ΦΥΣΙΚΗ Ι



ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2026-2027

ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΩΜΑΤΟΣ

- Ισορροπία Σωματιδίου
- Στατική Ισορροπία Στερεού Σώματος

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ (ΒΑΡΟΥΣ)

- Ορισμός Κέντρου Μάζας (Βάρους)
- Εύρεση Κέντρου Μάζας με Ολοκλήρωση
- Δυναμική του Κέντρου Μάζας για Σύστημα Σωματιδίων

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2026-2027

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ΦΑΡΑΚΟΣ	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΩΜΑΤΟΣ	7.2	12.1,12.2, 12.3	12.1, 12.2, 12.3, 12.5, 12.6	11.1, 11.3
ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ	6.1, 6.2	9.8	12.4	11.2

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Η ισορροπία υλικού σωματιδίου στο χώρο εξασφαλίζεται όταν το διανυσματικό άθροισμα των επενεργούντων σ' αυτό δυνάμεων μηδενίζεται.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N} F_{xi} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} F_{yi} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} F_{zi} = 0 \end{array} \right\}$$

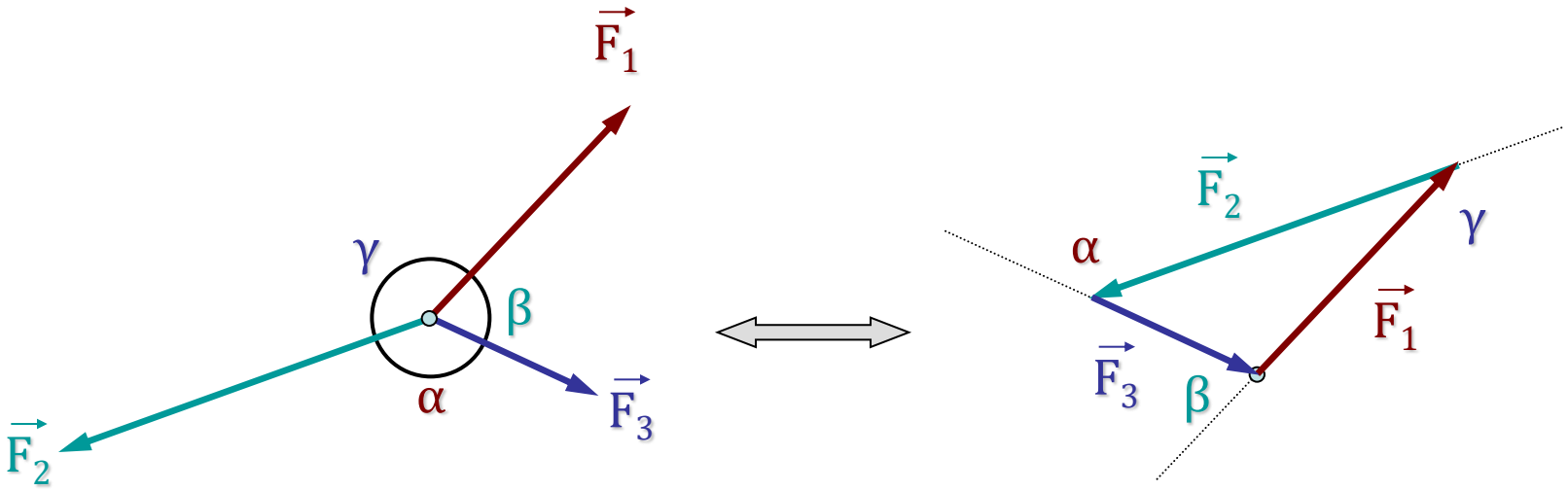
Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με τις τρεις επιμέρους συνθήκες που αναφέρονται στον μηδενισμό των συνιστωσών των δυνάμεων κατά μήκος των αξόνων x, y, z.

Ειδική περίπτωση: Ισορροπία τριών δυνάμεων που ενεργούν πάνω σε σωματίδιο.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Ισορροπία τριών δυνάμεων σε σωματίδιο



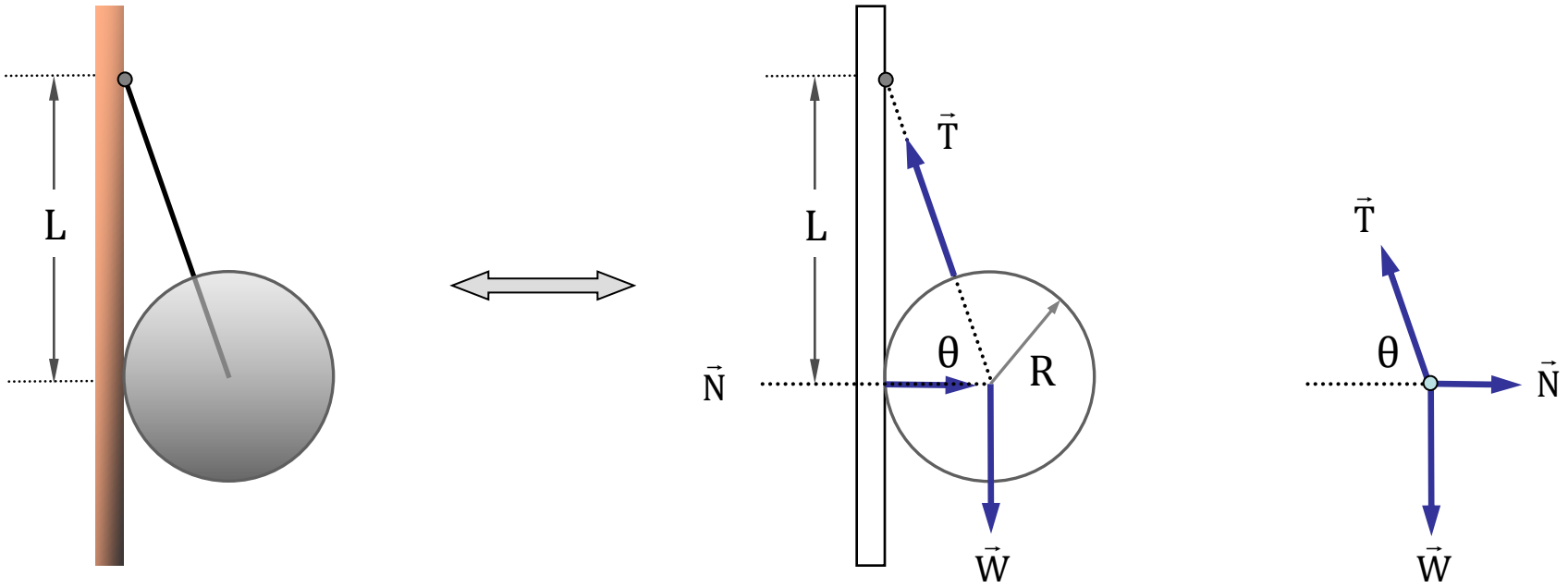
Εάν οι τρεις δυνάμεις ισορροπούν, τότε απαραίτητα σχηματίζουν επίπεδο τρίγωνο, οπότε ισχύει ο νόμος των ημιτόνων:

$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F_3}{\sin\gamma}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Παράδειγμα: Ομογενής σφαίρα βάρους W και ακτίνας R συγκρατείται με τεντωμένο σκοινί σε λείο τοίχο και σε απόσταση L πάνω από το κέντρο της σφαίρας. Βρείτε: (α) Την τάση στο σκοινί (β) Τη δύναμη που εξασκεί ο τοίχος στην σφαίρα.



Εφαρμόζοντας τον νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{T}{\sin 90^0}=\frac{W}{\sin(180^0-\theta)}=\frac{N}{\sin(90^0+\theta)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} T=\dfrac{W}{\sin\theta}=\dfrac{W}{L/\sqrt{L^2+R^2}}=W\dfrac{\sqrt{L^2+R^2}}{L} \\ \dfrac{W}{\sin\theta}=\dfrac{N}{\cos\theta}\Rightarrow N=W\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=W\cot\theta=W\dfrac{R}{L} \end{array}\right\}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Για την ισορροπία στερεού σώματος είναι αναγκαίο να εξασφαλιστεί ισορροπία τόσο ως προς τις μετατοπίσεις, όσο και ως προς τις περιστροφές.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$$

Ισορροπία ως προς την μετατόπιση

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i = 0$$

Ισορροπία ως προς την περιστροφή

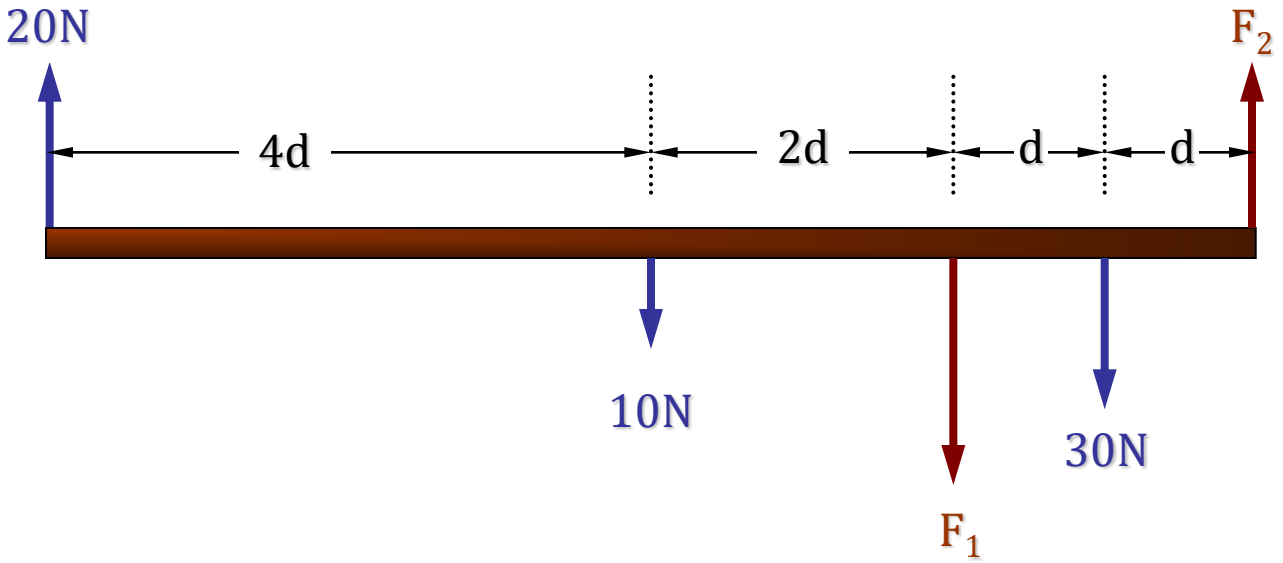
Για συνεπίπεδες δυνάμεις οι παραπάνω συνθήκες ανάγονται στις:

$$\sum_{i=1}^{N} F_{ix} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} F_{iy} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} \tau_i = 0$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Παράδειγμα: Το παρακάτω σχήμα δίνει την κάτοψη ομογενούς ράβδου σε στατική ισορροπία. Να βρεθούν οι δυνάμεις F_1 και F_2.



Συνολική ροπή ως προς το δεξιό άκρο της ράβδου:

$$20 \cdot 8d - 10 \cdot 4d - F_1 \cdot 2d - 30 \cdot d = 0 \Rightarrow F_1 = 45N$$

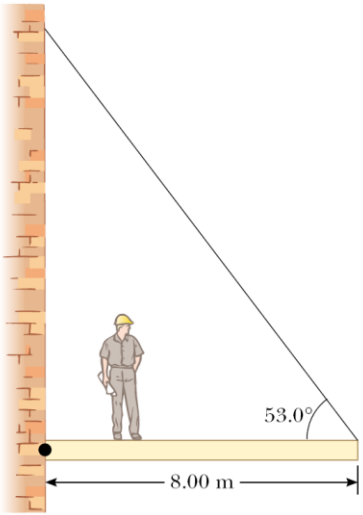
Μηδενισμός συνισταμένης δύναμης:

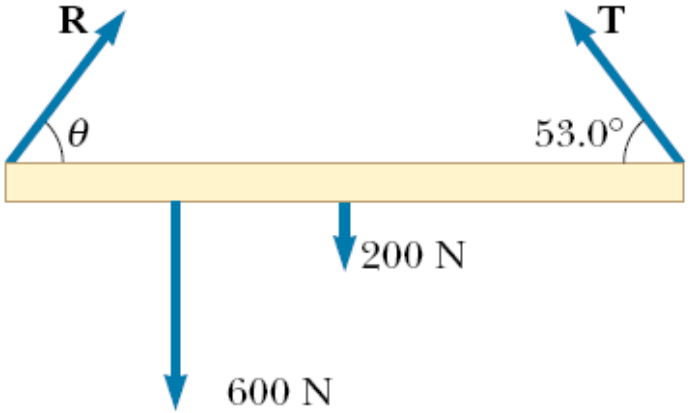
$$20 - 10 - F_1 - 30 + F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = 20 + F_1 = 65N$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ομογενής δοκός μήκους 8m και βάρους 200N είναι στερεωμένη σε τοίχο, ενώ το άλλο της άκρο υποβαστάζεται με συρματόσκοινο σε γωνία 53^0. Άνθρωπος βάρους 600N στέκεται σε απόσταση 2m από τον τοίχο. Να υπολογισθούν οι ασκούμενες από τον τοίχο και το συρματόσκοινο δυνάμεις στη δοκό.





$$\sum F_x = R\cos\theta - T\cos 53^0 = 0$$

$$\sum F_y = R\sin\theta + T\sin 53^0 - 600\text{N} - 200\text{N} = 0$$

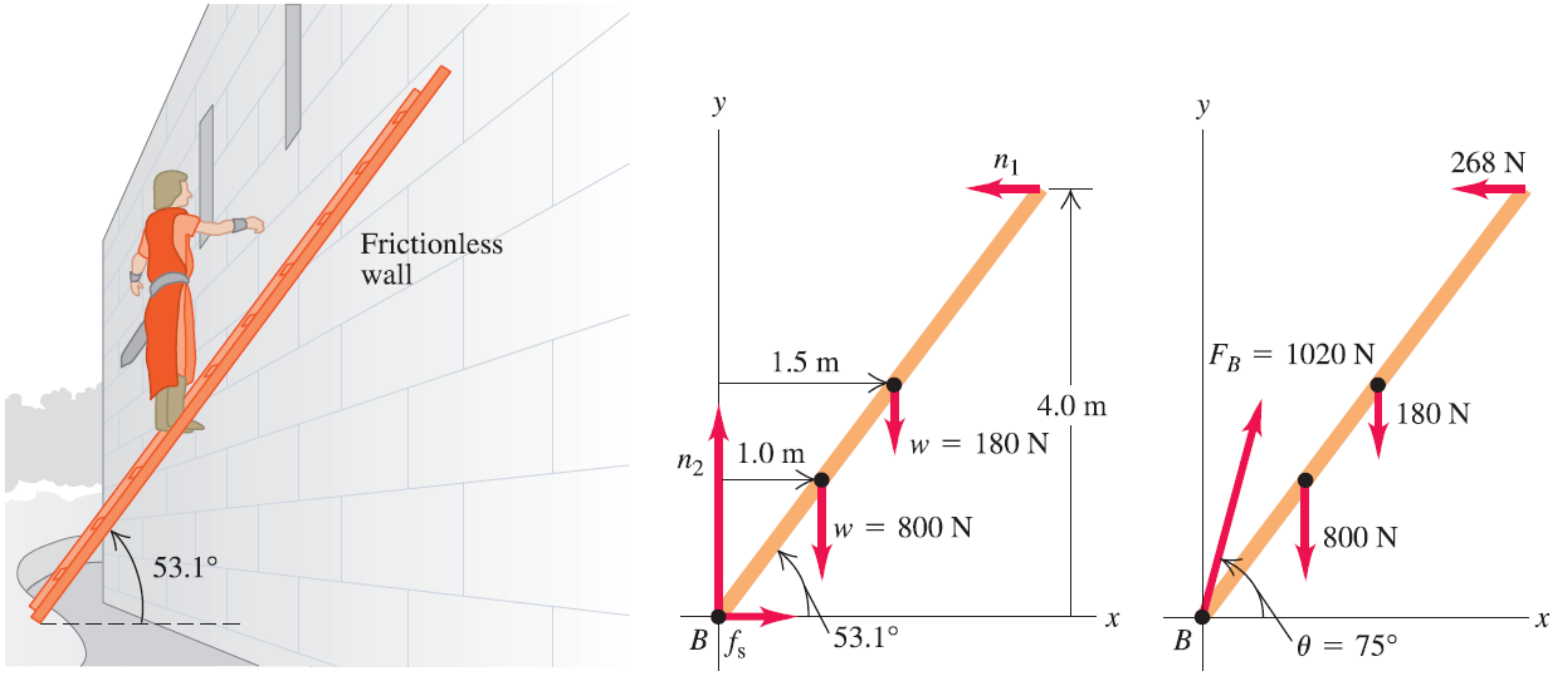
$$\sum \tau = (T\sin 53^0)\cdot 8\text{m} - 600\text{N}\cdot 2\text{m} - 200\text{N}\cdot 4\text{m} = 0$$

$$\Rightarrow \quad T = 313\text{N}, \quad \theta = 71.1^0, \quad R = 580\text{N}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Το πρόβλημα της στήριξης σκάλας σε δάπεδο με τριβή και σε λείο τοίχο.



$$\sum F_x = f_s + (-n_1) = 0$$

$$\sum F_y = n_2 + (-800\ \text{N}) + (-180\ \text{N}) = 0$$

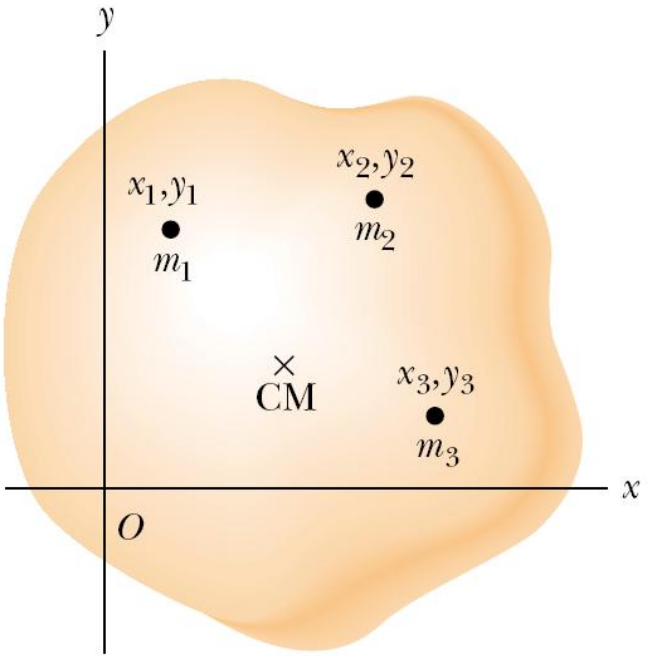
$$\sum \tau_B = n_1(4.0\ \text{m}) - (180\ \text{N})(1.5\ \text{m}) - (800\ \text{N})(1.0\ \text{m}) + n_2(0) + f_s(0) = 0$$

$$n_1 = 268\text{N}$$
$$n_2 = 980\text{N}$$
$$f_s = 268\text{N}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ορισμός κέντρου μάζας σώματος



$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

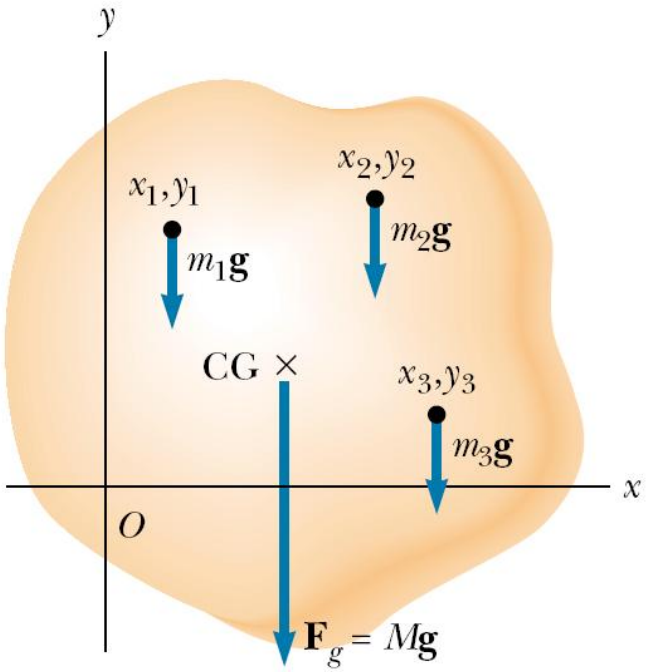
$$z_{\text{cm}} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{cm}} = \frac{m_1\vec{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\vec{\boldsymbol{r}}_2 + m_3\vec{\boldsymbol{r}}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{\boldsymbol{r}}_i}{\sum_i m_i}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ορισμός κέντρου βάρους σώματος



Η δύναμη βαρύτητας $\vec{F}_g$ μπορεί να θεωρηθεί ως το διανυσματικό άθροισμα (συνισταμένη δύναμη) των βαρυτικών δυνάμεων $\vec{m_i g_i}$ που δρουν στα ξεχωριστά στοιχεία m_i ενός εκτεταμένου σώματος.

Αυτή η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ ασκείται σ' ένα σημείο που ονομάζεται κέντρο βάρους (*CG: Center of Gravity*) του σώματος.

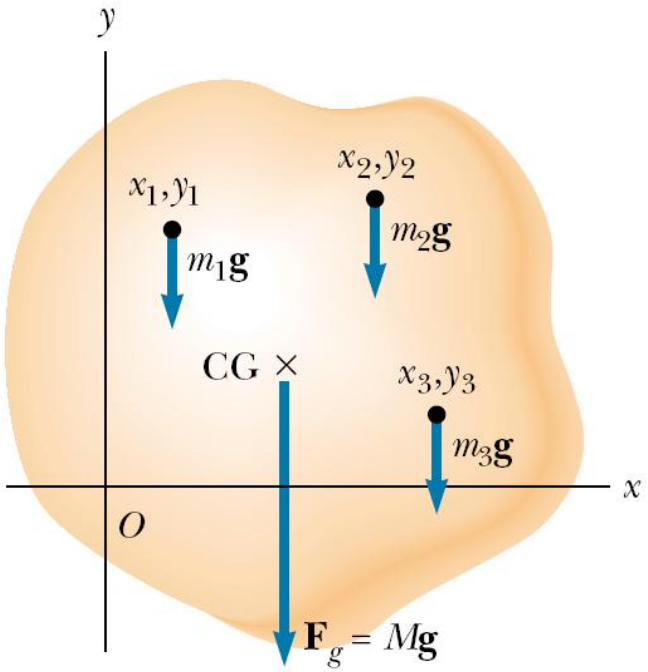
Εάν το g παραμένει σταθερό για όλα τα στοιχεία του σώματος, τόσο σε ένταση όσο και σε διεύθυνση (παραλληλία στοιχειωδών δυνάμεων), τότε:

Το κέντρο βάρους σώματος συμπίπτει με το κέντρο μάζας.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΚΕΝΤΡΟΥ ΒΑΡΟΥΣ & ΜΑΖΑΣ

Γιατί το κέντρο βάρους σώματος συμπίπτει με το κέντρο μάζας;



Πρέπει να ελεγχθεί και η διατήρηση της ροπής των δυνάμεων ως προς τυχαίο σημείο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας γίνεται ως προ το O και μόνο για την κατεύθυνση x.

Συνολική ροπή των στοιχείων του σώματος

$$\tau_{net} = x_1F_1 + x_2F_2 + \cdots = \sum_i x_iF_i = \sum_i x_i\, m_i g$$

Ροπή της βαρυτικής δύναμης

$$\tau = x_{CG}F_g = x_{CG}\sum_i F_i = x_{CG}\sum_i m_i g$$

Απαιτώντας $\tau=\tau_{net}$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\tau = \tau_{net} \Leftrightarrow x_{CG}\sum_i m_i g = \sum_i x_i\, m_i g \Leftrightarrow x_{CG}\sum_i m_i = \sum_i x_i\, m_i \Longrightarrow$$

$$x_{CG} = \frac{\sum_i x_i\, m_i}{\sum_i m_i} = x_{CM}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΡΕΣΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

Συνεχής κατανομή ύλης: Τα αθροίσματα αντικαθίστανται με ολοκληρώματα

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

$\Rightarrow$

$$x_{CM} = \frac{\int_M x\,dm}{\int_M dm} = \frac{\int_M x\,dm}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{\int_M y\,dm}{\int_M dm} = \frac{\int_M y\,dm}{M}$$

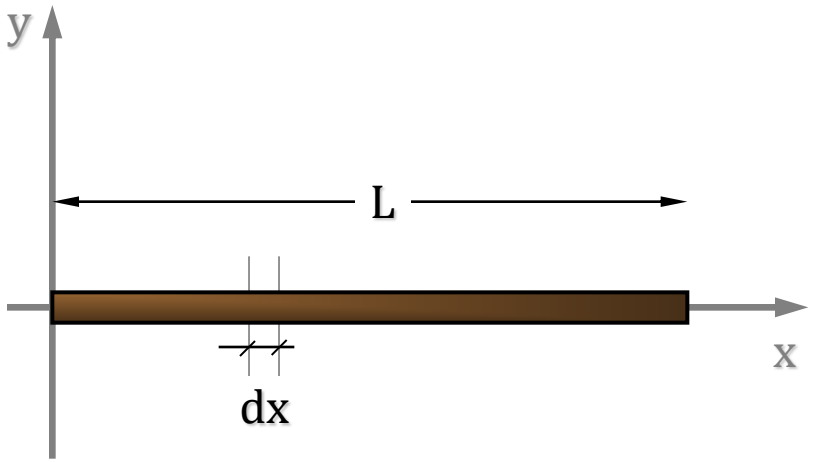
$$z_{CM} = \frac{\int_M z\,dm}{\int_M dm} = \frac{\int_M z\,dm}{M}$$

Η γεωμετρική συμμετρία του σώματος απλουστεύει τους υπολογισμούς.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΡΕΣΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

Να βρεθεί το κέντρο βάρους ομογενούς ράβδου πυκνότητας ρ_0 και μήκους L με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης, που ως γνωστόν ευρίσκεται στο γεωμετρικό της κέντρο.



Εάν διατάξουμε τη ράβδο κατά μήκος του άξονα x και θεωρήσουμε ότι έχει πλάτος D και ύψος h, τότε για ένα απειροστό μήκος dx ισχύουν:

$$dV = D \cdot h \cdot dx$$

$$dm = \rho_0 \, dV = \rho_0 \cdot D \cdot h \cdot dx$$

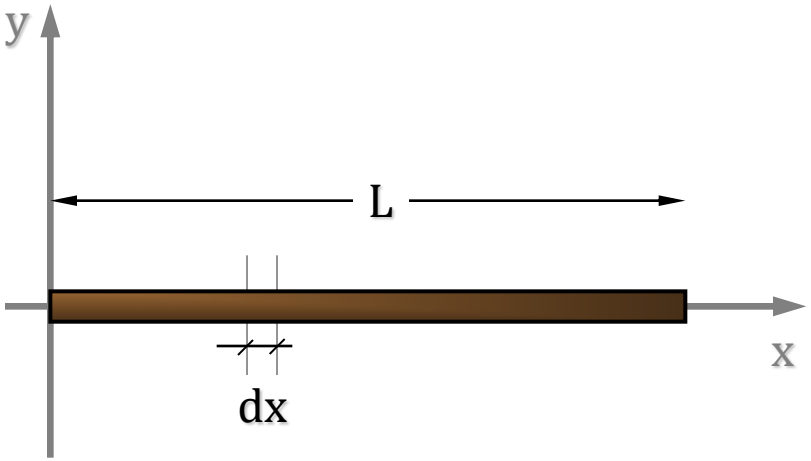
$$x_{cm} = \frac{\int_0^L x\,dm}{\int_0^L dm} = \frac{\int_0^L x(\rho_0 Dh)dx}{\int_0^L (\rho_0 Dh)dx} = \frac{\rho_0 Dh\int_0^L x\,dx}{\rho_0 Dh\int_0^L dx} = \frac{(L^2/2)}{L} = \frac{L}{2}$$

Πώς διαμορφώνεται το αποτέλεσμα αυτό εάν η ράβδος δεν είναι ομογενής;

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΡΕΣΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

Να βρεθεί το κέντρο βάρους ανομοιογενούς ράβδου μήκους L, όταν η πυκνότητά της εξαρτάται γραμμικά από το μήκος της: $\rho(x)=\rho_0(1+x/L)$.



Όπως προηγουμένως, για ένα απειροστό μήκος dx ισχύουν:

$$dV = D \cdot h \cdot dx$$

$$dm = \rho\, dV = \rho_0\left(1+\frac{x}{L}\right)\cdot D \cdot h \cdot dx$$

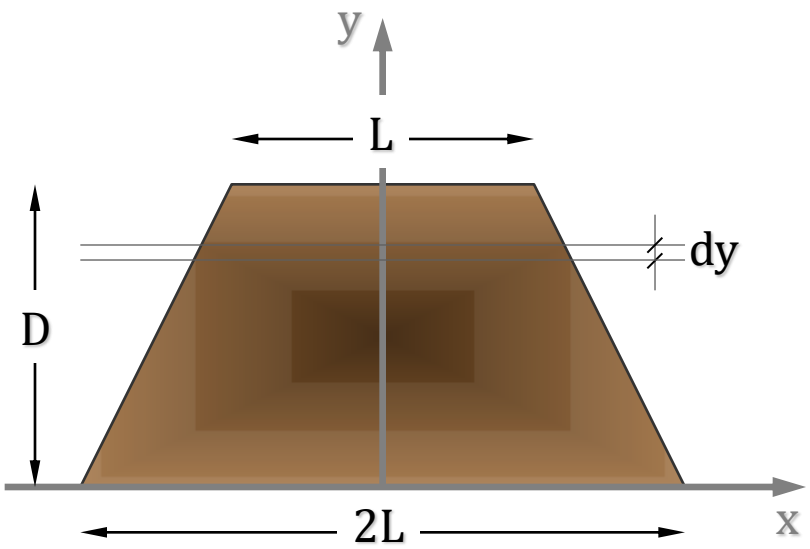
$$x_{CM} = \frac{\int_0^L x\,dm}{\int_0^L dm} = \frac{\int_0^L x\rho_0\left(1+\frac{x}{L}\right)Dhdx}{\int_0^L \rho_0\left(1+\frac{x}{L}\right)Dhdx} = \frac{\int_0^L x\left(1+\frac{x}{L}\right)dx}{\int_0^L \left(1+\frac{x}{L}\right)dx} = \frac{L^2/2 + L^3/3L}{L + L^2/2L} = \frac{5L^2/6}{3L/2}$$

$$\boxed{x_{CM} = \frac{5}{9}L}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΡΕΣΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

Να βρεθεί το κέντρο βάρους ομογενούς πλάκας σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου με βάσεις L και 2L και ύψος D.



Σε τυχαίο ύψος y και για στοιχειώδες dy το μήκος x του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$x = 2L - \frac{y}{D}L = L\left(2 - \frac{y}{D}\right)$$

Οπότε:

$$dV = x \cdot h \cdot dy = L\left(2 - \frac{y}{D}\right) \cdot h \cdot dy$$

$$dm = \rho_0 \cdot L\left(2 - \frac{y}{D}\right) \cdot h \cdot dy$$

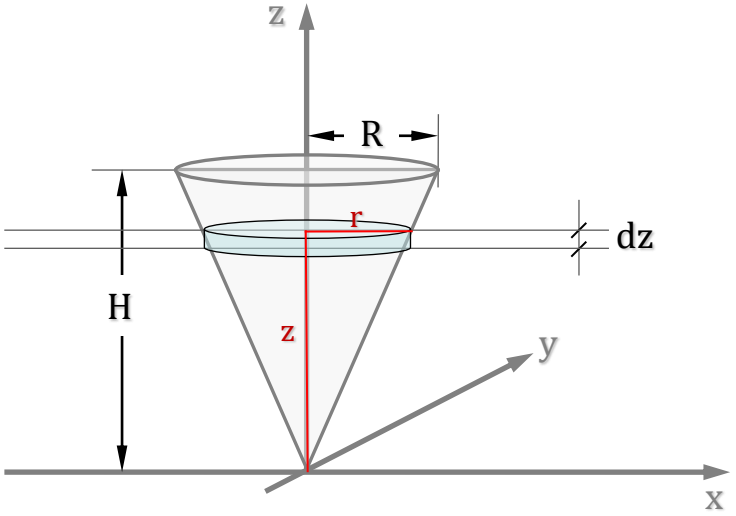
$$y_{CM} = \frac{\int_0^D y\,dm}{\int_0^D dm} = \frac{\int_0^D y\rho_0 L\left(2 - y/D\right)h\,dy}{\int_0^D \rho_0 L\left(2 - y/D\right)h\,dy} = \frac{\int_0^D y\left(2 - y/D\right)dy}{\int_0^D \left(2 - y/D\right)dy} = \frac{D^2 - D^3/3D}{2D - D^2/2D} = \frac{2/3\,D^2}{3/2\,D}$$

$$\boxed{y_{CM} = \frac{4}{9}D}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΡΕΣΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

Κέντρο μάζας κώνου ύψους H (και ακτίνας R)



Ο κώνος τοποθετείται με τον άξονα του κατά μήκος του z και η κορυφή του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Είναι προφανές πως λόγω συμμετρίας:

$$x_{CM} = y_{CM} = 0$$

Επιλέγοντας λεπτό δίσκο πάχους dz σε ύψος z, του οποίου η ακτίνα είναι r, ισχύει:

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{H} \Rightarrow r = z\frac{R}{H}$$

Οπότε: $dm = \rho_0\, dV = \rho_0\, \pi r^2 dz = \rho_0\, \pi\left(z\frac{R}{H}\right)^2 dz$

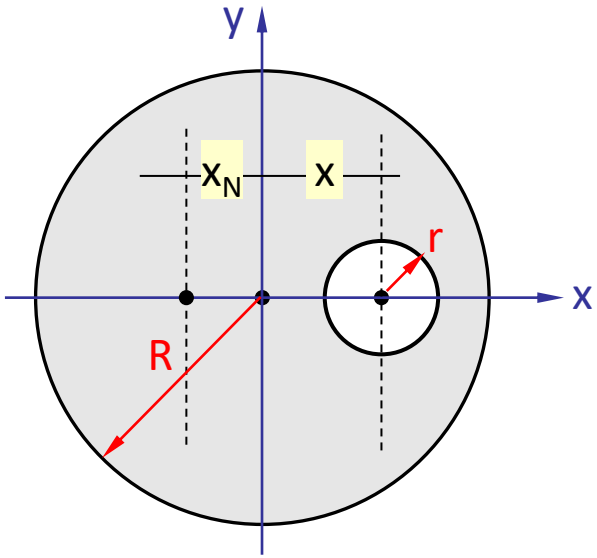
$$z_{CM} = \frac{\int_0^H z\, dm}{\int_M dm} = \frac{\int_0^D z\rho_0\pi\left(R/H\right)^2 z^2\, dz}{\rho_0 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{\frac{1}{H^2}\int_0^H z^3\, dz}{\frac{1}{3}H} = \frac{\frac{1}{H^2}\frac{H^4}{4}}{\frac{1}{3}H} = \frac{3}{4}H$$

Άρα το κέντρο μάζας κώνου απέχει από την κορυφή του: $z_{CM} = \frac{3}{4}H$
ή ισοδύναμα ¼ H από τη βάση του.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΡΕΣΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

Αφαίρεση τμήματος μάζας από σώμα συμμετρικού σχήματος



Εάν από το δίσκο ακτίνας **R** του σχήματος αφαιρεθεί κυκλικό τμήμα ακτίνας **r** σε απόσταση **x** από το αρχικό κέντρο μάζας του σώματος, τότε το νέο κέντρο μετατίθεται στην απόσταση x_N, για την οποία ισχύει:

$$x \cdot m = x_N \cdot (M - m)$$

όπου **M** η αρχική μάζα του σώματος και **m** η μάζα του σώματος που αφαιρείται.

Παράδειγμα

Εάν η ακτίνα του αρχικού (ομογενούς) δίσκου είναι **R** και του τμήματος που αφαιρείται **r = R/4**, το δε **x = R/2**, τότε:

d: πάχος του δίσκου

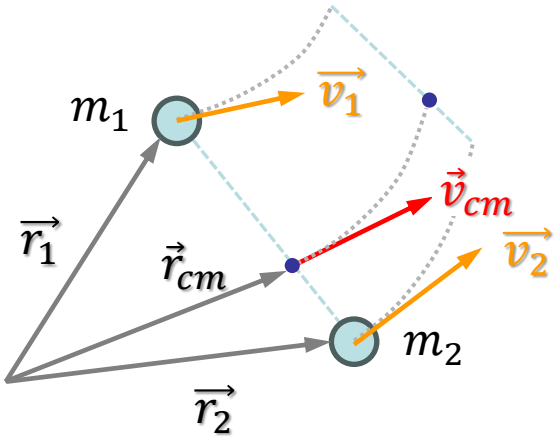
$$\left.\begin{aligned} M &= \rho_0 \pi R^2 d \\ m &= \rho_0 \pi r^2 d = \rho_0 \pi \left(R/4\right)^2 d = M/16 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \cdot m = x_N \cdot (M - m) \Rightarrow \frac{R}{2} \cdot \frac{M}{16} = x_N \cdot \left(M - \frac{M}{16}\right)$$

Οπότε: $$x_N = 1/30\, R$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

Σύστημα δύο Σωματιδίων m_1 και m_2



Ολική Μάζα Συστήματος
$M = m_1 + m_2$

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$: Διανύσματα Θέσης

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$: Ταχύτητες

Θέση, Ταχύτητα και Ορμή του Κέντρου Μάζας

Αν τα δύο σωματίδια έχουν θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ και ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Γεωμετρική ερμηνεία: Το κέντρο μάζας βρίσκεται πάντα πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο σώματα, πλησιέστερα στη μεγαλύτερη μάζα, με λόγο αποστάσεων:

$$\frac{r_1'}{r_2'} = \frac{m_2}{m_1}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M}$$

Πολλαπλασιάζοντας με M την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι η ολική ορμή του συστήματος ισούται με την ορμή ενός ισοδύναμου σώματος μάζας M που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = M\vec{v}_{cm}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

$$M = m_1 + m_2$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{M}$$

2ος Νόμος του Newton

Αν υποθέσουμε πως σε κάθε σωματίδιο ασκούνται γενικά δύο ειδών δυνάμεις:

- Μια συνισταμένη εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{ext}$ με συνιστώσες
$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}}$$
αντίστοιχα στα σώματα 1 και 2

- Μια εσωτερική δύναμη αμοιβαίας αλληλεπίδρασης

$\vec{F}_{12}$ η δύναμη που ασκεί το σώμα 2 στο 1

$\vec{F}_{21}$ η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 στο 2

Ο 2ος Νόμος του Newton για κάθε σώμα γράφεται:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{1,ext} + \vec{F}_{12}$$
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{2,ext} + \vec{F}_{21}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και επειδή $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (δράση-αντίδραση) προκύπτει:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{1,ext} + \vec{F}_{2,ext} = \sum \vec{F}_{ext} \rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$

Οι εσωτερικές δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται ανά ζεύγη και δεν μπορούν να επιταχύνουν το κέντρο μάζας!

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{M}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Αρχή Διατήρησης της Ορμής

Σε ένα απομονωμένο σύστημα ισχύει $\sum \vec{F}_{ext} = 0$. Κατά συνέπεια, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$\vec{a}_{cm} = 0 \rightarrow \vec{v}_{cm} = const$$

Άρα, το κέντρο μάζας εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ή παραμένει ακίνητο.

Αρχή Διατήρησης κατά Συνιστώσα

Αν σε κάποιον άξονα δεν υφίσταται εξωτερική δύναμη $\sum \vec{F}_{ext,x}$, όπως για παράδειγμα σε κίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, τότε προκύπτει

$$v_{cm,x} = const \rightarrow \Delta P_x = 0 \rightarrow m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 = 0$$

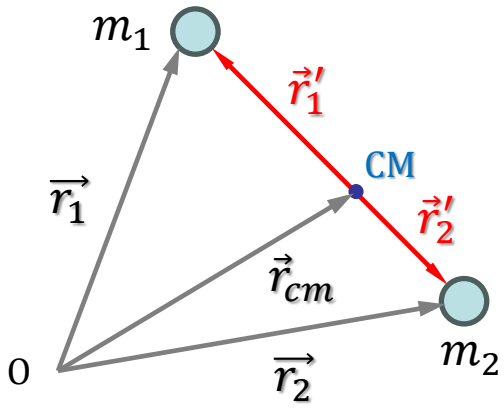
Τα παραπάνω δείχνουν την αυστηρή σύζευξη των μεταβολών της ταχύτητας σε ένα τέτοιο σύστημα. Οποιαδήποτε μεταβολή στην κινητική κατάσταση του ενός σώματος επιβάλλει ακαριαία αντίθετη μεταβολή στο άλλο,

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0 \rightarrow m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2 \quad \& \quad \frac{|\Delta\vec{v}_1|}{|\Delta\vec{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

ενώ το ελαφρύτερο σώμα υφίσταται πάντα τη μεγαλύτερη μεταβολή ταχύτητας.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ



$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_{cm}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_{cm}$$

Σύστημα Αναφοράς του Κέντρου Μάζας

Αν μεταφερθούμε από το σύστημα εργαστηρίου (O) στο σύστημα συντεταγμένων που κινείται με το κέντρο μάζας (CM), τα δύο σώματα κινούνται πάντα με αντίθετες ορμές:

$$m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_{cm}) + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_{cm}) =$$

$$= m_1\,\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 - (m_1 + m_2)\vec{r}_{cm} =$$

$$= m_1\,\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 - (m_1 + m_2)\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0$$

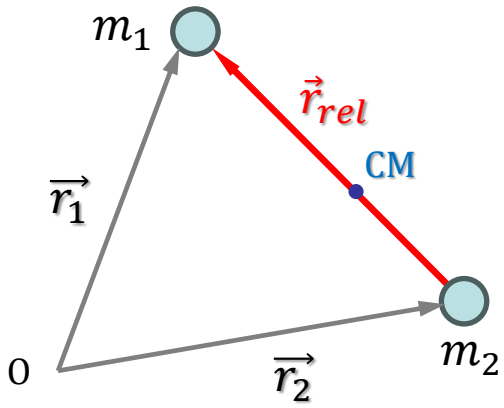
$$\Downarrow$$

$$\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'$$

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, τα δύο σώματα κινούνται **πάντα με αντίθετες ορμές.**

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ



$$\vec{r}_{rel} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

Σχετική Κίνηση και Ανηγμένη Μάζα

Η σχετική θέση του σώματος 1 ως προς το 2 περιγράφεται από το διάνυσμα $\vec{r}_{rel} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Συνεπώς η αντίστοιχη σχετική ταχύτητα θα δίνεται από τη σχέση $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Εάν τα δύο σώματα αλληλεπιδρούν **μόνο μεταξύ τους** (όπως στην βαρυτική έλξη ή σε ένα ελατήριο χωρίς εξωτερικές δυνάμεις), για την επιτάχυνση θα ισχύει:

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \vec{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \vec{F}_{12}\frac{1}{\mu}$$

Η ποσότητα μ ορίζεται ως η **ανηγμένη μάζα** του συστήματος, για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{F}_{12} = \mu\, \vec{a}_{rel}$$

Η σχετική κίνηση των δύο σωμάτων ανάγεται πλήρως στην **κίνηση ενός και μόνο ισοδύναμου σωματιδίου μάζας μ** υπό την επίδραση της εσωτερικής δύναμης $\vec{F}_{12}$.

© E. Stiliaris, UoA 2026