ΦΥΣΙΚΗ Ι



ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2026-2027

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

- Καρτεσιανές Συντεταγμένες
- Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων
- Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων
- Βαθμωτό Γινόμενο Τριών Διανυσμάτων

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

- Διανυσματική Φύση της Δύναμης
- Σύνθεση Δυνάμεων

ΡΟΠΗ

- Η Έννοια της Ροπής
- Ροπή Πολλών Δυνάμεων
- Ζεύγος Δυνάμεων

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2026-2027

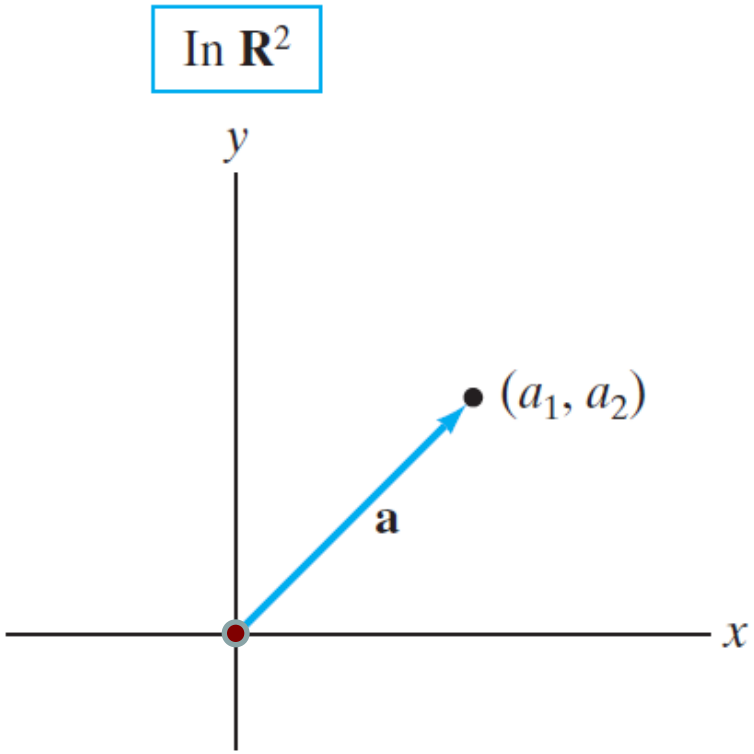
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

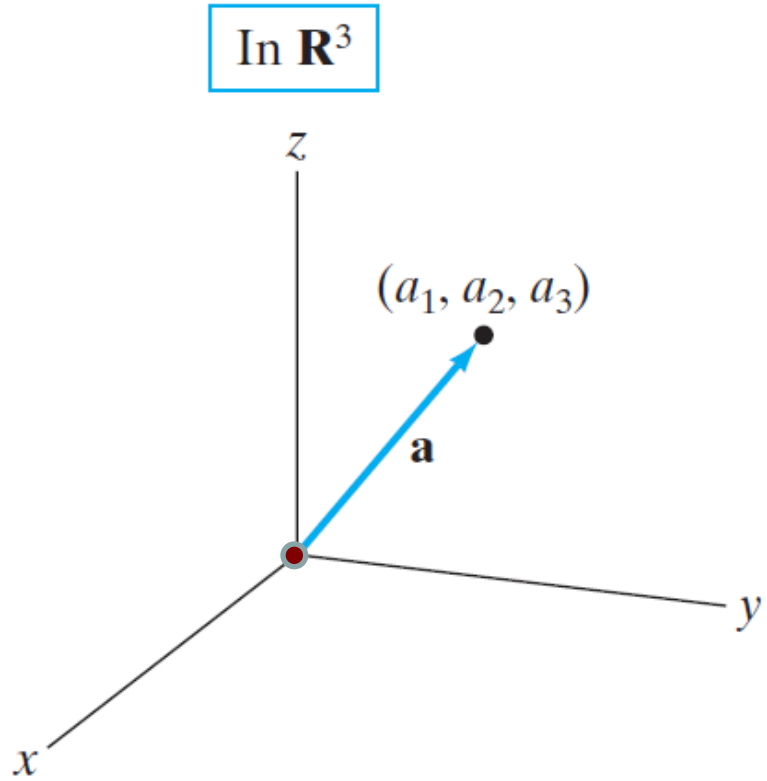
	ΦΑΡΑΚΟΣ	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ Εσωτερικό & Εξωτερικό Γινόμενο	1.1 – 1.3 1.5	3.1 – 3.5	3.1 – 3.8	1.7 – 1.10
ΔΥΝΑΜΕΙΣ Διανυσματική Φύση	2.1	4.1, 4.2	5.4	5.1
ΡΟΠΗ	7.1	10.1-10.4	10.8, 11.6	10.1

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο (a_1, a_2) του επιπέδου και στο σημείο (a_1, a_2, a_3) του τρισδιάστατου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.



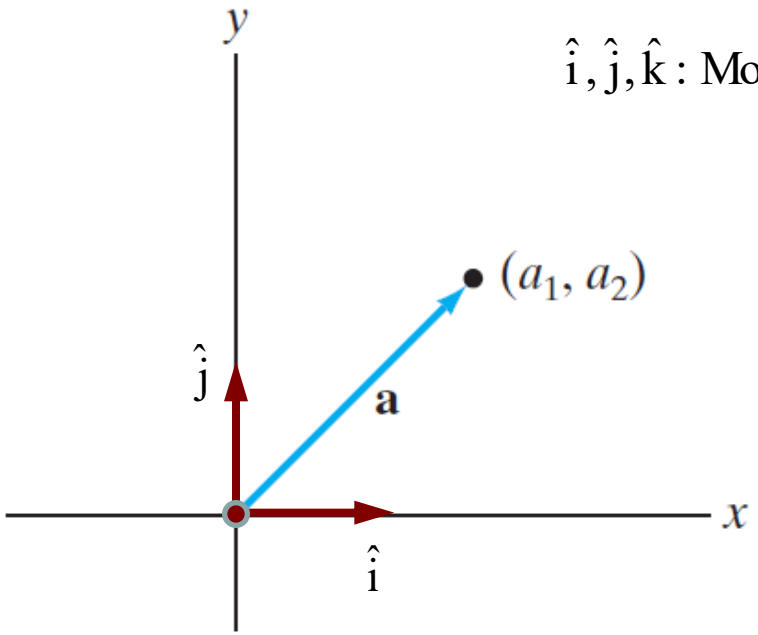


© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

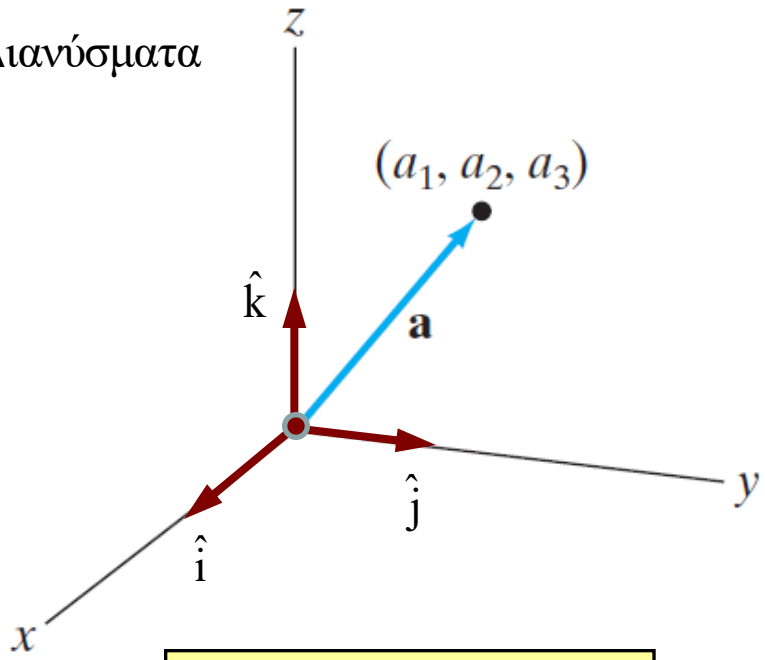
Διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο (a_1, a_2) του επιπέδου και στο σημείο (a_1, a_2, a_3) του τρισδιάστατου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

In $\mathbf{R}^2$



$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: Μοναδιαία Διανύσματα

In $\mathbf{R}^3$



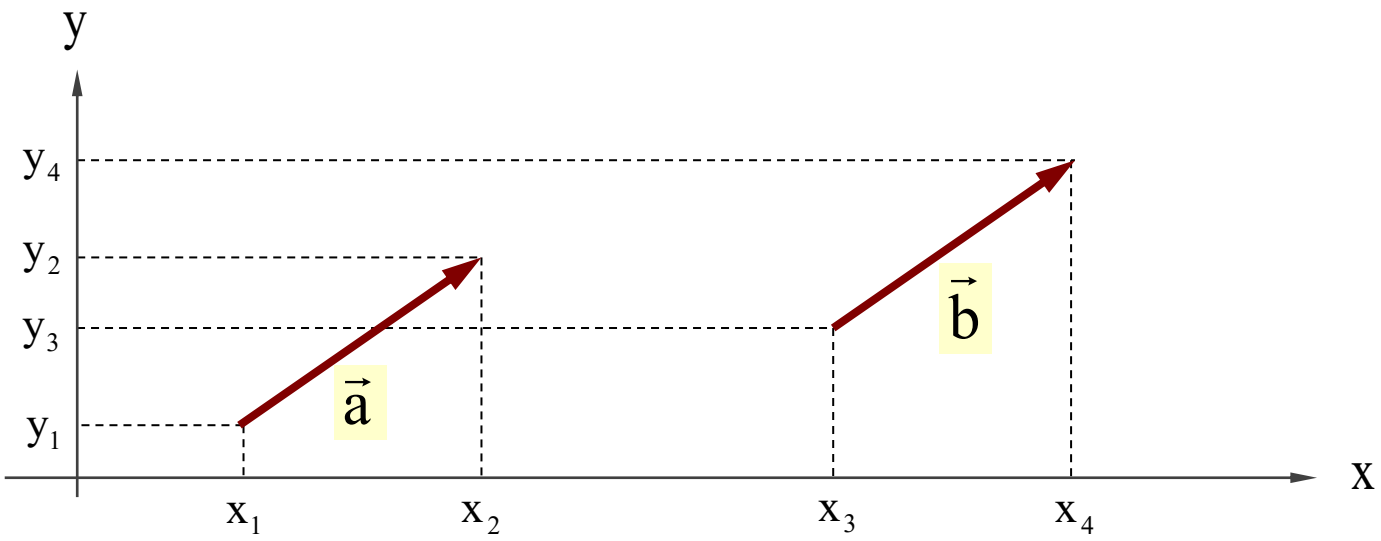
$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$$

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

Μερικές Βασικές Διαπιστώσεις

Παράλληλη μετατόπιση διανύσματος στο χώρο αφήνει τις συνιστώσες του αμετάβλητες.



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = (x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j} \\ \vec{b} = (x_4 - x_3)\,\hat{i} + (y_4 - y_3)\,\hat{j} \end{array} \right\} \Longleftarrow \begin{array}{l} x_2 - x_1 = x_4 - x_3 \\ y_2 - y_1 = y_4 - y_3 \end{array} \Longrightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{b}}$$

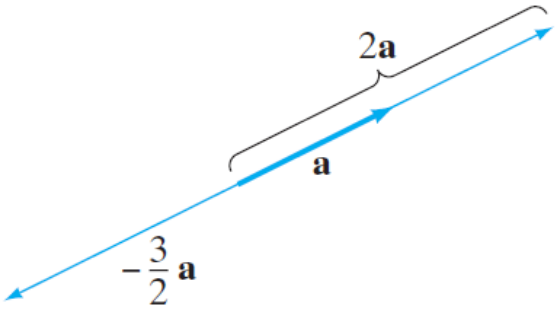
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: Μοναδιαία Διανύσματα

© E. Stiliaris, UoA 2026

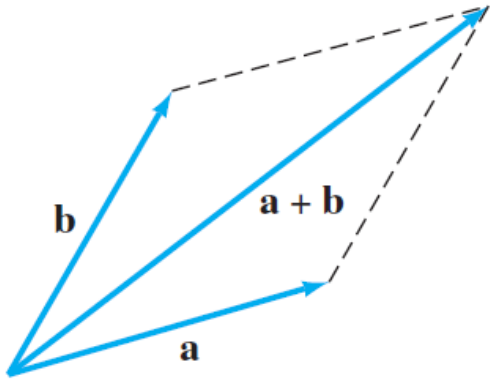
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

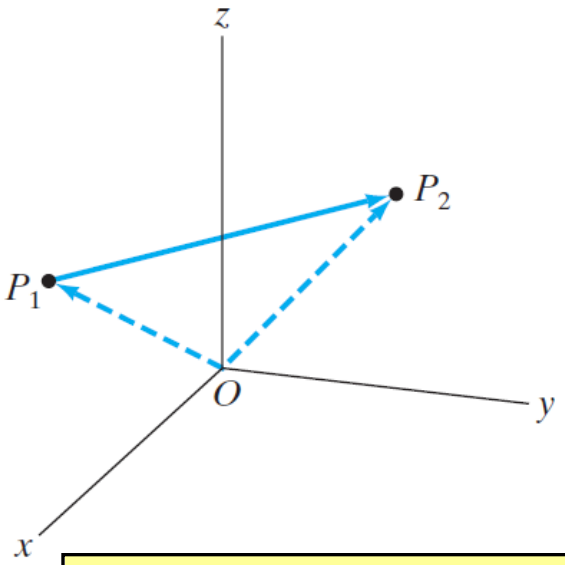
Βασικές Πράξεις επί των Διανυσμάτων

Αριθμητικά Πολλαπλάσια

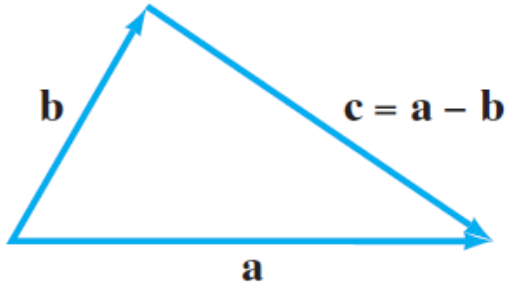


Άθροισμα Διανυσμάτων





$$\vec{P}_{12} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$



Διαφορά Διανυσμάτων

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Βασικές Πράξεις επί των Διανυσμάτων

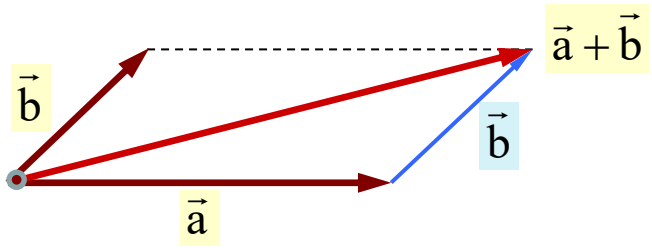
$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \qquad \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

Αριθμητικά Πολλαπλάσια

$$\lambda\vec{a} = \lambda(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) = \lambda a_1\hat{i} + \lambda a_2\hat{j} + \lambda a_3\hat{k}$$

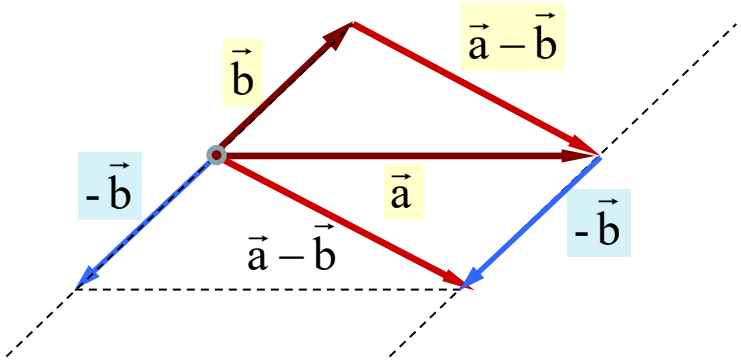
Άθροισμα Διανυσμάτων

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$



Διαφορά Διανυσμάτων

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$$



© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Για τα διανύσματα **a**=(a_1, a_2, a_3) και **b**=(b_1, b_2, b_3) του τρισδιάστατου χώρου το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι **βαθμωτό** μέγεθος.

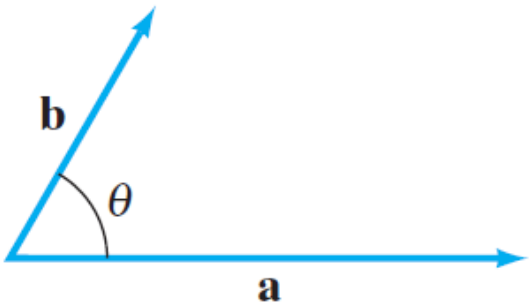
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0$, and $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0$ if and only if $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;
3. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$;
4. $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b})$.

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 = |\vec{a}|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

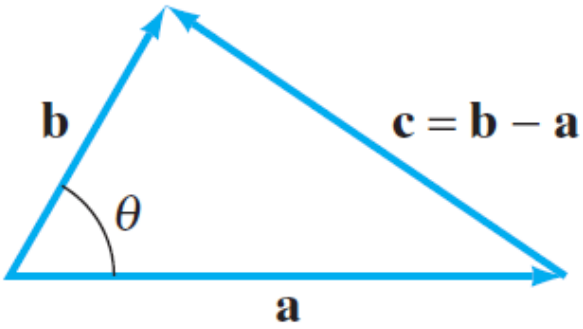
© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$$|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Leftrightarrow (\vec{b}-\vec{a})(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\vec{b}\vec{b}+\vec{a}\vec{a}-2\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

- Κάθετα διανύσματα ($\theta=90^o$) έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν.
- Παράλληλα διανύσματα ($\theta=0^o$) έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους.

Μοναδιαία Διανύσματα

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 90^0 = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 0^0 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=0$$
$$\hat{i}\cdot\hat{k}=0$$
$$\hat{j}\cdot\hat{k}=0$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=1$$
$$\hat{j}\cdot\hat{j}=1$$
$$\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

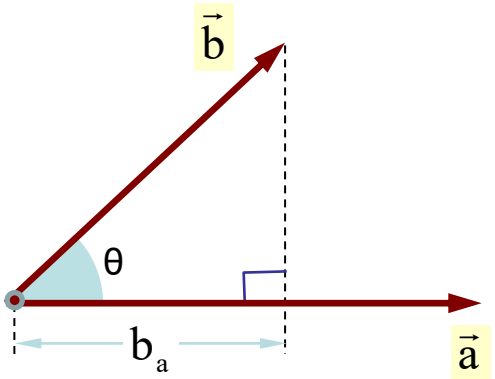
© E. Stiliaris, UoA 2026

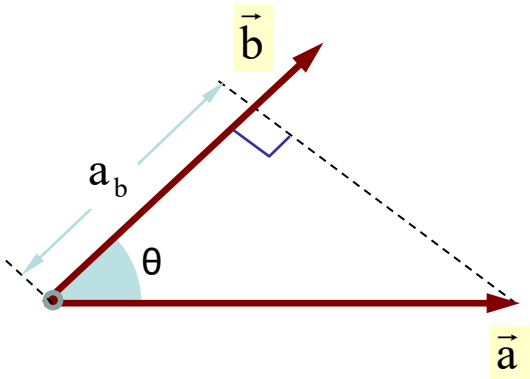
ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Το εσωτερικό γινόμενο συσχετίζεται με το μέτρο της προβολής





$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|\,b_a$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}|\,a_b$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

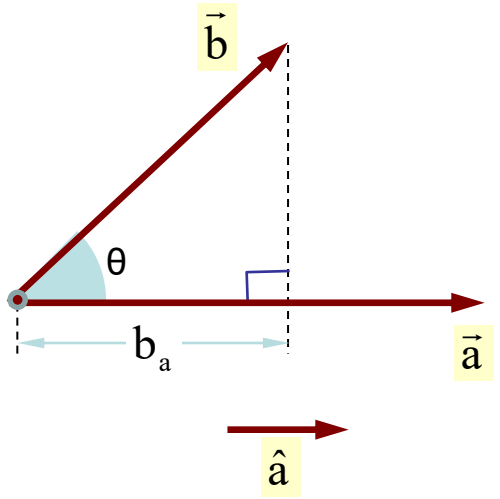
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Επειδή το μοναδιαίο διάνυσμα οποιουδήποτε διανύσματος προκύπτει διαιρώντας το διάνυσμα με το μέτρο του, τότε:

Το εσωτερικό γινόμενο διανύσματος με μοναδιαίο διάνυσμα ισούται με το μέτρο της προβολής του διανύσματος αυτού στην κατεύθυνση του μοναδιαίου.

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\hat{a}\cdot\vec{b} = |\hat{a}||\vec{b}|\cos\theta = 1\,|\vec{b}|\cos\theta = b_a$$



© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Θεωρώντας την παραπάνω σχέση σαν τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, τότε προκύπτει:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\,\hat{i} + a_2\,\hat{j} + a_3\,\hat{k})\cdot(b_1\,\hat{i} + b_2\,\hat{j} + b_3\,\hat{k})$$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1\,\hat{i}\cdot\hat{i} + a_1b_2\,\hat{i}\cdot\hat{j} + a_1b_3\,\hat{i}\cdot\hat{k}$$
$$+\ a_2b_1\,\hat{j}\cdot\hat{i} + a_2b_2\,\hat{j}\cdot\hat{j} + a_2b_3\,\hat{j}\cdot\hat{k}$$
$$+\ a_3b_1\,\hat{k}\cdot\hat{i} + a_3b_2\,\hat{k}\cdot\hat{j} + a_3b_3\,\hat{k}\cdot\hat{k}$$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

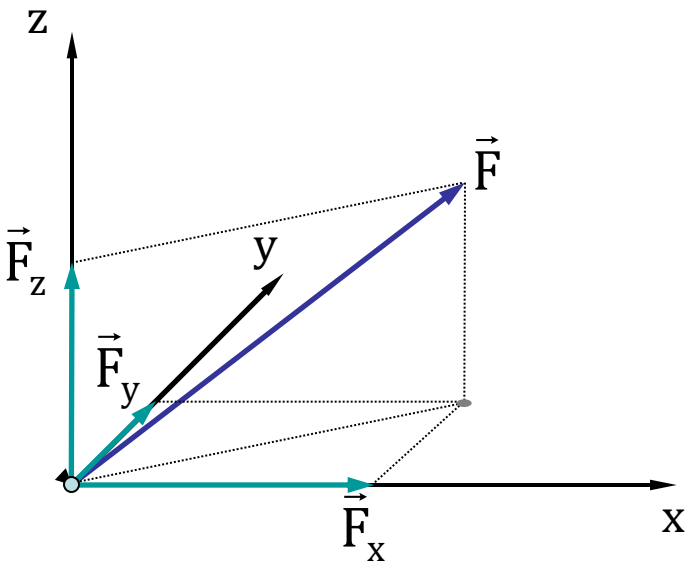
© E. Stiliaris, UoA 2026

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Δύναμη: Διανυσματικό μέγεθος – Για τον καθορισμό της χρειάζεται όχι μόνο το μέτρο της αλλά και η φορά της.

Ο ακριβής ορισμός της δύναμης θα δοθεί σε συνδυασμό με τη δυναμική της κίνησης (Νόμοι του Νεύτωνα).

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μια δύναμη F μπορεί να οριστεί πλήρως από τις τρεις συνιστώσες της F_x, F_y και F_z:



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: Μοναδιαία Διανύσματα

Μέτρο της Δύναμης: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

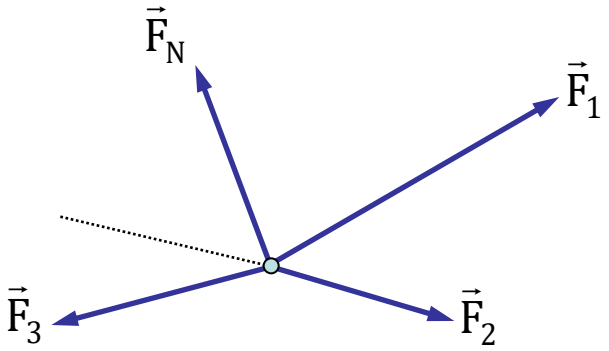
Μονάδα Μέτρησης (S.I.): **N** (Newton)

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Συντρέχουσες δυνάμεις: Οι δυνάμεις που εφαρμόζονται στο ίδιο υλικό σημείο

Συνισταμένη: Το διανυσματικό άθροισμα όλων των συντρεχουσών δυνάμεων



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots + F_{Nx} = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots + F_{Ny} = \sum_{i=1}^{N} F_{iy}$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \cdots + F_{Nz} = \sum_{i=1}^{N} F_{iz}$$

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k} \quad \text{με} \quad \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \quad \text{τα μοναδιαία διανύσματα}$$

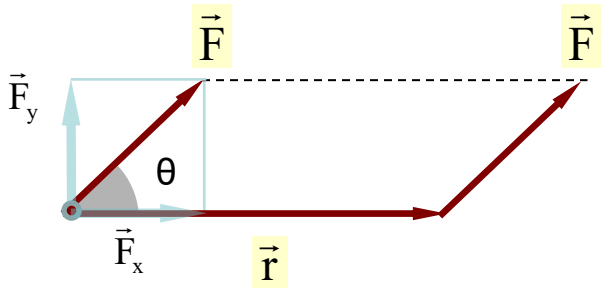
© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Φυσικά Μεγέθη που προκύπτουν από το Εσωτερικό Γινόμενο

Χαρακτηριστικό παράδειγμα **βαθμωτού φυσικού μεγέθους** που προκύπτει από το **εσωτερικό γινόμενο** δύο άλλων **διανυσματικών φυσικών μεγεθων** είναι το έργο που παράγει η δύναμη **F** μετατοπιζόμενη κατά διάστημα **r** :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = |\vec{F}||\vec{r}|\cos\theta$$



$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = |\vec{F}||\vec{r}|\cos\theta = F_x\, r$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

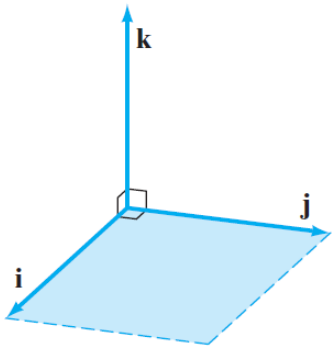
Για τα διανύσματα $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$ του τρισδιάστατου χώρου το εξωτερικό γινόμενο δίνεται μέσω της ορίζουσας:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

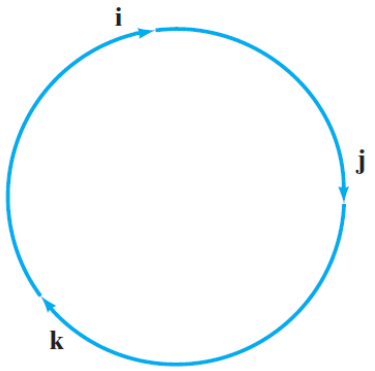
Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι **διανυσματικό** μέγεθος.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ (anticommutativity);
2. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (distributivity);
3. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ (distributivity);
4. $k(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(k\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(k\mathbf{b})$.



$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\ ,\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\ ,\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$



© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 3×3 ισοδυναμεί με το άθροισμα τριών οριζουσών 2×2:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\hat{k}$$

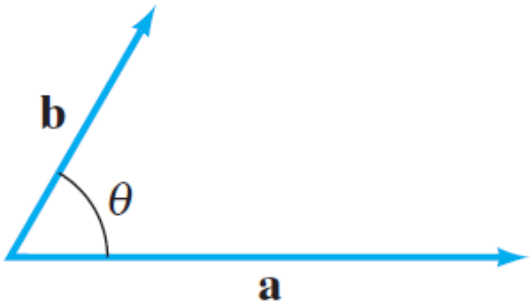
Το ανάπτυγμα της ορίζουσας μπορεί να γίνει ως προς οποιαδήποτε σειρά ή στήλη με τον μνημονικό κανόνα των προσήμων:

$$\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$$

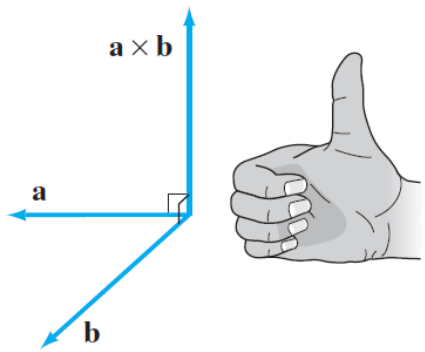
Είναι προφανές πως ισχύει η γενίκευση, ότι μια ορίζουσα **n τάξεως** μπορεί να αντικατασταθεί με **n ορίζουσες τάξεως (n-1)**.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

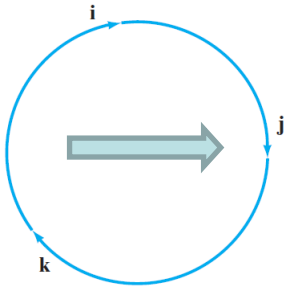
Αντίστροφα, θεωρώντας γνωστές τις σχέσεις των **εξωτερικών γινομένων** για τα **μοναδιαία** διανύσματα:

$$\hat{i}\times\hat{i}=\vec{0} \quad \hat{j}\times\hat{j}=\vec{0} \quad \hat{k}\times\hat{k}=\vec{0} \quad \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \ \ldots$$

τότε προκύπτει:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\,\hat{i}+a_2\,\hat{j}+a_3\,\hat{k})\times(b_1\,\hat{i}+b_2\,\hat{j}+b_3\,\hat{k})$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\cancel{a_1b_1\,\hat{i}\times\hat{i}}+a_1b_2\,\hat{i}\times\hat{j}+a_1b_3\,\hat{i}\times\hat{k}$$
$$+\ a_2b_1\,\hat{j}\times\hat{i}+\cancel{a_2b_2\,\hat{j}\times\hat{j}}+a_2b_3\,\hat{j}\times\hat{k}$$
$$+\ a_3b_1\,\hat{k}\times\hat{i}+a_3b_2\,\hat{k}\times\hat{j}+\cancel{a_3b_3\,\hat{k}\times\hat{k}}$$



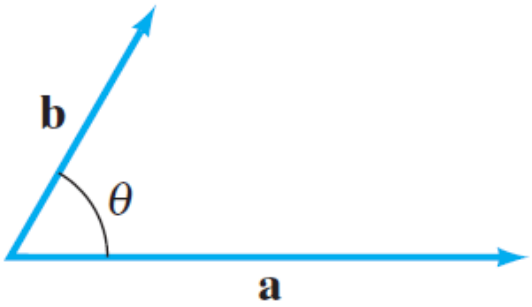
$$\vec{a}\times\vec{b}=a_1b_2\,\hat{k}-a_1b_3\,\hat{j}$$
$$-\ a_2b_1\,\hat{k}+a_2b_3\,\hat{i}$$
$$+\ a_3b_1\,\hat{j}-a_3b_2\,\hat{i}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

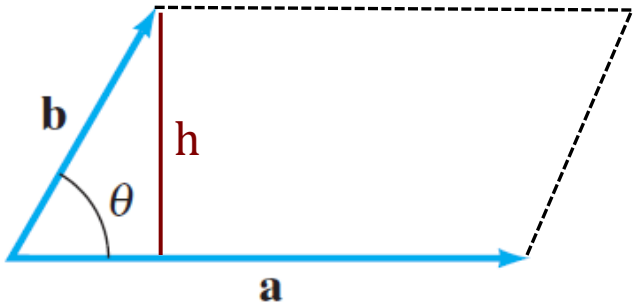
© E. Stiliaris, UoA 2026

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

Γεωμετρική σημασία του Εξωτερικού Γινομένου



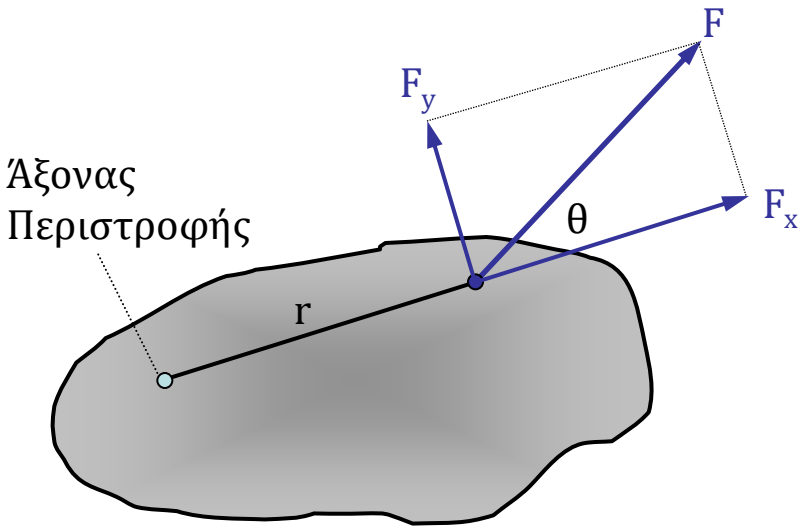
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=\left|\vec{a}\right|\left(\left|\vec{b}\right|\sin\theta\right)=\left|\vec{a}\right|h=E$$

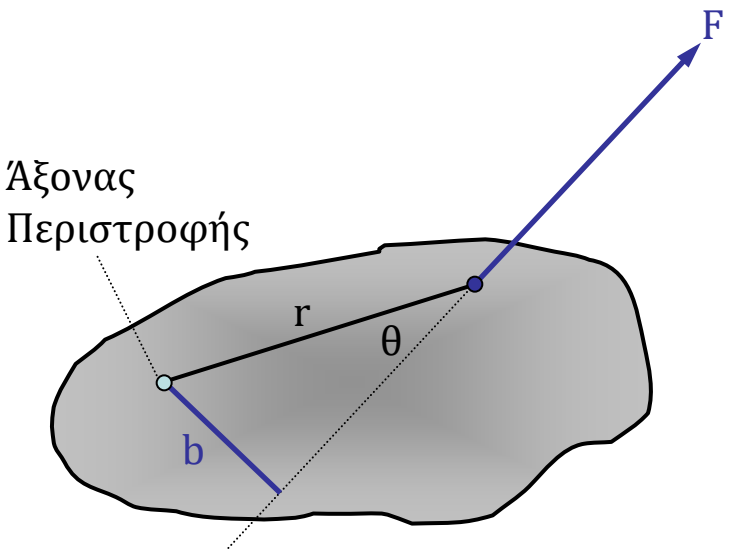
Το **μέτρο του εξωτερικού γινομένου** δύο διανυσμάτων ισούται με το **εμβαδόν** του αντίστοιχου παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο αυτά διανύσματα.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ροπή: Η ικανότητα μιας δύναμης F να θέτει σε περιστροφή ένα σώμα





F_y: Η κάθετη συνιστώσα της δύναμης στο διάστημα r

b: Η απόσταση του άξονα περιστροφής από το φορέα της δύναμης F (βραχίονας)

$$\tau = F_y\, r = [F\sin(\theta)]r$$

Μέτρο της ροπής τ

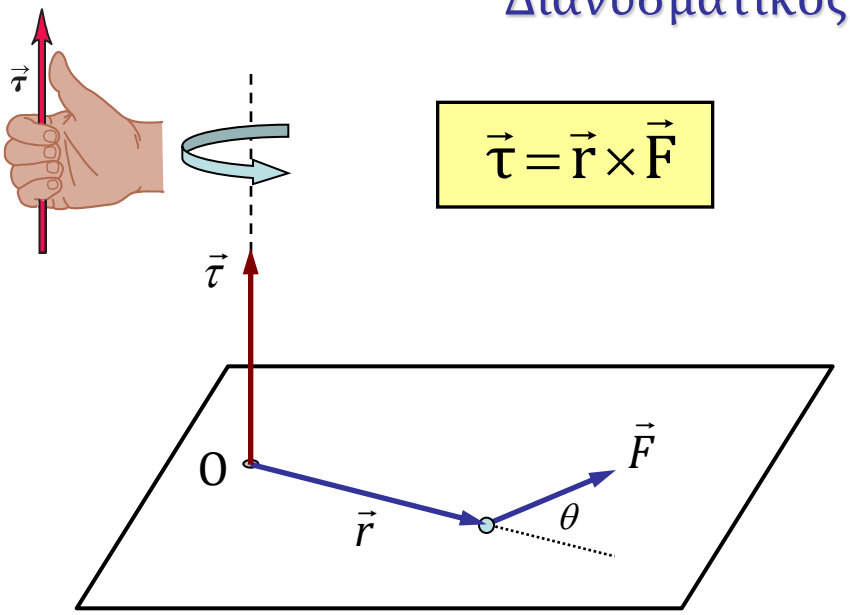
$$\tau = F\, b = F\,[r\sin(\theta)]$$

$$\tau = r\,F\sin(\theta)$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Διανυσματικός ορισμός της ροπής



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Μέτρο: $\tau = r\,F\sin(\theta)$

Κατεύθυνση: Κάθετη στο επίπεδο επιβατικής ακτίνας - δύναμης (r-F)

Φορά: Καθοριζόμενη από τον κανόνα του αντίχειρα του δεξιού χεριού

Μονάδα μέτρησης: Nm (S.I.)

- *Η ροπή δύναμης ορίζεται πάντοτε ως προς κάποιο συγκεκριμένο σημείο αναφοράς.*
- *Μετατόπιση της δύναμης κατά μήκος του άξονα εφαρμογής αφήνει αναλλοίωτη την ροπή της.*
- *Αλλαγή του σημείου αναφοράς αλλάζει την ροπή της δύναμης.*

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Διανυσματικός ορισμός της ροπής

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k} \\ \vec{r} = x_0\,\hat{i} + y_0\,\hat{j} + z_0\,\hat{k} \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (x_0\,\hat{i} + y_0\,\hat{j} + z_0\,\hat{k}) \times (F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = {} & x_0 F_x\,\hat{i}\times\hat{i} + x_0 F_y\,\hat{i}\times\hat{j} + x_0 F_z\,\hat{i}\times\hat{k} \\ & + y_0 F_x\,\hat{j}\times\hat{i} + y_0 F_y\,\hat{j}\times\hat{j} + y_0 F_z\,\hat{j}\times\hat{k} \\ & + z_0 F_x\,\hat{k}\times\hat{i} + z_0 F_y\,\hat{k}\times\hat{j} + z_0 F_z\,\hat{k}\times\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \hat{i}\times\hat{i}=0 & \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \\ \hat{j}\times\hat{j}=0 & \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \\ \hat{k}\times\hat{k}=0 & \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = {} & (y_0 F_z - z_0 F_y)\,\hat{i} \\ & - (x_0 F_z - z_0 F_x)\,\hat{j} \\ & + (x_0 F_y - y_0 F_x)\,\hat{k} \end{aligned}$$

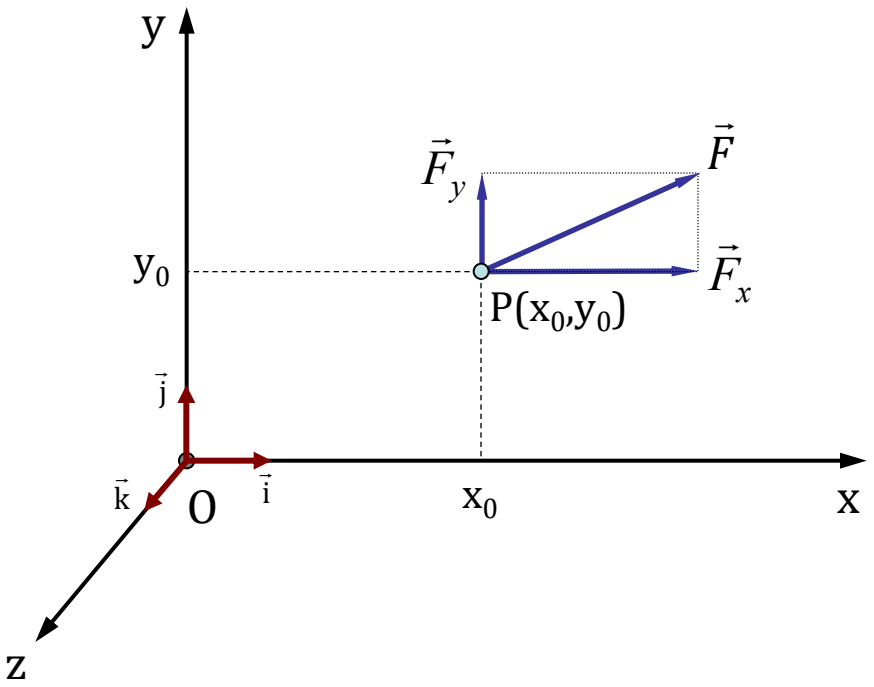
Γραφή σε μορφή ορίζουσας

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ειδική Περίπτωση: Υπολογισμός ροπής δύναμης που βρίσκεται στο επίπεδο XY



Συνιστώσες της F: F_x, F_y

- Ροπή της F_y: $+x_0F_y$
- Ροπή της F_x: $-y_0F_x$

Συνολικό μέτρο ροπής:

$$\tau = x_0 F_y - y_0 F_x$$

με κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα z.

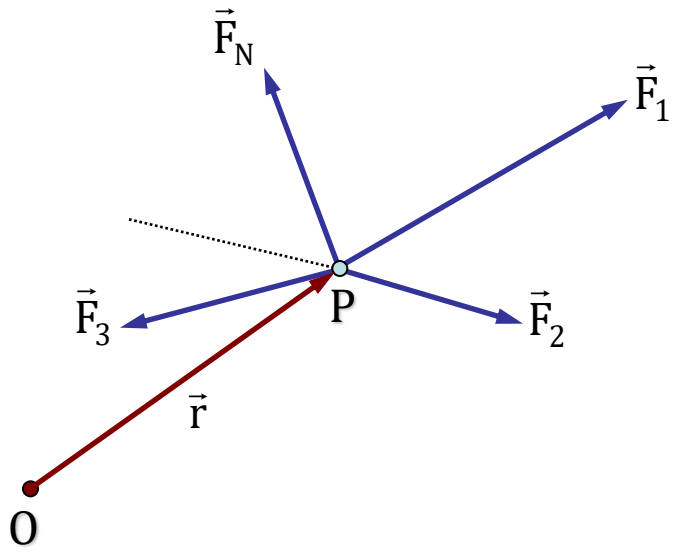
Με βάση τον διανυσματικό ορισμό της ροπής

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_0 & y_0 & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (x_0 F_y - y_0 F_x)\hat{k}$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΡΟΠΗ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Υπολογισμός ροπής πολλών δυνάμεων ως προς το σημείο Ο, όταν αυτές έχουν κοινό σημείο εφαρμογής (συντρέχουσες)



$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots + \vec{\tau}_N$$

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots + \vec{\tau}_N \\ &= \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \vec{r}\times\vec{F}_3 + \cdots + \vec{r}\times\vec{F}_N \\ &= \vec{r}\times\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N\right) \\ &= \vec{r}\times\vec{R}\end{aligned}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{R}$$

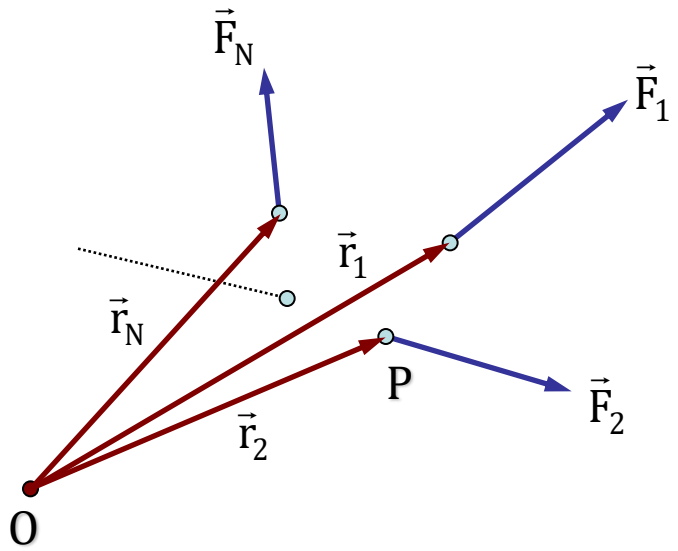
Η συνισταμένη δύναμη μπορεί να αντικαταστήσει ένα σύστημα συντρεχουσών δυνάμεων σε ένα σώμα: *Επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα αναφορικά με μετατοπίσεις και περιστροφές.*

$\vec{R}$: Συνισταμένη των συντρεχουσών

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΡΟΠΗ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Προσοχή! Εάν οι δυνάμεις δεν έχουν κοινό σημείο εφαρμογής (δεν είναι συντρέχουσες) τότε η συνισταμένη τους δεν επιφέρει ισοδύναμα αποτελέσματα.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots + \vec{\tau}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Longrightarrow \text{Μετατόπιση}$$

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i \Longrightarrow \text{Περιστροφή}$$

Επειδή κατά κανόνα τα διανύσματα $\vec{R}$ και $\vec{\tau}$ δεν είναι κάθετα μεταξύ τους, δεν διασφαλίζεται η ικανοποίηση της σχέσης

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R}$$

για κάποιο ζητούμενο $\vec{r}$.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΣΥΝΟΨΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ & ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Εσωτερικό Γινόμενο: Πόσο συνευθειακά είναι τα δύο διανύσματα; Πόσο συμβάλλουν στην τιμή του παράγωγου (βαθμωτού) φυσικού μεγέθους;

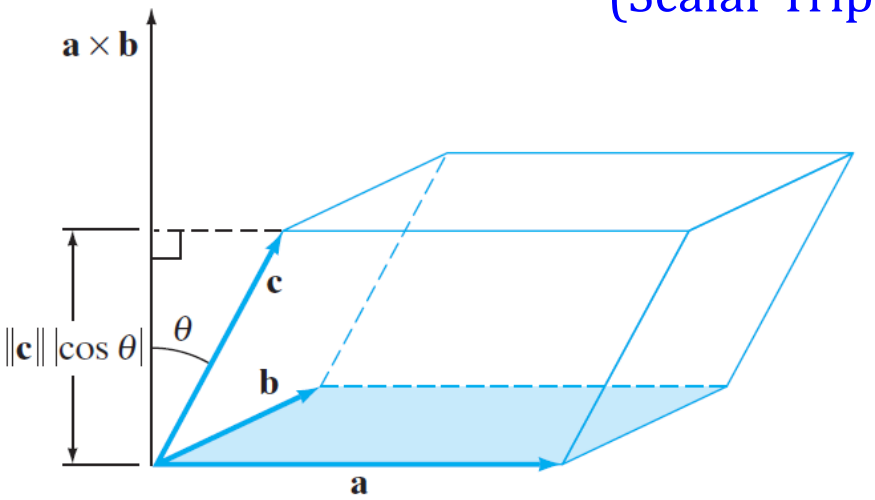
Εξωτερικό Γινόμενο: Πόση επιφάνεια σχηματίζουν τα δύο διανύσματα και ποια είναι η τάση τους να προκαλέσουν περιστροφή;

Ιδιότητα	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\vec{a} \times \vec{b}$
Αποτέλεσμα Γινομένου	Βαθμωτό Μέγεθος	Διάνυσμα
Τι εκφράζει;	Προβολή / Συνιστώσα κατά μήκος	Εμβαδόν παραλληλογράμμου / Προσανατολισμένο επίπεδο
Μεγιστοποίηση	Όταν είναι παράλληλα ($\cos 0° = 1$)	Όταν είναι κάθετα ($\sin 90° = 1$)
Παράγωγα Μεγέθη	Έργο, Ενέργεια, Ροή πεδίου	Ροπή, Στροφορμή, Δυνάμεις εκτροπής
Αντιμεταθετικότητα	ΝΑΙ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	ΟΧΙ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΒΑΘΜΩΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

(Scalar Triple Product)



Ορίζεται σαν το μεικτό γινόμενο:

$$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

και είναι ένα **βαθμωτό** μέγεθος.

$$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

Γεωμετρική σημασία του Τριπλού Γινομένου

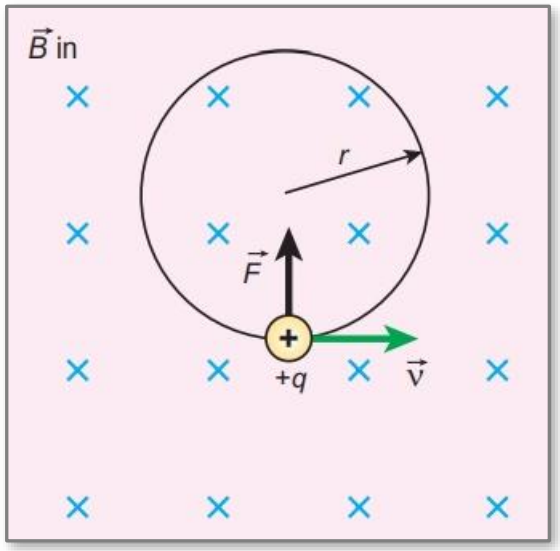
$$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left|\vec{c}\right|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cos\theta=\left(\left|\vec{c}\right|\cos\theta\right)\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left(\left|\vec{c}\right|\cos\theta\right)E=V$$

Το τριπλό γινόμενο διανυσμάτων ισούται με τον **όγκο** του αντίστοιχου παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα τρία διανύσματα.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΒΑΘΜΩΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έργο που παράγεται από κινούμενο φορτίο μέσα σε στατικό μαγνητικό πεδίο (Δύναμη Lorentz).



Ορισμός Δύναμης Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Ισχύς (Έργο/Χρόνος) Δύναμης Lorentz

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}$$

Άρα η ισχύς της δύναμης Lorentz εκφράζεται από το παραπάνω τριπλό γινόμενο:

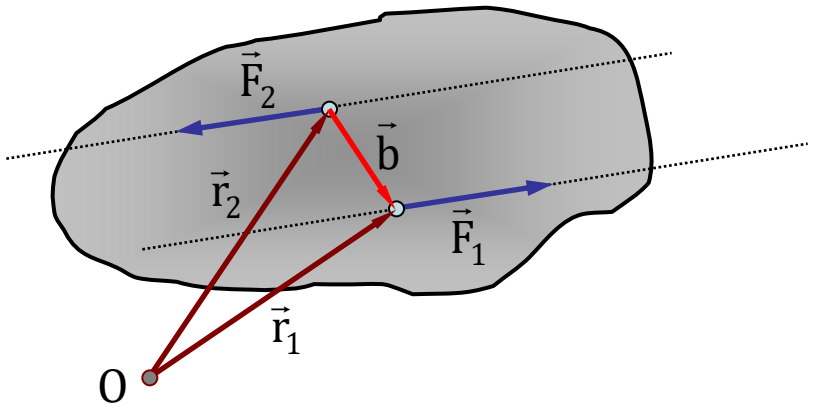
$$P = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v} = q \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0$$

Ένα στατικό μαγνητικό πεδίο **δεν μπορεί** ποτέ να μεταβάλει την κινητική ενέργεια ενός φορτίου. Μπορεί μόνο να αλλάξει την πορεία του.

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ζεύγος Δυνάμεων: Σύστημα δύο ίσων κατά μέτρο αλλά με αντίθετη φορά δυνάμεων με παράλληλες διευθύνσεις.



Συνισταμένη Δύναμη

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Άρα, το ζεύγος δυνάμεων δεν προκαλεί μεταφορική κίνηση.

- *Η ροπή του ζεύγους είναι ανεξάρτητη από το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζεται η ροπή.*

- *Δεν μπορεί να βρεθεί μια δύναμη που να αντικαθιστά το ζεύγος δυνάμεων.*

Ασκούμενη Ροπή

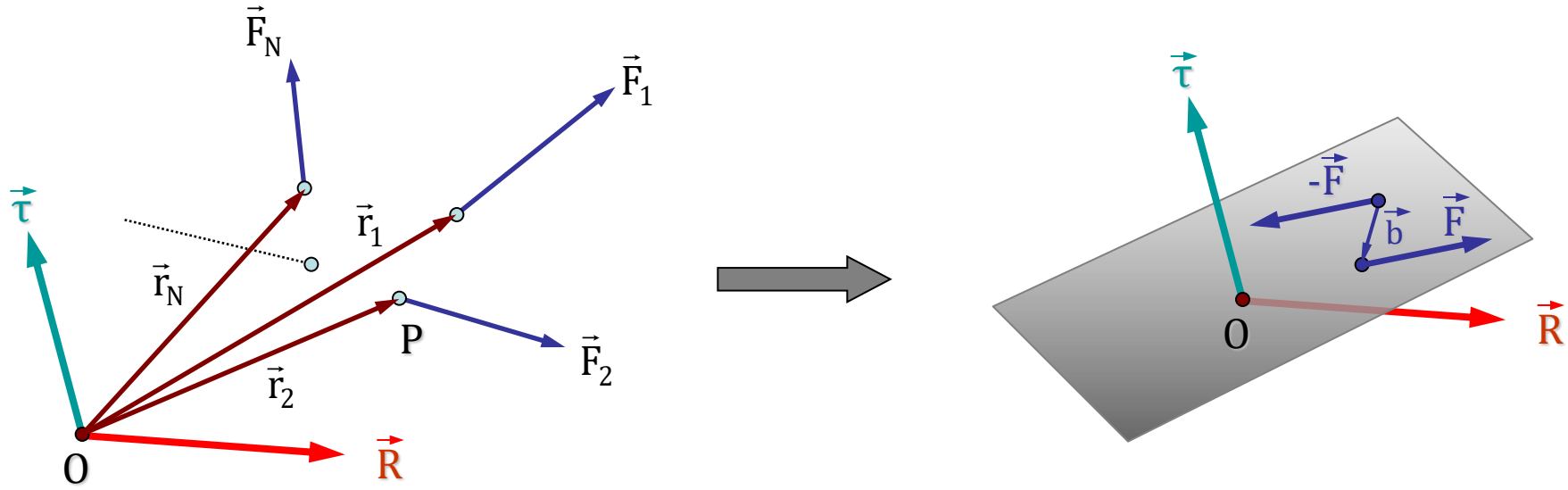
$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$
$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$
$$= \vec{b} \times \vec{F}_1$$

$$\vec{\tau} = \vec{b} \times \vec{F}_1$$

© E. Stiliaris, UoA 2026

ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ένα σύστημα πολλών δυνάμεων μπορεί πάντα να αντικατασταθεί με μια δύναμη και ένα ζεύγος δυνάμεων.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots + \vec{\tau}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{b} \times \vec{F}$$

- Η συνισταμένη δύναμη R διέρχεται από το σημείο υπολογισμού της ροπής O, ώστε να μην συνεισφέρει στην ροπή.
- Το ζεύγος δυνάμεων τοποθετείται σε επίπεδο κάθετο στην συνολική ροπή τ.

© E. Stiliaris, UoA 2026