

Κεφάλαιο 2

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

- ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ {Μέση και Στιγμιαία Ταχύτητα και Επιτάχυνση, Διαφορικές & Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Κίνησης, Σταθερή Επιτάχυνση, Κατακόρυφη Ρίψη}
- ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ {Διάνυσμα Θέσης, Μετατόπιση, Διανυσματικός Ορισμός Ταχύτητας και Επιτάχυνσης, Καμπυλόγραμμη Κίνηση, Εφαπτομενική και Κάθετη Συνιστώσα της Επιτάχυνσης}
- ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ {Πολικές Συντεταγμένες, Ταχύτητα και Επιτάχυνση Καμπυλόγραμμης Κίνησης, Παραμετρικές Εξισώσεις, Εξισώσεις Τροχιάς, Κυκλική Κίνηση, Κίνηση Βλημάτων}

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγεται με διαφόριση η έννοια της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Η ευθύγραμμη κίνηση σε μια κατεύθυνση εξετάζεται με τις διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις κίνησης και γίνεται ειδική αναφορά σε προβλήματα με σταθερή επιτάχυνση, όπως της κατακόρυφης ρίψης αντικειμένων χωρίς τριβές στο βαρυτικό πεδίο. Η εξέταση της κίνησης σε τρεις διαστάσεις γενικεύεται με την εισαγωγή του διανύσματος θέσης και των αντίστοιχων παραγώγων του για την θεμελίωση της γενικευμένης έννοιας της ταχύτητας και επιτάχυνσης στο χώρο για δεδομένη τροχιά.

Εξετάζεται σε γενικευμένη μορφή η καμπυλόγραμμη κίνηση με εισαγωγή του μοναδιαίου εφαπτομενικού και κάθετου διανύσματος στην τροχιά. Παράλληλα, αναπτύσσονται οι εξισώσεις επίπεδης κίνησης σε πολικές συντεταγμένες με την εισαγωγή των αντίστοιχων μοναδιαίων διανυσμάτων. Όλες οι προηγούμενες έννοιες εξειδικεύονται στην κυκλική κίνηση υλικού σημείου στο επίπεδο και παρουσιάζεται ο συσχετισμός των γενικευμένων μοναδιαίων διανυσμάτων με των αντίστοιχων πολικών συντεταγμένων. Τέλος, δίνεται η ανεξαρτησία των κινήσεων στην πλάγια βολή με την πληθώρα των γνωστών προβλημάτων της.

2.1 Ευθύγραμμη Κίνηση

ΑΣΚΗΣΗ 2.1

Σώμα κινείται στον άξονα των x σύμφωνα με την εξίσωση $x = 2t^3 + 5t^2 + 5$, όπου το x δίνεται σε μέτρα (m) και το t σε δευτερόλεπτα (s). Να βρεθούν: (α) Η ταχύτητα $v(t)$ και η επιτάχυνση $a(t)$ του σώματος. (β) Η μέση ταχύτητα v_{av} και μέση επιτάχυνση a_{av} στο χρονικό διάστημα από $t = 2s$ μέχρι $t = 3s$.

Λύση

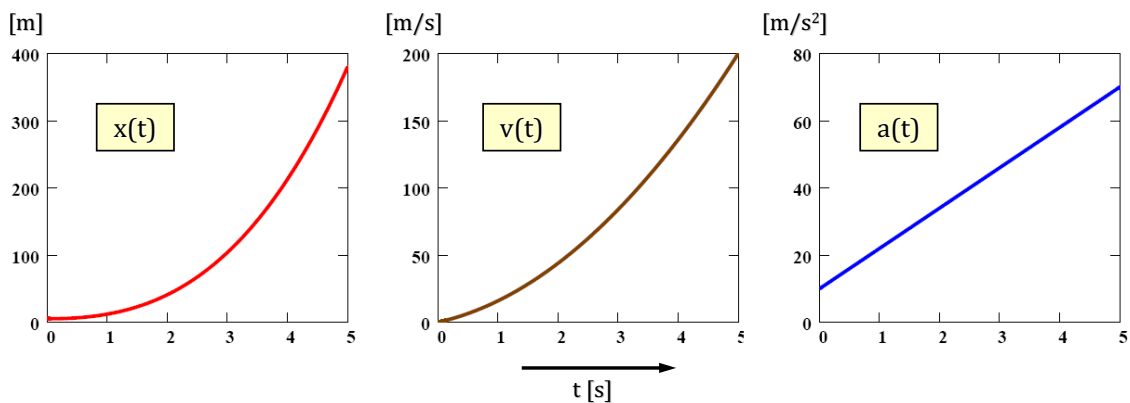
Πρόκειται για μια απλή περίπτωση ευθύγραμμης κίνησης, όπου η θέση του κινητού εκφράζεται άμεσα ως συνάρτηση του χρόνου.

(α) Με συνεχείς παραγωγίσεις λαμβάνουμε:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^3 + 5t^2 + 5) = 6t^2 + 10t \quad (m/s)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(6t^2 + 10t) = 12t + 10 \quad (m/s^2)$$

Οι παραστάσεις των τριών αυτών κινηματικών μεταβλητών συναρτήσει του χρόνου δίνονται στα παρακάτω γραφήματα.



(β) Οι ζητούμενες μέσες τιμές ταχύτητας και επιτάχυνσης υπολογίζονται:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(3) - v(2)}{3 - 2} = \frac{84 - 44}{1} = 40 \text{ m/s}^2$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(3) - x(2)}{3 - 2} = \frac{104 - 41}{1} = 63 \text{ m/s}$$

Συγκριτικά, οι τιμές των μεγεθών αυτών για το μέσο $t = (2 + 3)/2 = 2.5 \text{ s}$ είναι $a(t = 2.5) = 40 \text{ m/s}^2$ και $v(t = 2.5) = 62.5 \text{ m/s}$. Πώς δικαιολογείται το ότι $a_{av}(\Delta t = t_2 - t_1) = a[(t_1 + t_2)/2]$;

ΑΣΚΗΣΗ 2.2

Η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από τη σχέση $a = (4 - t^2) \text{ m/s}^2$. Υπολογίστε την ταχύτητα και το διάστημα που διανύει το σώμα σαν συνάρτηση του χρόνου, αν γνωρίζουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 3\text{s}$ ισχύει $v = 2 \text{ m/s}$ και $x = 9\text{m}$.

Λύση

Για την εύρεση της ταχύτητας:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t (4 - t^2) dt \Rightarrow v - v_0 = 4t - \frac{t^3}{3}$$

Κάνοντας χρήση της δοσμένης συνθήκης $v(3) = 2$ παίρνουμε: $2 = v_0 + 4 \cdot 3 - 3^3/3$, άρα $v_0 = -1$ και κατά συνέπεια:

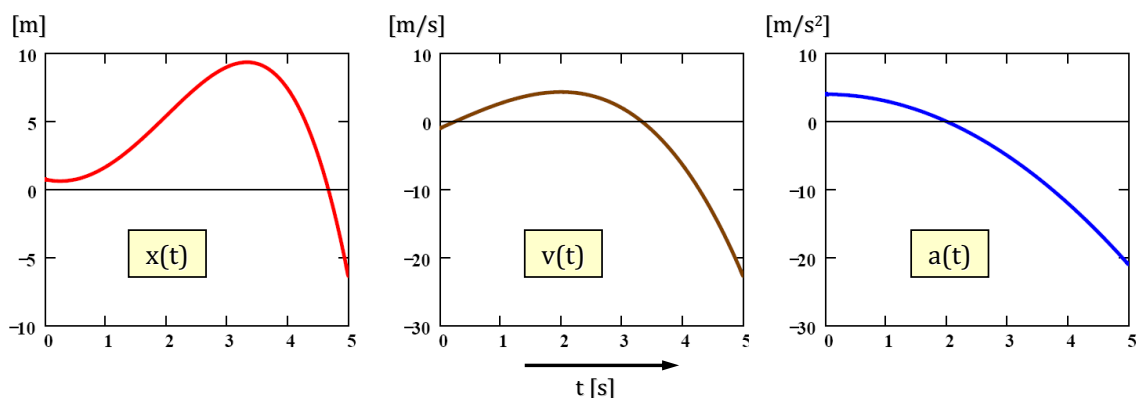
$$v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t - 1$$

Ομοίως για το διάστημα:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left(-\frac{1}{3}t^3 + 4t - 1\right) dt \Rightarrow x - x_0 = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 - t$$

και επειδή $x(3) = 9$ συνάγεται $x_0 = 3/4$, οπότε: $x(t) = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 - t + \frac{3}{4}$

Οι γραφικές παραστάσεις των κινηματικών συναρτήσεων απόστασης, ταχύτητας και επιτάχυνσης δίνονται αντίστοιχα στο παρακάτω σχήμα.



ΑΣΚΗΣΗ 2.3

Στην ευθύγραμμη κίνηση σώματος γνωρίζουμε την εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο, η οποία δίνεται από τη σχέση $v(t) = (3t^2 - 4) \text{ m/s}$. Εάν γνωρίζουμε πως για $t = 0 \text{ s}$ το κινητό διέρχεται από το σημείο $x = 0 \text{ m}$, να βρεθεί εάν το κινητό μπορεί να περάσει ξανά από το σημείο $x = 0 \text{ m}$ και με ποια ταχύτητα και επιτάχυνση;

Λύση

Είναι προφανές πως θα χρειαστεί να εκφράσουμε τη θέση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου για τη δοσμένη κίνηση. Δεδομένου πως η ταχύτητα έχει τετραγωνική εξάρτηση από το χρόνο, αναμένεται η θέση να είναι κυβικά εξαρτώμενη απ' αυτόν.

Έτσι, από την εξίσωση της ταχύτητας με ολοκλήρωση λαμβάνουμε:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t (3t^2 - 4) dt \Rightarrow x - x_0 = t^3 - 4t$$

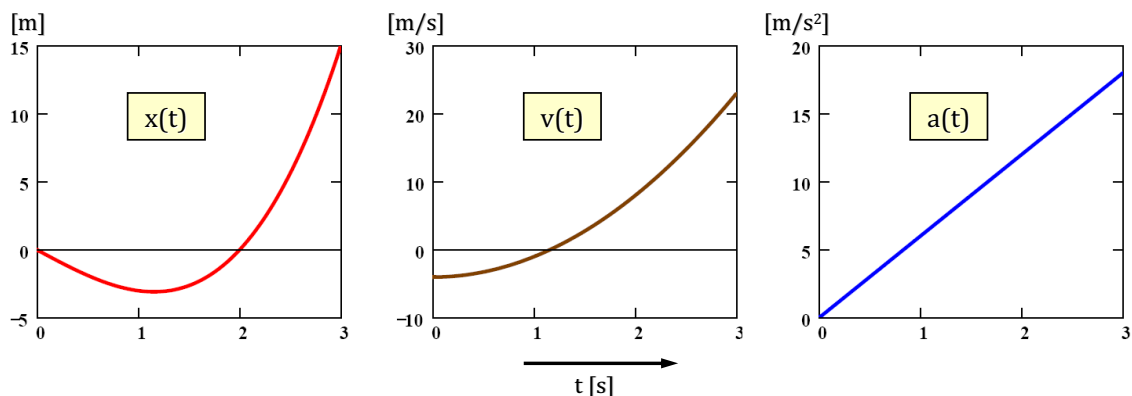
και δεδομένου ότι $x(t = 0) = 0$ πρέπει $x_0 = 0$, οπότε $x(t) = t^3 - 4t = t(t^2 - 4)$.

Οι ρίζες της τριτοβάθμιας αυτής σχέσης είναι $\{0, +2, -2\}$, άρα είναι προφανές πως για $t = 2 \text{ s}$ (η περίπτωση αρνητικού χρόνου απορρίπτεται) το κινητό διέρχεται ξανά από το $x = 0$ με ταχύτητα $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8 \text{ m/s}$.

Ο υπολογισμός της επιτάχυνσης γίνεται με διαφορίση της ταχύτητας:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 4) = 6t \text{ m/s}^2 \Rightarrow a(t) = 6t \Rightarrow a(t = 2) = 12 \text{ m/s}^2.$$

Οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών αυτών δίνονται στο παρακάτω σχήμα:



ΑΣΚΗΣΗ 2.4

Σώμα κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a = 12\sqrt{x} \text{ ms}^{-2}$. Εάν γνωρίζουμε ότι για $t = 0 \text{ s}$ ισχύει $v = 32 \text{ m/s}$ και $x = 16 \text{ m}$, να υπολογιστούν οι κινηματικές εξισώσεις του διαστήματος, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Στην άσκηση αυτή η επιτάχυνση δίνεται σαν **συνάρτηση της απόστασης**, οπότε χρειάζεται προετοιμασία των διαφορικών πριν την ολοκλήρωση. Γνωρίζουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} dv = a dt \\ v = dx/dt \end{array} \right\} \Rightarrow v dv = a \frac{dx}{dt} dt \Rightarrow v dv = a dx$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα η παραπάνω σχέση με ολοκλήρωση δίνει:

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x 12x^{1/2} dx \Rightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = 16 \frac{2}{3} (x^{3/2} - x_0^{3/2}) \Rightarrow v^2 = 16x^{2/3} + (v_0^2 - 16x_0^{3/2})$$

$$\Rightarrow v^2 = 16x^{3/2} + C$$

Η σταθερά C υπολογίζεται από τη συνθήκη $[x = 16, v = 32]$, η οποία δίνει

$$32^2 = 16 \cdot 16^{3/2} + C \Rightarrow 2^{10} = 2^4 \cdot 2^6 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{v = 4x^{3/4}}$$

Συνεχίζοντας την ολοκλήρωση παίρνουμε:

$$v = 4x^{3/4} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4x^{3/4} \Rightarrow \frac{dx}{4x^{3/4}} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{1}{4} x^{-3/4} dx = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow x^{1/4} - x_0^{1/4} = t \Rightarrow x^{1/4} = t + x_0^{1/4} \Rightarrow x^{1/4} = t + C$$

Η σταθερά υπολογίζεται πάλι από τα δεδομένα $[t = 0, x = 16]$, οπότε

$$16^{1/4} = 0 + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \boxed{x = (t + 2)^4}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το διάστημα σαν συνάρτηση του χρόνου. Οι ζητούμενες εκφράσεις της ταχύτητας και επιτάχυνσης μπορούν εύκολα πλέον να υπολογισθούν με επάλληλες παραγωγίες:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t + 2)^4 \Rightarrow \boxed{v(t) = 4(t + 2)^3}$$

και αντίστοιχα

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}4(t + 2)^3 \Rightarrow \boxed{a(t) = 12(t + 2)^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.5

Σώμα κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση η οποία περιγράφεται συναρτήσει της θέσης του από τη σχέση $a = 4x$ σε μονάδες m/s^2 . Εάν τη χρονική στιγμή $t = 0\text{ s}$ ισχύει $v_0 = 2\text{ m/s}$ και $x_0 = 1\text{ m}$, να υπολογιστούν οι κινηματικές εξισώσεις του διαστήματος, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα ισχύει η σχέση $v dv = a dx$, η οποία με την ολοκλήρωση δίνει:

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x 4x dx \Rightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = 2(x^2 - x_0^2) \Rightarrow v^2 = 4x^2 + (v_0^2 - 4x_0^2) = 4x^2 + (2^2 - 4 \cdot 1)$$

$$\boxed{v = 2x}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x \Rightarrow \frac{dx}{2x} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{1}{2x} dx = \int_{t_0}^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = 2(t - t_0) \Rightarrow \ln x = 2t$$

$$\boxed{x(t) = e^{2t}}$$

Από την εξίσωση αυτή του διαστήματος συναρτήσει του χρόνου προκύπτουν εύκολα οι εξισώσεις της ταχύτητας και επιτάχυνσης:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v(t) = 2e^{2t}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a(t) = 4e^{2t}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα είναι προφανής η επαλήθευση της σχέσης $a = 4x$ που δίδεται ως δεδομένο στο πρόβλημα.

ΑΣΚΗΣΗ 2.6

Σε ευθύγραμμη κίνηση κατά τον άξονα x , η ταχύτητα ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση $v = 2\sqrt{x}$. Να βρεθούν οι κινηματικές εξισώσεις του σωματιδίου αυτού, γνωρίζοντας πως για $t = 0\text{ s}$ ισχύει $x_0 = 1\text{ m}$.

Λύση

Επειδή η ταχύτητα του σωματιδίου δίνεται συναρτήσει της θέσης, συνθέτουμε πρώτα την απλή διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνησή του:

$$v = 2\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{x^{-1/2}}{2} dx = \int_0^t dt \Rightarrow x^{1/2} - x_0^{1/2} = t$$

$$\Rightarrow x^{1/2} - 1 = t \Rightarrow x = (t+1)^2 \Rightarrow \boxed{x = (t+1)^2}$$

Συνεχίζοντας τη διαφορίση βρίσκουμε:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[(t+1)^2] = 2(t+1) \Rightarrow \boxed{v = 2(t+1)}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[2(t+1)] = 2 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.7

Η επιτάχυνση σωματιδίου κινουμένου ευθύγραμμα περιγράφεται από τη σχέση $a = -kv^2$, όπου k θετική σταθερά. Εάν οι αρχικές τιμές ($t = 0$) για τη θέση και την ταχύτητα του κινητού είναι αντίστοιχα x_0 και v_0 , να εκφραστεί η θέση του κινητού συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Στην άσκηση αυτή η επιτάχυνση δίνεται σαν **συνάρτηση της ταχύτητας**. Κάνοντας χρήση του ορισμού της επιτάχυνσης και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$a = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -kdt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{1}{v^2} dv = \int_0^t -kdt \Rightarrow -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -kt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt = \frac{1 + kv_0 t}{v_0} \Rightarrow \boxed{v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}}$$

$$v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + kv_0 t} \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t \frac{v_0}{1 + kv_0 t} dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \frac{1}{kv_0} \int_0^t \frac{v_0}{1 + kv_0 t} d(1 + kv_0 t) \Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0 t)$$

$$\boxed{x = x_0 + \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0 t)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.8

Σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα και η ταχύτητά του περιγράφεται από τη σχέση $v = 3t\sqrt[3]{x}$. Να εκφραστεί η θέση και η ταχύτητα του κινητού αυτού συναρτήσει του χρόνου μόνο. Δίνεται πως τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

Λύση

Η δοσμένη έκφραση της ταχύτητας εμπεριέχει τόσο το χρόνο αλλά και τη θέση του κινητού. Προσπαθούμε να αναλύσουμε τη σχέση αυτή σε διαφορική μορφή, ώστε να διαχωριστούν οι υπεισερχόμενες μεταβλητές:

$$\begin{aligned} v = 3t\sqrt[3]{x} &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3tx^{1/3} \Rightarrow \frac{dx}{x^{1/3}} = 3tdt \Rightarrow \int_{x_0=0}^x x^{-1/3} dx = \int_0^t 3tdt \\ &\Rightarrow \frac{3}{2}x^{2/3} = \frac{3}{2}t^2 \Rightarrow \boxed{x = t^3} \end{aligned}$$

Οπότε και η ταχύτητα του κινητού ως συνάρτηση μόνο του χρόνου είναι:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}t^3 \Rightarrow \boxed{v = 3t^2}$$

Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα επαληθεύει την εκφώνηση της άσκησης, βάσει της οποίας ισχύει $v = 3t^2 = 3t\sqrt[3]{x}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2.9

Ένα αντικείμενο, αρχικά ακίνητο, πέφτει διανύοντας απόσταση h . Αν διανύει $0.50h$ στο τελευταίο $1.00s$, να βρείτε (α) το χρόνο και (β) το ύψος της πτώσης του. (γ) Να ερμηνεύσετε την φυσικά μη αποδεκτή λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως προς t που βρίσκετε.

Λύση

(α) Δεδομένου ότι η αρχική ταχύτητα της ελεύθερης πτώσης είναι $v_0 = 0$ η κίνηση κατά την κατακόρυφο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2$$

Βασιζόμενοι στα δεδομένα της άσκησης, εάν για $y = -h$ το σώμα χρειάζεται χρόνο t , τότε για $y = -0.50h$ το σώμα τα χρειάζεται χρόνο $(t - 1)s$. Δηλαδή:

$$\left\{ \begin{array}{l} -0.50h = -\frac{1}{2}g(t-1)^2 \\ -h = -\frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h/2 = \frac{1}{2}g(t-1)^2 \\ h = \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h = g(t-1)^2 \\ h = \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\}$$

Το σύστημα αυτό μας οδηγεί στην δευτεροβάθμια εξίσωση του χρόνου:

$$g(t-1)^2 = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 2(t-1)^2 = t^2 \Rightarrow t^2 - 4t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{2}$$

Επειδή πρέπει $t > 1$, η φυσικά αποδεκτή λύση είναι η $t = 2 + \sqrt{2} \text{ s}$

$$(\beta) h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 9.80 \cdot (2 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow h = 57.1 \text{ m}.$$

(γ) Η φυσικά μη αποδεκτή λύση $t = 2 - \sqrt{2} \text{ s}$ αντιστοιχεί στην κίνηση ενός σώματος που στον χρόνο $(2 - \sqrt{2}) - 1 = 1 - \sqrt{2} = -0.41 \text{ s}$ βρίσκεται στο $0.50h$, ενώ μετά παρέλευση ενός δευτερολέπτου στο h . Αυτό είναι ισοδύναμο με ρίψη του σώματος **προς τα πάνω** από το ύψος $0.50h$ με αρχική ταχύτητα v_0 και άφιξή του στο h μετά από ένα δευτερόλεπτο. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, μπορεί εύκολα να ελεγχθεί πως τα μεγέθη $v_0 = 4.06 \text{ m/s}$ και $h = 1.68 \text{ m}$ αποτελούν μια λύση του προβλήματος, η οποία περιγράφει τη κίνηση ενός σώματος με τις παραπάνω αρχικές συνθήκες, όπου για $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στο ανώτατο ύψος $h = 1.68 \text{ m}$ με μηδενική ταχύτητα.

ΑΣΚΗΣΗ 2.10

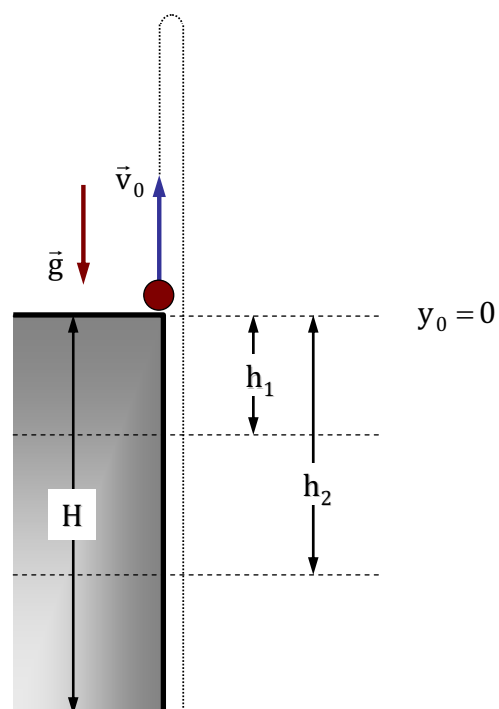
Πειραματιστής ρίχνει από την άκρη ταράτσας πολυκατοικίας ύψους $H = 24 \text{ m}$ κατακόρυφα προς τα πάνω μικρή μπάλα με αρχική ταχύτητα v_0 τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$. Έχοντας συγχρονίσει τα χρονόμετρά τους, παρατηρητές απέχοντες $\Delta h = 10 \text{ m}$ και ευρισκόμενοι στα παράθυρά τους βλέπουν τη μπάλα να περνά με κατεύθυνση προς τα κάτω με χρονική καθυστέρηση $\Delta t = t_2 - t_1 = 0.8 \text{ s}$ ο δεύτερος από τον πρώτο. Σε ποιο ύψος βρίσκονται οι παρατηρητές, εάν είναι γνωστό πως η μπάλα φτάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_3 = 3 \text{ s}$; Αγνοείστε την αντίσταση του αέρα. Δίδεται $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.

Λύση

Έστω ότι οι δύο παρατηρητές βρίσκονται σε απόσταση h_1 και h_2 από την ταράτσα της πολυκατοικίας. Θεωρώντας το σημείο ρίψης της μπάλας ως την αρχή του άξονα y , τότε για τη μονοδιάστατη κίνηση κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα y έχουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} -h_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \\ -h_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 \\ -H = v_0 t_3 - \frac{1}{2}gt_3^2 \end{cases}$$

Από την τρίτη εξίσωση είναι δυνατόν να υπολογισθεί η αρχική ταχύτητα του σώμα-



τος:

$$-H = v_0 t_3 - \frac{1}{2} g t_3^2 \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2} g t_3 - \frac{H}{t_3} \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2} 9.80 \cdot 3 - \frac{24}{3} \Rightarrow v_0 = 6.7 \text{ m/s}^2$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} -h_1 + h_2 &= v_0(t_1 - t_2) - \frac{1}{2} g(t_1^2 - t_2^2) \Rightarrow \Delta h = -v_0 \Delta t - \frac{1}{2} g(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) \\ \Rightarrow \Delta h &= -v_0 \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t (2t_1 + \Delta t) \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \Delta t + \Delta h}{g \Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \end{aligned}$$

απ' όπου με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$t_1 = \frac{6.7 \cdot 0.8 + 10.0}{9.80 \cdot 0.8} - \frac{0.8}{2} \Rightarrow t_1 = 1.56 \text{ s}$$

και αντίστοιχα $t_2 = 2.36 \text{ s}$. Οι χρονικές αυτές τιμές προσδιορίζουν τις απόλυτες αποστάσεις:

$$-h_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow h_1 = -6.7 \cdot 1.56 + 1/2 \cdot 9.80 \cdot 1.56^2 \Rightarrow \boxed{h_1 = 1.47 \text{ m}}$$

$$-h_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow h_2 = -6.7 \cdot 2.36 + 1/2 \cdot 9.80 \cdot 2.36^2 \Rightarrow \boxed{h_2 = 11.47 \text{ m}}$$

2.2 Διανυσματικός Ορισμός Κίνησης

ΑΣΚΗΣΗ 2.11

Σωματίδιο κινείται έτσι ώστε η θέση του (σε μέτρα) ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα) να είναι $\vec{r} = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$. Να γράψετε (α) τις εκφράσεις για την ταχύτητά του και την επιτάχυνσή του ως συνάρτηση του χρόνου (β) την εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου.

(Άσκηση 4.11 Halliday-Resnick)

Λύση

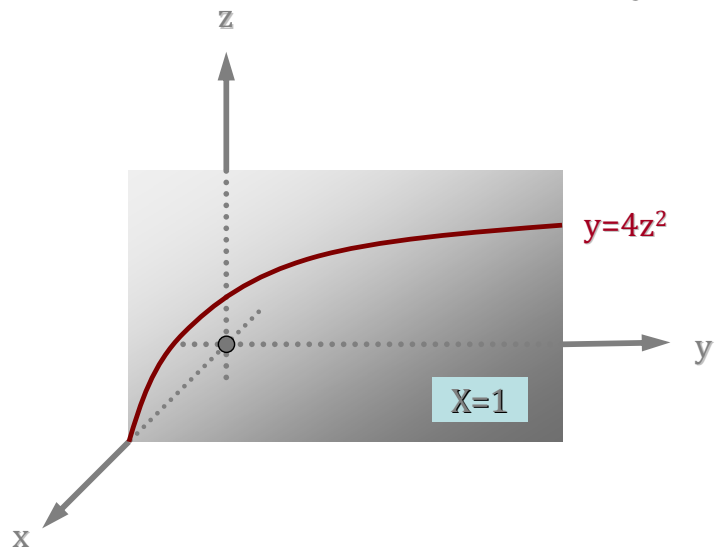
(α) Διανυσματικές εξισώσεις ταχύτητας & επιτάχυνσης:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = 8t\hat{j} + \hat{k}}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(8t\hat{j} + \hat{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}(t) = 8\hat{j}}$$

(β) Εξίσωση τροχιάς:

Καθώς η επιτάχυνση $\vec{a}(t) = 8\hat{j}$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου (σταθερή) και το x παραμένει σταθερό, η τροχιά θα είναι παραβολή στο επίπεδο (yz) κάθετο στον άξονα των x στην τιμή $x = 1$. Το επίπεδο αυτό παρίσταται στο σχήμα ως $X = 1$. Η εξίσωση της τροχιάς σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης είναι:



$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 1 \\ y(t) = 4t^2 \\ z(t) = t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4z^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4z^2 \end{array}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.12

Οι συντεταγμένες της θέσης ενός κινητού δίνονται από τις εξισώσεις: $x(t) = 3\cos(t)$, $y(t) = 3\sin(t)$ και $z(t) = 2t^2$ σε μονάδες SI. Να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα της επιτάχυνσης έχει σταθερό μέτρο. Μπορείτε να περιγράψετε τι είδους κίνηση εκτελεί το κινητό;

Λύση

Αρχικά υπολογίζεται η ταχύτητα και μέσω αυτής η επιτάχυνση:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{d}{dt}[3\cos(t)] \\ v_y = \frac{d}{dt}[3\sin(t)] \\ v_z = \frac{d}{dt}(2t^2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = -3\sin(t) \\ v_y = +3\cos(t) \\ v_z = 4t \end{array} \right\}$$

Κατά συνέπεια:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{d}{dt}[-3\sin(t)] \\ a_y = \frac{d}{dt}[+3\cos(t)] \\ a_z = \frac{d}{dt}(4t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_x = -3\cos(t) \\ a_y = -3\sin(t) \\ a_z = 4 \end{array} \right\}$$

οπότε το μέτρο της επιτάχυνσης είναι

$$a = \sqrt{[-3\cos(t)]^2 + [-3\sin(t)]^2 + 4^2} = \sqrt{3^2[\cos^2(t) + \sin^2(t)] + 4^2} \Rightarrow \boxed{a = 5 \text{ ms}^{-2}}$$

Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις της θέσης του κινητού $x^2 + y^2 = 3^2$, η προβολή της τροχιάς στο επίπεδο (XY) είναι κύκλος ακτίνας $R = 3 \text{ m}$. Το κινητό εκτελεί σ' αυτό το επίπεδο ομαλή κυκλική κίνηση με $v_{xy} = 3 \text{ m/s}$ ενώ κατά την κατεύθυνση z εκτελεί

ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με $a_z = 4 \text{ m/s}^2$. Η συνολική του λοιπόν κίνηση είναι **ελικοειδής** με αυξανόμενο z -βηματισμό (τετραγωνικά) με τον χρόνο.

ΑΣΚΗΣΗ 2.13

Η θέση ενός κινητού περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$, όπου $x(t) = 3t^2 + 5t$, $y(t) = -t^3 + 1$ και $z(t) = 2t$ σε μονάδες SI. Να βρεθούν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης;

Λύση

Η άσκηση αυτή αποτελεί απλή εφαρμογή του διανυσματικού ορισμού της ταχύτητας και της επιτάχυνσης:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 5t)\hat{i} + \frac{d}{dt}(-t^3 + 1)\hat{j} + \frac{d}{dt}(2t)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = (6t + 5)\hat{i} - 3t^2\hat{j} + 2\hat{k}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d}{dt}(6t + 5)\hat{i} + \frac{d}{dt}(-3t^2)\hat{j} + \frac{d}{dt}(2)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = 6\hat{i} - 6t\hat{j}}$$

Παρατηρούμε πως το διάνυσμα της επιτάχυνσης κινείται στο επίπεδο (XY), το δε μέτρο της είναι: $a = \sqrt{6^2 + (6t)^2} = 6\sqrt{1 + t^2}$, προφανώς εξαρτώμενο από τον χρόνο.

2.3 Κίνηση στο Επίπεδο

ΑΣΚΗΣΗ 2.14

Οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίου στο επίπεδο περιγράφονται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = 2t^2 + 3$ και $y(t) = 3t^2 + 1$ στους αντίστοιχους άξονες. Να βρεθούν τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης καθώς και η εξίσωση τροχιάς του κινητού αυτού.

Λύση

Είναι προφανές πως τα x και y έχουν γραμμική εξάρτηση μεταξύ τους, όπως φαίνεται από την απαλοιφή του χρόνου:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 2t^2 + 3 \\ y(t) = 3t^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x(t) = 6t^2 + 9 \\ 2y(t) = 6t^2 + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x - 2y = 7 \Rightarrow \boxed{y = 3/2x - 7/2}$$

Η τροχιά του κινητού είναι συνεπώς μια ευθεία με κλίση $k = 3/2$. Τα διανύσματα της ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι αντίστοιχα:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [(2t^2 + 3)\hat{i} + (3t^2 + 1)\hat{j}] = 4t\hat{i} + 6t\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (4t\hat{i} + 6t\hat{j}) = 4\hat{i} + 6\hat{j}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, η κλίση και των δύο αυτών διανυσμάτων είναι $k = 3/2$, ταυτόσημη δηλαδή με την κλίση της ευθύγραμμης τροχιάς του κινητού. Παρατηρείστε ότι η τετραγωνική εξάρτηση των συντεταγμένων $x(t)$ και $y(t)$ από το χρόνο δίνει σαν αποτέλεσμα σταθερή επιτάχυνση.

ΑΣΚΗΣΗ 2.15

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (xy) και η επιτάχυνσή του περιγράφεται στο σύστημα μονάδων SI από τις εξισώσεις: $\begin{cases} a_x = -2\sin(t) \\ a_y = -3\cos(t) \end{cases}$. Εάν για $t = 0$ ισχύουν $\begin{cases} v_{x0} = 2 \\ v_{y0} = 0 \end{cases}$ και $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 6 \end{cases}$, να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

Λύση

Είναι προφανές πως η εξίσωση τροχιάς θα βρεθεί με επάλληλες ολοκληρώσεις της επιτάχυνσης κάνοντας χρήση των αρχικών συνθηκών:

$$v_x = \int a_x dt = \int [-2\sin(t)] dt = +2\cos(t) + C_1$$

$$v_y = \int a_y dt = \int [-3\cos(t)] dt = -3\sin(t) + C_2$$

Με βάση τις αρχικές συνθήκες της ταχύτητας για $t = 0$ συνάγεται πως $C_1 = 0$ καθώς και $C_2 = 0$. Οπότε:

$$\begin{cases} v_x(t) = +2\cos(t) \\ v_y(t) = -3\sin(t) \end{cases}$$

και κατά συνέπεια

$$x(t) = \int v_x dt = \int [+2\cos(t)] dt = +2\sin(t) + C_1$$

$$y(t) = \int v_y dt = \int [-3\sin(t)] dt = +3\cos(t) + C_2$$

Βάσει των αρχικών συνθηκών προκύπτει $C_1 = 2$ και $C_2 = 3$ οπότε καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2\sin(t) + 2 \\ y = 3\cos(t) + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-2}{2} = \sin(t) \\ \frac{y-3}{3} = \cos(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1}$$

Άρα η εξίσωση τροχιάς είναι έλλειψη με κέντρο $(x_0, y_0) = (2, 3)$ και ημιάξονες $p_x = 2$ και $p_y = 3$ αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ 2.16

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (xy) και για τις συνιστώσες της ταχύτητάς του ισχύει $v_x = 4t^3 + 4t$ m/s, $v_y = 4t$ m/s. Για $t = 0$ s το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $(1, 2)$. Βρείτε την εξίσωση τροχιάς του σωματιδίου.

Λύση

Ολοκλήρωση των συνιστωσών της ταχύτητας δίνει:

$$x(t) = \int (4t^3 + 4t)dt = t^4 + 2t^2 + C_1$$

$$y(t) = \int (4t)dt = 2t^2 + C_2$$

και με βάση τις αρχικές συνθήκες για $t = 0 \rightarrow (x_0, y_0) = (1, 2)$ παίρνουμε $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Οπότε η εξίσωση της τροχιάς είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t^4 + 2t^2 + 1 \\ y(t) = 2t^2 + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = (t^2 + 1)^2 \\ y(t) = 2(t^2 + 1) \end{array} \right\} \Rightarrow x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}y^2}$$

Η τροχιά του σωματιδίου διαγράφει λοιπόν παραβολική τροχιά στο επίπεδο (xy) .

ΑΣΚΗΣΗ 2.17

Το διάνυσμα θέσης κινητού στο επίπεδο (xy) δίνεται από τη σχέση $\vec{r} = at\hat{i} + \beta t^2\hat{j}$, όπου a και β σταθερές. Αφού πρώτα βρεθεί η τροχιά του κινητού, να υπολογισθούν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και να εκφραστεί η μεταξύ των γωνία ϕ συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Για τις συνιστώσες $x(t)$ και $y(t)$ της τροχιάς ισχύουν:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = at \\ y(t) = \beta t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{y} = \frac{a^2}{\beta} \Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{\beta}{a^2}\right) x^2}$$

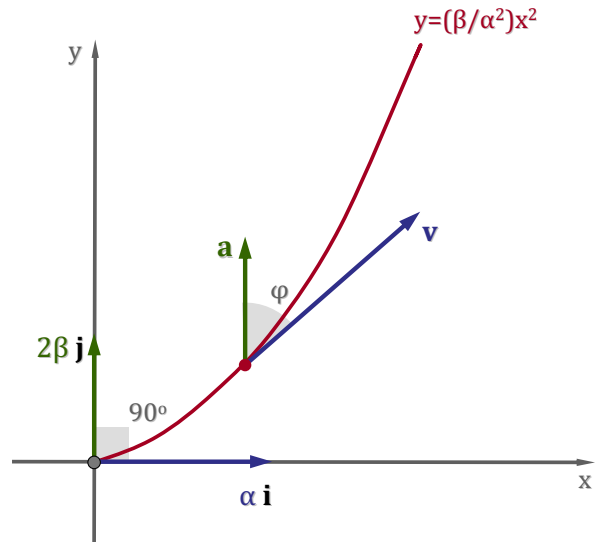
Η τροχιά είναι λοιπόν η παραβολή $y = \lambda x^2$ με σταθερά $\lambda = \beta/a^2$.

Από το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = at\hat{i} + \beta t^2\hat{j}$ υπολογίζονται τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(at\hat{i} + \beta t^2\hat{j}) = a\hat{i} + 2\beta t\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(a\hat{i} + 2\beta t\hat{j}) = 0\hat{i} + 2\beta\hat{j}$$

Παρατηρούμε πως η επιτάχυνση $\vec{a}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα (ανεξάρτητο του χρόνου) με μέτρο 2β κατά την κατεύθυνση y . Αντίθετα, η ταχύτητα $\vec{v}$ έχει μια σταθερή συνιστώσα, μέτρου a , κατά τη κατεύθυνση x και μια χρονοεξαρτώμενη, η οποία είναι ανάλογη του χρόνου με μέτρο $2\beta t$, κατά τη κατεύθυνση y .



Η ζητούμενη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων ταχύτητας και επιτάχυνσης μπορεί να υπολογισθεί εύκολα κάνοντας χρήση του εσωτερικού των γινομένου:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = |\vec{v}| |\vec{a}| \cos\phi \Rightarrow (a\hat{i} + 2\beta t\hat{j}) \cdot (0\hat{i} + 2\beta\hat{j}) = (\sqrt{a^2 + (2\beta t)^2}) (2\beta) \cos\phi$$

$$\Rightarrow 4\beta^2 t = 2\beta \sqrt{a^2 + (2\beta t)^2} \cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{2\beta t}{\sqrt{a^2 + (2\beta t)^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + (a/2\beta t)^2}}} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \boxed{\tan\phi = \frac{a}{2\beta t}}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα φαίνεται πως η γωνία ϕ τείνει στο μηδέν καθώς μεγαλώνει ο χρόνος t της κίνησης ($\cos\phi \rightarrow 1$ ή $\tan\phi \rightarrow 0$). Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς η χρονοεξαρτώμενη συνιστώσα της ταχύτητας $\vec{v}$ είναι κατά την κατεύθυνση y μόνο, οπότε το διάνυσμα της ταχύτητας τείνει να ταυτιστεί με την σταθερή κατεύθυνση του διανύσματος της επιτάχυνσης.

Στην αρχή της κίνησης ($t = 0$) όταν το κινητό βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (το διάνυσμα θέσης γίνεται $\vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j}$ για $t = 0$) τα δύο διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι κάθετα, όπως φαίνεται από τις σχέσεις που προκύπτουν. Κατά συνέπεια, η επιτάχυνση τη στιγμή αυτή είναι εξ' ολοκλήρου κεντρομόλος, δηλαδή:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}(t=0) = a\hat{i} + 0\hat{j} \\ \vec{a}(t=0) = 0\hat{i} + 2\beta\hat{j} \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{a}_N| = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow 2\beta = \frac{a^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{a^2}{2\beta}$$

η ακτίνα καμπυλότητας μπορεί να εκφραστεί μέσω των σταθερών a και β με την παραπάνω απλή σχέση.

ΑΣΚΗΣΗ 2.18

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (xy) με διάνυσμα ταχύτητας $\vec{V}(x, y) = 2\hat{i} + 4x\hat{j}$. Ποια είναι η εξίσωση τροχιάς του και ποια η ακτίνα καμπυλότητας τη χρονική στιγμή $t = 1/4$; Δίνεται η αρχική συνθήκη για $t = 0$ πως $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Λύση

Από την εκφώνηση της άσκησης έχουμε:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} V_x = \frac{dx}{dt} = 2 \\ V_y = \frac{dy}{dt} = 4x \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2t + C (= 0) \\ \frac{dy}{dt} = 4x \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ \frac{dy}{dt} = 8t \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 4t^2 + C (= 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 4t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y = x^2} \end{aligned}$$

Η ζητούμενη τροχιά είναι λοιπόν η παραβολή $y = x^2$. Με βάση τις εξισώσεις της θέσης του κινητού εκπεφρασμένες ως προς τον χρόνο t , παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 4t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_x = 2 \\ V_y = 8t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 8 \end{array} \right\}$$

Για $t = 1/4$ τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης γίνονται αντίστοιχα:

$$\vec{V} = 2\hat{i} + 2\hat{j} \quad \vec{a} = 8\hat{j}$$

Η ακτίνα καμπυλότητας μπορεί να προσδιοριστεί από την κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}_N$ μέσω της σχέσης $a_N = V^2/\rho$. Θα πρέπει λοιπόν να υπολογισθεί πρώτα η κεντρομόλος συνιστώσα. Το μέτρο της επιτροχίας συνιστώσας a_T της επιτάχυνσης προκύπτει από την προβολή της $\vec{a}$ στην κατεύθυνση της ταχύτητας:

$$a_T = \vec{a} \cdot \hat{u}_T = \vec{a} \cdot \vec{V}/V = (8\hat{j}) \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j})/\sqrt{2^2 + 2^2} = 4\sqrt{2}$$

Κατά συνέπεια είναι $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}$ και άρα η ακτίνα καμπυλότητας υπολογίζεται:

$$\rho = V^2/a_N = (2^2 + 2^2)/4\sqrt{2} \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$$

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε εάν χρησιμοποιηθεί η σχέση που έχει αποδειχθεί στη θεωρία για την ακτίνα καμπυλότητας, σύμφωνα με την οποία

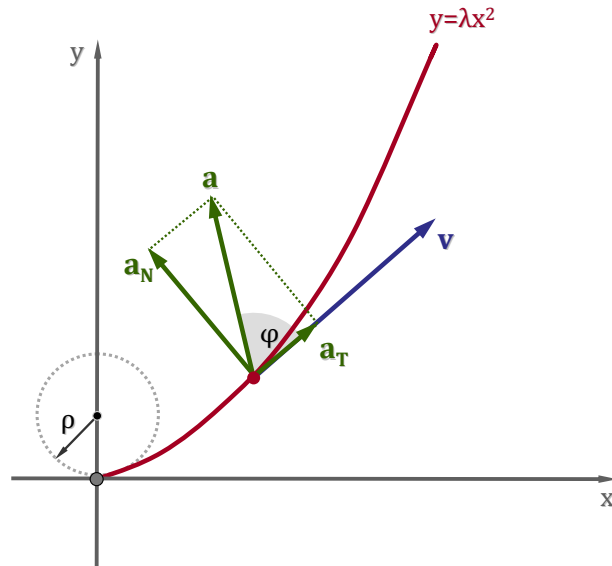
$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{(2^2 + 2^2)^{3/2}}{|16\hat{k}|} = \frac{2^{9/2}}{2^4} = \sqrt{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.19

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (xy) διαγράφοντας την παραβολή $y = \beta x^2$. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση και η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο σημείο $x = 0$.

Λύση

Η άσκηση αυτή διαφοροποιείται από την προηγούμενη, παρ' όλο που η τροχιά τυχαίνει να έχει την ίδια μορφή (παραβολική). Στην παρούσα άσκηση δεν είναι γνωστές οι παραμετρικές εξισώσεις των συντεταγμένων της θέσης. Οπότε, με βάση τον ορισμό της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, θα ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \\ \vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \\ \vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = x\hat{i} + \beta x^2\hat{j} \\ \vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + 2\beta x \frac{dx}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + 2\beta x v_x\hat{j} \\ \vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \left(2\beta \frac{dx}{dt} v_x + 2\beta x \frac{dv_x}{dt} \right) \hat{j} \end{array} \right\}$$

Άρα τελικά η επιτάχυνση μπορεί να γραφεί στην διανυσματική μορφή:

$$\boxed{\vec{a} = a_x\hat{i} + (2\beta v_x^2 + 2\beta x a_x)\hat{j}}$$

Για $x = 0$ είναι $\vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j}$ και τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{a}$ γίνονται αντίστοιχα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = v_x\hat{i} + 0\hat{j} \\ \vec{a} = a_x\hat{i} + 2\beta v_x^2\hat{j} \end{array} \right\}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις παρατηρούμε πως η επιτροχίος συνιστώσα $\vec{a}_T$ της επιτάχυνσης ταυτίζεται με την $\vec{a}_x$ συνιστώσα της (ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα), οπότε η κεντρομόλος είναι: $\vec{a}_N = \vec{a}_y = 2\beta v_x^2\hat{j}$. Άρα θα ισχύει:

$$|\vec{a}_N| = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow 2\beta v_x^2 = \frac{v_x^2}{\rho} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{1}{2\beta}}$$

Παρατηρείστε πως το αποτέλεσμα είναι ταυτόσημο με αυτό της άσκησης 2.17.

ΑΣΚΗΣΗ 2.20

Η κίνηση σωματιδίου πάνω στο επίπεδο (xy) περιγράφεται από το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v} = 2t\hat{i} + 4t^3\hat{j}$. Εάν για $t = 0s$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $(x_0, y_0) = (0, 0)$, να βρείτε τις κινηματικές εξισώσεις του σωματιδίου, να καθορίσετε το είδος της τροχιάς του και να εκφραστεί η ακτίνα καμπυλότητας συναρτήσει του χρόνου κίνησης.

Λύση

Όπως και προηγουμένως (Άσκηση 2.16), ολοκλήρωση των συνιστωσών της ταχύτητας δίνει:

$$x(t) = \int 2t dt = t^2 + C_1$$

$$y(t) = \int (4t^3) dt = t^4 + C_2$$

και με βάση τις αρχικές συνθήκες για $t = 0 \rightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)$ παίρνουμε $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Κατά συνέπεια, η ζητούμενη εξίσωση της τροχιάς είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^4 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y = x^2}$$

Η τροχιά του σωματιδίου διαγράφει λοιπόν παραβολική τροχιά στο επίπεδο (xy) . Επιπρόσθετα, παραγωγή του διανύσματος της ταχύτητας δίνει την επιτάχυνση, οπότε οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου συνοψίζονται στις παρακάτω:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = t^2\hat{i} + t^4\hat{j} \\ \vec{v} = 2t\hat{i} + 4t^3\hat{j} \\ \vec{a} = 2\hat{i} + 12t^2\hat{j} \end{array} \right\}$$

Για την έκφραση της ακτίνας καμπυλότητας χρησιμοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις, όπως αυτές αναπτύχθηκαν στη θεωρία:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = v^2/a_N \\ \vec{v} \times \vec{a} = \vec{v} \times (\vec{a}_T + \vec{a}_N) = \vec{v} \times \vec{a}_N \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = v^2/a_N \\ |\vec{v} \times \vec{a}| = v a_N \end{array} \right\} \Rightarrow \rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

Πρώτα υπολογίζεται λοιπόν το εξωτερικό γινόμενο $\vec{v} \times \vec{a}$:

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2t & 4t^3 & 0 \\ 2 & 12t^2 & 0 \end{vmatrix} = (2t \cdot 12t^2 - 2 \cdot 4t^3) \hat{k} = 16t^3 \hat{k}$$

οπότε η ζητούμενη ακτίνα καμπυλότητας είναι:

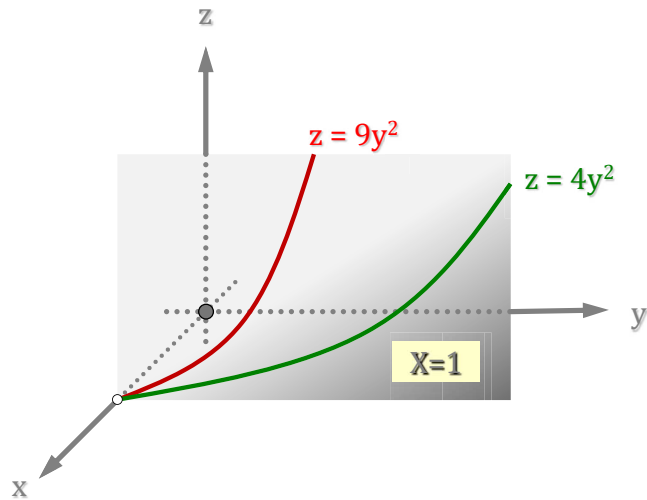
$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{(4t^2 + 16t^6)^{3/2}}{16t^3} = \frac{(4t^2)^{3/2}(1 + 4t^4)^{3/2}}{16t^3} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{(1 + 4t^4)^{3/2}}{2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.21

Σωματίδιο κινείται εκτός βαρυτικού πεδίου, έτσι ώστε η θέση του ως συνάρτηση του χρόνου στο σύστημα $S.I.$ να είναι $\vec{r} = \hat{i} + t\hat{j} + 9t^2\hat{k}$. (α) Να βρεθεί η τροχιά του σωματιδίου. (β) Εάν το σωματίδιο αυτό βρεθεί στο βαρυτικό πεδίο της Γης, όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $\vec{g} = -10\hat{k} \text{ m/s}^2$, με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, να υπολογιστεί εκ νέου η τροχιά του.

Λύση

(α) Εκτός βαρυτικού πεδίου, είναι προφανές πως το σωματίδιο αυτό κινείται σε επίπεδο παράλληλο προς το (yz) και κάθετο στον άξονα x στην τιμή $x = 1$. Το επίπεδο αυτό παρίσταται στο σχήμα ως $X = 1$. Από το διάνυσμα θέσης εύκολα εξάγεται πως η ζητούμενη τροχιά του κινητού είναι παραβολική της μορφής:



$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = 9t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 9y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ z = 9y^2 \end{array}}$$

Με παραγωγή ως προς τον χρόνο βρίσκονται οι κινηματικές του εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = 9t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = 0 \\ v_y = 1 \\ v_z = 18t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = 18 \end{array} \right\}$$

(β) Εντός του βαρυτικού πεδίου της Γης, η κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης θα γίνει $a_z = 18 - 10 = 8$, οπότε ολοκληρώνοντας, λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη τις ίδιες αρχικές συνθήκες, παίρνουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = 0 \\ v_y = 1 \\ v_z = 8t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = 4t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ z = 4y^2 \end{array}}$$

Η εν λόγω κίνηση εκτός πεδίου βαρύτητας, ισοδυναμεί με οριζόντια εκτόξευση σώματος κατά την κατεύθυνση του άξονα y , στο οποίο επιδρά κατακόρυφη (ωστική) δύναμη προς τα πάνω και του προσδίδει επιτάχυνση $a_z = 18 \text{ m/s}^2$. Όταν το σώμα βρίσκεται στο βαρυτικό πεδίο της Γης, η δύναμη της βαρύτητας ελαττώνει την προς τα πάνω επιτάχυνση του σώματος κατά g , αφήνοντας τις αρχικές συνθήκες (σημείο εκτόξευσης και αρχική ταχύτητα) αμετάβλητες.

ΑΣΚΗΣΗ 2.22

Σώμα κινείται στο επίπεδο (xy) διαγράφοντας τροχιά της οποίας οι συντεταγμένες περιγράφονται από τις εξισώσεις $x(t) = a \cos \omega t$ και $y(t) = \beta \sin \omega t$, όπου ω θετική σταθερά. Να βρεθεί η τροχιά του κινητού και να υπολογισθούν οι ακτίνες καμπυλότητας για $\omega t = 0$ καθώς και για $\omega t = \pi/2$.

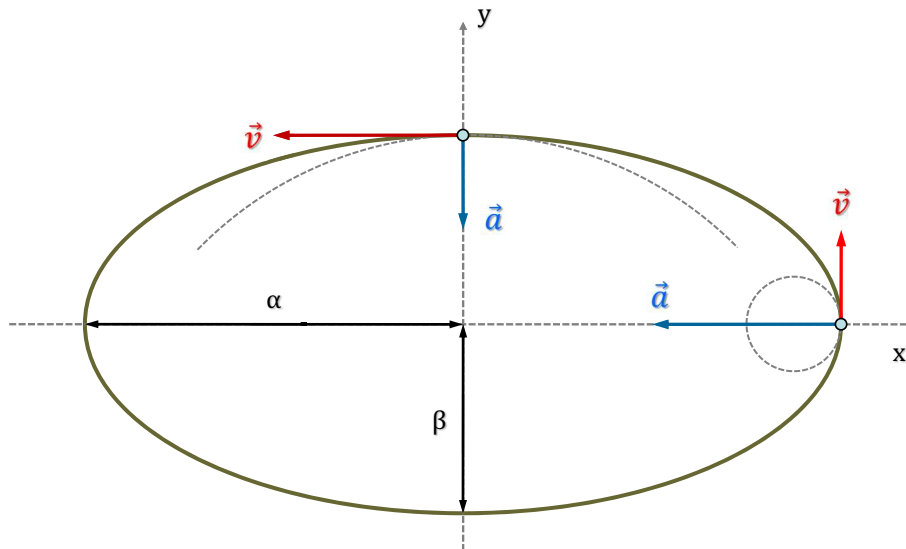
Λύση

Από τη μορφή των συντεταγμένων εύκολα συνάγεται, μετά την απαλοιφή του χρόνου, η εξίσωση:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos \omega t \\ y(t) = \beta \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x/a = \cos \omega t \\ y/\beta = \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1}$$

Η τροχιά είναι λοιπόν μια έλλειψη με ημιάξονες a και β . Οι κινηματικές εξισώσεις του σώματος συνοψίζονται σε διανυσματική μορφή στις παρακάτω:

$$\begin{cases} \vec{r} = a \cos \omega t \hat{i} + \beta \sin \omega t \hat{j} \\ \vec{v} = -a\omega \sin \omega t \hat{i} + \beta\omega \cos \omega t \hat{j} \\ \vec{a} = -a\omega^2 \cos \omega t \hat{i} - \beta\omega^2 \sin \omega t \hat{j} \end{cases}$$



Για την περίπτωση όπου $\omega t = 0$ οι προηγούμενες εξισώσεις γίνονται:

$$\begin{cases} \vec{r} = a \hat{i} + 0 \hat{j} \\ \vec{v} = 0 \hat{i} + \beta\omega \hat{j} \\ \vec{a} = -a\omega^2 \hat{i} + 0 \hat{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \beta\omega & 0 \\ -a\omega^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a\beta\omega^3 \hat{k}$$

οπότε η ζητούμενη ακτίνα καμπυλότητας είναι:

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{(\beta\omega)^3}{a\beta\omega^3} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{\beta^2}{a}}$$

Ομοίως, στη δεύτερη περίπτωση, όπου $\omega t = \pi/2$, οι εξισώσεις κίνησης γίνονται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = 0\hat{i} + \beta\hat{j} \\ \vec{v} = -a\omega\hat{i} + 0\hat{j} \\ \vec{a} = 0\hat{i} - \beta\omega^2\hat{j} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a\omega & 0 & 0 \\ 0 & -\beta\omega^2 & 0 \end{vmatrix} = a\beta\omega^3 \hat{k}$$

οπότε η ζητούμενη ακτίνα καμπυλότητας είναι:

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{(a\omega)^3}{a\beta\omega^3} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{a^2}{\beta}}$$

Είναι προφανές, όπως εξάλλου φαίνεται και από το σχήμα, πως εάν $a > \beta$, τότε η ακτίνα καμπυλότητας στη θέση $\omega t = \pi/2$ είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα καμπυλότητας στο $\omega t = 0$ και μάλιστα κατά παράγοντα $(a/\beta)^3$. Αξίζει επίσης να σημειωθεί η συμμετρική σχέση που παρουσιάζουν τα μέτρα της ταχύτητας και επιτάχυνσης στις δύο αυτές θέσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 2.23

Σώμα κινείται στο επίπεδο σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R = 2m$ με γωνιακή επιτάχυνση $a_A = (6t + 2) \text{ rad/s}^2$. Εάν τη χρονική στιγμή $t = 0s$ γωνιακή ταχύτητα και η γωνία είναι αντίστοιχα $\omega_0 = 0 \text{ rad/s}$, $\theta_0 = 0 \text{ rad}$ να βρεθούν τα διανύσματα της γραμμικής εφαπτομενικής και κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{a}_T$ και $\vec{a}_N$ αντίστοιχα.

Λύση

Η γωνιακή ταχύτητα και η γωνία περιστροφής προκύπτουν από την ολοκλήρωση της γωνιακής επιτάχυνσης:

$$\omega(t) = \int a_A(t)dt = \int (6t + 2)dt = 3t^2 + 2t + C \Rightarrow \omega(t) = 3t^2 + 2t$$

$$\theta(t) = \int \omega(t)dt = \int (3t^2 + 2t)dt = t^3 + t^2 + C \Rightarrow \theta(t) = t^3 + t^2$$

Η γραμμική ταχύτητα του σωματιδίου θα δίνεται από τη σχέση:

$$v(t) = R\omega(t) = 2(3t^2 + 2t) = (6t^2 + 4t) \text{ m/s}$$

οπότε η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης έχει μέτρο:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 12t + 4 \Rightarrow \boxed{\vec{a}_T = (12t + 4)\hat{u}_T \text{ m/s}^2}$$

ενώ η κεντρομόλος συνιστώσα έχει μέτρο:

$$a_N = R\omega^2 = 2(3t^2 + 2t)^2 \Rightarrow \boxed{\vec{a}_N = 2t^2(3t + 2)^2\hat{u}_N \text{ m/s}^2}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{u}_T$ και $\hat{u}_N$ είναι αντίστοιχα εφαπτόμενο και κάθετο (κεντρομόλο) στη κυκλική τροχιά στο σημείο της επιβατικής ακτίνας.

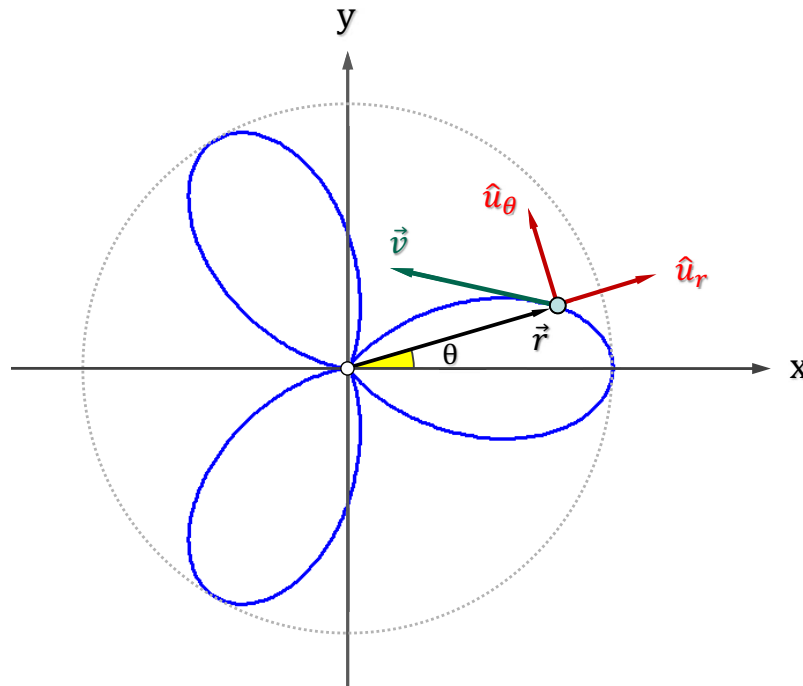
2.4 Πολικές Συντεταγμένες

ΑΣΚΗΣΗ 2.24

Η κίνηση ενός σωματιδίου στο πολικό επίπεδο συντεταγμένων περιγράφεται από την εξίσωση $r = 1 + \cos(3\theta)$, όπου η γωνία θ έχει γραμμική εξάρτηση από το χρόνο $\theta = \omega t$. Να σχεδιάσετε την τροχιά του σωματιδίου αυτού και να υπολογίσετε την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του.

Λύση

Η τροχιά του σωματιδίου αυτού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Είναι προφανές πως αυτή παρουσιάζει γωνιακή συμμετρία $2\pi/3 = 120^\circ$, δεδομένου πως το όρισμα του συνημιτόνου εμπεριέχει τον παράγοντα 3. Επίσης είναι προφανές πως το κινητό έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα $d\theta/dt = \omega$, η δε ακτινική του απόσταση είναι $0 \leq r \leq 2$.



Με χρήση των στοιχείων αυτών και της έκφρασης της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες μέσω των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{u}_r$ και $\hat{u}_\theta$, σε τυχαίο σημείο της τροχιάς η ταχύτητα υπολογίζεται:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left(\frac{dr}{dt}\right) \hat{u}_r + r \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \hat{u}_\theta = -3\sin(3\theta) \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \hat{u}_r + [1 + \cos(3\theta)] \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \hat{u}_\theta \\ \Rightarrow \boxed{\vec{v} &= -3\omega \sin(3\theta) \hat{u}_r + \omega [1 + \cos(3\theta)] \hat{u}_\theta} \end{aligned}$$

Η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας μηδενίζεται στα σημεία όπου $\sin(3\theta) = 0$, δηλαδή στα σημεία $\theta \in \{0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ\}$, τα οποία αποτελούν τα ακρότατα της τροχιάς ($r = 0$ ή $r = 2$). Αντίστοιχα, η γωνιακή συνιστώσα της ταχύτητας μηδενίζεται στα σημεία όπου $r = 0$, δηλαδή στα σημεία $\theta \in \{60^\circ, 180^\circ, 300^\circ\}$. Είναι

προφανές λοιπόν, πως η συνολική ταχύτητα γίνεται μηδέν, μόνο όταν το κινητό διέρχεται από το κέντρο του συστήματος συντεταγμένων.

Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης στο πολικό σύστημα συντεταγμένων έχουμε:

$$\vec{a} = \left[\left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right) - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{u}_r + \left[2 \left(\frac{dr}{dt} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) + r \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \right] \hat{u}_\theta$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά τους όρους

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad , \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} [1 + \cos(3\theta)] = -3\omega \sin(3\theta)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} [-3\omega \sin(3\theta)] = -9\omega^2 \cos(3\theta)$$

καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [-9\omega^2 \cos(3\theta) - r\omega^2] \hat{u}_r + 2\omega(-3\omega \sin(3\theta)) \hat{u}_\theta \\ \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -\omega^2 [1 + 10\cos(3\theta)] \hat{u}_r - 6\omega^2 \sin(3\theta) \hat{u}_\theta} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.25

Να μελετήσετε την κίνηση ενός σωματιδίου στο πολικό επίπεδο συντεταγμένων το οποίο έχει εξίσωση τροχιάς $r = r_0 + \rho\theta$, όπου ρ θετική σταθερά, δηλαδή η ακτινική απόσταση βαίνει γραμμικά αυξανόμενη με τη γωνία (όπως οι αυλακώσεις σε δίσκο βινυλίου). Δεχθείτε σταθερή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\omega = d\theta/dt$.

Λύση

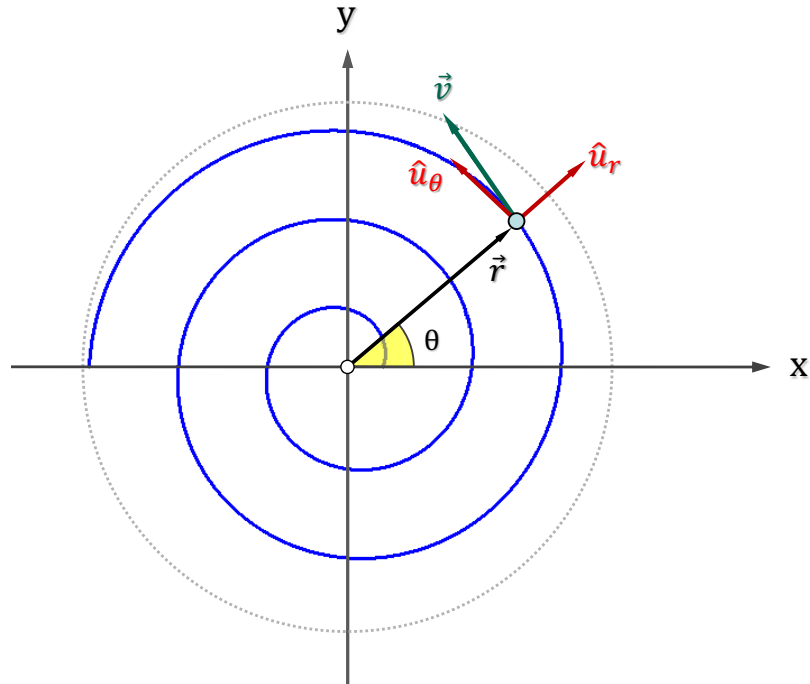
Η τροχιά του σωματιδίου αυτού απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Για μια πλήρη κυκλική περιστροφή η ακτινική μετατόπιση είναι προφανώς σταθερή και ίση με $2\pi\rho$.

Η διανυσματική ταχύτητα του σωματιδίου αυτού σε τυχαία θέση του πολικού επιπέδου υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left(\frac{dr}{dt} \right) \hat{u}_r + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \hat{u}_\theta = \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \hat{u}_r + (r_0 + \rho\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \hat{u}_\theta \\ \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \rho\omega \hat{u}_r + \omega(r_0 + \rho\theta) \hat{u}_\theta} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως η ακτινική ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με $v_r = \rho\omega$, ενώ η αντίστοιχη γωνιακή συνιστώσα v_θ μεταβάλλεται γραμμικά με τη γωνία, διατηρώντας τον ίδιο συντελεστή αναλογίας $\rho\omega$. Το συνολικό μέτρο της ταχύτητας σε τυχαία γωνία (για $r_0 = 0$) υπολογίζεται εύκολα σε

$$\boxed{v = \rho\omega \sqrt{1 + \theta^2}}$$



Λαμβάνοντας υπόψη πως $d^2r/dt = \dot{r}d\omega/dt = 0$ και με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα, υπολογίζεται η επιτάχυνση του σωματιδίου:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left[\left(\frac{d^2r}{dt^2} \right) - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{u}_r + \left[2 \left(\frac{dr}{dt} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) + r \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \right] \hat{u}_\theta \\ \Rightarrow \vec{a} &= (0 - r\omega^2) \hat{u}_r + (2\dot{r}\omega^2 + 0) \hat{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = -(r_0 + \dot{r})\omega^2 \hat{u}_r + 2\dot{r}\omega^2 \hat{u}_\theta \\ \Rightarrow \boxed{\vec{a} &= -(r_0 + \dot{r})\omega^2 \hat{u}_r + 2\dot{r}\omega^2 \hat{u}_\theta}\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.26

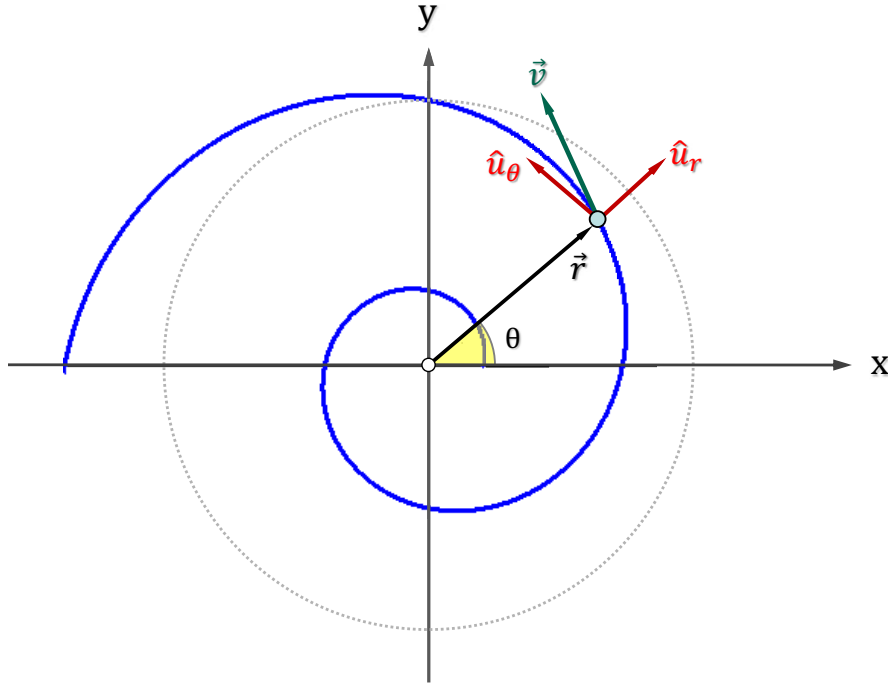
Όπως προηγουμένως, να μελετήσετε την κίνηση ενός σωματιδίου στο πολικό επίπεδο συντεταγμένων το οποίο έχει εξίσωση τροχιάς $r = r_0 e^{\lambda\theta}$, όπου λ θετική σταθερά, δηλαδή η ακτινική απόσταση βαίνει τώρα εκθετικά αυξανόμενη με τη γωνία. Υποθέστε κι εδώ σταθερή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\omega = d\theta/dt$.

Λύση

Δεδομένου πως η ακτίνα μεταβάλλεται τώρα εκθετικά με τη γωνία, η ακτινική μετατόπιση παύει πλέον να είναι σταθερή για μια κυκλική περιστροφή. Η σπειροειδής τροχιά του σωματιδίου αυτού απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.

Για τον υπολογισμό της διανυσματικής ταχύτητας του σωματιδίου αυτού σε τυχαία θέση του πολικού επιπέδου εργαζόμαστε όπως και προηγουμένως:

$$\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt} \right) \hat{u}_r + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \hat{u}_\theta = r_0 \lambda e^{\lambda\theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \hat{u}_r + r_0 e^{\lambda\theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \hat{u}_\theta$$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = r_0 \dot{\theta} \omega e^{\dot{\theta} \theta} \hat{u}_r + r_0 \omega e^{\dot{\theta} \theta} \hat{u}_\theta}$$

Παρατηρούμε τώρα, πως αμφότερες οι συνιστώσες της ταχύτητας βαίνουν εκθετικά αυξανόμενες με τον παράγοντα $e^{\dot{\theta} \theta} = e^{\dot{\theta} \omega t}$, με το μέτρο της ακτινικής ταχύτητας κατά παράγοντα λ μεγαλύτερο της γωνιακής συνιστώσας ($u_r = \dot{\theta} u_\theta$). Αναζητώντας το συνολικό μέτρο της ταχύτητας σε τυχαία γωνία (για $r_0 = 0$), αυτό υπολογίζεται εύκολα σε

$$\boxed{v = r_0 \omega e^{\dot{\theta} \theta} \sqrt{1 + \dot{\theta}^2}}$$

Λαμβάνοντας υπόψη πως $d^2 r / dt = d(r_0 \dot{\theta} e^{\dot{\theta} \theta}) / dt = r_0 \dot{\theta}^2 \omega^2 e^{\dot{\theta} \theta}$ και με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα, υπολογίζεται η επιτάχυνση του σωματιδίου:

$$\vec{a} = \left[\left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right) - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{u}_r + \left[2 \left(\frac{dr}{dt} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) + r \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \right] \hat{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (r_0 \dot{\theta}^2 \omega^2 e^{\dot{\theta} \theta} - r_0 \omega^2 e^{\dot{\theta} \theta}) \hat{u}_r + (2 r_0 \dot{\theta} \omega^2 e^{\dot{\theta} \theta} + 0) \hat{u}_\theta$$

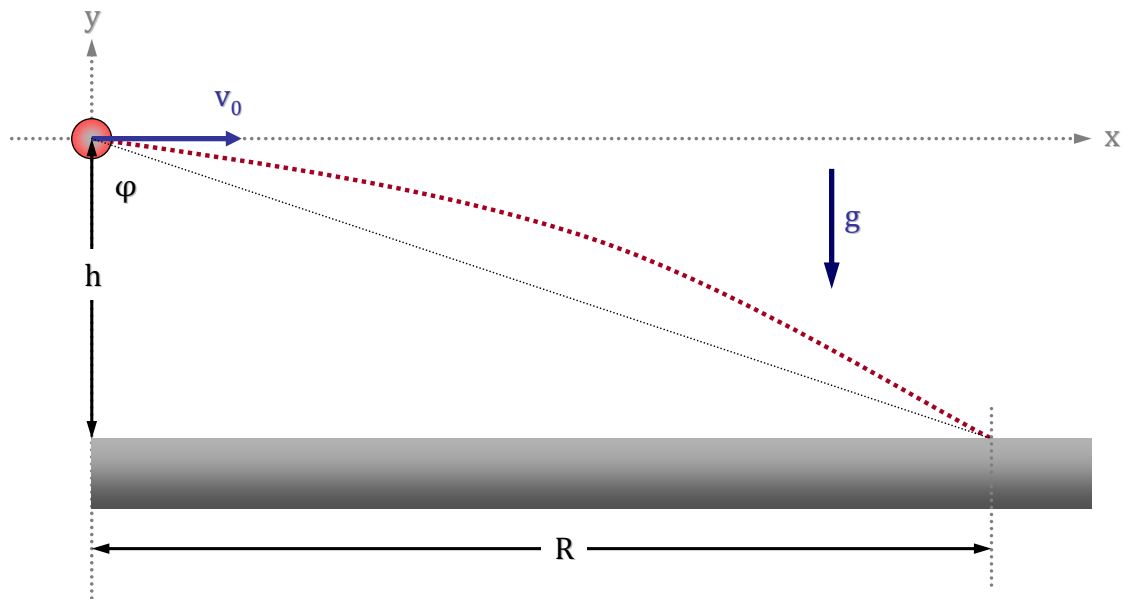
$$\Rightarrow \vec{a} = r_0 \omega^2 e^{\dot{\theta} \theta} (\dot{\theta}^2 - 1) \hat{u}_r + 2 \dot{\theta} r_0 \omega^2 e^{\dot{\theta} \theta} \hat{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = r_0 \omega^2 e^{\dot{\theta} \theta} [(\dot{\theta}^2 - 1) \hat{u}_r + 2 \dot{\theta} \hat{u}_\theta]}$$

2.5 Βολές

ΑΣΚΗΣΗ 2.27

Σώμα, ελεύθερο αντιστάσεων και άλλων τριβών, βάλλεται από ύψος h με οριζόντια ταχύτητα v_0 . Να βρεθεί το βεληνεκές R καθώς και η γωνία φ που σχηματίζεται από την ευθεία που συνδέει το σημείο βολής και πρόσκρουσης στο έδαφος με την κατακόρυφο.



Λύση

Από την ανεξαρτησία των κινήσεων στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα σχηματίζουμε τις εξισώσεις κίνησης:

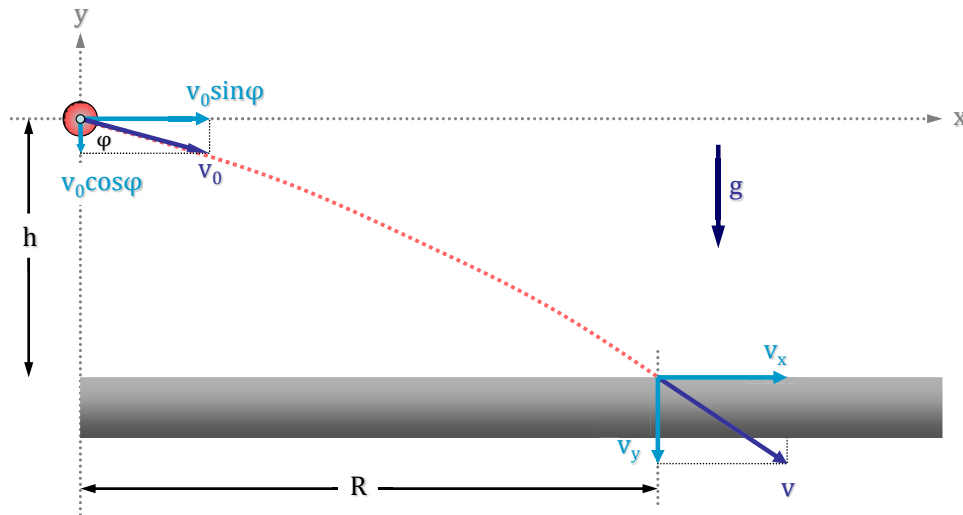
$$\left\{ \begin{array}{l} R = v_0 t \\ -h = -\frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = v_0 \sqrt{2h/g} \\ t = \sqrt{2h/g} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{R = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Για τη γωνία φ ισχύει:

$$\tan\varphi = \frac{R}{h} = \frac{v_0 \sqrt{2h/g}}{h} \Rightarrow \boxed{\tan\varphi = v_0 \sqrt{\frac{2}{hg}}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.28

Βλήμα, ελεύθερο αντιστάσεων και άλλων τριβών, εκτοξεύεται από ύψος $h = 500\text{m}$ με ταχύτητα v_0 προς τα κάτω, σχηματίζοντας γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την κατακόρυφο. Να βρεθεί το βεληνεκές R της βολής αυτής, εάν το σώμα συναντά το έδαφος $t = 4\text{s}$ μετά την εκτόξευση. Ποιο το μέτρο της αρχικής ταχύτητας v_0 και ποιο της τελικής v ;



Λύση

Όπως και στην προηγούμενη άσκηση γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα. Στον οριζόντιο άξονα έχουμε την συνιστώσα της ταχύτητας $v_{0x} = v_0 \sin \phi$, ενώ στον κατακόρυφο αντίστοιχα την $v_{0y} = v_0 \cos \phi$.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = v_0 \sin \phi \\ R = (v_0 \sin \phi) t \\ -v_y = -v_0 \cos \phi - gt \\ -h = (-v_0 \cos \phi) t - \frac{1}{2} gt^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} v_x = v_0 \sin \phi & (1) \\ R = (v_0 \sin \phi) t & (2) \\ v_y = v_0 \cos \phi + gt & (3) \\ h = (v_0 \cos \phi) t + \frac{1}{2} gt^2 & (4) \end{array} \right.$$

Από την τελευταία εξίσωση (4) υπολογίζουμε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας v_0 και το αντικαθιστούμε στην (2):

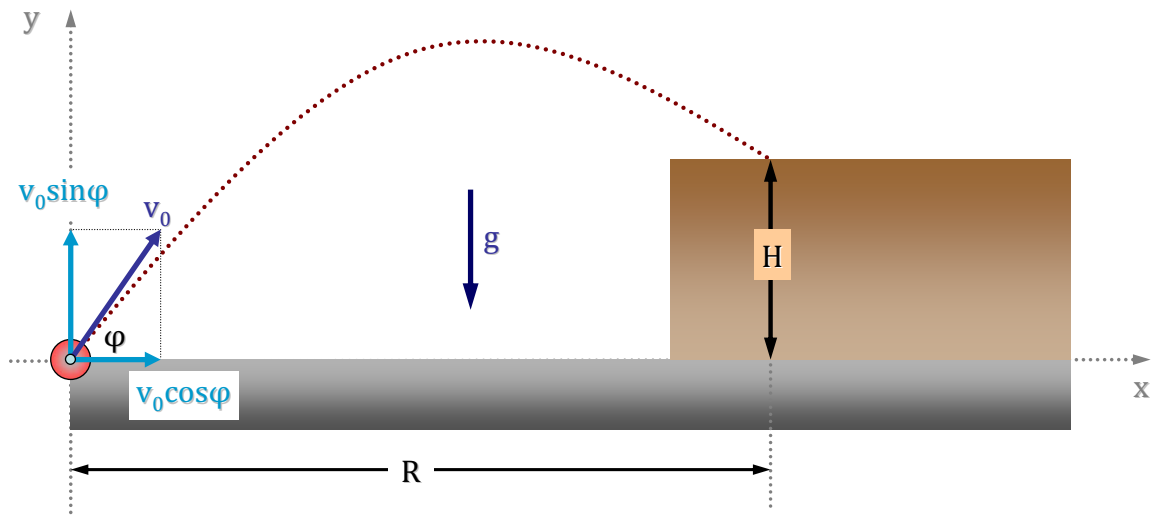
$$\left\{ \begin{array}{ll} v_x = v_0 \sin \phi & (1) \\ R = (h - gt^2/2)(t \sin \phi)/(t \cos \phi) & (2) \\ v_y = v_0 \cos \phi + gt & (3) \\ v_0 = (h - gt^2/2)/(t \cos \phi) & (4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{R = (h - gt^2/2) \tan \phi} \\ \boxed{v_0 = (h - gt^2/2)/(t \cos \phi)} \end{array} \right.$$

Μετά από αντικατάσταση βρίσκουμε $\boxed{R = 730 \text{ m}}$ και $\boxed{v_0 = 210 \text{ m/s}}$. Για τον υπολογισμό της τελικής ταχύτητας θα προστεθούν διανυσματικά η αμετάβλητη οριζόντια συνιστώσα v_x (1) και η τελική κατακόρυφη v_y (3):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(210 \sin 60^\circ)^2 + (210 \cos 60^\circ + 9.8 \cdot 4)^2} \Rightarrow \boxed{v = 232 \text{ m/s}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.29

Βλήμα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα v_0 υπό γωνία ϕ και συναντά την τάρτασα κτιρίου ύψους H σε οριζόντια απόσταση R . Θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα, να υπολογίσετε την γωνία βολής ϕ εάν δίνονται τα μεγέθη $R = 200 \text{ m}$, $H = 50 \text{ m}$ και $v_0 = 60 \text{ m/s}$.



Λύση

Οι εξισώσεις της κίνησης για χρόνο πτήσης του βλήματος t , ο οποίος καθορίζεται από την κατακόρυφη κίνηση, είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = (v_0 \cos \phi) t \\ H = (v_0 \sin \phi) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = R / (v_0 \cos \phi) \\ H = R(v_0 \sin \phi) / (v_0 \cos \phi) - \frac{1}{2} g R^2 / (v_0 \cos \phi)^2 \end{array} \right\}$$

Η δεύτερη των εξισώσεων είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την $\tan \phi$:

$$H = R \tan \phi - \frac{1}{2} g R^2 / (v_0 \cos \phi)^2 \Rightarrow H = R \tan \phi - \frac{g R^2}{2 v_0^2} (1 + \tan^2 \phi) \Rightarrow$$

$$\tan^2 \phi - \frac{2 v_0^2}{g R} \tan \phi + \frac{2 v_0^2 H}{g R^2} + 1 = 0$$

Με τα δεδομένα της άσκησης, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\tan^2 \phi - 3.673 \tan \phi + 1.735 = 0 \Rightarrow \tan \phi_1 = 3.117, \tan \phi_2 = 0.557 \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi_1 = 72.2^\circ}, \quad \boxed{\phi_2 = 29.1^\circ}$$

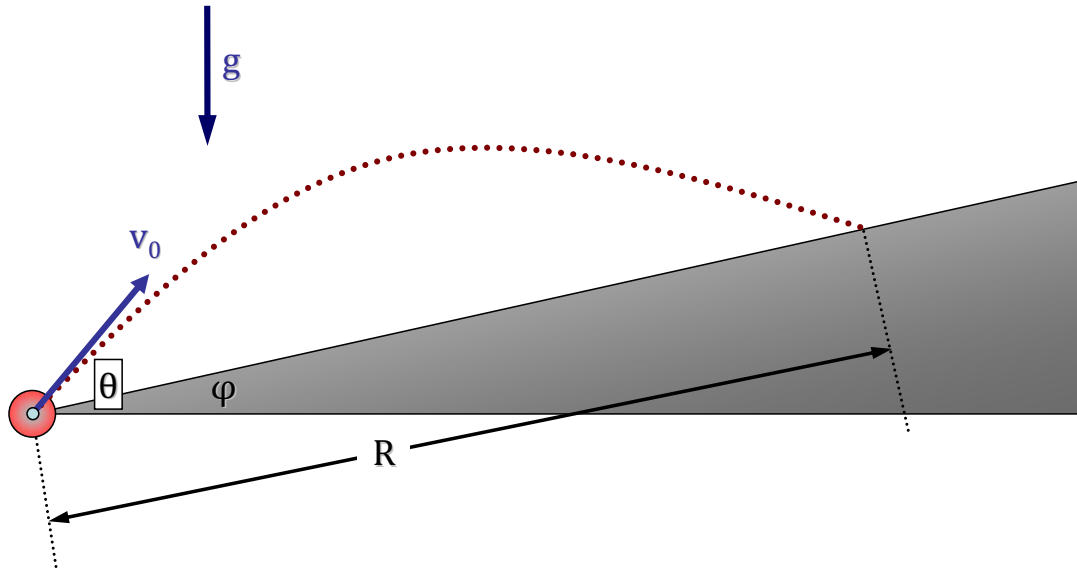
ΑΣΚΗΣΗ 2.30

Βλήμα εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας ϕ υπό γωνία θ ως προς τον οριζοντα. Να υπολογιστεί το βεληνεκές R επί του κεκλιμένου επιπέδου.

Λύση

ΜΕΘΟΔΟΣ Α

Αναλύουμε τη κίνηση του βλήματος στον άξονα παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο και στον αντίστοιχο κάθετο. Στην περίπτωση αυτή, και στις δύο αυτές κατευθύνσεις δρα η βαρυτική επιτάχυνση με μέτρα $g \sin \phi$ και $g \cos \phi$ αντίστοιχα. Οι



εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\begin{cases} R = v_0 \cos(\theta - \phi)t - \frac{1}{2}g(\sin\phi)t^2 \\ 0 = v_0 \sin(\theta - \phi)t - \frac{1}{2}g(\cos\phi)t^2 \end{cases}$$

Η δεύτερη των εξισώσεων λυόμενη ως προς τον χρόνο t δίνει:

$$t = \frac{2v_0 \sin(\theta - \phi)}{g \cos\phi}$$

και μετά από αντικατάσταση στην πρώτη λαμβάνουμε για το βεληνεκές R την παρακάτω σχέση:

$$R = v_0 \cos(\theta - \phi) \frac{2v_0 \sin(\theta - \phi)}{g \cos\phi} - \frac{1}{2}g \sin\phi \frac{2^2 v_0^2 \sin^2(\theta - \phi)}{g^2 \cos^2\phi} \Rightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2 \cos(\theta - \phi) \sin(\theta - \phi) \cos\phi - \sin\phi \sin^2(\theta - \phi)}{g \cos^2\phi} \Rightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2 \sin(\theta - \phi) [\cos(\theta - \phi) \cos\phi - \sin\phi \sin(\theta - \phi)]}{g \cos^2\phi} \Rightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2 \sin(\theta - \phi) \cos(\theta - \phi + \phi)}{g \cos^2\phi} \Rightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{2v_0^2 \sin(\theta - \phi) \cos\theta}{g \cos^2\phi}}$$

Η σχέση αυτή για την οριακή περίπτωση $\phi = 0$ απλοποιείται στην γνωστή σχέση του βεληνεκούς για το οριζόντιο επίπεδο $R = \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$.

ΜΕΘΟΔΟΣ Β

Αναζητούμε το σημείο τομής της τροχιάς του βλήματος και του κεκλιμένου επιπέδου. Οι εξισώσεις αυτές αντίστοιχα είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x \tan \theta - gx^2 / 2(v_0 \cos \theta)^2 \\ y = x \tan \phi \end{array} \right\} \Rightarrow x \tan \theta - gx^2 / 2(v_0 \cos \theta)^2 = x \tan \phi \Rightarrow$$

$$x = \frac{2v_0^2}{g} (\tan \theta - \tan \phi) \cos^2 \theta$$

Αλλά το x δίνεται μέσω του βεληνικού και της γωνίας ϕ ως $x = R \cos \phi$, οπότε:

$$R \cos \phi = \frac{2v_0^2}{g} (\tan \theta - \tan \phi) \cos^2 \theta \Rightarrow R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\tan \theta - \tan \phi}{\cos \phi} \cos^2 \theta \Rightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta \tan \phi}{\cos \phi} \Rightarrow R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta \sin \phi / \cos \phi)}{\cos \phi} \Rightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\cos \theta (\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi)}{\cos^2 \phi} \Rightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\sin(\theta - \phi) \cos \theta}{\cos^2 \phi}}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ίδιο με την προηγούμενη μέθοδο αποτέλεσμα.

2.6 Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 2.31

Ένας ζογκλέρ συνηθίζει να πετάει τις μπάλες κατακόρυφα προς τα πάνω μέχρι κάποιο ύψος H . Πόσο ψηλά πρέπει να πετάξει τις μπάλες ώστε αυτές να μείνουν στον αέρα για διπλάσιο χρόνο;

Απάντηση: $4H$

ΑΣΚΗΣΗ 2.32

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (xy) με συντεταγμένες $x(t) = at^2$ και $y(t) = bt$, όπου a και b σταθερές. (α) Να υπολογισθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του. (β) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (γ) Να εκφρασθεί η γωνία ϕ μεταξύ των διανυσμάτων της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ως συνάρτηση του χρόνου.

Απάντηση: (α) $\vec{v} = 2at\hat{i} + b\hat{j}$, $\vec{a} = 2a\hat{i}$ (β) $y^2 = \frac{b^2}{a}x$ (γ) $\tan\phi = \frac{b}{2at}$

ΑΣΚΗΣΗ 2.33

Ένα πουλί πετά στο επίπεδο (xy) με ένα διάνυσμα ταχύτητας που δίνεται από τη σχέση $\vec{v} = (a - \beta t^2)\hat{i} + \gamma t\hat{j}$ με σταθερές $a = 2.4 \text{ m/s}$, $\beta = 1.8 \text{ m/s}^3$, $\gamma = 4.0 \text{ m/s}^2$. Ο άξονας x είναι οριζόντιος, ενώ ο y δείχνει κατακόρυφα προς τα πάνω. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το πουλί βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. (α) Να υπολογιστούν η θέση και η επιτάχυνσή του σαν συνάρτηση του χρόνου. (β) Σε τι ύψος βρίσκεται το πουλί όταν περνάει για πρώτη φορά από το $x = 0$ μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$;

Απάντηση: (β) $y = 8 \text{ m}$

ΑΣΚΗΣΗ 2.34

Παίκτης του γκολφ ξεκινά από ύψωμα δίνοντας στη μπάλα του αρχική ταχύτητα 43 m/s με γωνία 30° πάνω από την οριζόντια κατεύθυνση. Η μπάλα πέφτει σε επίπεδο με γρασίδι και σε οριζόντια απόσταση 180 m από το σημείο βολής. (α) Πόσο πάνω από την περιοχή με γρασίδι βρίσκεται το ύψωμα; (β) Πόση είναι η ταχύτητα της μπάλας καθώς χτυπά στο γρασίδι;

Απάντηση: (α) 11 m (β) 45 m/s

ΑΣΚΗΣΗ 2.35

Κινούμενο σώμα στο επίπεδο (xy) έχει συντεταγμένες $x = at$ και $y = \beta \sin(at)$, όπου a και β θετικές σταθερές. Να αποδείξετε πως το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ανάλογο

της απόστασης του κινούμενου σώματος από τον άξονα των x . Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η μορφή της τροχιάς του σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ 2.36

Σώμα κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a = 6\sqrt[3]{x} \text{ ms}^{-2}$. Εάν γνωρίζουμε ότι για $t = 2\text{ s}$ ισχύει $v = 27 \text{ m/s}$ και $x = 27\text{ m}$, να υπολογιστούν οι κινηματικές εξισώσεις του διαστήματος, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.

Απάντηση: $x = (t + 1)^3$, $v = 3(t + 1)^2$, $a = 6(t + 1)$

ΑΣΚΗΣΗ 2.37

Η κίνηση σωματιδίου στο χώρο περιγράφεται από το διάνυσμα της ταχύτητας σε καρτεσιανές συντεταγμένες $\vec{v} = 3\hat{i} + 0\hat{j} + 2t\hat{k}$. Εάν για $t = 0\text{ s}$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $(x_0, y_0, z_0) = (0, -2, 0)$, να βρείτε τις κινηματικές εξισώσεις του σωματιδίου, να καθορίσετε το είδος της τροχιάς του και να εκφραστεί η ακτίνα καμπυλότητας συναρτήσει του χρόνου κίνησης.

Απάντηση: $\vec{r} = 3t\hat{i} - 2\hat{j} + t^2\hat{k}$, $\vec{a} = 2\hat{k}$, $z = x^2/9$ ($Y = -2$), $\rho = \frac{(3 + 4t^2)^{3/2}}{6}$

ΑΣΚΗΣΗ 2.38

Σωματίδιο κινείται πάνω σε επίπεδο και η απόστασή του από την αρχή των αξόνων περιγράφεται από την εξίσωση πολικών συντεταγμένων $r = 1 + \cos(2\theta)$. Υποθέτοντας σταθερή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $d\theta/dt = \omega$, να περιγράψετε την τροχιά του σωματιδίου και να υπολογίσετε ταχύτητα και επιτάχυνση σε τυχαίο σημείο της τροχιάς του.

Απάντηση:

$$\vec{v} = -2\omega \sin(2\theta) \hat{u}_r + \omega [1 + \cos(2\theta)] \hat{u}_\theta$$

$$\vec{a} = -\omega^2 [1 + 5\cos(2\theta)] \hat{u}_r - 4\omega^2 \sin(2\theta) \hat{u}_\theta$$