ΦΥΣΙΚΗ Ι

1837-2027 190 ΧΡΟΝΙΑ

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2026-2027

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ

- Μέση και Στιγμιαία Ταχύτητα - Επιτάχυνση
- Διαφορικές & Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Κίνησης
- Σταθερή Επιτάχυνση
- Κατακόρυφη Ρίψη

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

- Διάνυσμα Θέσης - Μετατόπιση
- Διανυσματικός Ορισμός Ταχύτητας – Επιτάχυνσης
- Καμπυλόγραμμη Κίνηση
- Εφαπτομενική και Κάθετη Συνιστώσα της Επιτάχυνσης

ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

- Κίνηση σε Πολικές Συντεταγμένες
- Κυκλική Κίνηση
- Κίνηση Βλημάτων
- Παραμετρικές Εξισώσεις - Εξισώσεις Τροχιάς

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2026-2027

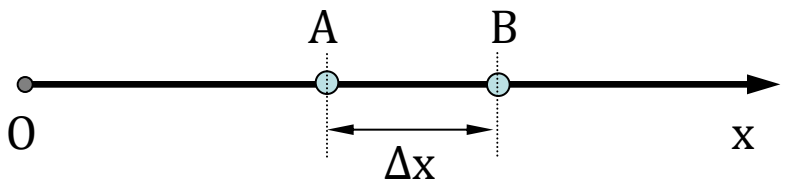
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ΦΑΡΑΚΟΣ	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ	1.6, 1.7	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6
ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ	1.6, 1.7	3.5, 3.6	4.1, 4.2, 4.3, 4.4	3.1, 3.2
ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	1.8	5.2, 5.5	4.7	3.4
ΚΙΝΗΣΗ ΒΛΗΜΑΤΩΝ	2.3	3.7, 3.8	4.5, 4.6	3.3

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Μέση Ταχύτητα: Μετατόπιση (Δx) σε δοσμένο χρονικό διάστημα (Δt)



$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Στιγμιαία Ταχύτητα: Το όριο της μέσης ταχύτητας v_{av} για $\Delta t \to 0$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt}$$

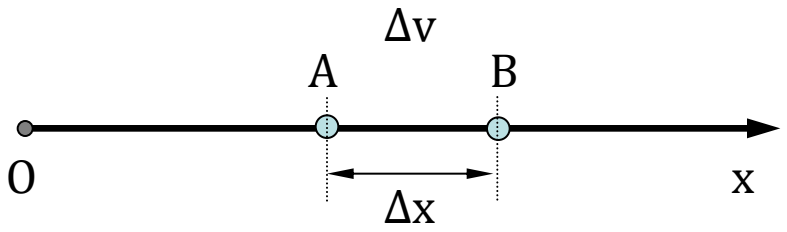
Υπολογισμός της μετατόπισης από την συναρτησιακή εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt \Leftrightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt \Leftrightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μέση Επιτάχυνση: Μέση αλλαγή της ταχύτητας (Δv) σε δοσμένο χρονικό διάστημα (Δt)



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Στιγμιαία Επιτάχυνση: Το όριο της μέσης επιτάχυνσης a_{av} για $\Delta t \rightarrow 0$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας από τη χρονική εξάρτηση της επιτάχυνσης

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \Leftrightarrow v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\,dt \Leftrightarrow v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

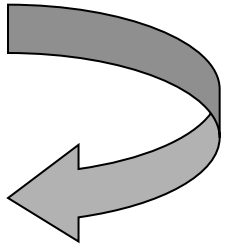
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Στιγμιαία Επιτάχυνση: Δεύτερη παράγωγος της θέσης ως προς τον χρόνο

$$a = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \Leftrightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας από τη χωρική εξάρτηση της επιτάχυνσης

$$dv = a\,dt \Leftrightarrow v\,dv = a\,dt\left(\frac{dx}{dt}\right) \Leftrightarrow v\,dv = a\,dx$$

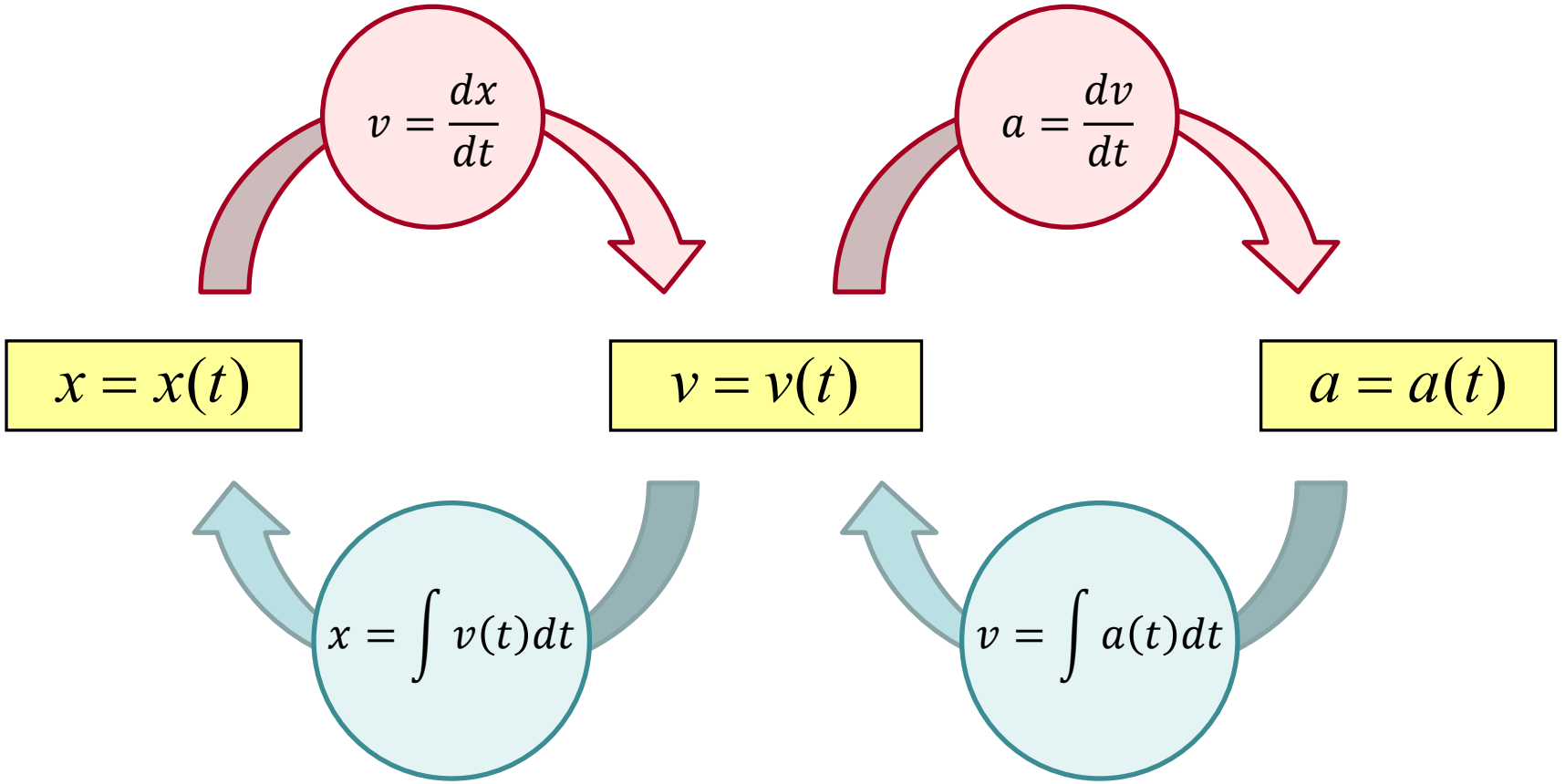


$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx \Leftrightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Όταν δίνεται οποιαδήποτε κινηματική σχέση (απόστασης – ταχύτητας – επιτάχυνσης) συναρτήσει του χρόνου, τότε είναι δυνατή η εύρεση των υπολοίπων είτε με παραγώγιση είτε με ολοκλήρωση, σύμφωνα με το σχήμα:



© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Παράδειγμα I

Αν δίνεται η θέση x συναρτήσει του χρόνου x=x(t), τότε

$$x = x(t) = 4t^3 + 2t^2 + t + 6$$



$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 12t^2 + 4t + 1$$



$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 24t + 4$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Παράδειγμα II

Αν δίνεται η ταχύτητα v συναρτήσει του χρόνου v=v(t), τότε

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (12t^2 + 4t + 1)dt = 4t^3 + 2t^2 + t + \boldsymbol{C}$$

$$v(t) = 12t^2 + 4t + 1$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 24t + 4$$

Προσοχή: Η σταθερά C που προκύπτει από την ολοκλήρωση καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

© E. Stiliaris, UoA 2026

Παράδειγμα II - Επεξεργασία αρχικών συνθηκών

Αν δίνονται οι αρχικές συνθήκες $\{t_0=0, x_0=6\}$, τότε από το προηγούμενο πρόβλημα προκύπτει:

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (12t^2 + 4t + 1)dt = 4t^3 + 2t^2 + t + \boldsymbol{C}$$

$$\mathrm{x(t=0)} = 6 \rightarrow \boldsymbol{C = 6}$$

Σημείωση: Χρησιμοποιώντας ορισμένα ολοκληρώματα το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να εξαχθεί και ως εξής:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt = \int_{t_0}^{t} (12t^2 + 4t + 1)dt \Rightarrow$$

$$x - x_0 = (4t^3 + 2t^2 + t) - (4{t_0}^3 + 2{t_0}^2 + t_0)$$

$$\xrightarrow{t_0=0\,,\,x_0=6} x - 6 = 4t^3 + 2t^2 + t - 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 4t^3 + 2t^2 + t + 6}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Όταν δίνεται η ταχύτητα v συναρτήσει της θέσης v=v(x), τότε οι εξισώσεις κίνησης βρίσκονται με το παρακάτω σκεπτικό:

$$v = v(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = v(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{v(x)} = dt \Leftrightarrow \int \frac{dx}{v(x)} = \int dt = t$$

Παράδειγμα: $v = 2\sqrt{x}$ με αρχικές συνθήκες {t=0, x=4}

$$v = v(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = v(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{v(x)} = dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int dt = t$$

$$\sqrt{x} + C = t \xrightarrow{\text{Α.Σ.}} \sqrt{4} + C = 0 \Rightarrow C = -2$$

$$x = (t+2)^2$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Ομοίως, όταν δίνεται η επιτάχυνση a συναρτήσει της θέσης a=a(x), τότε οι εξισώσεις κίνησης βρίσκονται με το παρακάτω σκεπτικό:

$$a = a(x) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = a(x) \Leftrightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = a(x) \Leftrightarrow \frac{dv}{dx}v = a(x) \Leftrightarrow vdv = a(x)dx$$

$$\int vdv = \int a(x)dx$$

Παράδειγμα: $a = 6\sqrt[3]{x}$ με αρχικές συνθήκες {t=0, x=0, v=0}

$$vdv = a(x)dx \Leftrightarrow \int vdv = \int 6\sqrt[3]{x}dx \Leftrightarrow \int vdv = \int 6x^{1/3}dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{v^2}{2} + C = 6x^{4/3}\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{v^2}{2} + C = \frac{9}{2}x^{4/3} \xrightarrow{\text{Α.Σ.}} 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$v^2 = 9x^{4/3} \Leftrightarrow v = 3x^{2/3}$$

Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα από την παραπάνω σχέση εξάγεται και η εξίσωση της θέσης $x = t^3$.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στην ομαλά επιταχυνόμενη ευθύγραμμη κίνηση ισχύει a = σταθερά

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt \Leftrightarrow v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt \Leftrightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt = x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} (t - t_0)dt$$

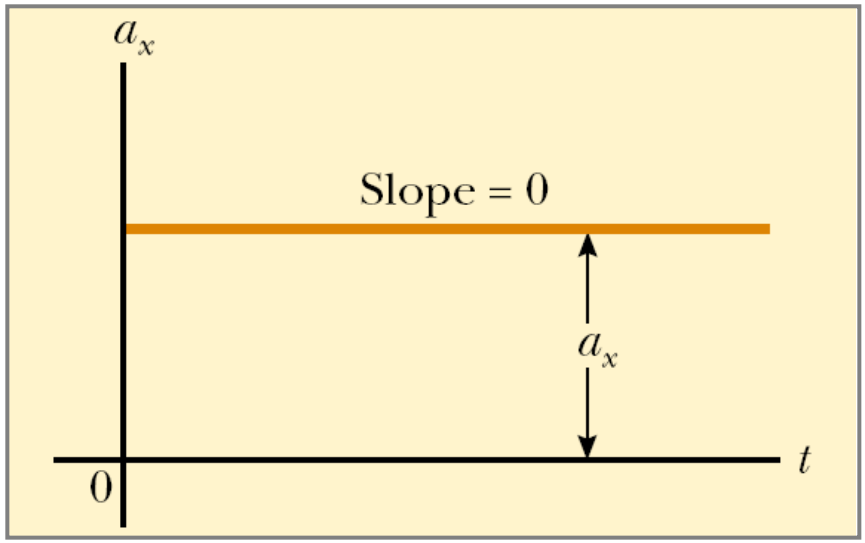
$$\Downarrow$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

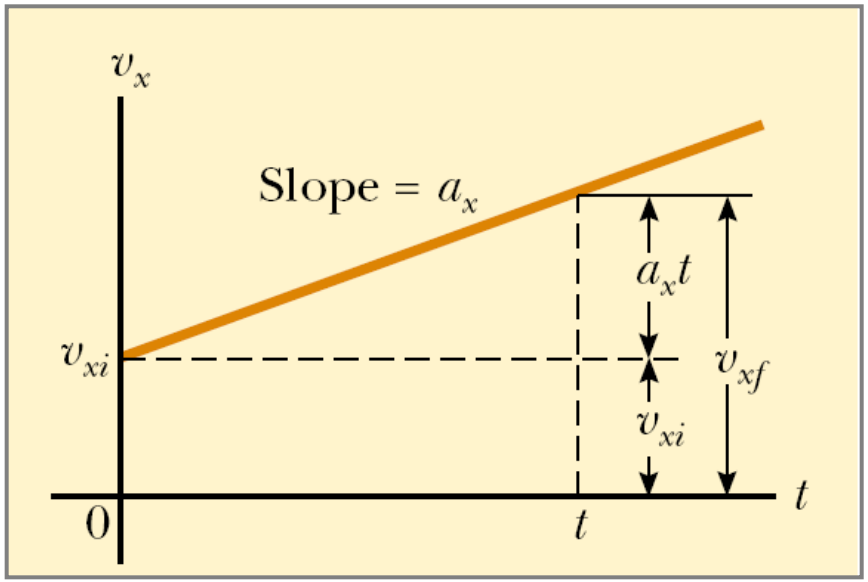
ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

a = ct

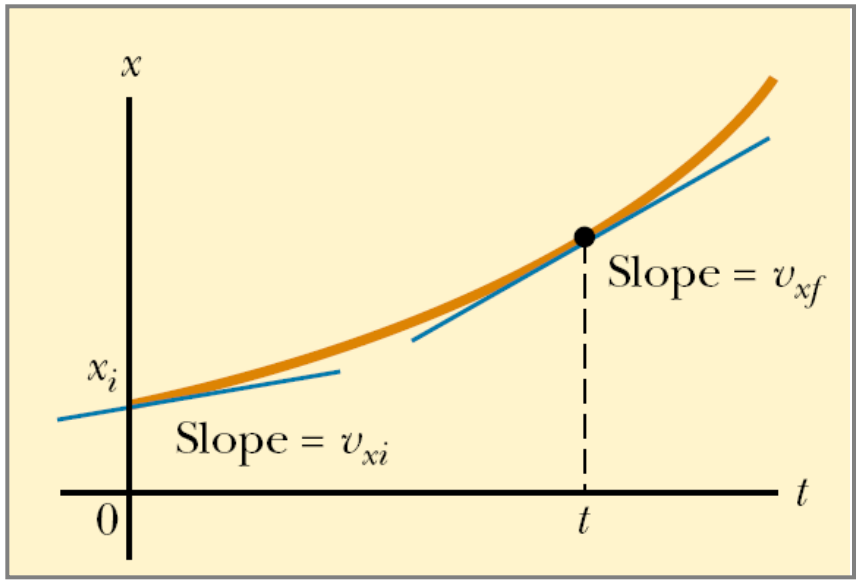


$$a = \text{const}$$
$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

v=v(t)



x=x(t)



© E. Stiliaris, UoA 2026

ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$a = \text{constant}$$
$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Απαλοιφή του χρόνου

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = x_0 + v_0\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow 2(x - x_0)a = 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2$$

$$\Rightarrow 2(x - x_0)a = v^2 - v_0^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2(x - x_0)a$$

Στη σχέση αυτή καταλήγουμε και με την ολοκλήρωση:

$$vdv = adx \Rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} a\,dx \Rightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = a(x - x_0) \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Απαλοιφή της επιτάχυνσης

$$a = \text{constant}$$

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{v - v_0}{t} t^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)\, t$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} t$$

$$x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} t$$

Στη σχέση αυτή καταλήγουμε και με την παρακάτω ολοκλήρωση, κάνοντας χρήση του εμβαδού του τραπεζίου στο διάγραμμα v(t):

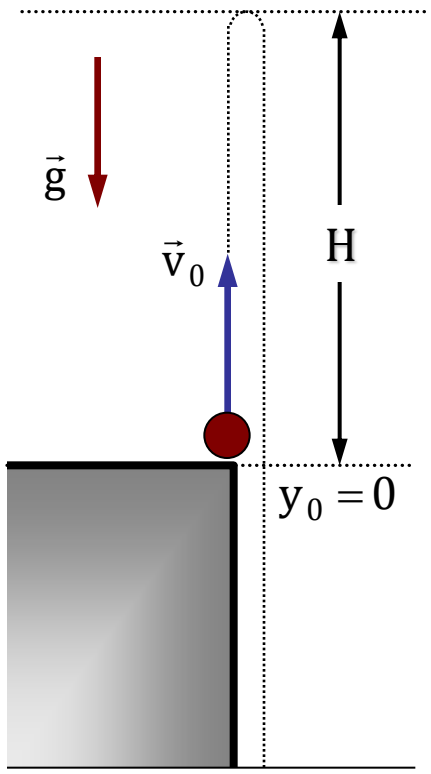
$$dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v dt \Rightarrow x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} t$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ

Οι εξισώσεις της κίνησης για σταθερή επιτάχυνση μπορούν να εφαρμοστούν στην περίπτωση της ελεύθερης πτώσης (επιτάχυνση g = -9.8 ms^{-2}).

Κατακόρυφη βολή



$$a = -g$$
$$v = v_0 - gt$$
$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Υπολογισμός μεγίστου ύψους H

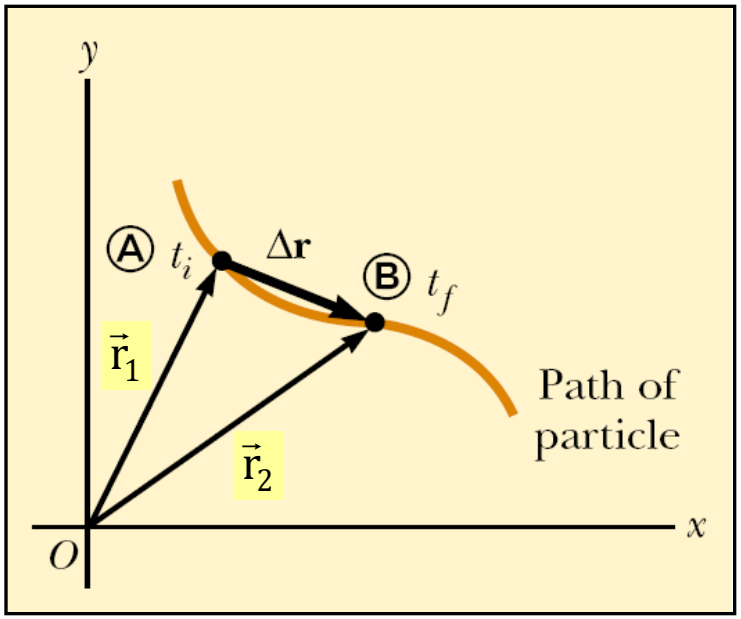
$$v = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}$$

$$y_{max} = H = y\left(t = v_0 / g\right) \Rightarrow H = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ



Διάνυσμα Θέσης

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Μετατόπιση

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}\right) - \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\right)$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$$

Μέση Ταχύτητα

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Μέση Επιτάχυνση

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Επιτάχυνση

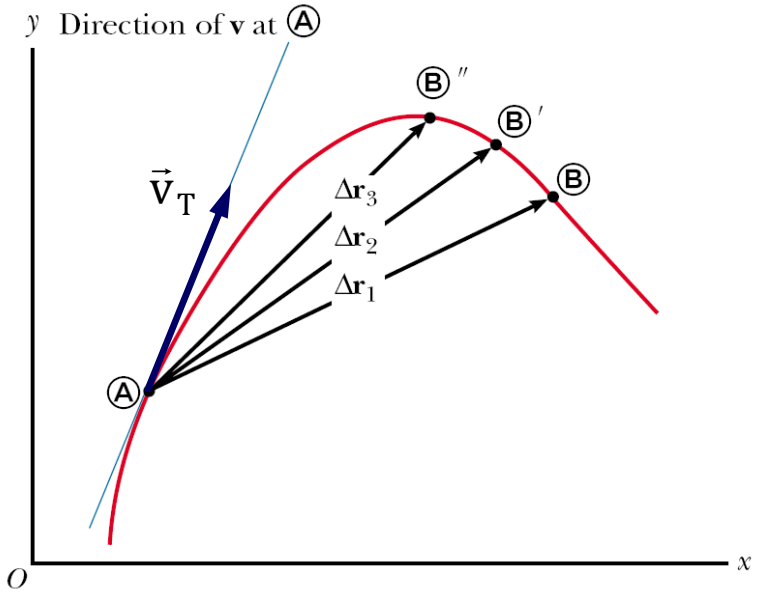
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ



Κατά τη κίνηση του σώματος από το Α στο Β η μετατόπιση Δs πάνω στην καμπύλη δίνεται από το τόξο ΑΒ.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

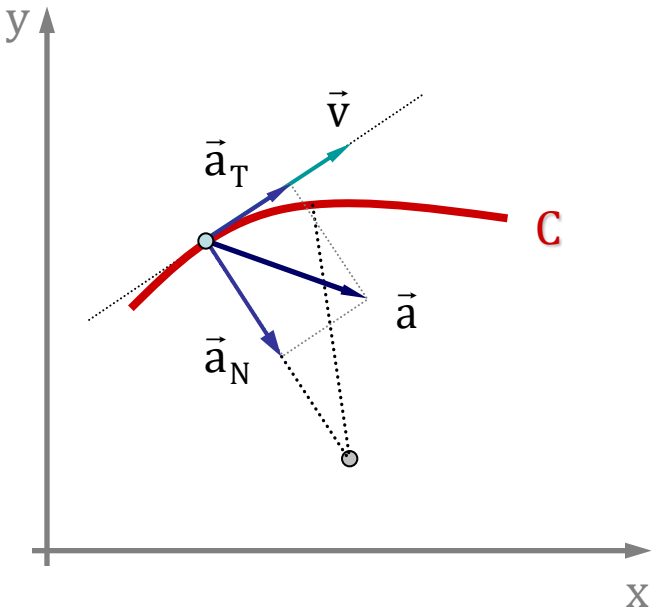
$$\Rightarrow \vec{v} = \left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

Στο όριο αυτό το Δs γίνεται ίσο με το μέτρο Δr, οπότε ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει ένα μοναδιαίο διάνυσμα, εφαπτόμενο στη διαδρομή (καμπύλη) που περιγράφει την κίνηση του σώματος.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} &= \frac{d\vec{r}}{dr} = \hat{u}_T \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{ds}{dt} = v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \hat{u}_T \frac{ds}{dt} = \hat{u}_T v}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ



Σώμα κινείται στην τροχιά C και τη χρονική στιγμή t έχει ταχύτητα **v** και επιτάχυνση **a**. Η επιτάχυνση a έχει πάντα κατεύθυνση προς τα κοίλα της τροχιάς.

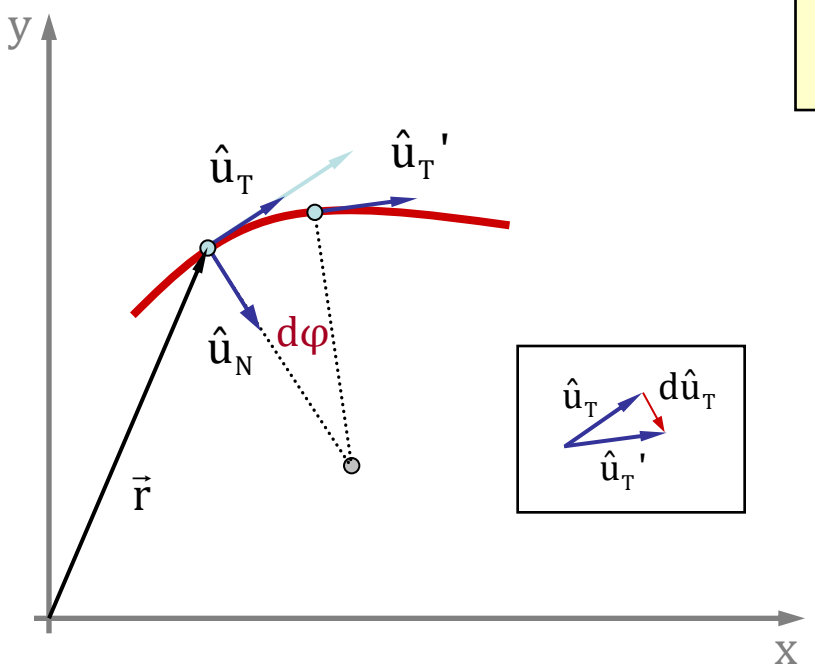
Μπορούμε να αναλύσουμε την επιτάχυνση σε δύο κάθετες συνιστώσες: Σε μια εφαπτομενική στην τροχιά και σε μια κάθετη συνιστώσα.

$\vec{a}_T$ Εφαπτομενική Επιτάχυνση: Αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας

$\vec{a}_N$ Κάθετη Επιτάχυνση: Αλλαγή στη διεύθυνση της ταχύτητας

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ



$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow\vec{a}=\frac{d}{dt}(\hat{u}_T v)=\hat{u}_T\frac{dv}{dt}+\frac{d\hat{u}_T}{dt}v$$

Όταν η τροχιά δεν είναι ευθύγραμμη, τότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u_T}$ αλλάζει κατεύθυνση και η παράγωγός του ως προς τον χρόνο υπολογίζεται ως εξής:

$$d\hat{u}_T=\left|\hat{u}_T\right|d\varphi\,\hat{u}_N=1\cdot d\varphi\,\hat{u}_N=\hat{u}_N\,d\varphi$$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u_N}$, το οποίο εισάγεται για να καθορίσει την κατεύθυνση της μεταβολής $\mathbf{du_T}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{u_T}$, δηλαδή κάθετο στην εφαπτομενική διεύθυνση της τροχιάς. Έτσι:

$$d\hat{u}_T=\hat{u}_N\,d\varphi\Rightarrow\frac{d\hat{u}_T}{dt}=\hat{u}_N\frac{d\varphi}{dt}=\hat{u}_N\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt}=\hat{u}_N\,v\frac{d\varphi}{ds}=\hat{u}_N\,v\frac{d\varphi}{\rho d\varphi}=\hat{u}_N\frac{v}{\rho}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\hat{u}_T v) = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{u}_T}{dt} v$$

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v}{\rho} v = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Εφαπτομενική (επιτρόχια) επιτάχυνση $\mathbf{a_T}$: Ρυθμός αλλαγής του μέτρου της ταχύτητας. Σε περίπτωση ομαλής καμπυλόγραμμης κίνησης (μέτρο ταχύτητας v σταθερό), η εφαπτομενική επιτάχυνση a_T εξαφανίζεται.

Κάθετη (κεντρομόλος) επιτάχυνση $\mathbf{a_N}$: Αλλάζει την κατεύθυνση της ταχύτητας. Σε ευθύγραμμη κίνηση η ακτίνα καμπυλότητας ρ απειρίζεται, οπότε η κάθετη επιτάχυνση μηδενίζεται.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

Όπως αποδείχτηκε στα προηγούμενα, η επιτάχυνση στην γενικευμένη καμπυλόγραμμη κίνηση εκφράζεται με τις δύο συνιστώσες $\mathbf{a_T}$ (επιτρόχια) και $\mathbf{a_N}$ (κεντρομόλο):

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Αν δοθεί το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου, τότε είναι εύκολη η παραγώγισή του και η εύρεση και των υπολοίπων κινηματικών μεγεθών, της ταχύτητας $\mathbf{v}(t)$ και της επιτάχυνσης $\mathbf{a}(t)$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j} + a_z(t)\,\hat{k}$$

Στα επόμενα παρουσιάζεται η μεθοδολογία για την εύρεση της ακτίνας καμπυλότητας ρ από τα διανύσματα της ταχύτητας και της ταχύτητας $\mathbf{v}(t)$ και της επιτάχυνσης $\mathbf{a}(t)$.

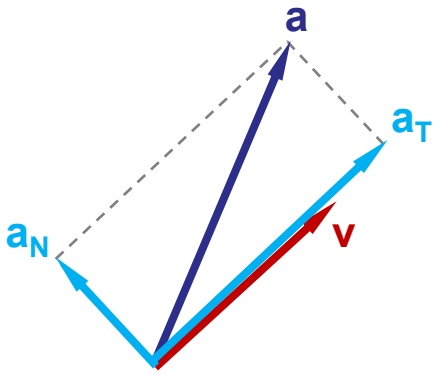
© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

1η Μέθοδος

Για τον υπολογισμό της ακτίνας καμπυλότητας ρ απαιτείται η γνώση του μέτρου της ταχύτητας και της κεντρομόλου συνιστώσας:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N}$$



Γνωρίζοντας πως η επιτρόχια συνιστώσα $\mathbf{a_T}$ της επιτάχυνσης είναι συνευθειακή με την ταχύτητα **v**, τότε:

$$a_T = \vec{a} \cdot \hat{u}_T = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v}$$

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, η ακτίνα καμπυλότητας ρ υπολογίζεται:

$$\rho = \frac{v^2}{a_N}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

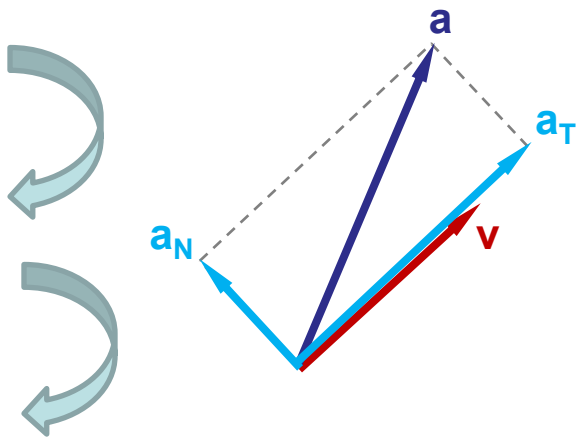
2η Μέθοδος

Εξετάζουμε το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων **v** και **a**. Ισχύουν:

$$\vec{v}\times\vec{a}=\vec{v}\times\left(\vec{a}_N+\vec{a}_T\right)=\vec{v}\times\vec{a}_N+\cancel{\vec{v}\times\vec{a}_T}=\vec{v}\times\vec{a}_N$$

$$\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|=\left|\vec{v}\times\vec{a}_N\right|=\left|\vec{v}\right|\left|\vec{a}_N\right|\sin 90^o=v\,a_N$$

$$a_N=\frac{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}{v}$$



Αντικαθιστώντας στην σχέση της ακτίνας καμπυλότητας, έχουμε:

$$\rho=\frac{v^2}{a_N}\Rightarrow\rho=\frac{v^2}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|/v}$$

$$\rho=\frac{v^3}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

Παράδειγμα

Το διάνυσμα θέσης κινητού στο επίπεδο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\vec{r}(t) = 2t\,\hat{i} + 4t^2\,\hat{j}$$

Να υπολογισθεί η **ακτίνα καμπυλότητας ρ** σαν συνάρτηση του χρόνου.

1η Μέθοδος

Υπολογίζουμε την ταχύτητα **v** και την επιτάχυνση **a** του κινητού:

$$\vec{v}(t) = 2\,\hat{i} + 8t\,\hat{j}$$
$$\vec{a}(t) = 0\,\hat{i} + 8\,\hat{j}$$

Βρίσκουμε το μέτρο της a_T (προβολή της επιτάχυνσης στην κατεύθυνση της ταχύτητας):

$$a_T = \vec{a}\cdot\hat{u}_T = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{(8\hat{j})\cdot(2\hat{i}+8t\,\hat{j})}{\sqrt{4+64t^2}} = \frac{64t}{\sqrt{4+64t^2}}$$

Υπολογίζουμε τη συνιστώσα a_N:

$$a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2} = \sqrt{64 - \frac{64^2 t^2}{4+64t^2}} = \frac{16}{\sqrt{4+64t^2}}$$

και τελικά:

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{4+64t^2}{16/\sqrt{4+64t^2}} = \frac{\left(4+64t^2\right)^{3/2}}{16} \Rightarrow \rho = \frac{\left(1+16t^2\right)^{3/2}}{2}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

2η Μέθοδος

Υπολογίζουμε την ταχύτητα **v** και την επιτάχυνση **a** του κινητού:

$$\vec{v}(t) = 2\,\hat{i} + 8t\,\hat{j}$$
$$\vec{a}(t) = 0\,\hat{i} + 8\,\hat{j}$$

Βρίσκουμε το μέτρο του εξωτερικού γινομένου **|v x a|** :

$$\vec{v}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 8t & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 16\hat{k} \;\Rightarrow\; |\vec{v}\times\vec{a}| = 16$$

Υπολογίζουμε την ακτίνα καμπυλότητας με βάση τη σχέση:

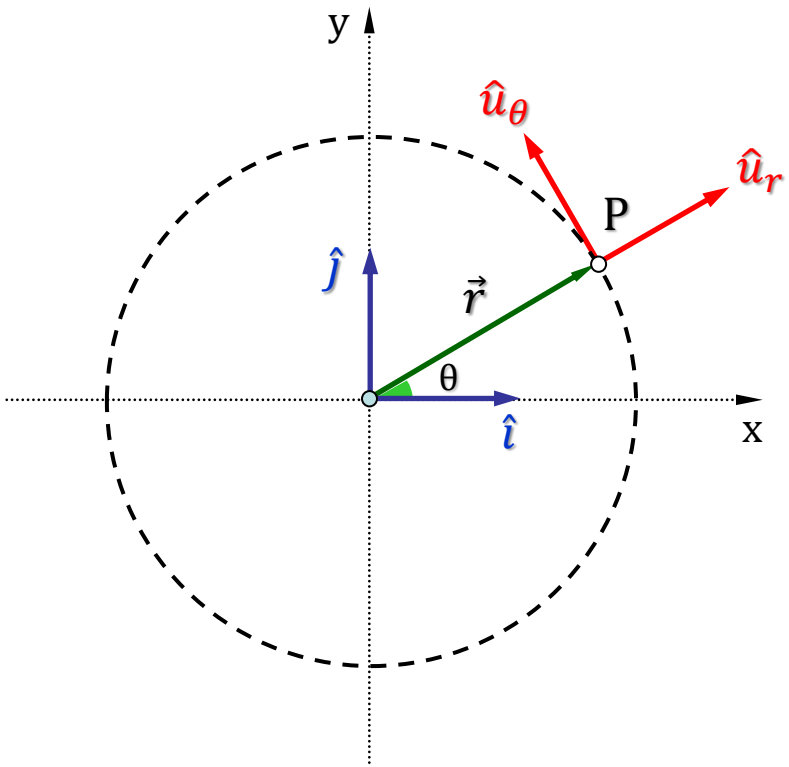
$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|}$$

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|} = \frac{\left(4+64t^2\right)^{3/2}}{16}$$

$$\rho = \frac{\left(1+16t^2\right)^{3/2}}{2}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Ένα σημείο P(x,y) του καρτεσιανού επιπέδου εκφράζεται σε πολικές συντεταγμένες μέσω της απόστασης r από την αρχή των αξόνων και της γωνίας θ ως P(r,θ) ισχύοντας:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\,cos\theta \\ y = r\,sin\theta \end{array} \right\}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα που ορίζουν το πολικό σύστημα συντεταγμένων είναι:

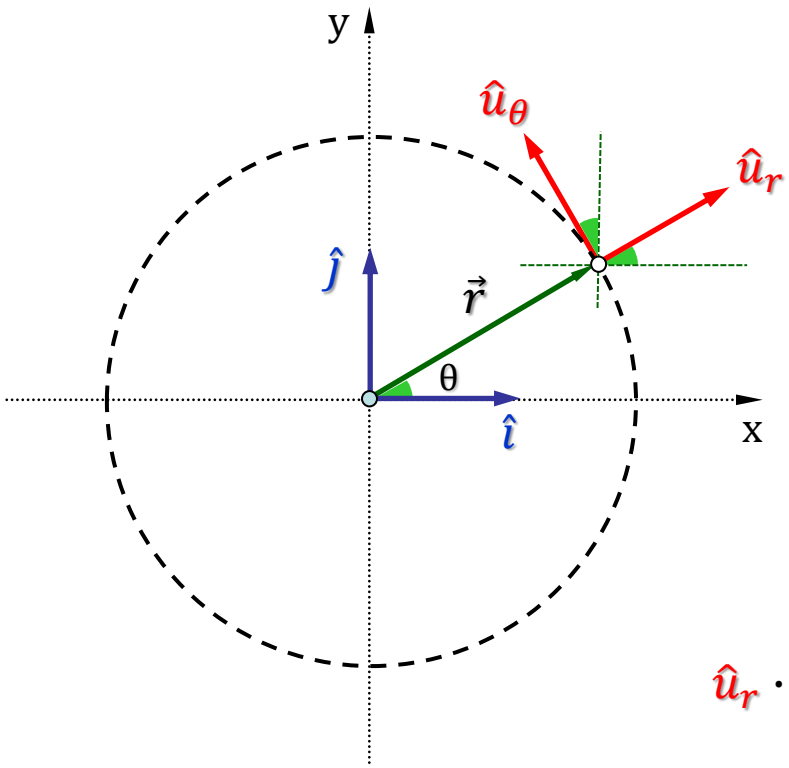
$\hat{u}_r$ κατά μήκος της κατεύθυνσης του διανύσματος θέσης r και με την ίδια φορά

$\hat{u}_\theta$ κάθετο στην κατεύθυνση του $\hat{u}_r$ και με θετική φορά (αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου).

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} = r\,cos\theta\,\hat{\imath} + r\,sin\theta\,\hat{\jmath}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Για τα μοναδιαία διανύσματα που ορίζουν το πολικό σύστημα συντεταγμένων ισχύει:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_r = \quad cos\theta\, \hat{\imath} + sin\theta\, \hat{\jmath} \\ \hat{u}_\theta = -sin\theta\, \hat{\imath} + cos\theta\, \hat{\jmath} \end{array} \right\}$$

Γιατί τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{u}_r$ και $\hat{u}_\theta$ συνθέτουν διανύσματα βάσης;

Είναι ορθογώνια και μοναδιαία:

$$\hat{u}_r \cdot \hat{u}_\theta = (\cos\theta\, \hat{\imath} + sin\theta\, \hat{\jmath}) \cdot (-\sin\theta\, \hat{\imath} + cos\theta\, \hat{\jmath}) = 0$$

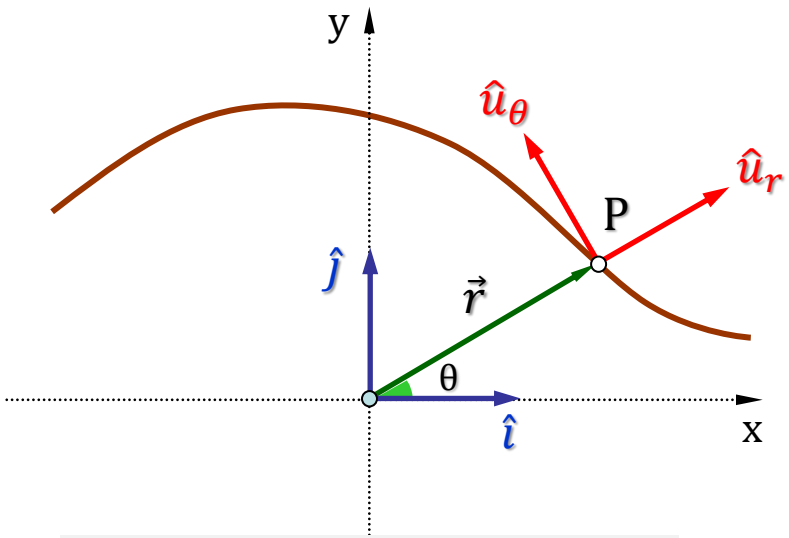
$$|\hat{u}_r| = |\hat{u}_\theta| = 1$$

Επίσης ισχύει:

$$\hat{u}_r \times \hat{u}_\theta = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (cos^2\theta + sin^2\theta)\, \hat{k} = \hat{k} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\hat{u}_r \times \hat{u}_\theta = \hat{k}}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΕ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath} \\ \hat{u}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} \end{array} \right\}$$

Το διάνυσμα θέσης του σημείου P σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{r} = r\,\hat{u}_r$$

Η ταχύτητά του θα δίνεται κατά συνέπεια από τη σχέση:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{u}_r)$$

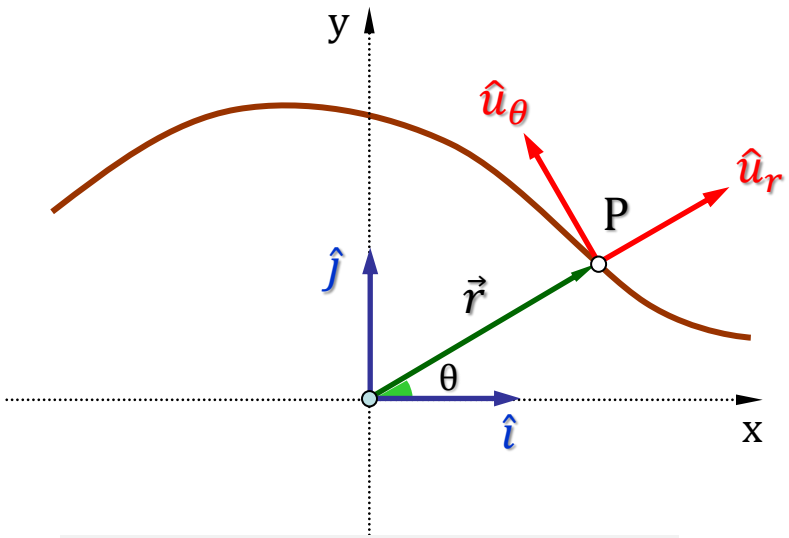
Υπολογισμός ταχύτητας

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{u}_r) = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + r\left(\frac{d\hat{u}_r}{dt}\right)$$

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}) = -\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\imath} + \cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\jmath} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)[-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}] = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΕ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_r = \quad cos\theta\,\hat{\imath} + sin\theta\,\hat{j} \\ \hat{u}_\theta = -sin\theta\,\hat{\imath} + cos\theta\,\hat{j} \end{array} \right\}$$

Υπολογισμός ταχύτητας

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{u}_r) = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + r\left(\frac{d\hat{u}_r}{dt}\right)$$

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta$$

Ακτινική συνιστώσα ταχύτητας: $\left(\frac{dr}{dt}\right)$

Γωνιακή συνιστώσα ταχύτητας: $r\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = r\omega$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΕ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{u}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}\\ \hat{u}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{d\hat{u}_r}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta \qquad \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_r$$

Υπολογισμός επιτάχυνσης

$$\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta \Longrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta\right\}$$

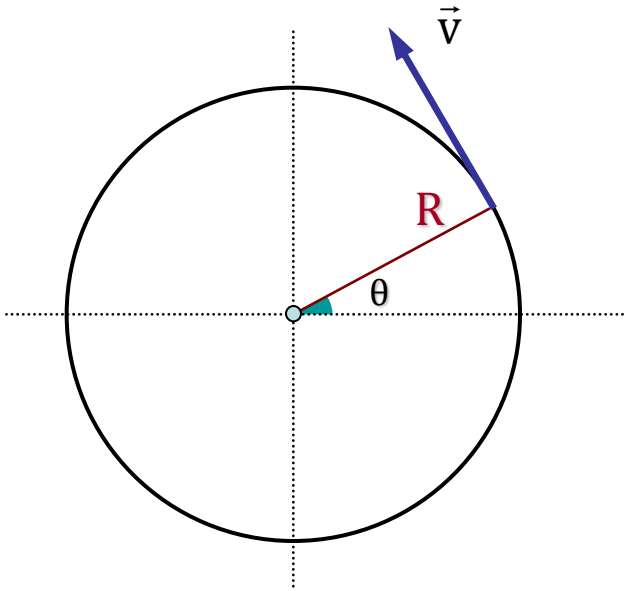
$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)\hat{u}_r + \left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\hat{u}_r}{dt}\right) + \left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta + r\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{u}_\theta + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}\right)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)\hat{u}_r + \left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta + \left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta + r\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{u}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_r$$

$$\vec{a} = \left[\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right) - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left[2\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + r\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\right]\hat{u}_\theta$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Κυκλική Κίνηση: Η τροχιά είναι κύκλος σταθερής ακτίνας R, οπότε η ταχύτητα είναι πάντα εφαπτομένη της κυκλικής τροχιάς και κάθετη στην επιβατική ακτίνα.

Το μέτρο της ταχύτητας θα δίνεται από:

$$\left|\vec{v}\right| = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cdot \theta) = R\frac{d\theta}{dt}$$

Η ποσότητα dθ/dt ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα ω

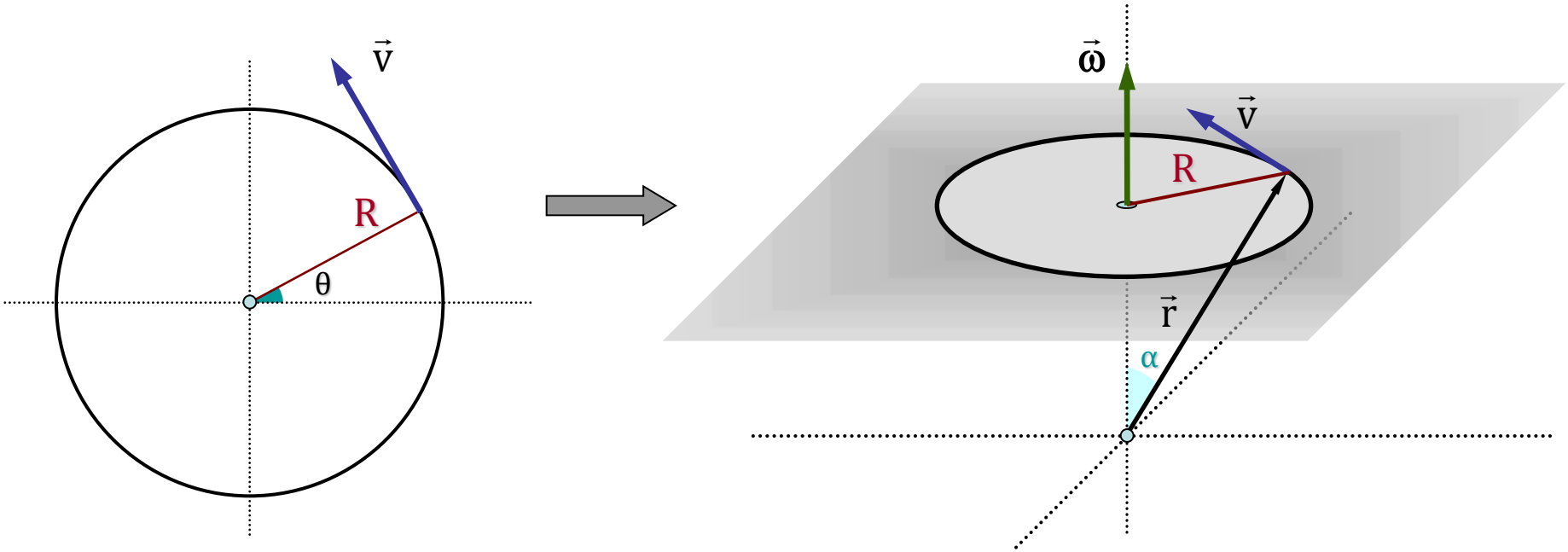
$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος με μέτρο ω, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο κίνησης και φορά καθοριζόμενη από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Μονάδα γωνιακής ταχύτητας: rad/s = s^{-1}

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



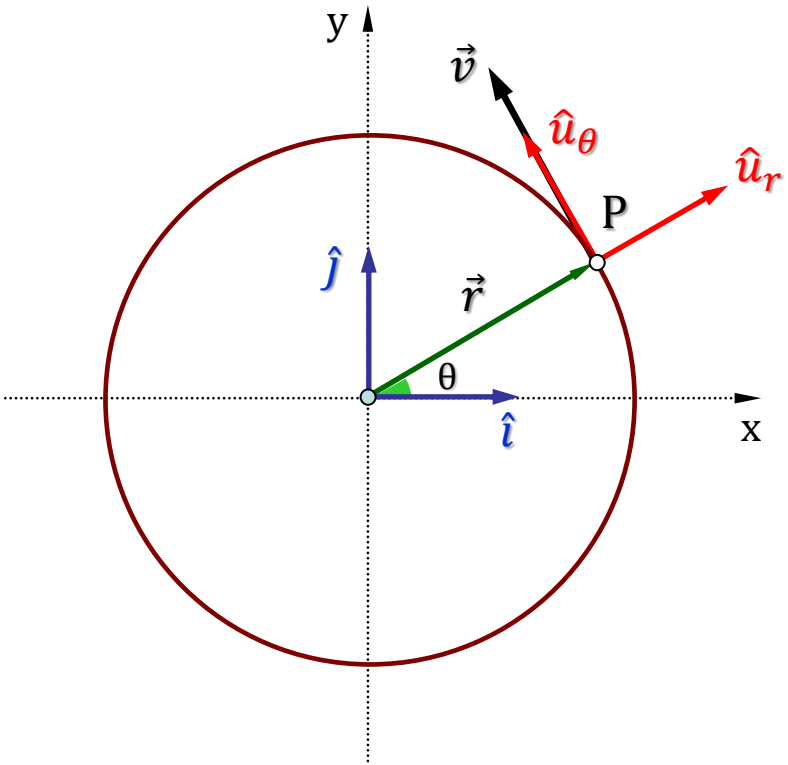
Η κυκλική κίνηση στο χώρο μπορεί να περιγραφεί από το διάνυσμα θέσης **r** . Όπως είναι προφανές από το παραπάνω σχήμα ισχύει γενικά:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}|\,|\vec{r}|\,sin\alpha = \omega\,(r\,sin\alpha) = \omega\,R = R\,\frac{d\theta}{dt}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ – ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Ταχύτητα

$$\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta$$

Επειδή στην κυκλική κίνηση το μέτρο του διανύσματος θέσης παραμένει σταθερό και ίσο με την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς r = R, η παράγωγος (dr/dt) μηδενίζεται.

$$\vec{v} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta = R\omega\,\hat{u}_\theta$$

Έτσι, η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας εξαφανίζεται και επιβιώνει μόνο η συνιστώσα κατά την κατεύθυνση $\hat{u}_\theta$, η οποία τώρα γίνεται εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά.

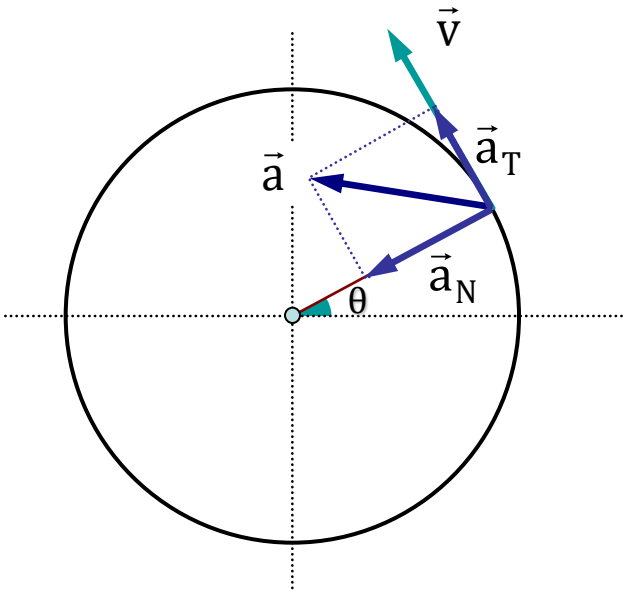
Σημείωση: Στην κυκλική κίνηση, το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}_\theta$ των πολικών συντεταγμένων ταυτίζεται με το επιτρόχιο $\hat{u}_T$ των γενικευμένων συντεταγμένων.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΤΗΝ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στη γενική περίπτωση της καμπυλόγραμμης κίνησης (γενικευμένες συντεταγμένες) είδαμε ότι ισχύει:

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$



Τα $\mathbf{u_T}$ και $\mathbf{u_N}$ είναι μοναδιαία διανύσματα, εφαπτόμενο στην τροχιά και κάθετο αντίστοιχα.

Στην περίπτωση κυκλικής κίνησης:

- Η ακτίνα καμπυλότητας ρ παραμένει σταθερή και ταυτίζεται με την ακτίνα του κύκλου R
- Η γραμμική ταχύτητα v εκφράζεται μέσω της γωνιακής $v = \omega R$
- Η γραμμική επιτάχυνση dv/dt ομοίως εκφράζεται από την γωνιακή $dv/dt = R\, d\omega/dt$

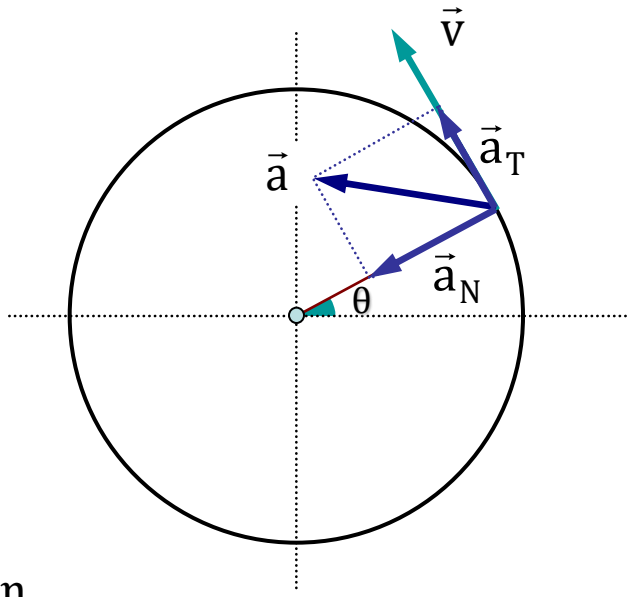
$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T + \frac{\omega^2 R^2}{R}\hat{u}_N \Rightarrow \boxed{\vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T + \omega^2 R\,\hat{u}_N}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΤΗΝ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Η επιτάχυνση στην κυκλική κίνηση έχει δύο συνιστώσες $\mathbf{a_T}$ και $\mathbf{a_N}$, εφαπτομενική και κάθετη στην τροχιά αντίστοιχα.

$$\vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T + \omega^2 R\,\hat{u}_N$$



- Η εφαπτομενική συνιστώσα $\mathbf{a_T}$ είναι υπεύθυνη για την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας **v**

- Η συνιστώσα $\mathbf{a_N}$ αντιστοιχεί στην κεντρομόλο επιτάχυνση

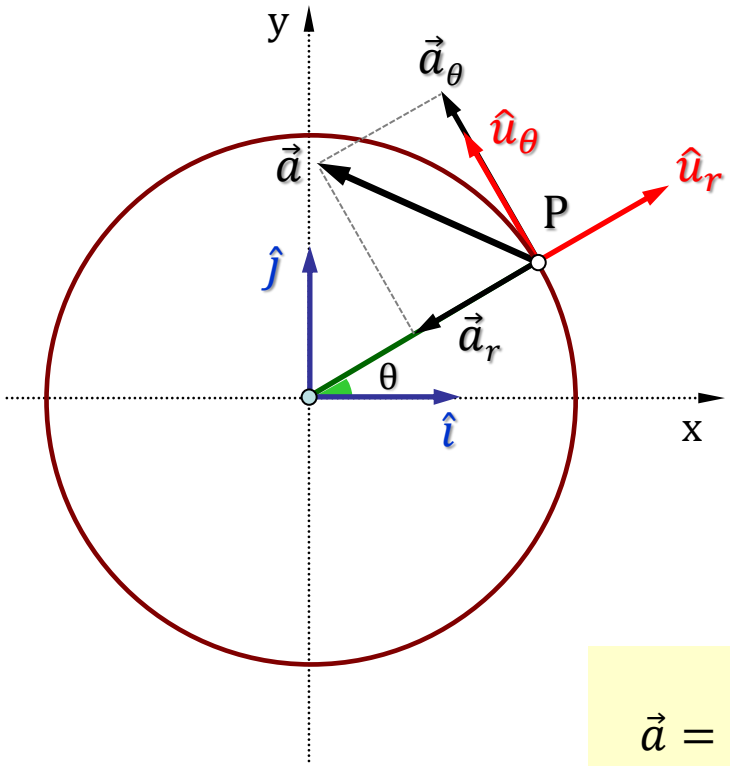
ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στην ειδική περίπτωση της ομαλής κυκλικής κίνησης, η ποσότητα $d\omega/dt$ μηδενίζεται με αποτέλεσμα να παραμένει μόνο η κεντρομόλος επιτάχυνση $\omega^2 R$, η οποία είναι ως προς το μέτρο σταθερή.

$$\vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T + \omega^2 R\,\hat{u}_N = \omega^2 R\,\hat{u}_N$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ – ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \left[\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right) - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left[2\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + r\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\right]\hat{u}_\theta$$

Ομοίως κι εδώ, επειδή r = R, η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της ακτινικής απόστασης μηδενίζονται, οπότε:

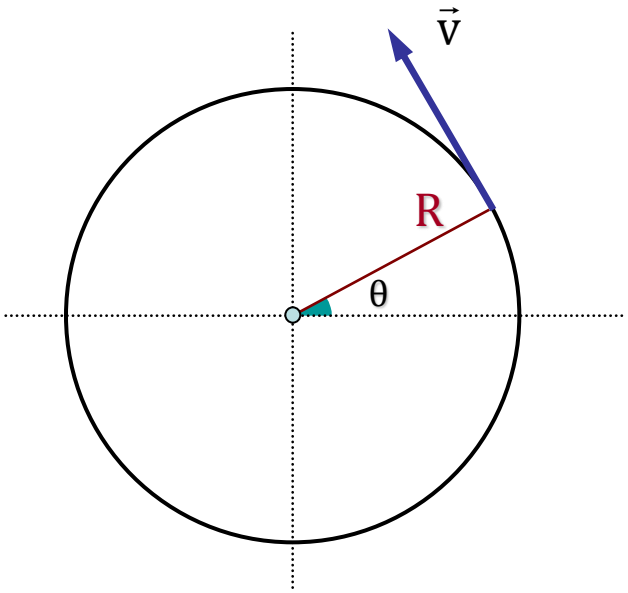
$$\vec{a} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \hat{u}_r + r\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{u}_\theta = -R\omega^2\hat{u}_r + R\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\hat{u}_\theta$$

Έτσι, η επιτάχυνση αναλύεται και πάλι σε μια **κεντρομόλο επιτάχυνση** $-R\omega^2\hat{u}_r$ και μια **επιτρόχια επιτάχυνση** $R\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\hat{u}_\theta$.

Σημείωση: Στην κυκλική κίνηση, το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}_r$ των πολικών συντεταγμένων είναι **αντίθετο** με το $\hat{u}_N$ των γενικευμένων συντεταγμένων.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Ομαλή κυκλική κίνηση: Η γωνιακή ταχύτητα ω παραμένει χρονικά σταθερή

$$\omega = d\theta/dt = const$$

Περίοδος T : Ο απαιτούμενος χρόνος για μια πλήρη περιστροφή

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

Συχνότητα f : Αριθμός περιστροφών στη μονάδα του χρόνου

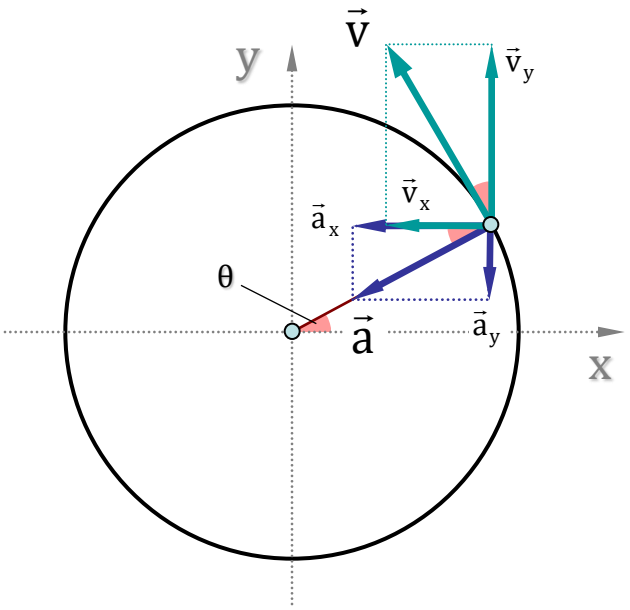
$$f = 1/T$$

Για σταθερή γωνιακή ταχύτητα ισχύει:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{0}^{t} \omega dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega t \Rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega t}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Διανυσματικός Υπολογισμός Επιτάχυνσης

Παρουσιάζεται εδώ μια εναλλακτική προσέγγιση υπολογισμού της επιτάχυνσης στην ομαλή κυκλική κίνηση.

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}=\frac{d}{dt}(-v\sin\theta)\vec{i}+\frac{d}{dt}(v\cos\theta)\vec{j}$$

Το μέτρο της ταχύτητας v στην ομαλή κίνηση παραμένει σταθερό:

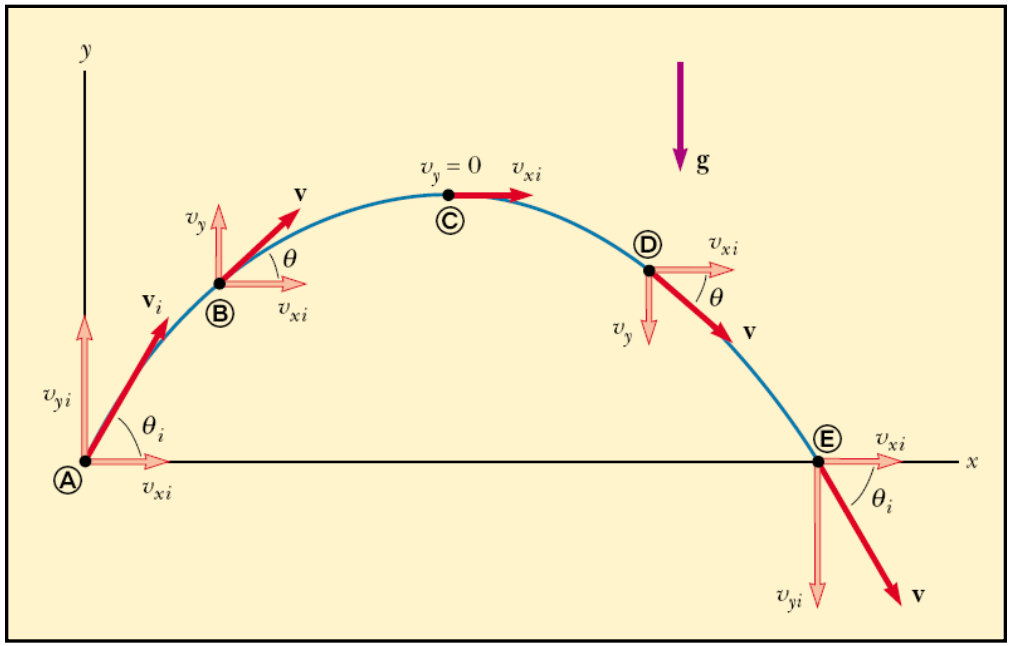
$$\vec{a}=-v\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{i}-v\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{j}=-v\omega\cos\theta\vec{i}-v\omega\sin\theta\vec{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a}=-\omega^2R\cos\theta\vec{i}-\omega^2R\sin\theta\vec{j}\Rightarrow|\vec{a}|=\omega^2R\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\omega^2R$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ



Κίνηση σωματιδίου (χωρίς αντιστάσεις) σε κατακόρυφο επίπεδο όπου επιδρά μόνο η σταθερή επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης g.

Το σώμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα $\mathbf{v_0=v_i}$ υπό γωνία $\theta_0=\theta_i$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{i} + v_{0y}\,\hat{j} = v_0\cos\theta_0\,\hat{i} + v_0\sin\theta_0\,\hat{j}$$

Κατά τη διάρκεια της κίνησης το διάνυσμα θέσης **r** καθώς και το διάνυσμα της ταχύτητας **v** μεταβάλλονται συνεχώς, ενώ το διάνυσμα της επιτάχυνσης **a** παραμένει σταθερό (**a=-g**).

Το βλήμα δεν έχει οριζόντια επιτάχυνση!

*Στην πλάγια βολή η οριζόντια και η κατακόρυφη κίνηση είναι **ανεξάρτητες** η μια από την άλλη.*

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ

Εξισώσεις της Κίνησης

Οριζόντια Κίνηση

$$x - x_0 = v_{0x} t \;\Rightarrow\; x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0)t$$

Κατακόρυφη Κίνηση

$$y - y_0 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \;\Rightarrow\; y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

$$\frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2} = (y - y_0)a \quad \Longrightarrow \quad v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0)$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

Εξίσωση της Τροχιάς

Η εξίσωση της κίνησης που προκύπτει εάν συμπλέξουμε την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της απόστασης, απαλείφοντας τον χρόνο από τις εξισώσεις αυτές.

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0)t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2$$

$x_0 = y_0 = 0$

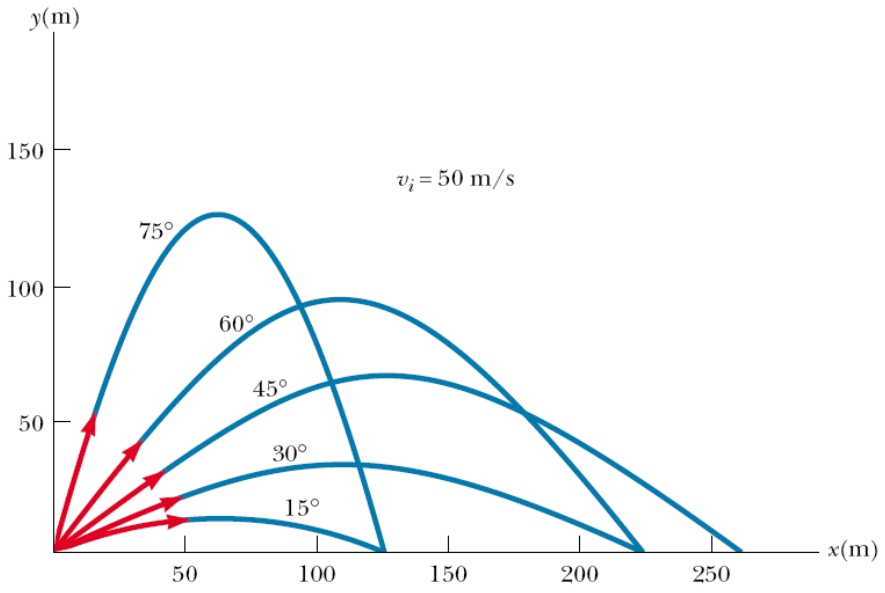
$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ

Βεληνεκές

Η οριζόντια απόσταση R που διανύει το βλήμα όταν επιστρέψει στο αρχικό ύψος εκτόξευσης.



$$R = x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t$$

Ο χρόνος πτήσης υπολογίζεται από την κατακόρυφη κίνηση, έτσι ώστε $y-y_0=0$:

$$0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Απαλείφοντας τον χρόνο από τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στην σχέση:

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0}$$

Το μέγιστο βεληνεκές επιτυγχάνεται για βολή με $\theta_0 = 45^o$

© E. Stiliaris, UoA 2026