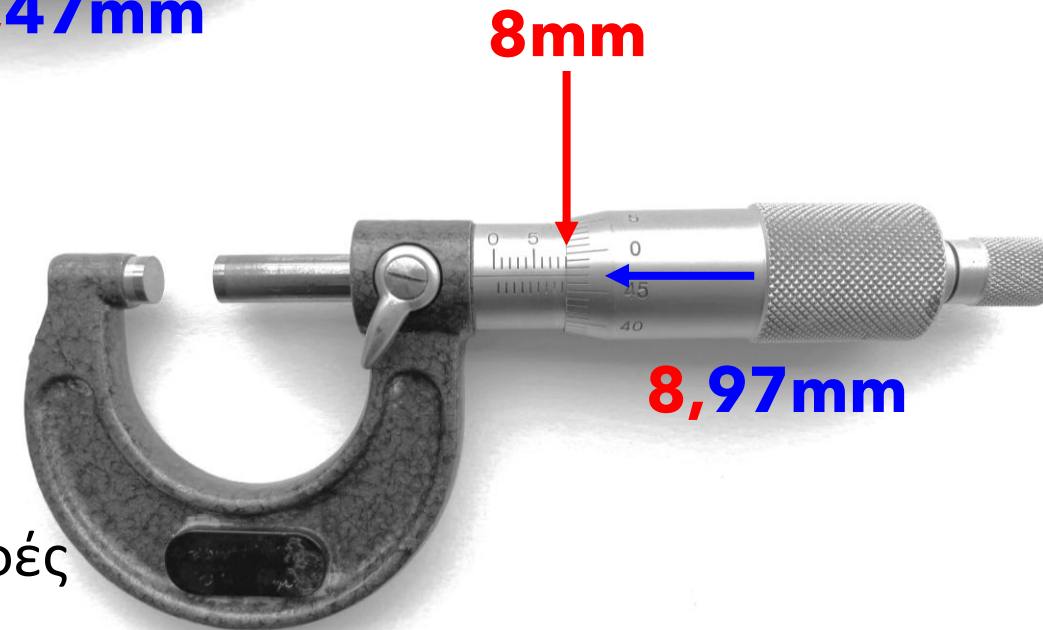
Μικρόμετρο - παράδειγμα 2



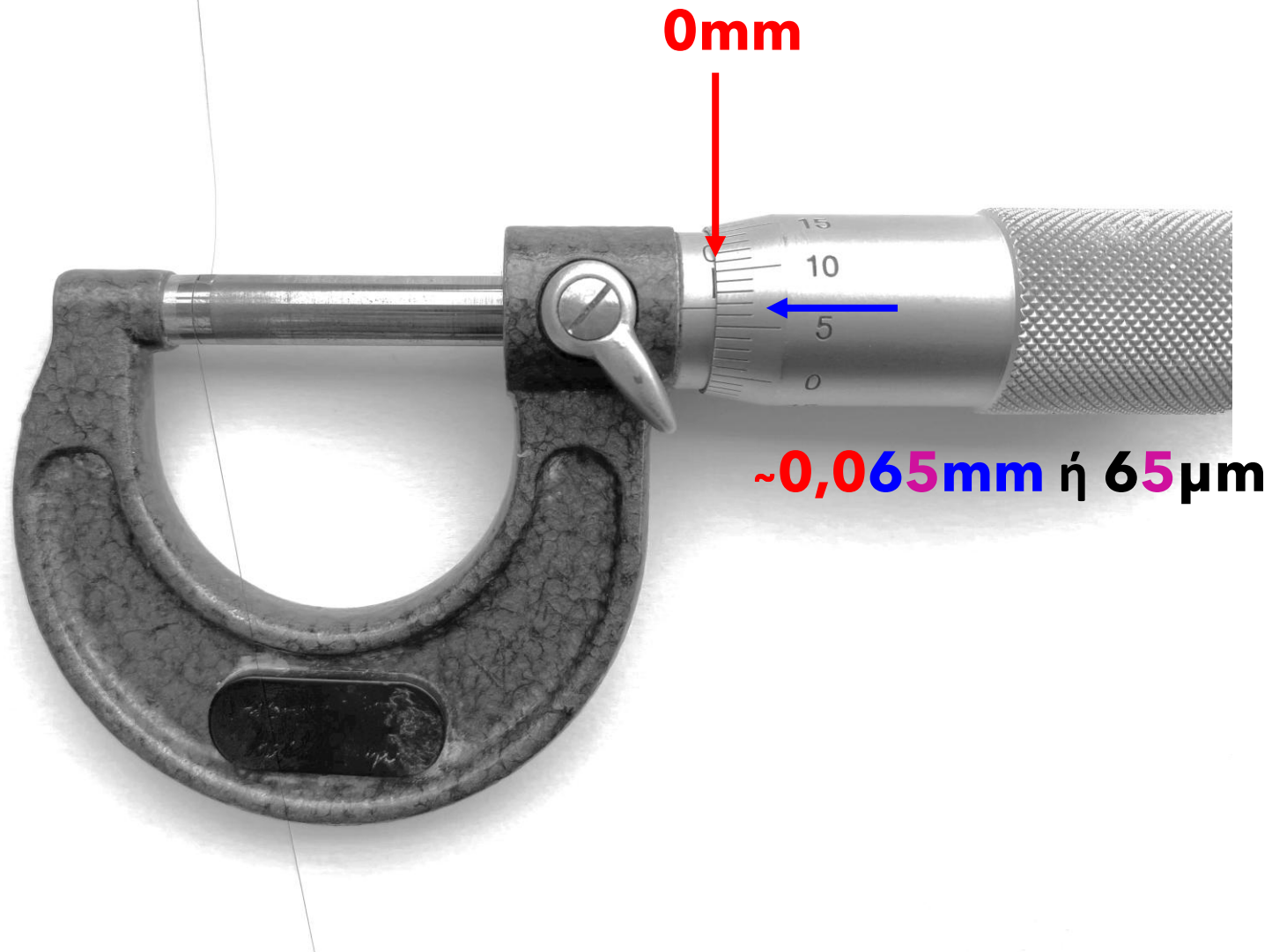
Μετά από μία περιστροφή
του τυμπάνου



Μετά από δύο περιστροφές
του τυμπάνου



Μικρόμετρο - παράδειγμα 3: Πάχος τρίχας



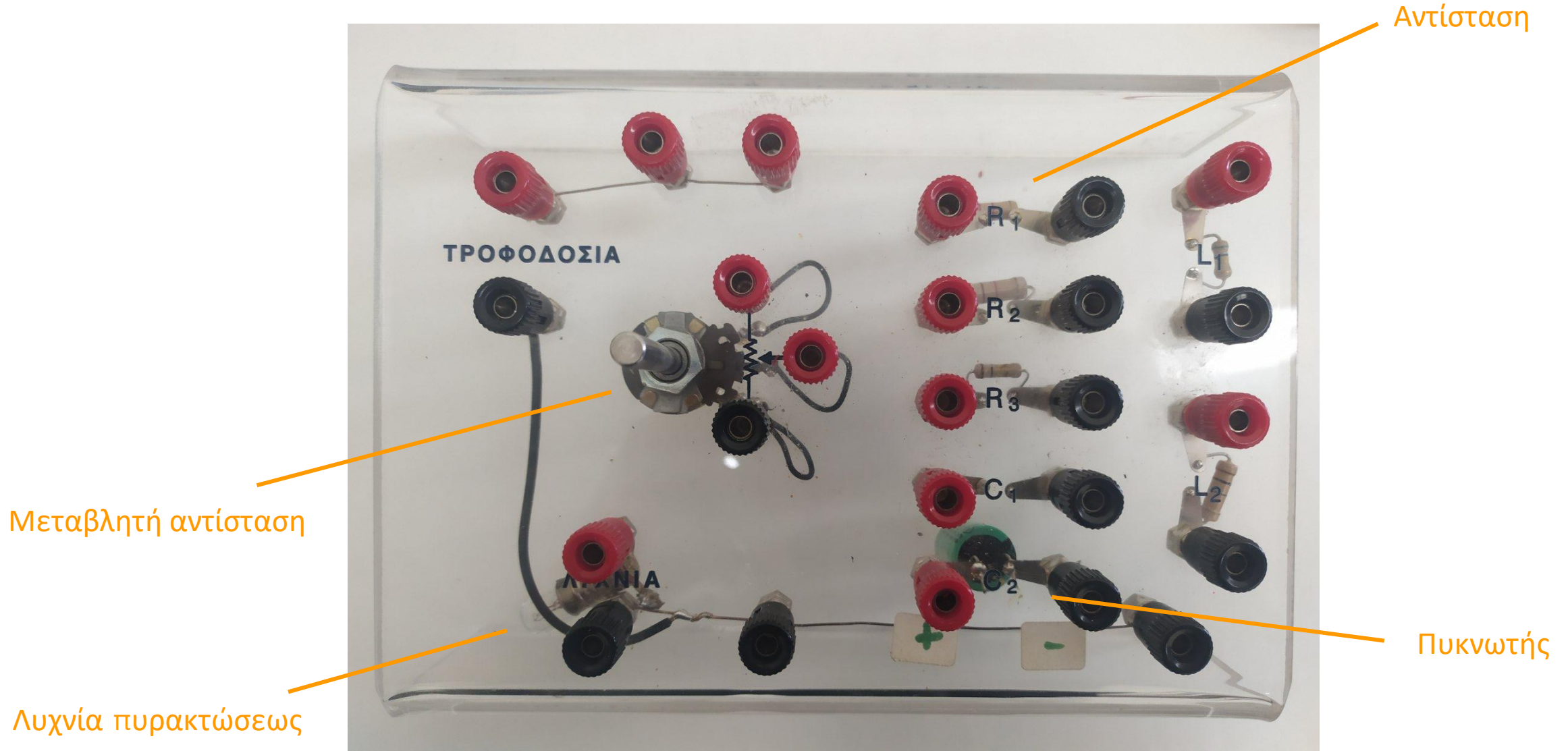
Έλεγχος σφάλματος μηδενός



Πριν από κάθε μέτρηση, κλείστε απαλά τις σιαγόνες του παχύμετρου ή φέρτε σε επαφή τις επιφάνειες μέτρησης του μικρομέτρου και ελέγξτε αν η ένδειξη είναι μηδενική.

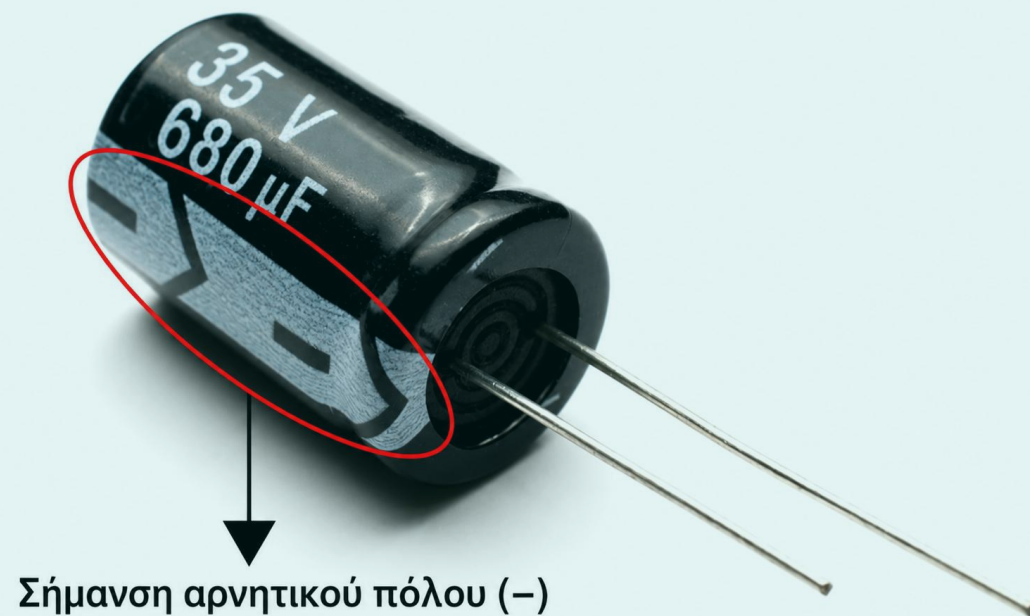
Αν η ένδειξη **διαφέρει** από το μηδέν, η απόκλιση αυτή ονομάζεται σφάλμα μηδενός και πρέπει να αφαιρείται αλγεβρικά από τις μετρούμενες τιμές.

Πλακέτα εργασίας

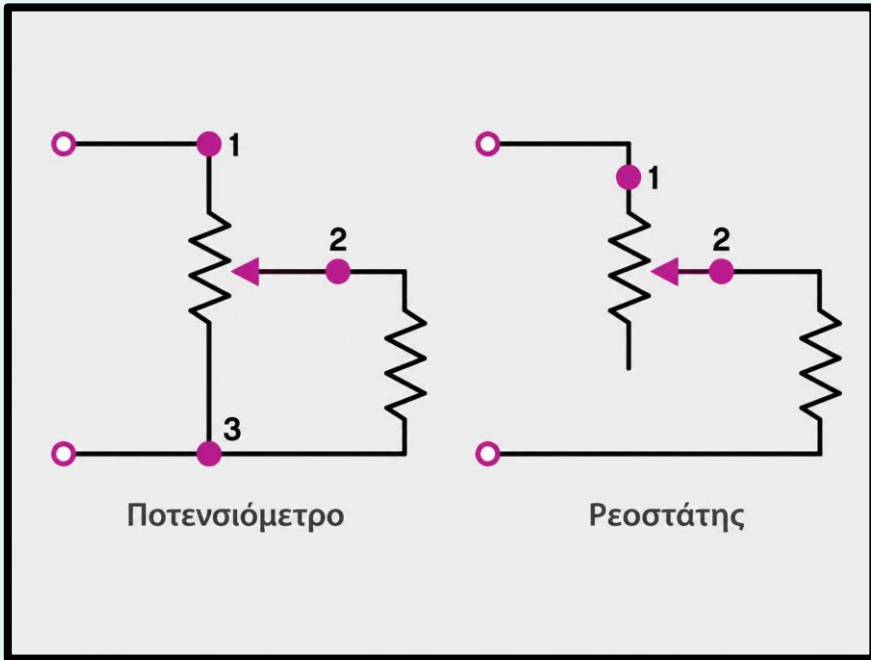


Ηλεκτρολυτικός πυκνωτής

Ο ηλεκτρολυτικός πυκνωτής είναι πολωμένος πυκνωτής, δηλαδή οι δύο ακροδέκτες του έχουν συγκεκριμένη πολικότητα (+ και -). Συνήθως προσφέρει σχετικά μεγάλη χωρητικότητα σε μικρό όγκο. Κατά τη σύνδεσή του πρέπει να τηρείται η σωστή πολικότητα, γιατί αντίστροφη τάση μπορεί να προκαλέσει βλάβη ή ακόμη και καταστροφή του.



Ρυθμιζόμενη αντίσταση - ροοστάτης / ποτενσιόμετρο



Η διάταξη αποτελείται από μια αντιστάσιμη διαδρομή και έναν κινητό ακροδέκτη (δρομέα, wiper), η θέση του οποίου μεταβάλλεται με το ρυθμιστικό.

Όταν χρησιμοποιούνται δύο ακροδέκτες - ο δρομέας και ένας από τους δύο ακραίους ακροδέκτες - λειτουργεί ως ροοστάτης, δηλαδή ως μεταβλητή αντίσταση.

Όταν χρησιμοποιούνται και οι τρεις ακροδέκτες, λειτουργεί ως ποτενσιόμετρο, δηλαδή ως διαιρέτης τάσης, από τον οποίο λαμβάνουμε μεταβλητή τάση εξόδου.

Προετοιμασία για την εργαστηριακή άσκηση με τη βοήθεια ενός Μεγάλου Γλωσσικού Μοντέλου (LLM)

- 1. Αντικείμενο:** «Ποιο φυσικό φαινόμενο μελετά η άσκηση και ποια είναι η βασική της ιδέα;»
- 2. Στόχοι:** «Ποιοι είναι οι βασικοί στόχοι της άσκησης και τι επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε ή να επαληθεύσουμε;»
- 3. Θεωρητικό υπόβαθρο:** «Ποιες βασικές έννοιες και φυσικούς νόμους πρέπει να γνωρίζω;»
- 4. Μαθηματικές σχέσεις:** «Ποιες εξισώσεις θα χρησιμοποιήσω και τι εκφράζουν τα φυσικά μεγέθη τους;»
- 5. Πειραματική διάταξη:** «Ποια όργανα θα χρησιμοποιήσω και ποιος είναι ο ρόλος τους;»
- 6. Πειραματική διαδικασία:** «Ποια είναι τα βασικά βήματα εκτέλεσης της άσκησης και γιατί πραγματοποιούνται;»
- 7. Μετρήσεις:** «Ποια μεγέθη θα μετρήσω άμεσα και ποια θα υπολογίσω από τις μετρήσεις;»
- 8. Πειραματικά σφάλματα:** «Ποιες είναι οι σημαντικότερες πηγές σφαλμάτων και τι πρέπει να προσέξω κατά τη μέτρηση;»
- 9. Έλεγχος κατανόησης:** «Κάνε μου πέντε σύντομες ερωτήσεις για να ελέγξω αν έχω κατανοήσει τη θεωρία και την πειραματική διαδικασία. Αξιολόγησε τις απαντήσεις μου και εξήγησέ μου τυχόν λάθη.»

Τι είναι τα σφάλματα;

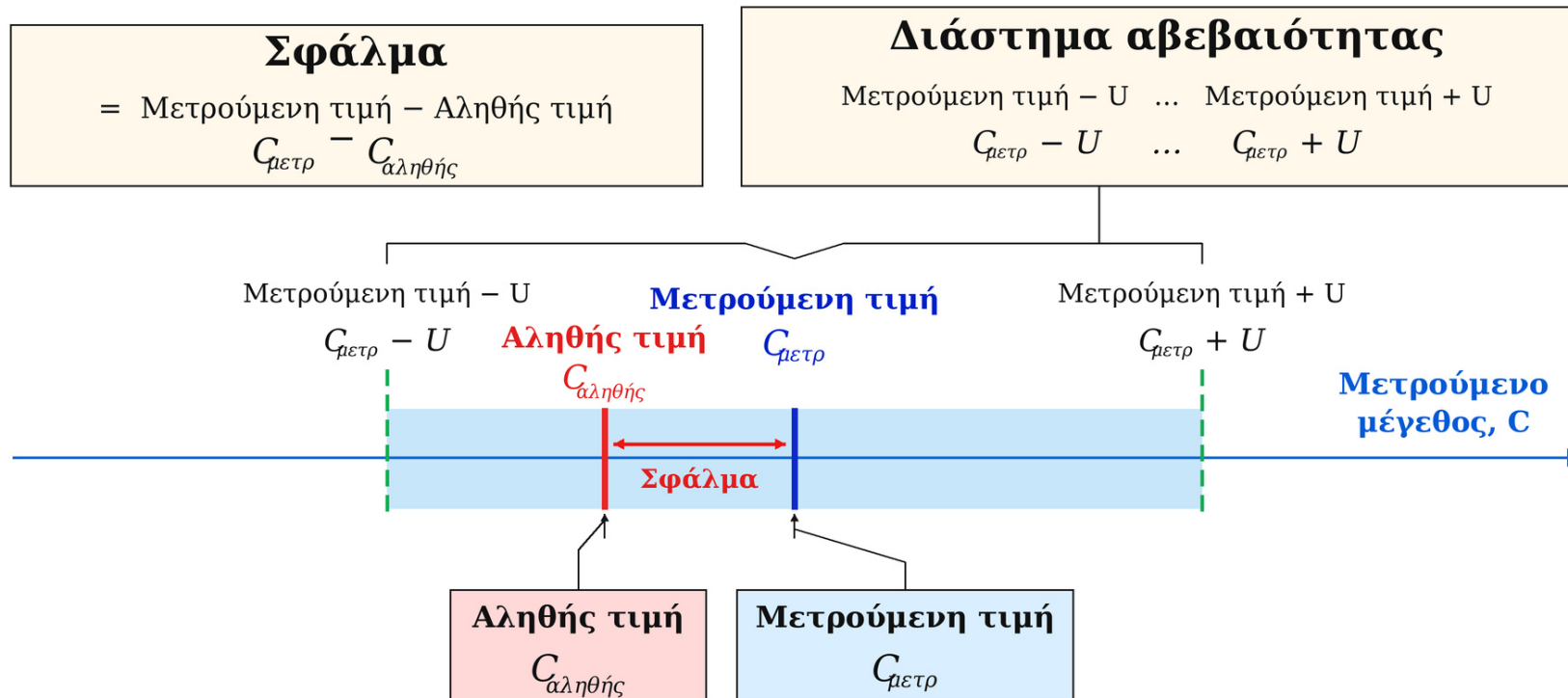
Πειραματικά σφάλματα είναι οι αποκλίσεις που εμφανίζονται ανάμεσα στο αποτέλεσμα μιας μέτρησης και στην τιμή που θα είχε ιδανικά το μετρούμενο μέγεθος.

Πειραματικό σφάλμα στη Μετρολογία ορίζεται ως η μετρούμενη τιμή μείον μια τιμή αναφοράς του μεγέθους. Στην πράξη όμως η «αληθής τιμή» δεν είναι ποτέ πλήρως γνωστή, γι' αυτό στη σύγχρονη γλώσσα των μετρήσεων μιλάμε περισσότερο για αβεβαιότητα μέτρησης παρά για απόλυτα γνωστό σφάλμα.

Σφάλμα ≠ Αβεβαιότητα

Το **σφάλμα** έχει συγκεκριμένη τιμή και πρόσημο, αλλά συνήθως δεν είναι ακριβώς γνωστό, επειδή η αληθής τιμή δεν είναι γνωστή.

Η **αβεβαιότητα** είναι η ποσοτικοποίηση της αμφιβολίας που αποδίδουμε στο μετρούμενο μέγεθος. Η αβεβαιότητα εκφράζεται ως μη αρνητική ποσότητα.



Πιστότητα (Precision)

Η Πιστότητα (Precision) είναι η συμφωνία ή η εγγύτητα μεταξύ δύο ή περισσότερων μετρήσεων ενός μεγέθους, οι οποίες έγιναν με τον ίδιο τρόπο.

Ακρίβεια (Accuracy)

Η Ακρίβεια (Accuracy) είναι το πόσο κοντά βρίσκεται ένα αποτέλεσμα μέτρησης στην τιμή αναφοράς.

Ορθότητα (Trueness)

Η Ορθότητα (Trueness) εκφράζει το πόσο κοντά βρίσκεται ο μέσος όρος πολλών επαναλαμβανόμενων μετρήσεων στην τιμή αναφοράς.

Μέτρα της ακρίβειας

Απόλυτο σφάλμα (absolute error)

$$E = x_{\text{μετρούμενο}} - x_{\text{«πραγματικό»}}$$

Σχετικό σφάλμα (relative error)

$$E = \frac{x_{\text{μετρούμενο}} - x_{\text{«πραγματικό»}}}{x_{\text{«πραγματικό»}}} \cdot 100\%$$



Σε πιο καθημερινή γλώσσα ονομάζουμε καταχρηστικά Ακρίβεια (Accuracy) αυτό που στην πραγματικότητα είναι η Ορθότητα (Trueness) . Στην επιστήμη των μετρήσεων η Ακρίβεια είναι η ομπρέλα η οποία φιλοξενεί την Ορθότητα (Trueness) και την Πιστότητα (Precision).

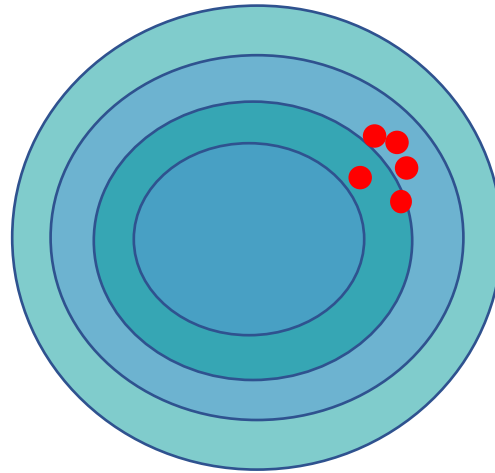
Είδη Σφαλμάτων

- **Συστηματικά Σφάλματα (Systematic Errors)**
- **Τυχαία Σφάλματα (Random Errors)**
- **Χονδροειδή Σφάλματα (Gross Errors / Mistakes)**



Συστηματικά Σφάλματα (Systematic Errors)

Επηρεάζουν τη μέτρηση κατά μια σταθερή ποσότητα ή κατά έναν προβλέψιμο νόμο προς την ίδια κατεύθυνση σε κάθε επανάληψη.



~~Ορθότητα~~
Πιστότητα



Τα συστηματικά σφάλματα επηρεάζουν κυρίως την ορθότητα (trueness), μετατοπίζοντας τη μέση τιμή των μετρήσεων σε σχέση με την τιμή αναφοράς.

Πηγές Συστηματικών Σφαλμάτων

1. Σφάλματα Οργάνου (Instrumental Errors):

Κακή βαθμονόμηση (*Calibration error / Offset error*): Το όργανο δεν δείχνει μηδέν όταν πρέπει (π.χ. ζυγός που ξεκινά από τα +0.5).

Σφάλμα κλίμακας (*Scale factor error*): Αναλογική απόκλιση σε όλο το εύρος μέτρησης (π.χ. χάρακα που έχει συρρικνωθεί/επεκταθεί).

2. Περιβαλλοντικοί Παράγοντες (Environmental Factors):

Μεταβολές θερμοκρασίας, πίεσης ή υγρασίας που επηρεάζουν τα υλικά (π.χ. θερμική διαστολή μεταλλικών οργάνων).

3. Σφάλματα Μεθόδου ή Διαδικασίας (Procedural / Methodological Errors):

Σφάλμα παράλλαξης: Λανθασμένη γωνία παρατήρησης της βελόνας ή της κλίμακας ενός αναλογικού οργάνου.

Παραλείψεις θεωρητικών διορθώσεων: π.χ. αγνόηση της άνωσης του αέρα σε ζυγίσεις υψηλής ακρίβειας ή αγνόηση της αντίστασης τριβής.

4. Υποκειμενικά / Προσωπικά Σφάλματα (Personal Systematic Errors):

Συστηματική προκατάληψη του παρατηρητή (π.χ. κάποιος τείνει πάντα να υπολογίζει καθυστερημένα ή προκαταβολικά έναν χρόνο).

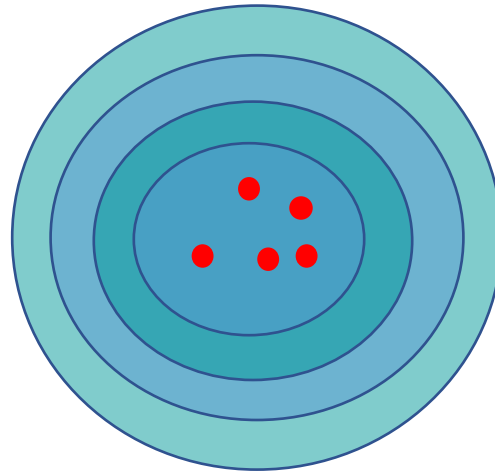


Τρόπος αντιμετώπισης Συστηματικών σφαλμάτων

- Βαθμονόμηση (calibration) έναντι προτύπων μεγαλύτερης ακρίβειας.
- Μηδενισμός και έλεγχος των οργάνων πριν από τη χρήση.
- Έλεγχος ή σταθεροποίηση περιβαλλοντικών συνθηκών (θερμοκρασία εργαστηρίου).

Τυχαία Σφάλματα (Random Errors)

Οφείλονται σε απρόβλεπτες και ανεξέλεγκτες μικροδιακυμάνσεις των συνθηκών του πειράματος ή του ίδιου του οργάνου.



Ορθότητα

~~Πιστότητα~~



Τα τυχαία σφάλματα αυξάνουν τη διασπορά των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων και επομένως μειώνουν την πιστότητα (precision).

Πηγές τυχαίων σφαλμάτων

- 1. Μικροδιακυμάνσεις Περιβάλλοντος:** Αόρατοι κραδασμοί κτιρίου, ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές δικτύου, ρεύματα αέρα.
- 2. Εσωτερικός Θόρυβος Οργάνων (Reading Noise / Jitter):** Ηλεκτρονικές διακυμάνσεις στα τελευταία ψηφία ψηφιακών οργάνων (πολύμετρα, παλμογράφοι).
- 3. Αβεβαιότητα Ανθρώπινου Χρόνου Αντίδρασης:** Τυχαίες μικροδιαφορές στον χρόνο αντίδρασης του πειραματιστή κατά τη χρήση χρονομέτρου.



Τρόπος Αντιμετώπισης τυχαίων σφαλμάτων

- Επανάληψη του πειράματος πολλές φορές (μετρήσεις).
- Υπολογισμός του μέσου όρου, καθώς η επίδραση των τυχαίων αποκλίσεων στη μέση τιμή μειώνεται στατιστικά.
- Χρήση στατιστικών εργαλείων (τυπική απόκλιση s και τυπική αβεβαιότητα της μέσης τιμής $u_A(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}}$) για τον προσδιορισμό του διαστήματος αβεβαιότητας.

Χονδροειδή Σφάλματα (Gross Errors / Mistakes)

Χονδροειδή σφάλματα είναι λάθη ή αστοχίες στη διαδικασία μέτρησης ή καταγραφής, τα οποία δεν αποτελούν μέρος της συνήθους τυχαίας ή συστηματικής μεταβλητότητας της μέτρησης.

Πηγές χονδροειδών σφαλμάτων

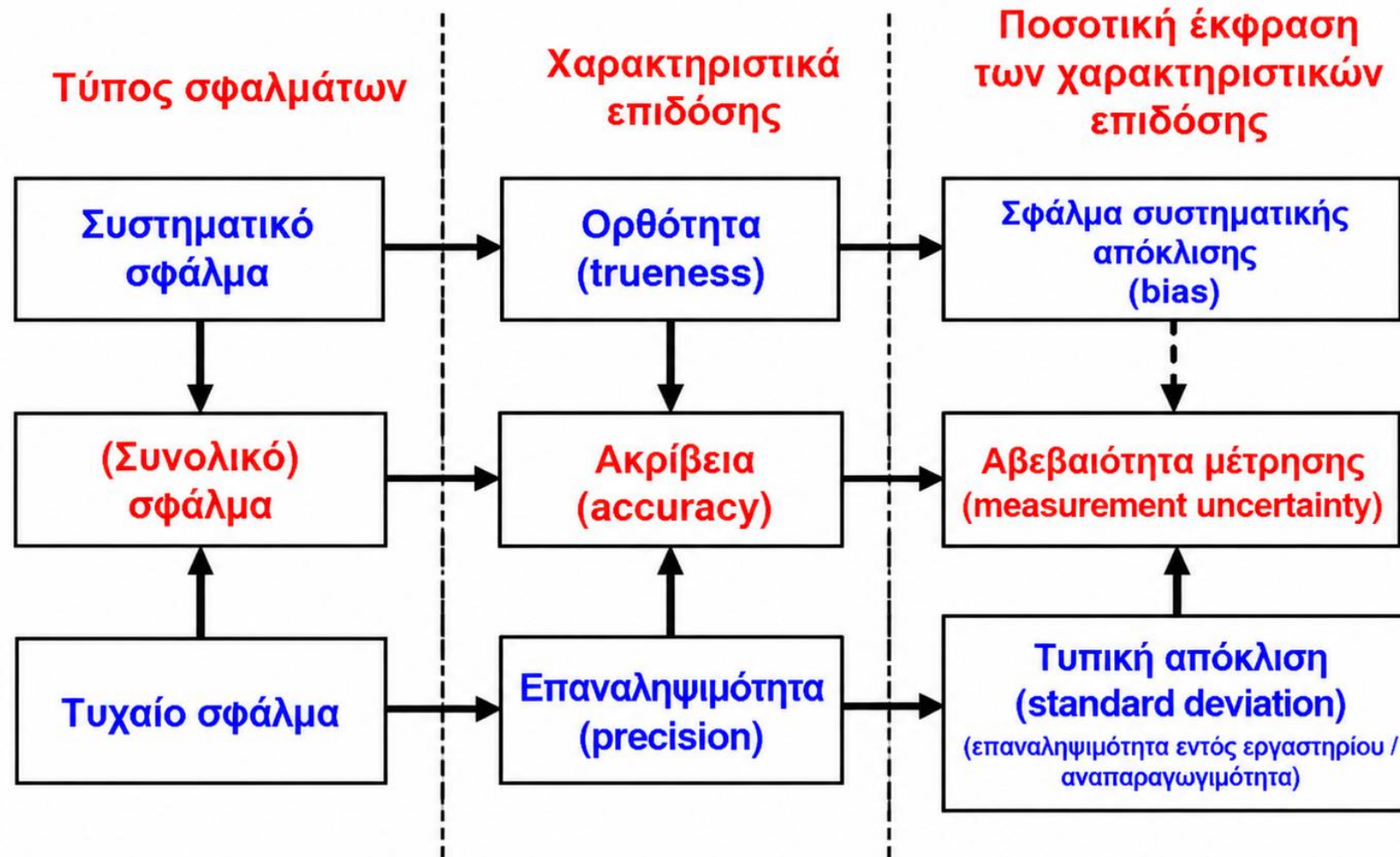
- 1. Λανθασμένη ανάγνωση ή καταγραφή:** Αντιστροφή ψηφίων (π.χ. καταγραφή 58 αντί για 85), λάθος τοποθέτηση υποδιαστολής.
- 2. Εσφαλμένη χρήση εξοπλισμού:** Σύνδεση οργάνου με λάθος πολικότητα ή επιλογή λανθασμένης κλίμακας μέτρησης.
- 3. Λάθη στους υπολογισμούς:** Χρήση εσφαλμένων μαθηματικών τύπων ή λανθασμένη εισαγωγή δεδομένων στο λογισμικό ανάλυσης.



Τρόπος Αντιμετώπισης χονδροειδών σφαλμάτων

- Δεν μειώνονται με απλή επανάληψη ή μέσο όρο και δεν πρέπει να ενσωματώνονται άκριτα στη στατιστική επεξεργασία .
- Δεν απορρίπτεται μια τιμή μόνο επειδή είναι απομακρυσμένη (outlier). Απαιτείται τεκμηριωμένος λόγος, όπως αποδεδειγμένο λάθος καταγραφής, δυσλειτουργία οργάνου ή προκαθορισμένο στατιστικό κριτήριο.

Σχέσεις μεταξύ τύπου σφάλματος, ποιοτικών χαρακτηριστικών επίδοσης και ποσοτική τους έκφρασης



Menditto, Antonio, Marina Patriarca, and Bertil Magnusson. "Understanding the meaning of accuracy, trueness and precision." *Accreditation and quality assurance* 12.1 (2007): 45-47.

Ορθότητα (trueness)

- Η ορθότητα (trueness) εκφράζει το πόσο κοντά βρίσκεται ο μέσος όρος πολλών επαναλαμβανόμενων μετρήσεων σε μια τιμή αναφοράς. Η διαφορά μεταξύ της μέσης τιμής και της τιμής αναφοράς αποτελεί εκτίμηση της συστηματικής απόκλισης (bias).
- Για την αξιολόγηση της ορθότητας δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την απόλυτα αληθή τιμή ενός μεγέθους - είναι όμως απαραίτητο να διαθέτουμε μια αξιόπιστη τιμή αναφοράς.
- Η ορθότητα σχετίζεται κυρίως με τις συστηματικές επιδράσεις. Όσο μικρότερο είναι το bias ως προς την τιμή αναφοράς, τόσο μεγαλύτερη είναι η ορθότητα.

Πιστότητα (precision)

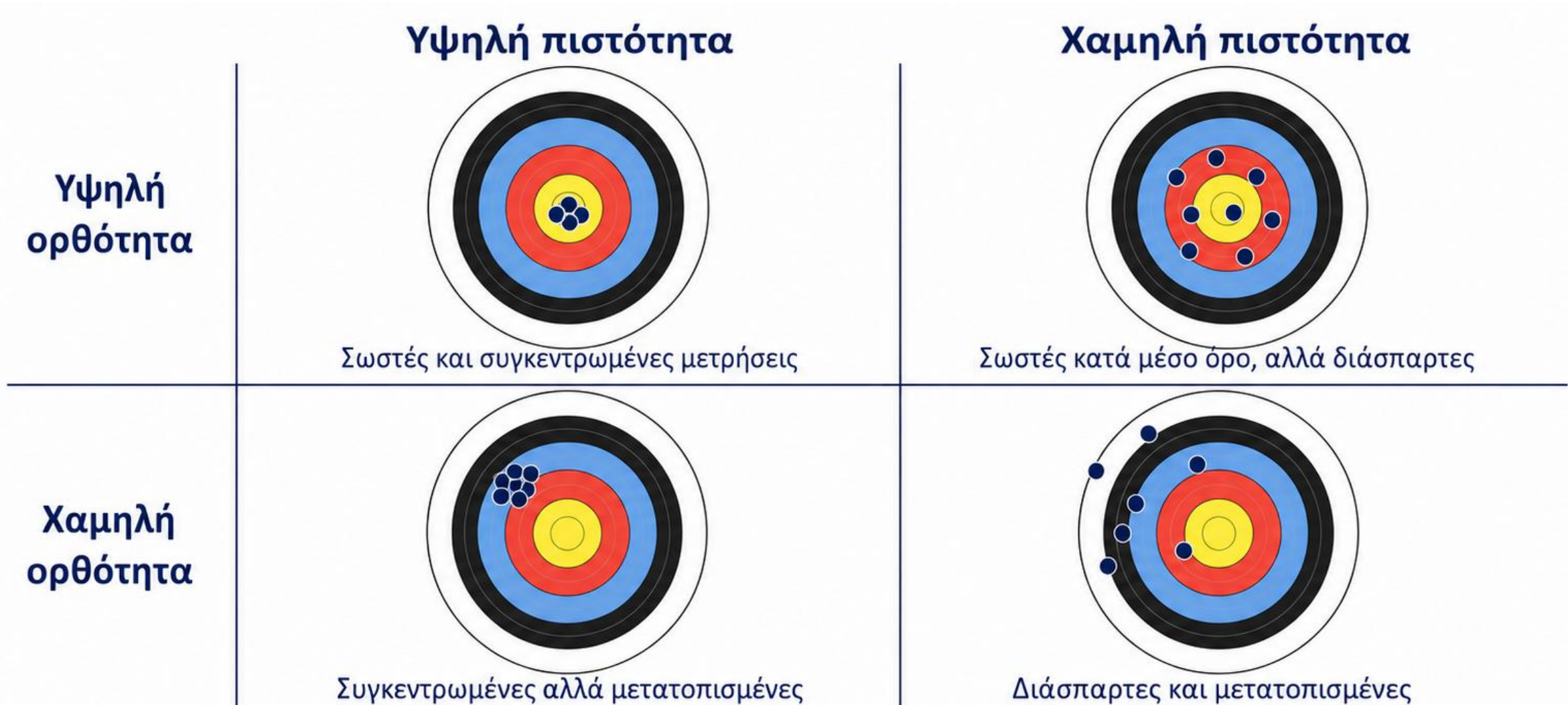
- Η πιστότητα εκφράζει το πόσο κοντά βρίσκονται μεταξύ τους τα αποτελέσματα επαναλαμβανόμενων μετρήσεων που πραγματοποιούνται κάτω από καθορισμένες συνθήκες.
- Χαρακτηρίζει τη διασπορά των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων και σχετίζεται κυρίως με τα τυχαία σφάλματα. **Όσο μικρότερη είναι η διασπορά των τιμών, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιστότητα της μέτρησης.**
- Θεωρητικά, για να γνωρίζαμε την «πραγματική» πιστότητα ενός συστήματος μέτρησης, θα έπρεπε να πραγματοποιήσουμε άπειρο αριθμό επαναλαμβανόμενων μετρήσεων. Στην πράξη, η πιστότητα εκτιμάται από ένα πεπερασμένο σύνολο μετρήσεων, συνήθως με στατιστικά μεγέθη όπως η τυπική απόκλιση.

Ακρίβεια (accuracy)

- Η ακρίβεια εκφράζει συνολικά το πόσο κοντά βρίσκεται ένα αποτέλεσμα μέτρησης στην αληθή ή στην τιμή αναφοράς.
- Επηρεάζεται τόσο από την ορθότητα, δηλαδή από το πόσο μικρή είναι η συστηματική απόκλιση από την τιμή αναφοράς, όσο και από την πιστότητα, δηλαδή από το πόσο μικρή είναι η διασπορά των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων.
- Επομένως, μια μέτρηση μπορεί να έχει μεγάλη πιστότητα χωρίς να έχει καλή ορθότητα, ή καλή ορθότητα αλλά μικρή πιστότητα. Για να θεωρείται συνολικά ακριβής, απαιτούνται και τα δύο.

Accuracy → trueness + precision

Ορθότητα (Trueness) και Πιστότητα (Precision) στις μετρήσεις



Πως επηρεάζουν τα σφάλματα την ορθότητα & πιστότητα;

Τυχαία σφάλματα

- Οι μετρήσεις σκορπίζουν γύρω από μία τιμή.
- Η αβεβαιότητα της μέσης τιμής μειώνεται με τις επαναλήψεις.
- Φαίνεται στη διασπορά.

Συστηματικά σφάλματα

- Μετατοπίζει όλες τις μετρήσεις.
- Δεν εξαφανίζεται με το μέσο όρο.
- Απαιτεί εντοπισμό και διόρθωση της αιτίας, π.χ. βαθμονόμηση, μηδενισμό ή κατάλληλη διόρθωση του μοντέλου.



Ερώτηση

Αν η ζυγαριά δείχνει πάντα +5g, βοηθούν οι 100 ζυγίσσεις;

Απάντηση

Όχι, θα έχει υψηλή πιστότητα αλλά χαμηλή ορθότητα.



Μεροληψία (bias)

Η ορθότητα (trueness) αφορά το πόσο κοντά βρίσκεται η μέση τιμή $\bar{x}$ σε μια τιμή αναφοράς

x_{ref}

Σχετίζεται με τη διαφορά

$$\mathbf{b} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{\text{ref}}$$

όπου b είναι η μεροληψία (bias), δηλαδή η εκτίμηση της συστηματικής απόκλισης από την τιμή αναφοράς.



Όσο μικρότερο είναι το $|\mathbf{b}|$, τόσο μεγαλύτερη είναι η ορθότητα (trueness).

Εκτιμήσεις αβεβαιότητας τύπου A και B: Σχέση με τυχαίες και συστηματικές επιδράσεις

Επίδραση	Εκτίμηση τύπου A	Εκτίμηση τύπου B
Τυχαία	Ο συνήθης τρόπος	Είναι δυνατή, αν υπάρχουν διαθέσιμα δεδομένα για το μέγεθος της επίδρασης χωρίς να πραγματοποιηθούν επαναλαμβανόμενες μετρήσεις
Συστηματική	Είναι δυνατή μόνο αν η επίδραση μεταβληθεί μακροπρόθεσμα σε τυχαία επίδραση	Ο συνήθης τρόπος

Η Αβεβαιότητα Τύπου A και Τύπου B δεν είναι δύο διαφορετικά είδη φυσικής αβεβαιότητας. Είναι δύο τρόποι αξιολόγησης μιας αβεβαιότητας.



Αβεβαιότητα Τύπου A και Τύπου B

Αβεβαιότητα Τύπου A

Προκύπτει από **στατιστική ανάλυση επαναλαμβανόμενων μετρήσεων** του ίδιου μεγέθους. Εκφράζει κυρίως την τυχαία διασπορά των μετρήσεων. Όταν από αυτές τις μετρήσεις χρησιμοποιούμε ως καλύτερη εκτίμηση τη μέση τιμή ($\bar{x}$), η αντίστοιχη τυπική αβεβαιότητα Τύπου A είναι

$$u_A(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

όπου s είναι η τυπική απόκλιση των μετρήσεων και N ο αριθμός τους.

Αβεβαιότητα Τύπου B

Προκύπτει από **άλλες διαθέσιμες πληροφορίες** και όχι από στατιστική επεξεργασία επαναλαμβανόμενων μετρήσεων. Τέτοιες πληροφορίες μπορεί να είναι η ελάχιστη υποδιαίρεση ή η διακριτική ικανότητα ενός οργάνου, οι προδιαγραφές του κατασκευαστή, ένα πιστοποιητικό βαθμονόμησης ή βιβλιογραφικά δεδομένα. Η πληροφορία αυτή μετατρέπεται σε τυπική αβεβαιότητα, ανάλογα με την κατανομή που θεωρούμε.

Στατιστική Επεξεργασία (Επαναλαμβανόμενες Μετρήσεις)

Όταν εκτελούμε μια μέτρηση ενός μεγέθους πολλαπλές φορές (N φορές), προκύπτει ένα σύνολο τιμών $x_1, x_2, \dots, x_N$. Η στατιστική επεξεργασία χρησιμοποιείται διότι τα τυχαία σφάλματα καθιστούν τις μετρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους, οπότε χρειαζόμαστε αυστηρά μαθηματικά εργαλεία για να εξάγουμε την καλύτερη εκτίμηση και να υπολογίσουμε την αβεβαιότητά της.

A. Η Καλύτερη Εκτίμηση: Μέση Τιμή (Mean Value)

Η Μέση Τιμή ($\bar{x}$) αποτελεί τον αριθμητικό μέσο όρο (ή σταθμισμένο μέσο όρο βάσει πιθανοτήτων) και θεωρείται η βέλτιστη εκτίμηση της πραγματικής τιμής.



Χρησιμοποιείται επειδή τα τυχαία σφάλματα είναι συμμετρικά, με αποτέλεσμα οι θετικές και αρνητικές αποκλίσεις να αλληλοαναιρούνται στατιστικά.

Για πλήθος μετρήσεων N και $i = 1, \dots, N$, η μέση τιμή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

B. Η Διασπορά των Δεδομένων: Διακύμανση (Variance)

Η Διακύμανση εκφράζει το μέτρο της διασποράς ή μεταβλητότητας των τιμών γύρω από τον μέσο όρο.



Δείχνει πόσο «σκορπισμένες» είναι οι μετρήσεις μας.

Για ολόκληρο τον πληθυσμό

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

**Για δείγμα δεδομένων
(όταν έχουμε μέρος του πληθυσμού)**

$$s^2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$



Στον παρονομαστή του δείγματος χρησιμοποιείται ο όρος $N - 1$ αντί για N εξαιτίας των βαθμών ελευθερίας (degrees of freedom). Ο αριθμός αυτός μειώνεται κατά 1 επειδή ο μέσος όρος ($\bar{x}$) έχει ήδη υπολογιστεί από τα ίδια τα δεδομένα του δείγματος, δέσμευση που περιορίζει τις ελεύθερες μεταβολές των τιμών.

Γ. Το Μέτρο της Σκέδασης: Τυπική Απόκλιση (Standard Deviation)

Η τυπική απόκλιση προκύπτει ως η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης.

Χρησιμοποιείται διότι, σε αντίθεση με τη διακύμανση, εκφράζεται στις ίδιες μονάδες μέτρησης με το φυσικό μέγεθος, δείχνοντας το χαρακτηριστικό μέγεθος της διασποράς των μετρήσεων γύρω από τη μέση τιμή.

Τυπική απόκλιση πληθυσμού (σ)

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Τυπική απόκλιση δείγματος (s):

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Η τυπική απόκλιση s , περιγράφει τη διασπορά των μεμονωμένων μετρήσεων γύρω από τη μέση τιμή. Η τυπική αβεβαιότητα της μέσης τιμής λόγω επαναληψιμότητας είναι $u_A(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}}$

Παράδειγμα

Έστω ότι με ένα ψηφιακό μικρόμετρο μετράμε ένα μήκος πέντε φορές και παίρνουμε τις μετρήσεις: **10,0mm 10,0mm 10,0mm 10,0mm 10,0mm**

Τότε $\bar{x} = 10,0$ και όλες οι αποκλίσεις $x_i - \bar{x} = 0 \rightarrow \sigma = 0$ και $\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0$.

Άρα δεν έχουμε αβεβαιότητα; Δε σημαίνει ότι το μήκος είναι γνωστό με μηδενική αβεβαιότητα.

Σημαίνει ότι δεν παρατηρήσαμε τυχαία διασπορά στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις.

Ακόμη και αν ένα όργανο δίνει ίδιες ενδείξεις, το όργανο έχει πεπερασμένη διακριτική ικανότητα και πιθανών άλλες αβεβαιότητες, όπως αβεβαιότητα βαθμονόμησης και ενδεχομένως συστηματικό σφάλμα.

Τυπική αβεβαιότητα

Τυπική αβεβαιότητα (u) είναι η αβεβαιότητα ενός αποτελέσματος μέτρησης εκφρασμένη ως τυπική απόκλιση.

Στην αξιολόγηση Τύπου A, η τυπική αβεβαιότητα προκύπτει από στατιστική ανάλυση επαναλαμβανόμενων μετρήσεων.

Παράδειγμα Τύπου A

Από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις:

$$u_A(\bar{X}) = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Στην αξιολόγηση Τύπου B, η τυπική αβεβαιότητα εκτιμάται από διαθέσιμες πληροφορίες διαφορετικές από τη στατιστική ανάλυση επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, π.χ. όρια οργάνου, προδιαγραφές κατασκευαστή ή πιστοποιητικό βαθμονόμησης.

Παράδειγμα Τύπου B

Αν η ελάχιστη διαίρεση είναι d , θεωρούμε στο εργαστήριο ότι το $\pm d/2$ αντιστοιχεί σε

$$\pm 1\sigma. \text{ Επομένως: } u_B = \frac{d}{2}$$

Παράδειγμα: Υπολογισμός μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης (1/2)

Έστω ότι μετράμε πέντε φορές το ίδιο μήκος και παίρνουμε τις τιμές:

12,1 12,5 11,8 12,4 12,2 cm

Υπολογισμός της μέσης τιμής

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) / N$$

Για $N = 5$: $\bar{x} = (12,1 + 12,5 + 11,8 + 12,4 + 12,2) / 5 = 61,0 / 5 \rightarrow \bar{x} = \mathbf{12,2 \text{ cm}}$

Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης του δείγματος

Υπολογίζουμε πρώτα την απόκλιση κάθε μέτρησης από τη μέση τιμή και το τετράγωνό της:

x_i (cm)	$x_i - \bar{x}$ (cm)	$(x_i - \bar{x})^2$ (cm ²)
12,1	-0,1	0,01
12,5	+0,3	0,09
11,8	-0,4	0,16
12,4	+0,2	0,04
12,2	0,0	0,00

Παράδειγμα: Υπολογισμός μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης (2/2)

Άθροισμα τετραγώνων αποκλίσεων:

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 0,30 \text{ cm}^2$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} = \sqrt{(0,30 / 4)} = \sqrt{0,075} \rightarrow \mathbf{s \approx 0,274 \text{ cm}}$$

Όπως θα δούμε σε επόμενο μάθημα εαν εφαρμόσουμε τον απλό κανόνα του εργαστηρίου και κρατήσουμε ένα σημαντικό ψηφίο στην τυπική απόκλιση, τότε $s = 0,274 \text{ cm} \rightarrow 0,3 \text{ cm}$ και η μέση τιμή γράφεται στην ίδια δεκαδική θέση:

$$\mathbf{12,2 \pm 0,3 \text{ cm}}$$

Η μέση τιμή δείχνει το κέντρο γύρω από το οποίο συγκεντρώνονται οι μετρήσεις, ενώ η τυπική απόκλιση περιγράφει τη διασπορά τους γύρω από αυτό.

Δ. Αβεβαιότητα της μέσης τιμής – Τυπικό σφάλμα (Standard Error, SE)

Το τυπικό σφάλμα είναι η τυπική απόκλιση της ίδιας της μέσης τιμής.



Αποτελεί την ποσοτικοποίηση της Αβεβαιότητας Τύπου Α (στατιστική αξιολόγηση τυχαίων σφαλμάτων). Δείχνει πόσο αβέβαιη είναι η εκτίμηση της μέσης τιμής λόγω της τυχαίας διασποράς των μετρήσεων.

Προκύπτει εάν η τυπική απόκλιση δείγματος (s) διαιρεθεί με την τετραγωνική ρίζα του πλήθους των δειγμάτων (N)

$$u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$



Φυσική σημασία: Η αύξηση του πλήθους των μετρήσεων N μειώνει την τυπική αβεβαιότητα της μέσης τιμής, περίπου ως $1/\sqrt{N}$.

Σφάλμα μέσης τιμής



Τι δε μειώνεται επειδή κάνουμε περισσότερες επαναλήψεις;

Η σχέση $u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$ αφορά την αβεβαιότητα που προκύπτει από τη διασπορά των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων.

Για παράδειγμα, η περιορισμένη διακριτική ικανότητα ενός μικρομέτρου δεν βελτιώνεται επειδή το χρησιμοποιήσαμε πολλές φορές, μια αβεβαιότητα βαθμονόμησης δεν εξαφανίζεται επειδή επαναλάβαμε τη μέτρηση.

Άρα, οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις μειώνουν τη στατιστική αβεβαιότητα του μέσου, αλλά δεν εξαφανίζουν τις αβεβαιότητες που προέρχονται από το ίδιο το όργανο.

Gaussian (κανονική) κατανομή

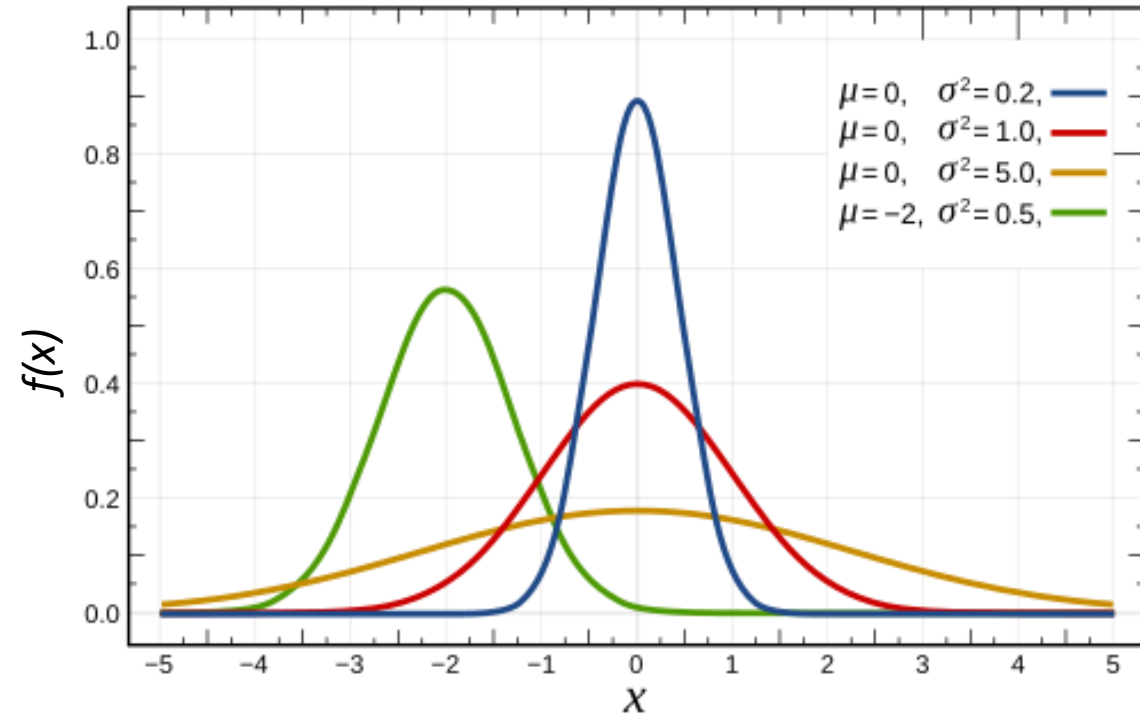
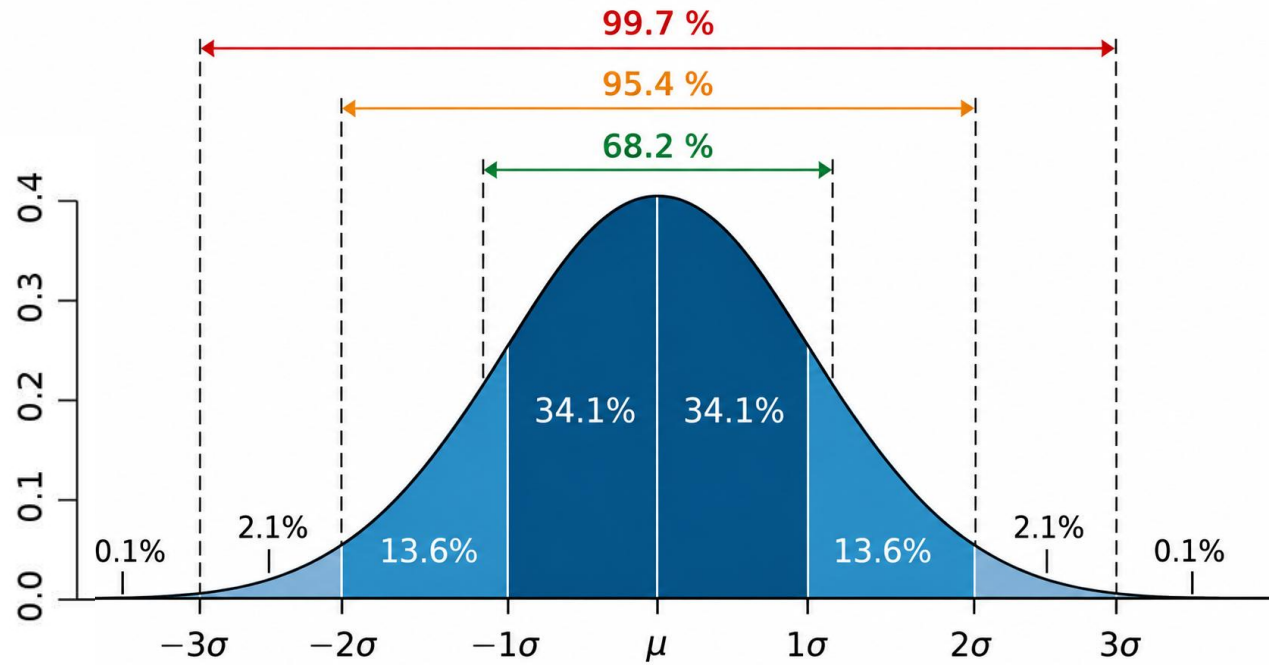
- Η Gaussian (κανονική) κατανομή είναι το μαθηματικό μοντέλο που συνδέει τις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις με τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και την αβεβαιότητα της μέσης τιμής.
- Όταν μετράμε πολλές φορές την ίδια φυσική ποσότητα, οι τιμές συνήθως δεν είναι ακριβώς ίδιες. Άλλες αυξάνουν και άλλες μειώνουν το αποτέλεσμα.
- Αν οι αποκλίσεις οφείλονται κυρίως σε πολλές μικρές και ανεξάρτητες τυχαίες επιδράσεις, το ιστόγραμμα των μετρήσεων συχνά προσεγγίζει μια κανονική ή Gaussian κατανομή.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Η κατανομή χαρακτηρίζεται κυρίως από δύο μεγέθη:

- Τη μέση τιμή μ , που καθορίζει το κέντρο της.
- Την τυπική απόκλιση σ , που καθορίζει το πλάτος της.

Gaussian (κανονική) κατανομή



Τυπική απόκλιση σ στη Gaussian (κανονική) κατανομή

Η τυπική απόκλιση σ είναι ένα μέτρο του πόσο απλώνονται οι μεμονωμένες μετρήσεις γύρω από τη μέση τιμή.

Στην ιδανική Gaussian περίπου το 68% των τιμών βρίσκεται στο διάστημα:

$$\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma$$

Παράδειγμα

Αν η περίοδος έχει μέση τιμή $\mu = 10.0s$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.4s$, τότε περίπου το 68% των μεμονωμένων μετρήσεων αναμένεται να βρίσκεται μεταξύ 9.6s και 10.4s.



Η σ περιγράφει τη διασπορά των μεμονωμένων μετρήσεων, όχι την αβεβαιότητα της μέσης τιμής.

Όσο μεγαλύτερη είναι η σ , τόσο πλατύτερη και χαμηλότερη είναι η καμπύλη.
Άρα δύο πειράματα μπορεί να έχουν τον ίδιο μέσο όρο αλλά πολύ διαφορετική επαναληψιμότητα.

Ε. Συνδυασμένη και Διευρυμένη Αβεβαιότητα

Η συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα προκύπτει από τον συνδυασμό όλων των επιμέρους τυπικών αβεβαιοτήτων, τόσο από αξιολόγηση Τύπου Α όσο και από αξιολόγηση Τύπου Β. Για ανεξάρτητες συνεισφορές αβεβαιότητας:

$$u_c = \sqrt{(u_{\text{στατ}})^2 + (u_{\text{οργ}})^2 + (u_{\text{αντιδ}})^2 + \dots}$$

ή γενικότερα

$$u_c = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 + \dots}$$

Διευρυμένη Αβεβαιότητα (U) & Συντελεστής Κάλυψης (k):

Όταν η κατανομή του αποτελέσματος μπορεί να προσεγγιστεί ως κανονική, η διευρυμένη αβεβαιότητα U προκύπτει από τη συνδυασμένη τυπική αβεβαιότητα u_c με έναν συντελεστή κάλυψης k :

$$U = k \cdot u_c$$

Συχνά χρησιμοποιείται $k \approx 2$, που αντιστοιχεί περίπου σε επίπεδο κάλυψης 95%.



Για κανονική κατανομή, ο συντελεστής κάλυψης k καθορίζει το ποσοστό των πιθανών τιμών που περιλαμβάνεται στο διάστημα κάλυψης (επίπεδο εμπιστοσύνης)

1. Επίπεδο εμπιστοσύνης ~68.27% : $k=1$

Το 68.27% των τιμών πέφτει μέσα σε εύρος ± 1 τυπική απόκλιση από τον μέσο όρο.

2. Επίπεδο εμπιστοσύνης ~95.45% : $k=2$

Το 95.45% των τιμών πέφτει μέσα σε εύρος ± 2 τυπικών αποκλίσεων από τον μέσο όρο.

3. Επίπεδο εμπιστοσύνης ~99.73% : $k=3$

Το 99.73% των τιμών πέφτει μέσα σε εύρος ± 3 τυπικών αποκλίσεων από τον μέσο όρο.

Σχετική αβεβαιότητα της εκτίμησης της τυπικής απόκλισης

Το ίδιο το σφάλμα που υπολογίζουμε από λίγες μετρήσεις είναι και αυτό μια εκτίμηση. Αν επαναλάβουμε ολόκληρο το πείραμα με νέο σύνολο μετρήσεων, δεν θα πάρουμε ακριβώς την ίδια τιμή για το σ .

Παράδειγμα

Από 5 μετρήσεις μπορεί να υπολογίσουμε $\sigma = 0,40$. Αν ξανακάνουμε 5 νέες μετρήσεις μπορεί να πάρουμε $\sigma = 0,33$, άλλη φορά $0,48$ κ.ο.κ.

Πόσο είναι «Σφάλμα του σφάλματος» ή πόσο αβέβαιη είναι η ίδια η εκτίμηση της αβεβαιότητας?

$$\text{Σχετική αβεβαιότητα του σφάλματος} = \frac{u(s)}{s} = \frac{1}{\sqrt{(2N-2)}}$$

Παράδειγμα αβεβαιότητας της τυπικής απόκλισης

Έστω από **5** επαναλαμβανόμενες μετρήσεις (**N = 5**) ότι υπολογίσαμε **s = 0,426**.

Η σχετική αβεβαιότητα της εκτίμησης της τυπικής απόκλισης είναι

$$\frac{u(s)}{s} = \frac{1}{\sqrt{(2N-2)}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0,354 \text{ ή } 35,4\%$$

Άρα η απόλυτη αβεβαιότητα είναι

$u(s) \approx 0,426 \times 0,354 \approx 0,151$, δηλαδή η ίδια η εκτίμηση του s έχει αβεβαιότητα περίπου 0,15 ή ενώ η σχετική αβεβαιότητα είναι περίπου 35%.

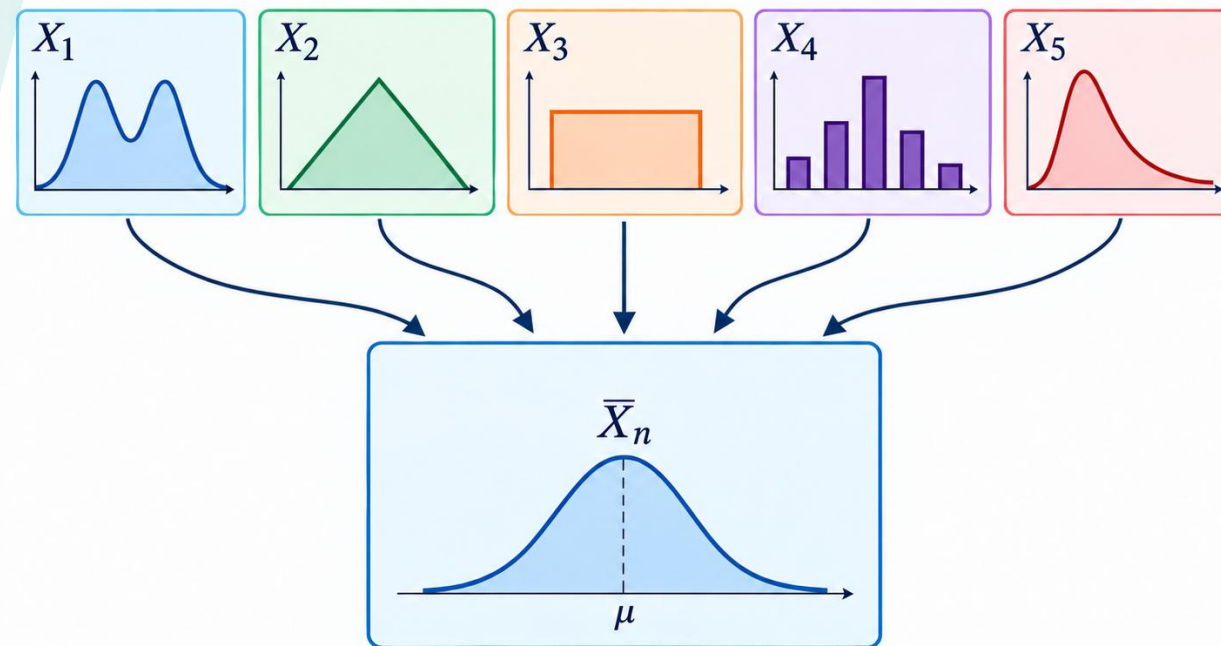
Για 50 η σχετική αβεβαιότητα της εκτίμησης του s είναι περίπου 10%



Αυτός είναι ένας από τους λόγους για τους οποίους συνιστάται συνήθως η αβεβαιότητα να αναφέρεται με ένα σημαντικό ψηφίο.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν επαναλάβουμε πολλές φορές ένα πείραμα και κάθε φορά υπολογίζουμε τη μέση τιμή από N μετρήσεις, ακόμη και αν οι αρχικές μετρήσεις δεν είναι κανονικά κατανοημένες, η κατανομή αυτών των μέσων τιμών τείνει προς κανονική κατανομή καθώς αυξάνεται το N , ενώ ταυτόχρονα η διασπορά τους $\frac{s}{\sqrt{N}}$ μικραίνει.



Για μεγάλα μεγέθη δείγματος ($n > 30$), η δειγματική κατανομή του μέσου προσεγγίζει την κανονική κατανομή.

Σημαντικά ψηφία και κανόνες στρογγυλοποίησης



Γιατί χρησιμοποιούμε σημαντικά ψηφία;

Επειδή κάθε πειραματική μέτρηση έχει πεπερασμένη ακρίβεια, τα σημαντικά ψηφία χρησιμοποιούνται ώστε η γραφή ενός αριθμού να μην υποδηλώνει μεγαλύτερη πληροφορία ή ακρίβεια από αυτήν που πράγματι διαθέτει η μέτρηση.

Παράδειγμα

$$l = 12,3 \text{ cm}$$

- δεν σημαίνει ότι το μήκος είναι ακριβώς 12,300000... cm
- σημαίνει ότι η τιμή έχει προσδιοριστεί μέχρι τη θέση των δεκάτων του εκατοστού

Σημαντικά ψηφία

Σημαντικά θεωρούνται τα ψηφία που μεταφέρουν πληροφορία για την αριθμητική τιμή και την ακρίβεια με την οποία αυτή αναγράφεται.

Παράδειγμα

Στον αριθμό **37,42** υπάρχουν τέσσερα σημαντικά ψηφία: 3, 7, 4 και 2.

Παράδειγμα

Αριθμός	Σημαντικά ψηφία	Δεκαδικές θέσεις
12,34	4	2
0,00450	3	5
120,0	4	1
0,030	2	3

Τα σημαντικά ψηφία και οι δεκαδικές θέσεις είναι διαφορετικές έννοιες.

Πώς αναγνωρίζουμε τα σημαντικά ψηφία; (1/2)

Κανόνας 1: Όλα τα μη μηδενικά ψηφία είναι σημαντικά

Παραδείγματα

47,3 → 3 σημαντικά ψηφία, **6281** → 4 σημαντικά ψηφία, **3,1416** → 5 σημαντικά ψηφία.

Κανόνας 2: Τα μηδενικά ανάμεσα σε μη μηδενικά ψηφία είναι σημαντικά

Παραδείγματα

1002 → 4 σημαντικά ψηφία, **3,007** → 4 σημαντικά ψηφία, **20,05** → 4 σημαντικά ψηφία.

Κανόνας 3: Τα αρχικά μηδενικά δεν είναι σημαντικά

Τα μηδενικά που προηγούνται του πρώτου μη μηδενικού ψηφίου χρησιμοποιούνται μόνο για να προσδιορίσουν τη θέση της υποδιαστολής.

Παραδείγματα

0,0047 → 2 σημαντικά ψηφία: 4 και 7, **0,0305** → 3 σημαντικά ψηφία: 3, 0 και 5,
0,000120 → 3 σημαντικά ψηφία: 1, 2 και το τελικό 0.

Πώς αναγνωρίζουμε τα σημαντικά ψηφία; (2/2)

Κανόνας 4: Τα τελικά μηδενικά δεξιά της υποδιαστολής είναι σημαντικά

Παραδείγματα:

4,50 → 3 σημαντικά ψηφία, **0,00700** → 3 σημαντικά ψηφία, **12,000** → 5 σημαντικά ψηφία.

Κανόνας 5: Τα τελικά μηδενικά ενός ακέραιου αριθμού μπορεί να είναι αμφίσημα

Η αναγραφή **1200** δεν δείχνει από μόνη της αν ο αριθμός έχει 2 ή 3 ή 4 σημαντικά ψηφία.

Μπορεί να σημαίνει:

$1,2 \times 10^3 \rightarrow 2$ σημαντικά ψηφία,
 $1,20 \times 10^3 \rightarrow 3$ σημαντικά ψηφία,
 $1,200 \times 10^3 \rightarrow 4$ σημαντικά ψηφία.



Όταν υπάρχουν τελικά μηδενικά σε ακέραιο αριθμό, χρησιμοποιούμε επιστημονική γραφή για να δηλώσουμε χωρίς αμφιβολία τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων.

Επιστημονική γραφή

Ένας αριθμός γράφεται σε κανονικοποιημένη επιστημονική μορφή ως

$$a \times 10^n$$

όπου συνήθως $1 \leq |a| < 10$. Όλα τα ψηφία του συντελεστή a θεωρούνται σημαντικά.

Παράδειγμα

Επιστημονική γραφή	Αριθμός σημαντικών ψηφίων
$1,2 \times 10^3$	2
$1,20 \times 10^3$	3
$1,200 \times 10^3$	4
$4,50 \times 10^{-3}$	3
$6,0020 \times 10^5$	5



Η επιστημονική γραφή είναι ο ασφαλέστερος τρόπος αποφυγής της αμφισημίας των τελικών μηδενικών.

Ακριβείς και μετρούμενοι αριθμοί

Ακριβείς αριθμητικοί συντελεστές

Στη σχέση για τη διάμετρο ενός κύκλου, $d=2r$, ο αριθμός 2 είναι ακριβής, επειδή προκύπτει από τον ορισμό της διαμέτρου.

Μαθηματικές σταθερές

Οι μαθηματικές σταθερές, όπως π , e , $\sqrt{2}$, είναι ακριβείς μαθηματικοί αριθμοί. Στον υπολογισμό χρησιμοποιούμε αρκετά ψηφία ώστε να μην περιορίζουν την ακρίβεια του αποτελέσματος.

Ακριβείς μετατροπές μονάδων

Ορισμένες μετατροπές είναι ακριβείς από τον ορισμό:
 $1 \text{ m}=100 \text{ cm}$, $1 \text{ kg}=1000 \text{ g}$, $1 \text{ in}=2,54 \text{ cm}$.

Σημαντικά ψηφία στην Πρόσθεση και Αφαίρεση

Κανόνας: Το αποτέλεσμα έχει όσες δεκαδικές θέσεις έχει ο αριθμός με τις λιγότερες δεκαδικές θέσεις.

Παράδειγμα 1

$1,0023 + 4,383 = 5,3853 \rightarrow$ Το 1,0023 έχει 4 δεκαδικές θέσεις, ενώ το 4,383 έχει 3 δεκαδικές θέσεις. Άρα: **5,385**.

Παράδειγμα 2

$486 - 421,23 = 64,77 \rightarrow$ Το 486 είναι αναγραφόμενο μέχρι τις μονάδες. Άρα: **65**.

Παράδειγμα 3

$12,11 + 0,3 + 1,006 = 13,416 \rightarrow$ Το 0,3 είναι αναγραφόμενος μέχρι τα δέκατα. Άρα: **13,4**.

Γιατί δεν χρησιμοποιούμε απλώς τον μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων;

Έστω $113,2 + 1,43 = 114,63 \rightarrow$ **114,6**. Το αποτέλεσμα έχει 4 σημαντικά ψηφία, παρόλο που το 1,43 έχει μόνο 3. Στην πρόσθεση και την αφαίρεση έχει σημασία η θέση του τελευταίου αξιόπιστου ψηφίου και όχι απλώς το πλήθος των ψηφίων.

Σημαντικά ψηφία στον Πολλαπλασιασμό και Διαίρεση

Κανόνας: Το αποτέλεσμα αναγράφεται με τόσα σημαντικά ψηφία όσα έχει ο παράγοντας ή ο διαιρετέος/διαιρέτης με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία.

Παράδειγμα 1

$0,6238 \times 6,6 = 4,11708 \rightarrow$ Οι αριθμοί έχουν 4 και 2 σημαντικά ψηφία αντιστοίχως. Άρα: **4,1**.

Παράδειγμα 2

$486/421,23 = 0,866728... \rightarrow$ Οι αριθμοί έχουν 3 και 5 σημαντικά ψηφία αντιστοίχως. Άρα: **0,867**.

Παράδειγμα 3

$113,2 \times 1,43 = 161,876 \rightarrow$ Οι αριθμοί έχουν 4 και 3 σημαντικά ψηφία αντιστοίχως. Άρα: **162**.

Σημαντικά ψηφία στις Δυνάμεις και τις Ρίζες

Κανόνας: Όταν ο εκθέτης είναι ακριβής αριθμός ο αποτέλεσμα της δύναμης πρέπει να έχει τον ίδιο αριθμό σημαντικών ψηφίων με τη βάση.

Παράδειγμα

$$A = \pi r^2$$

Για $r = 2,35 \text{ cm}$, τότε $A = \pi \cdot (2,35 \text{ cm})^2 = 17,349... \text{ cm}^2 \rightarrow$ Το r έχει 3 σημαντικά ψηφία οπότε το αποτέλεσμα έχει 3 σημαντικά ψηφία (το π είναι ακριβής αριθμός). Άρα: $A = \mathbf{17,3} \text{ cm}^2$.

Παράδειγμα

Έστω $\sqrt{5,2} = 2,280350... \rightarrow$ Το 2,5 έχει 2 σημαντικά ψηφία. Άρα: $\mathbf{2,3}$

Σημαντικά ψηφία στις Μικτές πράξεις

Σε έναν υπολογισμό με διαφορετικές πράξεις:

1. Εκτελούμε τις πράξεις με τη σωστή μαθηματική σειρά.
2. Προσδιορίζουμε ποια ακρίβεια επιτρέπεται σε κάθε στάδιο.
3. Δεν στρογγυλοποιούμε τα ενδιάμεσα αποτελέσματα.
4. Κρατάμε επιπλέον ψηφία.
5. Στρογγυλοποιούμε μόνο το τελικό αποτέλεσμα.

Παράδειγμα

$$(2,3494+1,345)\times 1,2$$

1. $2,3494+1,345=3,6944$.
2. Η πρόσθεση περιορίζεται στα χιλιοστά, άρα η ενδιάμεση ακρίβεια αντιστοιχεί στο 3,694.
- 3-4. Δεν χρειάζεται όμως να αντικαταστήσουμε αμέσως τον αριθμό στον υπολογιστή. Συνεχίζουμε με την πλήρη διαθέσιμη τιμή: $3,6944\times 1,2=4,43328$.
5. Ο παράγοντας 1,2 έχει 2 σημαντικά ψηφία. Επομένως: 4,4.

Σημαντικά ψηφία στους Λογάριθμους και τις Εκθετικές συναρτήσεις

Κανόνας

- Ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων του $\log_{10}x$ λαμβάνεται ίσος με τον αριθμό σημαντικών ψηφίων του x .
- Ο αριθμός σημαντικών ψηφίων του 10^x λαμβάνεται ίσος με τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων του x .

Παράδειγμα

$x=2,34$ έχει 3 σημαντικά ψηφία.

$\log_{10}(2,34) = 0,369215\dots$ οπότε αναγράφεται προσεγγιστικά ως 0,369.

Στρογγυλοποίηση (1/8)

Στρογγυλοποίηση είναι η αντικατάσταση ενός αριθμού από έναν γειτονικό αριθμό, κατά προσέγγιση ίσο, με μικρότερο πλήθος ψηφίων.

Προσδιορισμός της θέσης στρογγυλοποίησης

Πριν εξετάσουμε τα ψηφία που θα απορριφθούν, πρέπει να γνωρίζουμε που θα γίνει η στρογγυλοποίηση.

- **Στρογγυλοποίηση σε δεκαδικές θέσεις**

Παράδειγμα

Στρογγυλοποίηση του **12,3467** σε δύο δεκαδικές θέσεις.
Το τελευταίο ψηφίο που θα διατηρηθεί είναι το 4. Άρα: **12,3467**.

- **Στρογγυλοποίηση σε σημαντικά ψηφία**

Παράδειγμα

Στρογγυλοποίηση του **0,003746** σε τρία σημαντικά ψηφία.
Τα αρχικά μηδενικά δεν μετρούν. Τα τρία ψηφία που διατηρούνται είναι 3, 7, 4: **0,003746**.

Στρογγυλοποίηση (2/8)

Το απορριπτόμενο μέρος είναι μικρότερο από το μισό της βαθμίδας.

Αν το πρώτο απορριπτόμενο ψηφίο είναι μικρότερο από 5, το τελευταίο διατηρούμενο ψηφίο παραμένει αμετάβλητο.

Παράδειγμα

6,9749515 σε τρία σημαντικά ψηφία: 6,9749515.

Το πρώτο απορριπτόμενο ψηφίο είναι $4 < 5$. Άρα: **6,97**

Παράδειγμα

12,243 σε ένα δεκαδικό ψηφίο, άρα: **12,2**

Στρογγυλοποίηση (3/8)

Το απορριπτόμενο μέρος είναι μεγαλύτερο από το μισό της βαθμίδας.

Αν το πρώτο απορριπτόμενο ψηφίο είναι μεγαλύτερο από 5, αυξάνουμε κατά μία μονάδα το τελευταίο διατηρούμενο ψηφίο.

Παράδειγμα

Στρογγυλοποίηση του **8,167** σε δύο δεκαδικά ψηφία: 8,167 και επομένως: **8,17**

Παράδειγμα

Στρογγυλοποίηση του **0,028675** σε τρία σημαντικά ψηφία: 0,028675.

Το πρώτο απορριπτόμενο ψηφίο είναι 7, άρα: **0,0287**

Στρογγυλοποίηση (4/8)

Το πρώτο απορριπτόμενο ψηφίο είναι 5 και ακολουθεί μη μηδενικό ψηφίο.

Στην περίπτωση αυτή αυξάνουμε το τελευταίο διατηρούμενο ψηφίο.

Παράδειγμα

Στρογγυλοποίηση του **6,8752** σε τρία σημαντικά ψηφία.

Διατηρούμε το 6,87. Το απορριπτόμενο μέρος είναι 52, όχι ακριβώς 50. Επομένως: **6,88**

.

Παράδειγμα

Διατηρούμε το **12,251** σε ένα δεκαδικό ψηφίο.

Το απορριπτόμενο μέρος είναι $0,051 > 0,05$. Άρα: **12,3**



Δεν εξετάζουμε μόνο το ψηφίο 5. Εξετάζουμε ολόκληρο το απορριπτόμενο μέρος.

Στρογγυλοποίηση (5/8)

Αν το πρώτο απορριπτόμενο ψηφίο είναι 5 και είτε ακολουθούν μηδενικά είτε δεν ακολουθεί κάποιο ψηφίο.

Στην περίπτωση αυτή αφήνουμε το τελευταίο διατηρούμενο ψηφίο αμετάβλητο αν είναι άρτιο, το αυξάνουμε κατά μία μονάδα αν είναι περιττό. Με αυτόν τον τρόπο το τελικό ψηφίο γίνεται άρτιο.

Παράδειγμα

Στρογγυλοποίηση του **12,25** σε ένα δεκαδικό ψηφίο.
Το διατηρούμενο ψηφίο είναι το 2, που είναι άρτιο. Άρα: **12,2**

Παράδειγμα

Στρογγυλοποίηση του **12,3500** σε ένα δεκαδικό ψηφίο.
Το διατηρούμενο ψηφίο είναι το 3, που είναι περιττό. Αυξάνεται σε 4, άρα: **12,4**

Παράδειγμα

Στρογγυλοποίηση του **1,995** σε τρία σημαντικά ψηφία.
Το τελευταίο διατηρούμενο ψηφίο είναι 9, περιττό, οπότε αυξάνεται. Άρα: **2,00**
Τα δύο μηδενικά πρέπει να διατηρηθούν, διότι δηλώνουν ότι το αποτέλεσμα έχει 3 σημαντικά ψηφία.

Στρογγυλοποίηση (6/8)

Στους αρνητικούς αριθμούς εφαρμόζουμε τον κατάλληλο κανόνα στην απόλυτη τιμή του αριθμού και κατόπιν επαναφέρουμε το πρόσημο.

Παράδειγμα

Στρογγυλοποίηση του **-92,75** σε τρία σημαντικά ψηφία.
Το τελευταίο διατηρούμενο ψηφίο είναι 7, περιττό. Άρα: **-92,8**

Παράδειγμα

Στρογγυλοποίηση του **-12,250** σε τρία σημαντικά ψηφία.
Το τελευταίο διατηρούμενο ψηφίο είναι 2, άρτιο. Άρα: **-12,2**

Στρογγυλοποίηση (7/8)

Η στρογγυλοποίηση πρέπει να γίνεται σε ένα μόνο στάδιο.
Δεν πρέπει να στρογγυλοποιούμε διαδοχικά τον ίδιο αριθμό.

Παράδειγμα

Στρογγυλοποίηση του **12,254** σε τρία σημαντικά ψηφία.

Πρέπει να στρογγυλοποιηθεί απευθείας σε ένα δεκαδικό ψηφίο: $12,254 \rightarrow \mathbf{12,3}$.

Η διαδικασία διαδοχικών στρογγυλοποιήσεων: $12,254 \rightarrow 12,25 \rightarrow 12,2$ είναι λανθασμένη.

Στρογγυλοποίηση (8/8)

Κατά τους ενδιάμεσους υπολογισμούς πρέπει να διατηρούνται περισσότερα ψηφία από όσα θα εμφανιστούν στο τελικό αποτέλεσμα. Τα πρόσθετα αυτά ψηφία ονομάζονται συχνά ψηφία ασφαλείας.

Παράδειγμα

$$\text{Έστω: } A = \frac{1,95 \times 8,4}{3,44}$$

Η αριθμομηχανή δίνει: $A = 4,7616279\dots$

Επειδή ο παράγοντας 8,4 έχει 2 σημαντικά ψηφία: **$A = 4,8$**

Δεν πρέπει να κάνουμε: $1,95 \times 8,4 = 16,38 \rightarrow 16$ και μετά $\frac{16}{3,44} = 4,65116\dots$

Η πρόωρη στρογγυλοποίηση μεταβάλλει το αποτέλεσμα και δίνει **4,7**.



Χρησιμοποιούμε την πλήρη διαθέσιμη τιμή και στρογγυλοποιούμε στο τέλος.

Διάδοση Αβεβαιοτήτων

Στο εργαστήριο πολλά φυσικά μεγέθη δεν τα μετράμε απευθείας.

Παράδειγμα

- Μετράμε απόσταση s και χρόνο t και υπολογίζουμε ταχύτητα $v = \frac{s}{t}$
- Μετράμε τάση V και ένταση I και υπολογίζουμε αντίσταση $R = \frac{V}{I}$

Τα μεγέθη που μετρήσαμε όμως έχουν αβεβαιότητες → Επομένως και το μέγεθος που υπολογίζουμε από αυτά πρέπει να έχει αβεβαιότητα.
Αυτό ακριβώς ονομάζουμε **διάδοση αβεβαιοτήτων**.

Απόλυτη, σχετική και ποσοστιαία αβεβαιότητα

Απόλυτη αβεβαιότητα

Αν $x=(25,30\pm0,05)\text{cm}$, τότε η απόλυτη αβεβαιότητα είναι: $\Delta x=0,05\text{cm}$.
Έχει τις ίδιες μονάδες με το μέγεθος.

Σχετική αβεβαιότητα

Η σχετική αβεβαιότητα δείχνει πόσο μεγάλη είναι η αβεβαιότητα σε σχέση με την ίδια την τιμή. Ορίζεται ως

$$u_x = \frac{\Delta x}{|x|} \text{ και δεν έχει μονάδες}$$

$$\text{Στο προηγούμενο παράδειγμα } u_x = \frac{0,05}{25,30} = 0,00198.$$

Ποσοστιαία αβεβαιότητα

Η ποσοστιαία αβεβαιότητα είναι απλώς η σχετική αβεβαιότητα επί 100:

$$u_{x,\%} = 100 \cdot u_x$$

$$\text{Στο προηγούμενο παράδειγμα } u_{x,\%} = 100 \cdot (0,00198)\% \approx 0,20\%.$$

Γιατί δεν αρκεί πάντα η απόλυτη αβεβαιότητα;

Έστω δύο μετρήσεις μήκους: $L_1=(1,0\pm0,1)\text{cm}$ και $L_2=(100,0\pm0,1)\text{cm}$.

Και στις δύο περιπτώσεις η απόλυτη αβεβαιότητα είναι ίδια: $\Delta L=0,1\text{cm}$.

Στην πρώτη μέτρηση το $0,1\text{cm}$ είναι μεγάλο σε σχέση με το $1,0\text{cm}$.

Στη δεύτερη, το $0,1\text{cm}$ είναι πολύ μικρό σε σχέση με το $100,0\text{cm}$.

Για να εκφράσουμε πόσο μεγάλη είναι η αβεβαιότητα σε σχέση με την ίδια τη μετρούμενη τιμή, χρησιμοποιούμε τη σχετική αβεβαιότητα.

$$\varepsilon_{L1}=\frac{0,1}{1,0}=0,1 \quad \text{ή} \quad \varepsilon_{L1,\%}=10\%$$

$$\varepsilon_{L2}=\frac{0,1}{100,0}=0,001 \quad \text{ή} \quad \varepsilon_{L2,\%}=0,1\%$$



Η Σχετική και η Ποσοστιαία αβεβαιότητα δεν εξαρτώνται από τη χρησιμοποιούμενη μονάδα μέτρησης.

Διάδοση αβεβαιότητας

Για

$$z = f(x, y, w, \dots)$$

ο γενικός νόμος διάδοσης είναι

$$u_c(z) = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} u(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} u(y)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w} u(w)\right)^2 + \dots}$$

ή γενικά

$$u_c(z) = \sqrt{\sum_i \left[\frac{\partial z}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2}$$

Διάδοση αβεβαιότητας για ανεξάρτητες μεταβλητές

Περίπτωση	Σχέση	Τιμές εκθετών ή παράγωγοι
Πρόσθεση	$z = x + y$	$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$
Αφαίρεση	$z = x - y$	$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1$
Ειδική κατηγορία	$z = x^a y^b w^c$	a, b, c σταθεροί εκθέτες
Γινόμενο	$z = xy = x^1 y^1$	$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 0$
Πηλίκο	$z = \frac{x}{y} = x^1 y^{-1}$	$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 0$
Δύναμη	$z = x^n$	$a = n, \quad b = 0, \quad c = 0$
n -οστή ρίζα	$z = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$a = \frac{1}{n}, \quad b = 0, \quad c = 0$

Διάδοση αβεβαιότητας για ανεξάρτητες μεταβλητές

Περίπτωση	Τύπος διάδοσης
Πρόσθεση	$u_c(z) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}$
Αφαίρεση	$u_c(z) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}$
Ειδική κατηγορία	$\frac{u_c(z)}{ z } = \sqrt{a^2 \left(\frac{u(x)}{ x }\right)^2 + b^2 \left(\frac{u(y)}{ y }\right)^2 + c^2 \left(\frac{u(w)}{ w }\right)^2}$
Γινόμενο	$\frac{u_c(z)}{ z } = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{ x }\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{ y }\right)^2}$
Πηλίκο	$\frac{u_c(z)}{ z } = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{ x }\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{ y }\right)^2}$
Δύναμη	$\frac{u_c(z)}{ z } = n \frac{u(x)}{ x }$
n -οστή ρίζα	$\frac{u_c(z)}{ z } = \frac{1}{n} \frac{u(x)}{ x }$

Διάδοση αβεβαιότητας

Πρόσθεση και αφαίρεση

Έστω $z = x \pm y$.

Για ανεξάρτητες αβεβαιότητες χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$u(z) = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)}$$

και αν θέλουμε στη συνέχεια τη σχετική αβεβαιότητα του αποτελέσματος, υπολογίζουμε:

$$u_{\text{σχ}}(z) = \frac{u(z)}{|z|}$$

Διάδοση αβεβαιότητας

Παράδειγμα στην πρόσθεση και αφαίρεση

Έστω $x=(12,36\pm0,04)\text{cm}$ και $y=(3,2\pm0,2)\text{cm}$. Θέλουμε $z=x+y$.

Το x έχει 4 σημαντικά ψηφία, ενώ το y έχει 2 σημαντικά ψηφία.

Υπολογίζουμε πρώτα την τιμή χωρίς πρόωρη στρογγυλοποίηση: $z=12,36+3,2=15,56\text{cm}$.

Για ανεξάρτητες αβεβαιότητες, στην πρόσθεση: $u(z) = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)}$.

Άρα $u(z) = \sqrt{(0,04)^2 + (0,2)^2} = 0,0016 + 0,0400 = 0,0416 = 0,204\text{cm}$.

Στρογγυλοποιούμε την αβεβαιότητα: $u(z) = 0,20\text{cm}$.

Η τιμή πρέπει τώρα να δοθεί στην ίδια δεκαδική θέση με την αβεβαιότητα: $15,56 \rightarrow 15,56$.

Επομένως, **$z=(15,56\pm0,20)\text{cm}$**

Η τελική αβεβαιότητα επηρεάζεται κυρίως από τη μεγαλύτερη συνεισφορά αβεβαιότητας, εδώ αυτή του y .

Διάδοση αβεβαιότητας

Παράδειγμα πρόσθεσης

Έστω $x=(12,36\pm0,04)\text{cm}$ και $y=(3,20\pm0,20)\text{cm}$. Να υπολογιστεί το **$z = x+y$** .

Λύση

$$z=12,36+3,20=15,56\text{cm και } u(z) = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)} = \sqrt{(0,04)^2 + (0,20)^2} = 0,204\text{cm}$$

Επειδή το πρώτο σημαντικό ψηφίο είναι 2, κρατάμε δύο σημαντικά ψηφία $u(z)=0,20\text{cm}$.

$$\text{Τελικά } \mathbf{z=(15,56\pm0,20)cm}$$

Διάδοση αβεβαιότητας

Παράδειγμα αφαίρεσης

Έστω $x=(18,742\pm0,015)\text{g}$ και $y=(6,30\pm0,12)\text{g}$. Να υπολογιστεί το **$z = x - y$** .

Λύση

Το x έχει 5 σημαντικά ψηφία, ενώ το y έχει 3 σημαντικά ψηφία.

$$z = 18,742 - 6,30 = 12,442\text{g} \text{ και } u(z) = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)} = 0,1209\text{g}.$$

Επειδή το πρώτο σημαντικό ψηφίο της αβεβαιότητας είναι 1, κρατάμε δύο σημαντικά ψηφία
 $u(z) = 0,12\text{g}.$

Στρογγυλοποιούμε την τιμή του z στην ίδια δεκαδική θέση με την αβεβαιότητα
 $12,442 \rightarrow 12,44.$

$$\text{Τελικά } \mathbf{z = (12,44 \pm 0,12)g}$$

Διάδοση αβεβαιότητας

Παράδειγμα γινομένου

Έστω $x=(3,482\pm0,017)\text{m}$ και $y=(12,4\pm0,3)\text{N}$. Να υπολογιστεί το $\mathbf{z = x \cdot y}$.

Λύση

Το x έχει 3 δεκαδικά και 4 σημαντικά ψηφία, ενώ το y έχει 1 δεκαδικό και 3 σημαντικά ψηφία.

$$z = 3,482 \cdot 12,4 = 43,1768 \text{N}\cdot\text{m}$$

$$\frac{u(z)}{|z|} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,017}{3,482}\right)^2 + \left(\frac{0,3}{12,40}\right)^2} = 0,02468$$

Η απόλυτη αβεβαιότητα είναι: $u(z) = 43,1768 \cdot 0,02468 = 1,065603424 \text{N}\cdot\text{m}$

Επειδή το πρώτο σημαντικό ψηφίο της αβεβαιότητας είναι 1, κρατάμε δύο σημαντικά ψηφία

$$u(z)=1,1 \text{N}\cdot\text{m}$$

Άρα η τιμή στρογγυλοποιείται στην ίδια δεκαδική θέση: $43,1768 \rightarrow 43,2$

$$\text{Τελικά } \mathbf{z = (43,2 \pm 1,1)N \cdot m}$$

Διάδοση αβεβαιότητας

Παράδειγμα πηλίκου

Έστω $x=(18,735\pm0,025)\text{m}$ και $y=(2,6\pm0,1)\text{s}$. Να υπολογιστεί το $z = \frac{x}{y}$.

Λύση

Το x έχει 3 δεκαδικά και 5 σημαντικά ψηφία, ενώ το y έχει 1 δεκαδικό και 2 σημαντικά ψηφία.

$$z = 18,735/2,6 = 7,20577\text{m/s}$$

$$\frac{u(z)}{|z|} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2} = 0,03848$$

Η απόλυτη αβεβαιότητα είναι: $u(z) = 7,20577 \cdot 0,03848 = 0,2772780296\text{m/s}$

Επειδή το πρώτο σημαντικό ψηφίο είναι 2, κρατάμε δύο σημαντικά ψηφία $u(z) = 0,28\text{m/s}$

Άρα η τιμή στρογγυλοποιείται στην ίδια δεκαδική θέση: $7,20577 \rightarrow 7,21$

$$\text{Τελικά } \mathbf{z = (7,21\pm0,28)m/s}$$

Διάδοση Αβεβαιότητας – Παράδειγμα δύναμης

Παράδειγμα δύναμης

Έστω $x=(2,50\pm0,03)\text{m}$. Να υπολογιστεί το $\mathbf{z = x^2}$.

Λύση

$$z = (2,50)^2 = 6,25\text{m}^2$$

$$z = x^n \quad \text{και} \quad \frac{u(z)}{|z|} = |n| \cdot \frac{u(x)}{|x|}$$

$$\text{Εδώ } n=2, \text{ άρα } \frac{u(z)}{|z|} = |n| \frac{u(x)}{|x|} = 2 \cdot \frac{0,03}{2,50} = 0,024 \text{ και } u(z) = 6,25 \cdot (0,024) = 0,15\text{m}^2$$

$$\text{Τελικά } \mathbf{z = (6,25\pm0,15)m^2}$$

Διάδοση αβεβαιότητας

Παράδειγμα ρίζας

Έστω $x=(25,0\pm0,4)\text{m}^2$. Να υπολογιστεί το $\mathbf{z} = \sqrt{\mathbf{x}}$.

Λύση

$$z = \sqrt{25,0} = 5,00\text{m}$$

$$z = x^n \quad \text{και} \quad \frac{u(z)}{|z|} = |n| \cdot \frac{u(x)}{|x|}$$

$$\text{Εδώ } n=1/2, \text{ άρα } \frac{u(z)}{|z|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,4}{25,0} = 0,008 \text{ και } u(z) = 5,00 \cdot (0,008) = 0,04\text{m}$$

$$\text{Τελικά } \mathbf{z} = \mathbf{(5,00\pm0,04)m}$$

Διάδοση αβεβαιότητας : Εφαρμογή στη σχέση της πυκνότητας (1/3)

Έχουμε $m = (52,36 \pm 0,05)\text{g}$, $h = (5,00 \pm 0,02)\text{cm}$ και $d = (2,50 \pm 0,01)\text{cm}$.

$$\text{Να υπολογιστεί το } \rho = \frac{4m}{\pi h d^2}$$

Οι αριθμοί 4 και π θεωρούνται ακριβείς σταθερές, επομένως δεν συνεισφέρουν στην αβεβαιότητα.

$$\text{Μπορεί να γραφτεί ως } \rho = \pi \cdot 4 \cdot m \cdot h^{-1} \cdot d^{-2} \Rightarrow \rho = 2,133338... \text{g/cm}^3$$

Για σχέσεις τις μορφής

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}^a \cdot \mathbf{y}^b \cdot \mathbf{w}^c$$

Η σχετική αβεβαιότητα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{u(\mathbf{z})}{|\mathbf{z}|} = \sqrt{a^2 \left(\frac{u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} \right)^2 + b^2 \left(\frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{y}|} \right)^2 + c^2 \left(\frac{u(\mathbf{w})}{|\mathbf{w}|} \right)^2} \Rightarrow$$

Διάδοση αβεβαιότητας : Εφαρμογή στη σχέση της πυκνότητας (2/3)

$$\Rightarrow \frac{u(\rho)}{\rho} = \sqrt{1^2 \left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + (-1)^2 \left(\frac{u(h)}{h}\right)^2 + (-2)^2 \left(\frac{u(d)}{d}\right)^2}$$

$$\frac{u(m)}{m} = \frac{0,05}{52,36} = 0,0009549 \quad \frac{u(h)}{h} = \frac{0,02}{5,00} = 0,004 \quad \frac{u(d)}{d} = \frac{0,01}{2,50} = 0,004$$

Αντικαθιστώντας έχουμε $\frac{u(\rho)}{\rho} = 0,00899510978254$

$$u(\rho) = 2,133338 \times 0,008995 = 0,01919 \text{ g/cm}^3$$

Το πρώτο σημαντικό ψηφίο της αβεβαιότητας είναι 1, οπότε σύμφωνα με τον κανόνα που χρησιμοποιούμε κρατάμε δύο σημαντικά ψηφία: $0,01919 \rightarrow 0,019$

$$\text{Επομένως } u(\rho) = 0,019 \text{ g/cm}^3$$

Διάδοση αβεβαιότητας : Εφαρμογή στη σχέση της πυκνότητας (3/3)

Η αβεβαιότητα είναι $0,019 \text{ g/cm}^3$ και το τελευταίο σημαντικό ψηφίο της είναι στα χιλιοστά.

Άρα και η τιμή $2,133338...$ πρέπει να στρογγυλοποιηθεί στα χιλιοστά $2,133338 \rightarrow 2,133$

$$\text{Τελικά } \rho = (2,133 \pm 0,019) \text{ g/cm}^3$$

 Στους αριθμητικούς υπολογισμούς χρησιμοποίησα την πλήρη τιμή του π που δίνει η αριθμομηχανή, δηλαδή περίπου $\pi = 3,141592654$ και όχι τη στρογγυλοποιημένη τιμή $3,14$.

Διάδοση αβεβαιότητας: Εφαρμογή στη σχέση $g = \frac{2S}{t^2 \sin \phi}$ (1/2)

Έχουμε $S=(1,000 \pm 0,005)\text{m}$, $t=(0,640 \pm 0,003)\text{s}$ και $\phi=(30,0 \pm 0,2)^\circ$.

Να υπολογιστεί το $g = \frac{2S}{t^2 \sin \phi}$

Μπορεί να γραφτεί ως $g=2St^{-2}(\sin \phi)^{-1} \Rightarrow g = 9,7656\text{m/s}^2$

$$\frac{d}{d\phi} \sin \phi = \cos \phi . \text{ Άρα } u(\sin \phi) = |\cos \phi| \cdot u(\phi)$$

Η σχετική αβεβαιότητα του $\sin \phi$ είναι: $\frac{u(\sin \phi)}{|\sin \phi|} = \left| \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \right| \cdot u(\phi) \Rightarrow \frac{u(\sin \phi)}{|\sin \phi|} = |\cot \phi| \cdot u(\phi)$

$$\frac{u(g)}{|g|} = \sqrt{\left(\frac{u(S)}{S}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u(t)}{t}\right)^2 + (\cos \phi \cdot u(\phi))^2}$$

Διάδοση αβεβαιότητας: Εφαρμογή στη σχέση $g = \frac{2S}{t^2 \sin \phi}$ (2/2)

Η αβεβαιότητα της γωνίας $u(\phi)$ πρέπει να είναι σε radians, όχι σε μοίρες.

$$u(\phi) = 0,2^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0,00349 \text{ rad}$$

Οπότε

$$\frac{u(g)}{|g|} = \sqrt{\left(\frac{0,005}{1,000}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{0,003}{0,640}\right)^2 + (1,732 \cdot 0,00349)^2} = 0,01222$$

Η απόλυτη αβεβαιότητα είναι

$$u(g) = 9,7656 \cdot (0,01222) = 0,119 \text{ m/s}^2 \text{ . Επειδή το πρώτο σημαντικό ψηφίο είναι 1}$$
$$u(g) = 0,12 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Τελικά } \mathbf{g = (9,77 \pm 0,12) m/s^2}$$

Διάδοση αβεβαιότητας: Εφαρμογή στη σχέση $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (1/2)

Έχουμε $R_1 = (100,0 \pm 1,0)\Omega$ και $R_2 = (220 \pm 2)\Omega$.

Να υπολογιστεί το $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Μπορεί να γραφτεί ως $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

Άρα η απόλυτη αβεβαιότητα της ολικής αντίστασης είναι

$$u(R) = \sqrt{\left[\frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} u(R_1) \right]^2 + \left[\frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} u(R_2) \right]^2}$$

Διάδοση αβεβαιότητας: Εφαρμογή στη σχέση $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (2/2)

$$\frac{u(R)}{R} = \sqrt{\left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{u(R_1)}{R_1} \right]^2 + \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{u(R_2)}{R_2} \right]^2}$$

$$u(R) = \sqrt{\left[\frac{220^2}{(100 + 220)^2} (1,0) \right]^2 + \left[\frac{100^2}{(100 + 220)^2} (2) \right]^2}$$

$$u(R) = \sqrt{((0,4727 \cdot 1,0))^2 + (0,09766 \cdot 2)^2} = 0,51 \Omega$$

Το πρώτο σημαντικό ψηφίο είναι 5, κρατάμε ένα σημαντικό ψηφίο $u(R) = 0,5 \Omega$

Η τιμή της αντίστασης γράφεται στην ίδια δεκαδική θέση $68,75 \rightarrow 68,8 \Omega$

Τελικά **$R = (68,8 \pm 0,5) \Omega$**

Κανόνες Στρογγυλοποίησης

Κατά την παρουσίαση του τελικού αποτελέσματος, ακολουθείται αυστηρή σειρά και συγκεκριμένοι κανόνες:

1

Πρώτα στρογγυλοποιείται το σφάλμα και ΜΕΤΑ η μέση τιμή.

Το σφάλμα καθορίζεται από το «τελευταίο έγκυρο ψηφίο» μέχρι το οποίο έχει νόημα η μέτρηση.

2

Κανόνας Σημαντικών Ψηφίων στην Αβεβαιότητα.

Η αβεβαιότητα γράφεται πάντα με 1 σημαντικό ψηφίο, εκτός αν το πρώτο ψηφίο είναι το 1 ή το 2, οπότε και συστήνεται να κρατούνται 2 σημαντικά ψηφία για μεγαλύτερη ακρίβεια.

3

Διατήρηση ψηφίων στους υπολογισμούς.

Στη διάρκεια όλων των ενδιάμεσων πράξεων, κρατάμε ιδανικά όλα τα ψηφία που βγάζει ο υπολογιστής (ή τουλάχιστον 3-4 **επιπλέον** ψηφία ασφαλείας) και στρογγυλοποιούμε αποκλειστικά και μόνο στο τελικό βήμα ώστε να αποφεύγονται σφάλματα στρογγυλοποίησης.

Παραδείγματα Στρογγυλοποίησης

Παράδειγμα 1

Έστω μέση τιμή $\bar{x} = 14.5678 \text{ cm}$ και τυπικό σφάλμα $SE = 0.0234 \text{ cm}$.

- Πρώτο σημαντικό ψηφίο του σφάλματος είναι το 2 $\rightarrow$ κρατάμε 2 σημαντικά ψηφία το σφάλμα γίνεται $\pm 0.023 \text{ cm}$.
- Προσαρμόζουμε τη μέση τιμή στην 3η δεκαδική θέση (στρογγυλοποιώντας) οπότε το 14.5678 γίνεται 14.568 cm.
- Άρα $(14.568 \pm 0.023) \text{ cm}$.

Παράδειγμα 2

Έστω $\bar{x} = 4523 \text{ m}$ και $SE = 42 \text{ m}$.

- Το σφάλμα 42 στρογγυλοποιείται στο 1^ο σημαντικό ψηφίο: $\pm 40 \text{ m}$.
- Η μέση τιμή στρογγυλοποιείται στη θέση των δεκάδων: το 4523 m γίνεται 4520 m.
- Άρα $(4520 \pm 40) \text{ m}$ ή σε δυνάμεις του 10: $(4.52 \pm 0.04) \times 10^3 \text{ m}$.

Απόδειξη μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (1/4)

Για το σημείο (x_i, y_i) , η ευθεία προβλέπει ότι για την τιμή x_i θα έπρεπε να έχουμε:

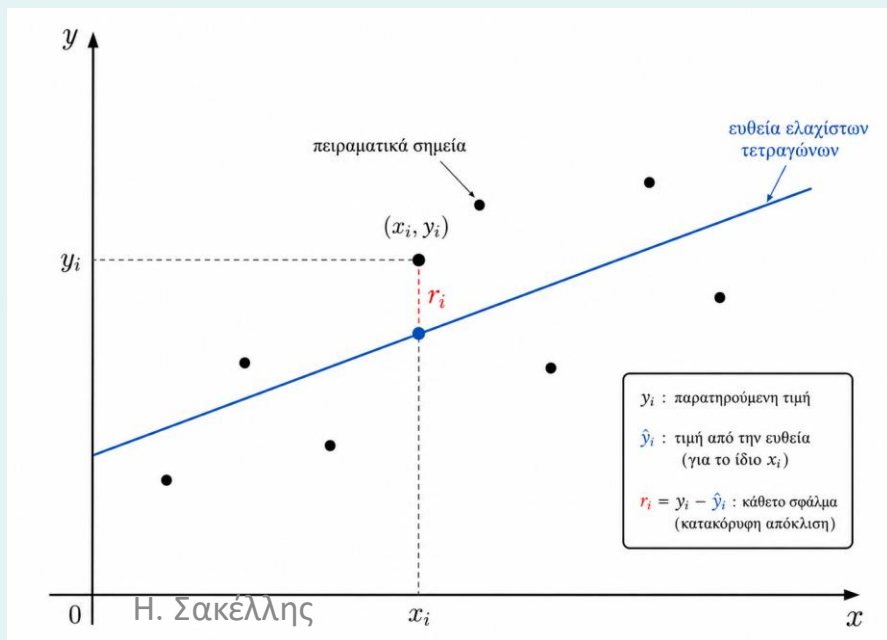
$$y_i^{\text{fit}} = ax_i + b.$$

Όμως πειραματικά έχουμε μετρήσει y_i .

Η διαφορά

$$r_i = y_i - y_i^{\text{fit}} = y_i - (ax_i + b) \text{ ονομάζεται } \mathbf{\text{υπόλοιπο}} \text{ (residual)}$$

και δείχνει πόσο απέχει κατακόρυφα το πειραματικό σημείο από την ευθεία.



- $r_i > 0$: το σημείο βρίσκεται πάνω από την ευθεία.
- $r_i < 0$: το σημείο βρίσκεται κάτω από την ευθεία.
- $r_i = 0$: το σημείο βρίσκεται ακριβώς πάνω στην ευθεία.

Απόδειξη μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (2/4)

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων επιλέγει τα a και b έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των υπολοίπων να γίνει ελάχιστο:

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)]^2$$

όπου N το πλήθος των πειραματικών σημείων. Επομένως θέλουμε:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

Από τις δύο συνθήκες με τις μερικές παραγώγους προκύπτουν δύο νέες εξισώσεις:

$$\sum x_i y_i = a \sum x_i^2 + b \sum x_i \quad \text{και} \quad \sum y_i = a \sum x_i + Nb.$$

* Τα αθροίσματα ως προς i εκτείνονται από το 1 έως το N .

Απόδειξη μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (3/4)

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε:

$$a = \frac{N \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

και

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

όπου

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum y_i.$$



Άρα, η ευθεία $y=ax+b$ που προκύπτει είναι εκείνη για την οποία **το συνολικό τετράγωνο των αποκλίσεων των πειραματικών σημείων από την ευθεία είναι το μικρότερο δυνατό.**

Οδηγίες συγγραφής εργαστηριακής αναφοράς

Η εργαστηριακή αναφορά δεν είναι απλή καταγραφή όσων κάνατε στο εργαστήριο και δεν είναι περίληψη του φυλλαδίου της άσκησης.

Σκοπός της είναι να παρουσιάσει με σαφή και τεκμηριωμένο τρόπο:

- ποιο φυσικό ερώτημα μελετήθηκε,
- πώς πραγματοποιήθηκε η μέτρηση,
- ποια δεδομένα συλλέχθηκαν,
- πώς αναλύθηκαν,
- ποιο αποτέλεσμα προέκυψε και με ποια αβεβαιότητα,
- τι σημαίνει φυσικά το αποτέλεσμα,
- κατά πόσο συμφωνεί με τη θεωρία ή με μια αναμενόμενη τιμή.



Η αναφορά πρέπει να δείχνει όχι μόνο τι μετρήσατε, αλλά κυρίως τι συμπεράνατε από τις μετρήσεις σας και γιατί.

Η αναφορά αρχίζει μέσα στο εργαστήριο

Δεν είναι δυνατό να γραφτεί καλή αναφορά αν δεν έχουν καταγραφεί σωστά οι μετρήσεις.

Κατά τη διάρκεια του πειράματος καταγράφετε προσεκτικά:

- τις πρωτογενείς μετρήσεις,
- τις μονάδες,
- τις σχετικές πληροφορίες για τα όργανα,
- τις συνθήκες του πειράματος και οποιοδήποτε γεγονός μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα.

Δεν αλλάζουμε μια μέτρηση επειδή δεν συμφωνεί με αυτό που περιμέναμε.

Αν θεωρούμε ότι μια μέτρηση πρέπει να απορριφθεί, πρέπει να υπάρχει συγκεκριμένος και επιστημονικά αιτιολογημένος λόγος.



Επιστημονικό ύφος συγγραφής εργαστηριακής αναφοράς

- Είναι προτιμότερη η απρόσωπη σύνταξη για την περιγραφή της πειραματικής διαδικασίας (π.χ. «Μετρήθηκε το μήκος του εκκρεμούς.») ή το γ' πρόσωπο όταν το υποκείμενο είναι τα δεδομένα, η ανάλυση ή ένα αποτέλεσμα (π.χ. «Η ανάλυση των δεδομένων οδηγεί σε τιμή ...», «τα δεδομένα δείχνουν...», «η γραμμική προσαρμογή δίνει...») ή το [πρώτο πληθυντικό (π.χ. «μετρήσαμε», «υπολογίσαμε»), ενώ προτείνεται να αποφεύγεται συνήθως το α' ενικό («εγώ μέτρησα», «παρατήρησα»).
- Για όσα πραγματοποιήθηκαν στο πείραμα χρησιμοποιείται συνήθως παρελθοντικός χρόνος π.χ. «Μετρήθηκε ο χρόνος δέκα ταλαντώσεων...», «Κατασκευάστηκε η γραφική παράσταση του ...», «Η γραμμική προσαρμογή έδωσε κλίση ...»
- Για φυσικούς νόμους ή γενικά ισχύουσες σχέσεις χρησιμοποιείται ενεστώτας π.χ. «Η περίοδος του απλού εκκρεμούς εξαρτάται από το μήκος του.», «Η δύναμη του ελατηρίου είναι ανάλογη της επιμήκυνσής του.»
- Δεν χρειάζονται περίπλοκες εκφράσεις για να φαίνεται το κείμενο «επιστημονικό».

Προτεινόμενη δομή της αναφοράς

1. Στοιχεία και τίτλος της άσκησης
2. Σκοπός
3. Σύντομο θεωρητικό υπόβαθρο
4. Πειραματική διάταξη και μέθοδος
5. Μετρήσεις και επεξεργασία δεδομένων
6. Αποτελέσματα
7. Συζήτηση
8. Συμπεράσματα
9. Απαντήσεις στις ερωτήσεις της άσκησης
10. Βιβλιογραφικές αναφορές

Σε ορισμένες περιπτώσεις οι ενότητες «Αποτελέσματα» και «Συζήτηση» μπορούν να παρουσιαστούν μαζί.

1. Στοιχεία και τίτλος της άσκησης



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Βασικό Εργαστήριο Φυσικής Ι

Εργαστηριακή Αναφορά Άσκησης Α1
"Μετρήσεις, αβεβαιότητες, σφάλματα,
στρογγυλοποιήσεις, γραφήματα"

Α.Μ.	Επώνυμο	Όνομα

Άσκηση	Ημερομηνία Άσκησης	Ημερομηνία Παράδοσης

Τμήμα, ημέρα, ώρα εργαστηρίου	Υπεύθυνος

2. Σκοπός

Ο σκοπός πρέπει να απαντά στην ερώτηση:

Τι θέλουμε να προσδιορίσουμε, να ελέγχουμε ή να διερευνήσουμε;

Παράδειγμα

Αδύναμη διατύπωση: Σκοπός είναι να μελετήσουμε το εκκρεμές.

Καλύτερη διατύπωση: Σκοπός του πειράματος είναι ο προσδιορισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας από τη μέτρηση της περιόδου απλού εκκρεμούς και η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της περιόδου και του μήκους του.

Ο σκοπός πρέπει να είναι συγκεκριμένος και σύντομος.

3. Σύντομο θεωρητικό υπόβαθρο

Η θεωρία πρέπει να περιλαμβάνει **μόνο όσα χρειάζονται για να κατανοηθούν το πείραμα και η επεξεργασία των δεδομένων.**

- Δεν χρειάζεται να αντιγράψετε το φυλλάδιο ή από κάποιο βιβλίο.
- Πρέπει να εξηγείτε τι σημαίνει το κάθε μέγεθος καθώς και τις μονάδες μέτρησής του.
- Να υπάρχει σύνδεση της θεωρίας με την πειραματική διαδικασία και τα πειραματικά αποτελέσματα.

4. Πειραματική διάταξη και μέθοδος

Περιγράφετε συνοπτικά:

- Ποια διάταξη χρησιμοποιήθηκε,
- Ποια μεγέθη μετρήθηκαν,
- Με ποια όργανα,
- Ποια μεγέθη μεταβλήθηκαν,
- Πώς πραγματοποιήθηκε η βασική μέτρηση.

Η. Σακέλλης

- Ένα απλό σχεδιάγραμμα ή και φωτογραφία της διάταξης είναι συχνά ιδιαίτερα χρήσιμο.
 - Δεν αντιγράφουμε τις οδηγίες του φυλλαδίου βήμα προς βήμα.
- Η μέθοδος πρέπει να περιγράφει τη λογική της μέτρησης.

5. Μετρήσεις και επεξεργασία δεδομένων (1/3)

Οι μετρήσεις πρέπει να παρουσιάζονται οργανωμένα.

Παράδειγμα

Κάθε πίνακας πρέπει να έχει:

- αριθμό και σύντομο τίτλο,
- σαφή ονομασία ή σύμβολο κάθε μεγέθους,
- μονάδες στις κεφαλίδες,
- λογικό αριθμό δεκαδικών ψηφίων.



- Δεν χρειάζεται να γράφεται η μονάδα μέτρησης μετά από κάθε αριθμό, εφόσον υπάρχει στην κεφαλίδα της στήλης.
- Πρέπει επίσης να είναι σαφές ποια μεγέθη μετρήθηκαν άμεσα και ποια υπολογίστηκαν.
- Να αναφέρετε μέσα στο κείμενο ο αριθμός του πίνακα όποτε γίνεται αναφορά στα στοιχεία του.

5. Μετρήσεις και επεξεργασία δεδομένων (2/3)

Μετρούμενα μεγέθη		Υπολογιζόμενα μεγέθη	
L (m)	t_{10} (s)	T (s)	T^2 (s ²)
0,40	12,72	1,272	1,618
0,50	14,19	1,419	2,014
0,60	15,55	1,555	2,418

Πίνακας 1. Μετρήσεις του απλού εκκρεμούς. Οι πρώτες δύο στήλες περιέχουν τον χρόνο 10 ταλαντώσεων (t_{10}) του εκκρεμούς για τρία διαφορετικά μήκη (L) αντιστοίχως. Οι δύο τελευταίες στήλες περιλαμβάνουν τις τιμές της περιόδου (T) και του τετραγώνου της (T^2) όπως υπολογίστηκαν από τους χρόνους t_{10} .

5. Μετρήσεις και επεξεργασία δεδομένων (3/3)

Δεν χρειάζεται να παρουσιάζετε την ίδια αριθμητική πράξη πολλές φορές. Δείξτε έναν αντιπροσωπευτικό υπολογισμό και δώστε τα υπόλοιπα αποτελέσματα συγκεντρωτικά.

Ένα τελικό πειραματικό αποτέλεσμα πρέπει, όταν απαιτείται, να περιλαμβάνει:

τιμή $\pm$ αβεβαιότητα και μονάδα μέτρησης

$$\text{π.χ. } g = (9,76 \pm 0,08) \text{ m/s}^2$$



Η αβεβαιότητα δεν πρέπει να εμφανίζεται χωρίς εξήγηση.

Ο αναγνώστης πρέπει να γνωρίζει αν προέρχεται, για παράδειγμα, από:

- την ανάλυση του οργάνου,
- τη διασπορά επαναλαμβανόμενων μετρήσεων,
- τη διάδοση των αβεβαιοτήτων,
- την προσαρμογή μιας ευθείας.

6. Αποτελέσματα (1/5)

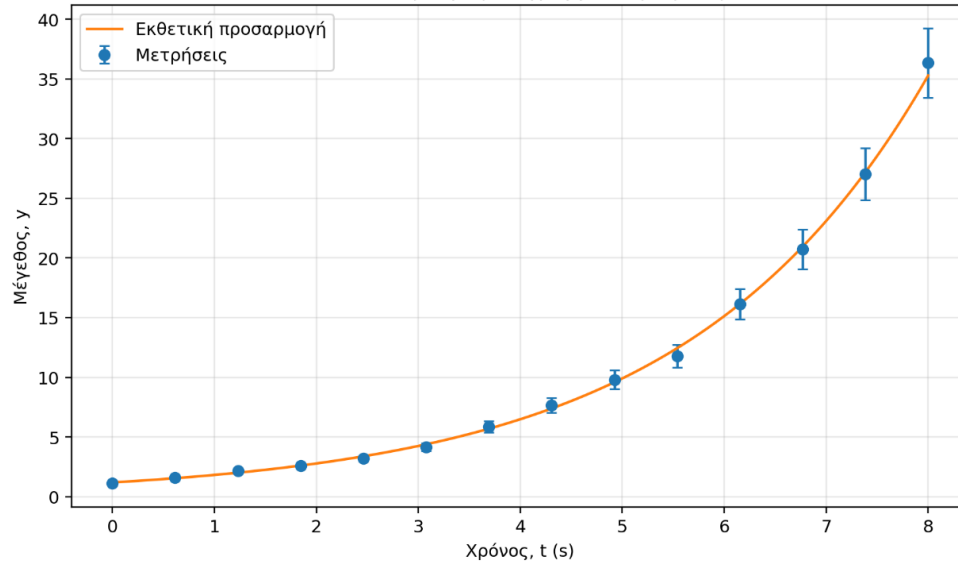
Κάθε γράφημα πρέπει να έχει:

- Σωστά επιλεγμένους άξονες,
- Το φυσικό μέγεθος και τη μονάδα μέτρησης σε κάθε άξονα,
- Ευδιάκριτα πειραματικά σημεία,
- Κατάλληλη κλίμακα,
- Σφάλματα (Error bars),
- Αριθμό και λεζάντα.

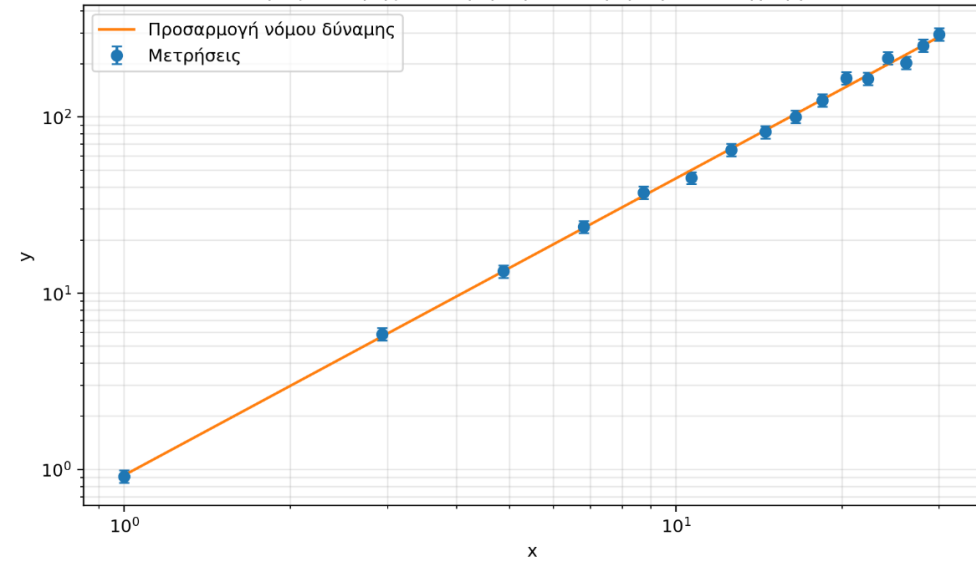


6. Αποτελέσματα (1/5) – Σωστά γραφήματα

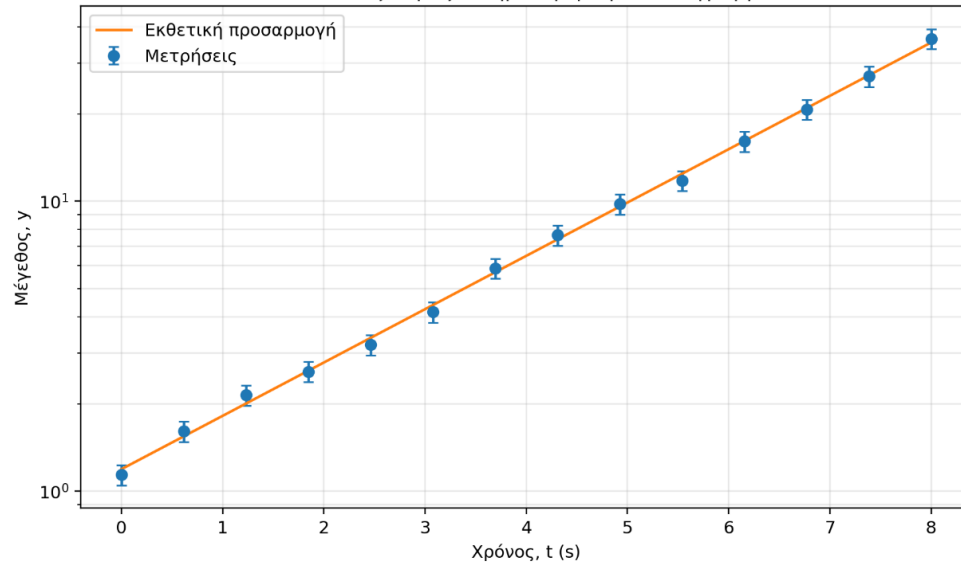
Εκθετικός νόμος σε γραμμικούς άξονες



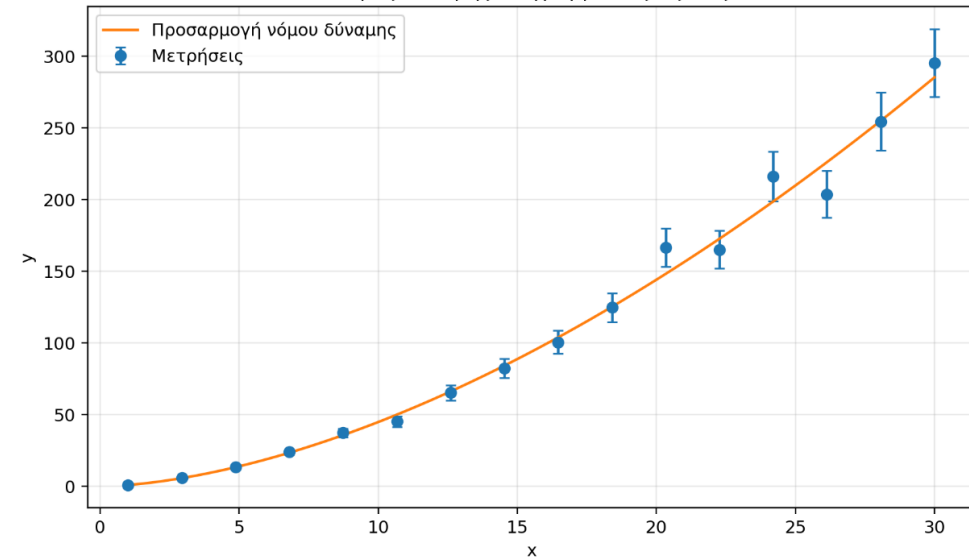
Νόμος δύναμης σε λογαριθμικό-λογαριθμικό διάγραμμα



Εκθετικός νόμος σε ημιλογαριθμικό διάγραμμα

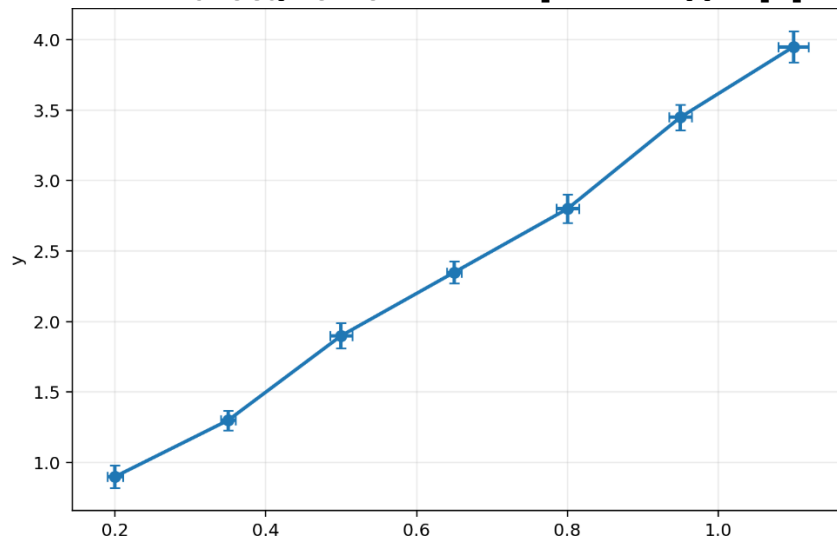


Νόμος δύναμης σε γραμμικούς άξονες

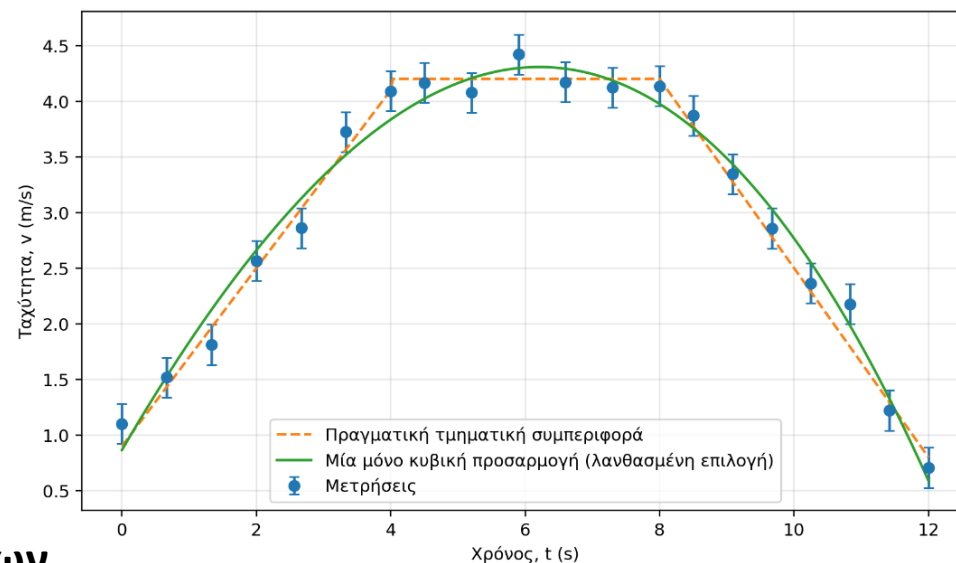


6. Αποτελέσματα (2/5) – Λάθος γραφήματα

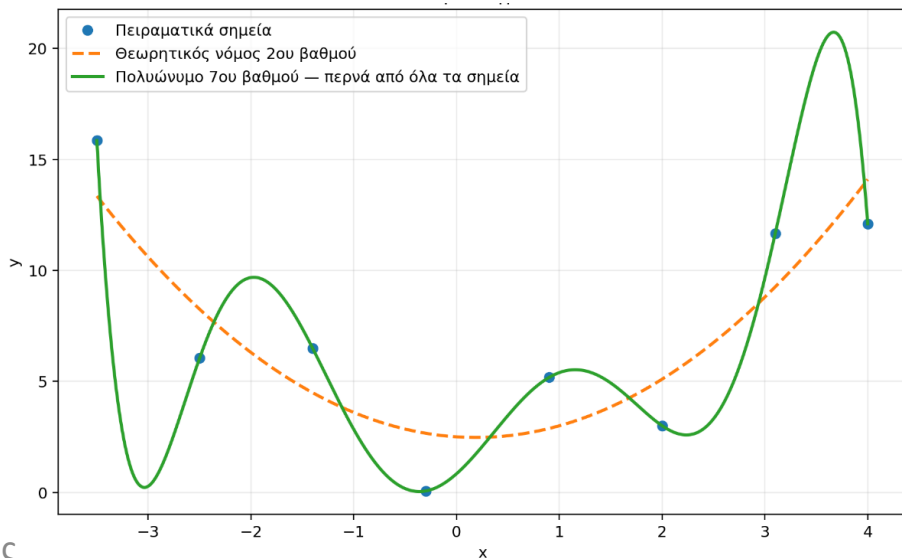
Λάθος η χρήση τεθλασμένων γραμμών



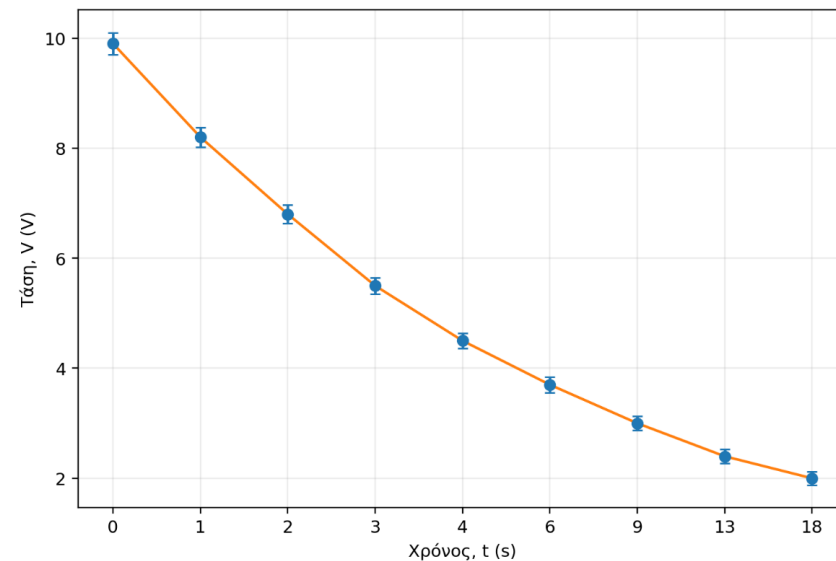
Λάθος η χρήση ενιαίου fit - τρεις διαφορετικές κινήσεις



Υπερπροσαρμογή (overfitting) των πειραματικών δεδομένων με πολυώνυμο υψηλού βαθμού χωρίς φυσικό νοήμα

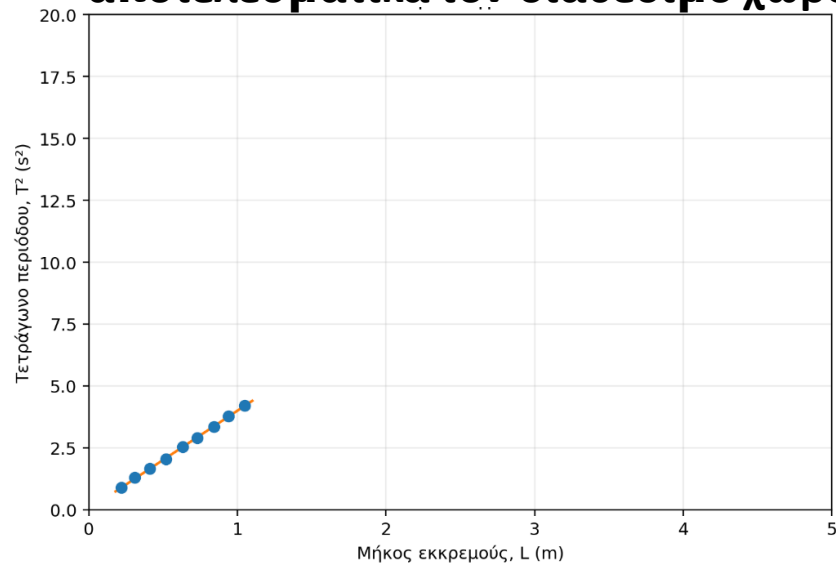


Λανθασμένη κλίμακα/διαμέριση άξονα

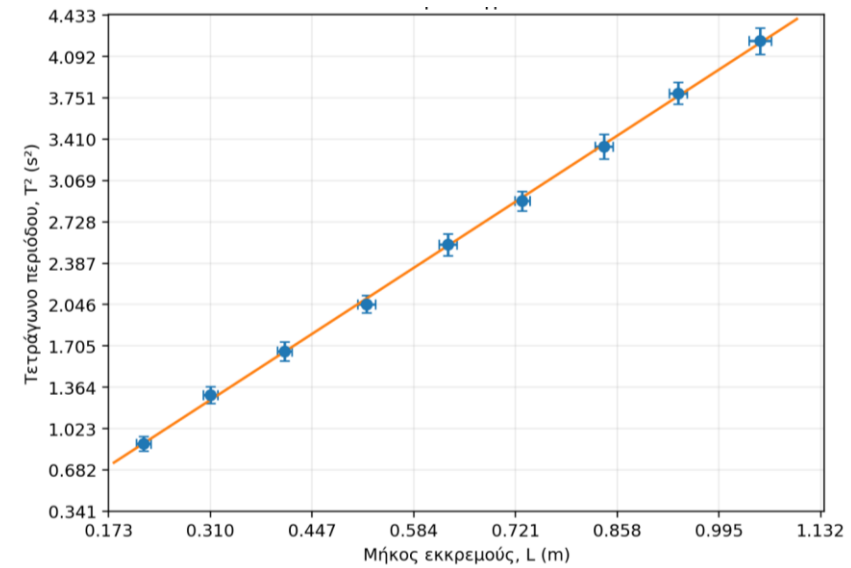


6. Αποτελέσματα (3/5) – Λάθος γραφήματα

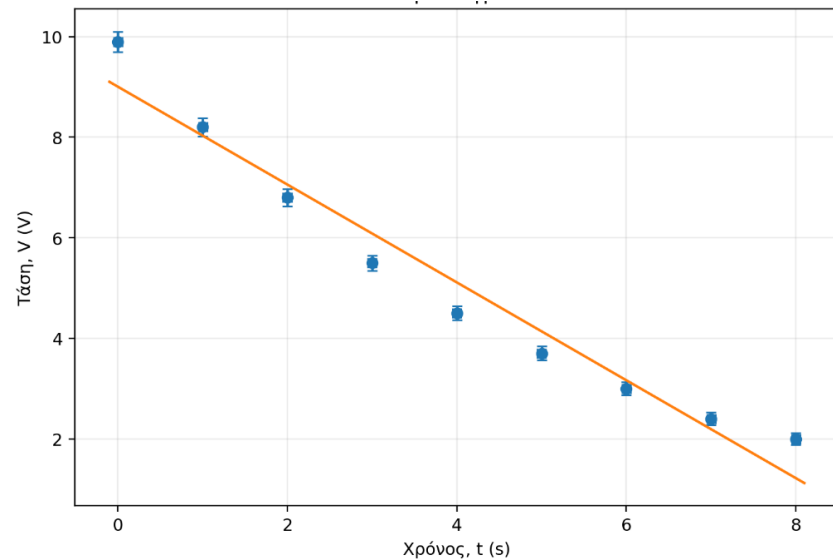
Η κλίμακα των αξόνων δεν αξιοποιεί αποτελεσματικά τον διαθέσιμο χώρο



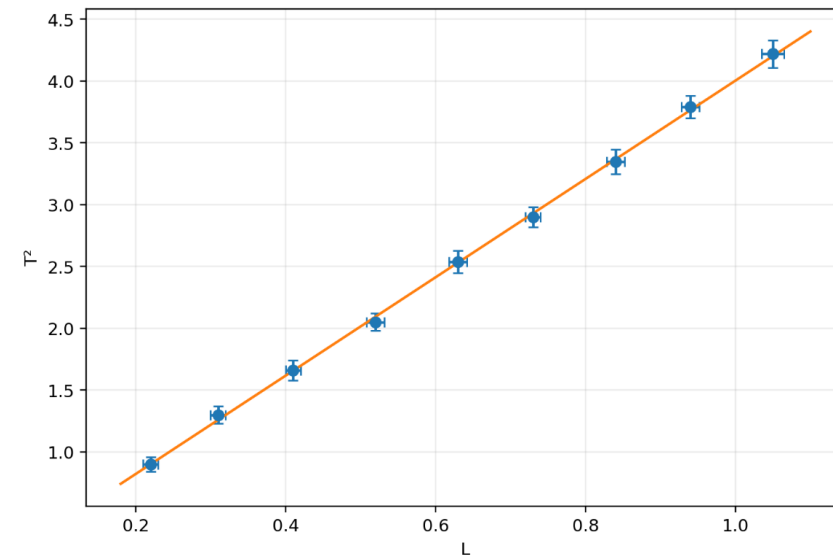
Δύσχρηστη βαθμονόμηση των αξόνων



Λανθασμένο μοντέλο προσαρμογής

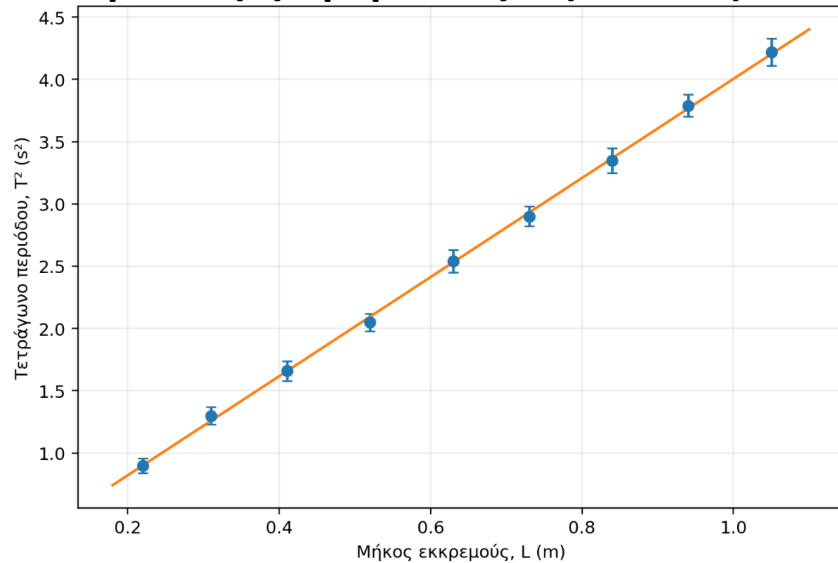


Ελλιπείς ονομασίες και μονάδες αξόνων

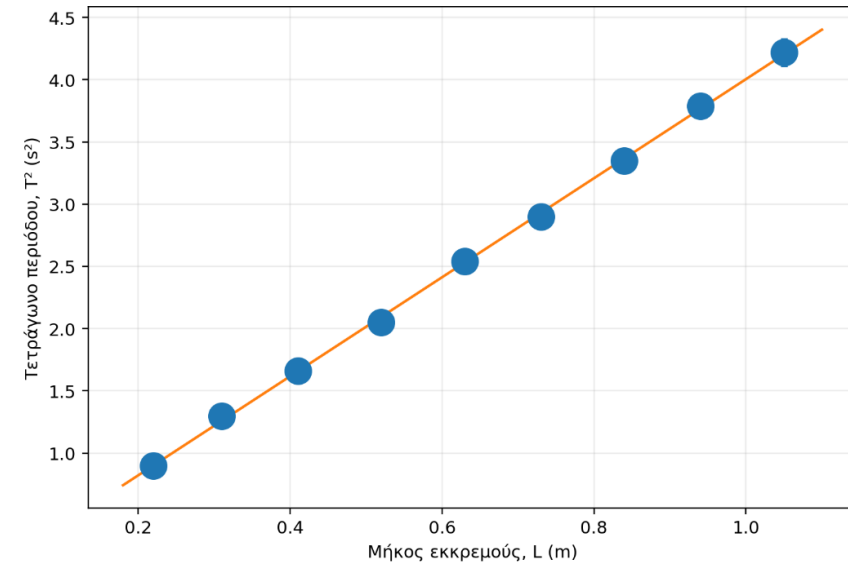


6. Αποτελέσματα (4/5) - Λάθος γραφήματα

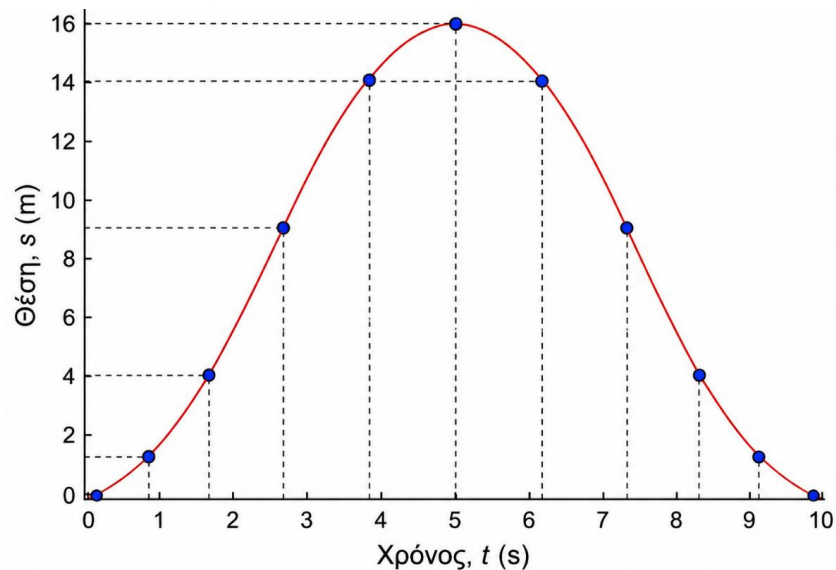
Παράλειψη αβεβαιότητας στον άξονα x'x



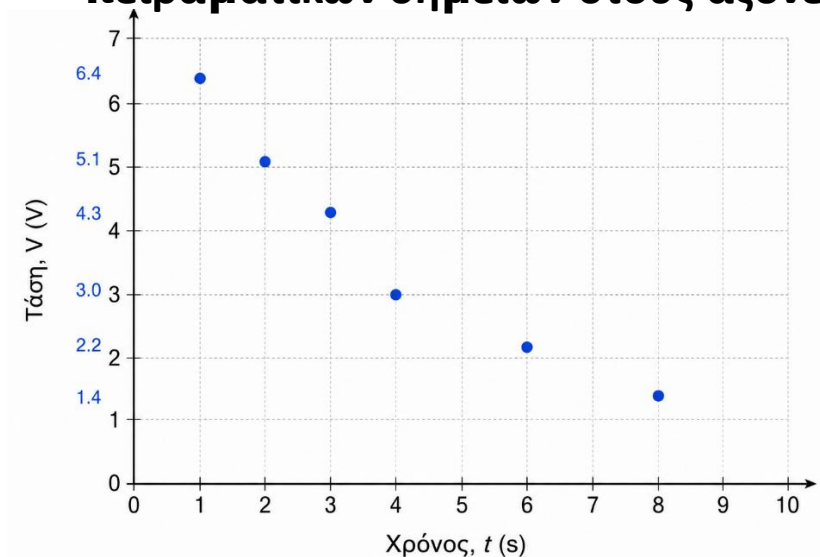
Υπερβολικά μεγάλα σημεία



Η χρήση διακεκομμένων γραμμών είναι περιττή/κακή πρακτική.

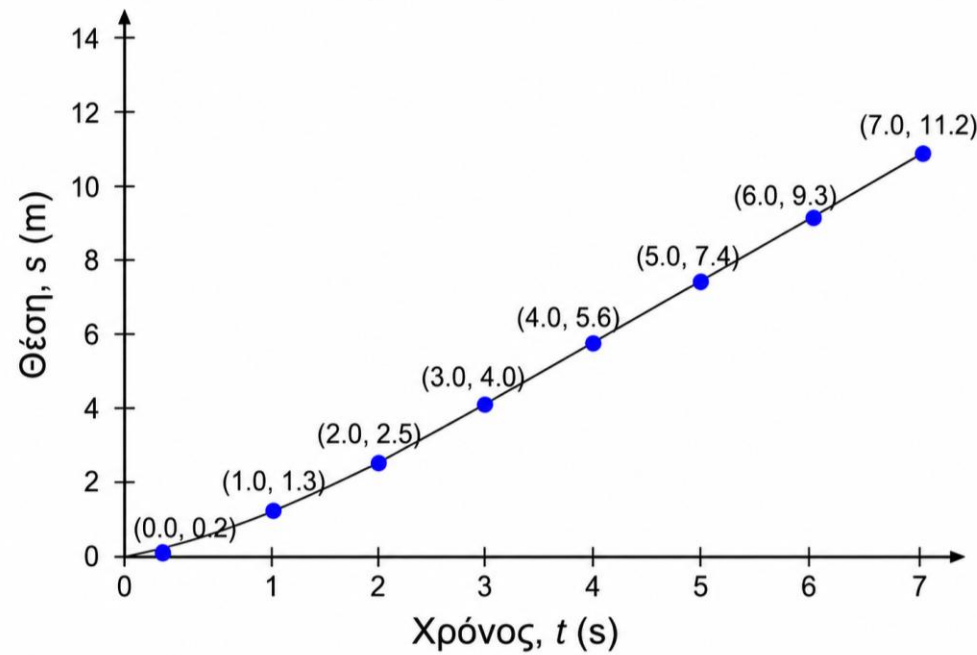


Λάθος η προσθήκη επιμέρους τιμών των πειραματικών σημείων στους άξονες.



6. Αποτελέσματα (5/5)

Λανθασμένη αναγραφή συντεταγμένων δίπλα σε κάθε πειραματικό σημείο



6. Αποτελέσματα (3/3)

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τα σημαντικά τελικά αποτελέσματα.

Για παράδειγμα:

Από την κλίση της γραμμικής προσαρμογής προσδιορίστηκε

$$\mathbf{g = (9,76 \pm 0,08) \, m/s^2}$$



Τα αποτελέσματα (τελικά ή ενδιάμεσα) πρέπει να ξεχωρίζουν και να μη βρίσκονται κρυμμένα ανάμεσα σε πολλούς υπολογισμούς.

7. Συζήτηση

Αυτή είναι μία από τις σημαντικότερες ενότητες της αναφοράς.

Αποτελέσματα = τι βρήκαμε

Συζήτηση = τι σημαίνει αυτό που βρήκαμε

- Τι βρήκαμε;
- Συμφωνεί με την αναμενόμενη συμπεριφορά;
- Πόσο απέχει από την αναμενόμενη τιμή;
- Είναι η διαφορά σημαντική σε σχέση με την αβεβαιότητα;
- Ποιοι παράγοντες μπορούν να εξηγήσουν την αβεβαιότητα;
- Ποιος είναι ο μηχανισμός κάθε πηγής σφάλματος;
- Προς ποια κατεύθυνση επηρεάζουν το αποτέλεσμα;
- Υπάρχουν κάποιες υποθέσεις της θεωρίας που δεν ικανοποιήθηκαν επαρκώς;
- Υπήρχαν ασυνήθιστα σημεία ή αποκλίσεις στα δεδομένα;
- Πώς θα μπορούσε να βελτιωθεί το πείραμα;

8. Συμπεράσματα

Πώς κρίνουμε αν ένα αποτέλεσμα συμφωνεί με την θεωρητική τιμή;

$$\text{Έστω } \mathbf{g_{\text{πειρ}} = (9,65 \pm 0,12) \text{ m/s}^2 \text{ και } \mathbf{g_{\text{θεωρ}} = 9,81 \text{ m/s}^2}$$

$$\text{Η απόλυτη απόκλιση είναι: } \mathbf{|9,65 - 9,81| = 0,16 \text{ m/s}^2}$$

$$\text{Η σχετική απόκλιση είναι περίπου: } \mathbf{0,16 / 9,81 \times 100\% = 1,6\%}$$

Το σημαντικό όμως είναι να συγκρίνουμε αυτή την απόκλιση και με την πειραματική αβεβαιότητα.



- Αν η απόκλιση είναι πολύ μεγαλύτερη από την αναμενόμενη αβεβαιότητα, πρέπει να διερευνηθεί αν υπάρχει κάποια συστηματική επίδραση ή κάποια αδυναμία του πειραματικού μοντέλου.
- Στα συμπεράσματα **δεν εισάγουμε νέα δεδομένα, νέους υπολογισμούς ή νέα θεωρία.**

9. Απαντήσεις στις ερωτήσεις της άσκησης

Οι ερωτήσεις του φυλλαδίου πρέπει να απαντώνται όλες, **αναλυτικά**, με **σαφήνεια** και **αιτιολόγηση**. Οι απαντήσεις δεν πρέπει να είναι μονολεκτικές ούτε απλή αντιγραφή της θεωρίας.

10. Βιβλιογραφικές αναφορές

Κάθε βιβλίο, άρθρο, πανεπιστημιακή σημείωση ή άλλη πηγή από την οποία χρησιμοποιήθηκαν πληροφορίες, δεδομένα, εικόνες ή θεωρητικό υλικό πρέπει να αναφέρεται. Οι πηγές πρέπει να είναι αξιόπιστες ενώ θα πρέπει να αναγράφονται με ενιαίο τρόπο σε όλη την εργασία.

Βιβλιογραφία - βασικές πηγές

1.Bureau International des Poids et Mesures (BIPM).

The International System of Units (SI), 9th edition.

BIPM, 2019, updated 2026.

2.Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM).

International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms (VIM), JCGM 200:2012.

BIPM.

3.Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM).

Evaluation of Measurement Data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM).

JCGM 100:2008.

4.Taylor, B. N. & Kuyatt, C. E.

Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results.

NIST Technical Note 1297, 1994.

5. Menditto, A., Patriarca, M. & Magnusson, B.

"Understanding the meaning of accuracy, trueness and precision."
Accreditation and Quality Assurance, **12**, 45-47 (2007).

6. Taylor, J. R.

An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements.
University Science Books, 2nd ed., 1997.

7. Bevington, P. R. & Robinson, D. K.

Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences.
McGraw-Hill, 3rd ed., 2003.

8. Hughes, I. G. & Hase, T. P. A.

Measurements and Their Uncertainties: A Practical Guide to Modern Error Analysis.
Oxford University Press, 2010.

9. Squires, G. L.

Practical Physics.
Cambridge University Press, 4th ed., 2001.

10. NIST.

Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results.