

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2025-2026

ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ Γ. ΣΤΥΛΙΑΡΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 2025

Μέρος των ασκήσεων του παρόντος φυλλαδίου παρουσιάζονται κατά τις παραδόσεις του μαθήματος **ΦΥΣΙΚΗ-Ι** στο Χειμερινό Εξάμηνο του 1ου Ακαδημαϊκού Έτους και αποτελούν συνοδευτικό υλικό των διαφανειών των αντίστοιχων κεφαλαίων που υπάρχει στο eclass.



©2016-2026 by Ευστάθιος Γ. Στυλιάρης

ST202509020009-V2.01

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Κεφάλαιο 1

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ & ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ {Ορισμοί}
- ΔΥΝΑΜΕΙΣ {Διανυσματικός Χαρακτήρας Δυνάμεων, Σύνθεση Δυνάμεων}
- ΡΟΠΗ {Η Έννοια της Ροπής, Ροπή Πολλών Δυνάμεων, Ζεύγος Δυνάμεων}
- ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΩΜΑΤΟΣ {Ισορροπία Σωματιδίου, Στατική Ισορροπία Στερεού Σώματος}
- ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ {Καρτεσιανές, Πολικές, Κυλινδρικές & Σφαιρικές Συντεταγμένες}
- ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ {Μερική Παράγωγος, Σύνθετη Συνάρτηση & Κανόνας της Αλυσίδας}
- ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΤΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΧΩΡΟ {Παράγωγος Διανύσματος, Ο Τελεστής ∇ και οι Τρεις Βασικές Διεργασίες: Κλίση - Απόκλιση - Στροβιλισμός}
- ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ (ΒΑΡΟΥΣ) {Ορισμός Κέντρου Μάζας & Βάρους, Εύρεση Κέντρου Μάζας με Ολοκλήρωση}

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο αντιμετωπίζονται απλά προβλήματα κατανόησης του διανυσματικού λογισμού, όπως είναι το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Χωρίς την αυστηρή εισαγωγή της έννοιας της δύναμης και εκμεταλλευόμενοι τον διανυσματικό της χαρακτήρα, παρουσιάζονται οι πρώτες απλές πράξεις μεταξύ διανυσμάτων, όπως είναι η σύνθεση δυνάμεων και η εύρεση γωνιακών παραμέτρων βασιζόμενοι στο εσωτερικό τους γινόμενο. Η έννοια της ροπής εισάγεται ως το εξωτερικό γινόμενο θέσης - δύναμης και με βάση τον διανυσματικό ορισμό ζεύγους δυνάμεων εξετάζεται η σύνθεση πολλών δυνάμεων, είτε αυτές είναι συντρέχουσες σε ένα σημείο, είτε εφαρμόζονται σε διαφορετικά σημεία στερεού σώματος. Παράλληλα, η στατική ισορροπία στερεών σωμάτων για συνεπίπεδες δυνάμεις εισάγει μια πληθώρα από ενδιαφέρουσες ασκήσεις.

Στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο πέραν του συστήματος των Καρτεσιανών Συντεταγμένων εισάγονται τα συστήματα των Κυλινδρικών και Σφαιρικών Συντεταγμένων. Γίνεται λεπτομερής αναφορά στις μετατροπές συντεταγμένων από το ένα σύστημα στο άλλο και παρουσιάζονται απλοί γεωμετρικοί τόποι με τις αντίστοιχες εξισώσεις τους στα διάφορα συστήματα.

Η έννοια της απλής παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής επεκτείνεται στην μερική παράγωγο συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Δίνονται παραδείγματα με απλές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και γίνεται σύντομη αναφορά στο ολικό διαφορικό και τον κανόνα της αλυσίδας για σύνθετες συναρτήσεις. Παράλληλα αναπτύσσεται η έννοια της παραγώγου διανύσματος και εισάγεται η αναγκαιότητα της παραγώγου ανά κατεύθυνση στον τρισδιάστατο χώρο. Αφού ορισθεί ο τελεστής ∇ αναφέρονται οι τρεις βασικές διεργασίες που μπορεί αυτός να επιτελέσει σε βαθμωτά και διανυσματικά πεδία: Κλίση ($\text{grad } f$), Απόκλιση ($\text{div } \vec{F}$) και Στροβιλισμός ($\text{curl } \vec{F}$) αποδίδοντας παράλληλα και την βασική φυσική ερμηνεία των μεγεθών αυτών.

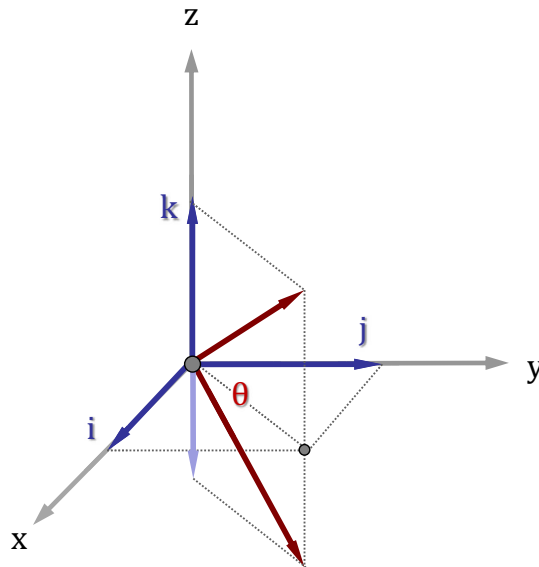
Τέλος, δίνεται ο ορισμός του Κέντρου Βάρους & Μάζας στερεού σώματος και αποδεικνύεται η ταύτιση των όρων αυτών σε ομογενές βαρυτικό πεδίο. Αναπτύσσεται η μεθοδολογία του ολοκληρωτικού λογισμού στην εύρεση του κέντρου μάζας. Απλές εφαρμογές δίνονται στο τελευταίο μέρος της ενότητας αυτής.

1.1 Διανύσματα

1.1.1 Εσωτερικό και Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

ΑΣΚΗΣΗ 1.1

Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ και $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$



Λύση

Τα δύο διανύσματα που προκύπτουν από τους παραπάνω συνδυασμούς των μοναδιαίων διανυσμάτων έχουν συντεταγμένες $(+1, +1, +1)$ και $(+1, +1, -1)$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \vartheta$$

και δεδομένου ότι το μέτρο κάθε ενός από τα παραπάνω διανύσματα είναι $\sqrt{3}$, λαμβάνουμε:

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, -1)}{\sqrt{3} \sqrt{3}} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{3} = \frac{1}{3}$$

απ' όπου συνάγεται πως:

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2

Δίνονται τα διανύσματα:
$$\begin{bmatrix} \vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \\ \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} \\ \vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθούν τα γινόμενα $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ και $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Λύση

Πρόκειται για εξωτερικά γινόμενα, οπότε, με βάση τον ορισμό, θα γίνει χρήση της ορίζουσας. Έτσι έχουμε:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

Ομοίως:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

Κάνοντας χρήση του πρώτου αποτελέσματος υπολογίζουμε:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{i} - 7\hat{j} + 11\hat{k}$$

Τέλος, κάνοντας χρήση του δεύτερου αποτελέσματος υπολογίζουμε:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \times (-7\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 12\hat{j} + 10\hat{k}$$

Σημείωση: Από τα δύο τελευταία αποτελέσματα παρατηρείστε πως στο εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.3

Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ είναι πάντα ίσο με μηδέν.

Λύση

Το διάνυσμα $\vec{c}$ που ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Κατά συνέπεια το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{c}$ με καθένα από τα διανύσματα αυτά είναι λόγω καθετότητας ίσο με μηδέν:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Μια πιο αυστηρή μαθηματική απόδειξη δίδεται παρακάτω:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Η παραπάνω ορίζουσα είναι μηδενική καθόσον δύο γραμμές της (a_i) είναι ταυτόσημες. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε όταν πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά και με το $\vec{b}$. Τότε θα υπάρχουν ξανά δύο σειρές (b_i) που είναι πάλι ταυτόσημες.

Σημείωση: Στην παραπάνω απόδειξη έγινε χρήση της ταυτότητας

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Αυτό συμβαίνει γιατί στο εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, ως γνωστόν, επιβιώνουν μόνον οι όροι $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$. Οπότε, οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{a}$ μπορούν να αντικαταστήσουν τα μοναδιαία διανύσματα στην πρώτη σειρά της ορίζουσας και το αποτέλεσμα είναι ένα βαθμωτό μέγεθος (αριθμητική τιμή).

ΑΣΚΗΣΗ 1.4

Αν το άθροισμα και η διαφορά δύο διανυσμάτων είναι διανύσματα κάθετα, τότε τα δύο διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.

Λύση

Έστω ότι τα δύο διανύσματα είναι $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Τότε, με βάση την εκφώνηση, τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} - \vec{b}$ είναι κάθετα, άρα:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \implies \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \implies |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\implies |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 \implies |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Γεωμετρική ερμηνεία: Εάν στις πλευρές ενός παραλληλογράμμου αντιστοιχηθούν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$, τότε οι δύο διαγώνιές του αντιστοιχούν στα διανύσματα $(\vec{a} + \vec{b})$

και $(\vec{a} - \vec{b})$. Είναι γεωμετρικά γνωστό πως, εάν οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου γίνουν κάθετες, τότε το σχήμα μετατρέπεται σε ρόμβο, του οποίου όλες οι πλευρές είναι ίσες, άρα $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.5

Να αποδείξετε πως το αποτέλεσμα του εξωτερικού γινομένου τριών διανυσμάτων της μορφής $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{b}$ και $\vec{c}$ και μάλιστα ισχύει: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

Λύση

Το εξωτερικό γινόμενο $\vec{b} \times \vec{c}$ θα είναι ένα διάνυσμα, έστω $\vec{d}$, το οποίο θα είναι κάθετο στο επίπεδο (bc) των διανυσμάτων $\vec{b}$ και $\vec{c}$. Κατά συνέπεια, το ζητούμενο εξωτερικό γινόμενο $\vec{a} \times \vec{d}$ θα είναι κάθετο στο επίπεδο (ad) , άρα θα βρίσκεται υποχρεωτικά στο επίπεδο (bc) . Έτσι λοιπόν θα μπορεί να αναλύεται σε συνιστώσες του $\vec{b}$ και $\vec{c}$, δηλαδή να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = m\vec{b} + n\vec{c}$$

όπου m και n προσδιοριστέα βαθμωτά μεγέθη. Αν προσπαθήσουμε να εκφράσουμε το $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ με τη μορφή ορίζουσας, θα πάρουμε

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Υπολογίζοντας τη συνιστώσα $\hat{i}$ από την παραπάνω σύνθετη ορίζουσα, παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = a_2(b_1c_2 - b_2c_1) + a_3(b_1c_3 - b_3c_1) \\ = (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1$$

όπου προσθαφαιρώντας τον όρο $a_1b_1c_1$ καταλήγουμε στο:

$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 = (\vec{a} \cdot \vec{c})b_1 - (\vec{a} \cdot \vec{b})c_1$$

Ομοίως και κυκλικά για τις άλλες δύο συνιστώσες $\hat{j}$ και $\hat{k}$ προκύπτουν αντίστοιχα τα αποτελέσματα

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})b_2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})c_2, \quad (\vec{a} \cdot \vec{c})b_3 - (\vec{a} \cdot \vec{b})c_3$$

οπότε οι ζητούμενοι συντελεστές m και n είναι: $\boxed{m = \vec{a} \cdot \vec{c} \quad , \quad n = -\vec{a} \cdot \vec{b}}$

Εναλλακτική λύση: Μια άλλη αντιμετώπιση του προβλήματος αποτελεί η παρακάτω τεκμηρίωση, η οποία ενέχει σαφώς λιγότερες πράξεις. Με κατάλληλες στροφές

του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα μπορούσαμε να κατευθύνουμε τον άξονα $\bar{z}$ να ταυτίζεται με την διεύθυνση του διανύσματος $\bar{c}$ και το διάνυσμα $\bar{b}$ να βρίσκεται στο επίπεδο (yz) . Έτσι καταφέρνουμε να γράψουμε τα διανύσματα $\bar{a}, \bar{b}$ και $\bar{c}$ στην οικονομικότερη ανάπτυξη:

$$\begin{cases} \bar{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k} \\ \bar{b} = b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k} \\ \bar{c} = c_3 \hat{k} \end{cases}$$

Τώρα έχουμε:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}) \times \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ανάπτυξη της ορίζουσας αυτής δίνει:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 b_2 c_3 \hat{j} - a_2 b_2 c_3 \hat{k}$$

Για τους λόγους που αναπτύχθηκαν προηγούμενα, το αποτέλεσμα αναμένεται να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\bar{b}$ και $\bar{c}$, δηλαδή:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = m \bar{b} + n \bar{c},$$

οπότε, προσπαθούμε να συνθέσουμε στο αποτέλεσμα τα διανύσματα $\bar{b}$ και $\bar{c}$. Προσθαφαιρώντας τον όρο $a_3 b_3 c_3 \hat{k}$ το αποτέλεσμα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a_3 b_2 c_3 \hat{j} + a_3 b_3 c_3 \hat{k} - a_2 b_2 c_3 \hat{k} - a_3 b_3 c_3 \hat{k} &= a_3 c_3 (b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}) - (a_2 b_2 + a_3 b_3) c_3 \hat{k} \\ &= (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c} \end{aligned}$$

καταλήγοντας έτσι στο ζητούμενο $\boxed{\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c}}$

Σημείωση: Από την υπόθεση $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = m \bar{b} + n \bar{c}$ και πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά και τα δύο μέλη με $\bar{a}$ παίρνουμε:

$$\bar{a} \cdot [\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})] = \bar{a} \cdot (m \bar{b} + n \bar{c}) = m (\bar{a} \cdot \bar{b}) + n (\bar{a} \cdot \bar{c})$$

Αλλά το τριπλό γινόμενο του αριστερού μέλους της σχέσης αυτής είναι μηδενικό (Άσκηση 1.3), οπότε καταλήγουμε στη σχέση:

$$m (\bar{a} \cdot \bar{b}) + n (\bar{a} \cdot \bar{c}) = 0 \implies \frac{m}{n} = -\frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{\bar{a} \cdot \bar{b}}$$

Παρόλο που η σχέση αυτή προσδιορίζει μόνο τον λόγο των δύο αγνώστων συντελεστών m και n , θα μπορούσε κανείς να εξετάσει εάν με $m = \bar{a} \cdot \bar{c}$ και με $n = -\bar{a} \cdot \bar{b}$ επαληθεύεται η ζητούμενη σχέση, πράγμα που ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ 1.6

Να αποδείξετε πως $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

Λύση

A' Μέλος

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta)^2 = a^2 b^2 \sin^2 \theta$$

B' Μέλος

$$a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta)^2 = a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2 \theta = a^2 b^2 (1 - \cos^2 \theta) = a^2 b^2 \sin^2 \theta$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.7

Να αποδείξετε πως $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b} \times \vec{a}$.

Λύση

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \end{vmatrix}$$

Δεδομένου πως η τιμή μιας ορίζουσας δεν αλλάζει εάν προσθέσουμε σε μια γραμμή (L:Line) ή στήλη (C:Column) οποιοδήποτε πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής ή στήλης αντίστοιχα, μπορούμε με τις παρακάτω διαδικασίες να πάρουμε:

$$(L2+L3) \rightarrow L3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \end{vmatrix} = (L2-L3/2) \rightarrow L2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \end{vmatrix}$$

οπότε καταλήγουμε στη σχέση: $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b} \times \vec{a}$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.8

Δίνονται τα τρία διανύσματα του χώρου με καρτεσιανές συντεταγμένες $\vec{a} = (1, \mu, 2)$, $\vec{b} = (-1, -2, 0)$ και $\vec{c} = (1, 4, 4)$. Να προσδιορισθεί η πραγματική σταθερά μ , ώστε τα τρία αυτά διανύσματα να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Ποιος γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ παράγει το διάνυσμα $\vec{c}$;

Λύση

Το συνεπίπεδο των διανυσμάτων απαιτεί γραμμική εξάρτηση του τρίτου από τα άλλα δύο, δηλαδή μηδενισμό της ορίζουσας των συντεταγμένων:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{vmatrix} 1 & \mu & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \implies 1(-8 - 0) - \mu(-4 - 0) + 2(-4 + 2) = 0$$

απ' όπου προκύπτει $-8 + 4\mu - 2 = 0 \implies 4\mu = 12 \implies \boxed{\mu = 3}$

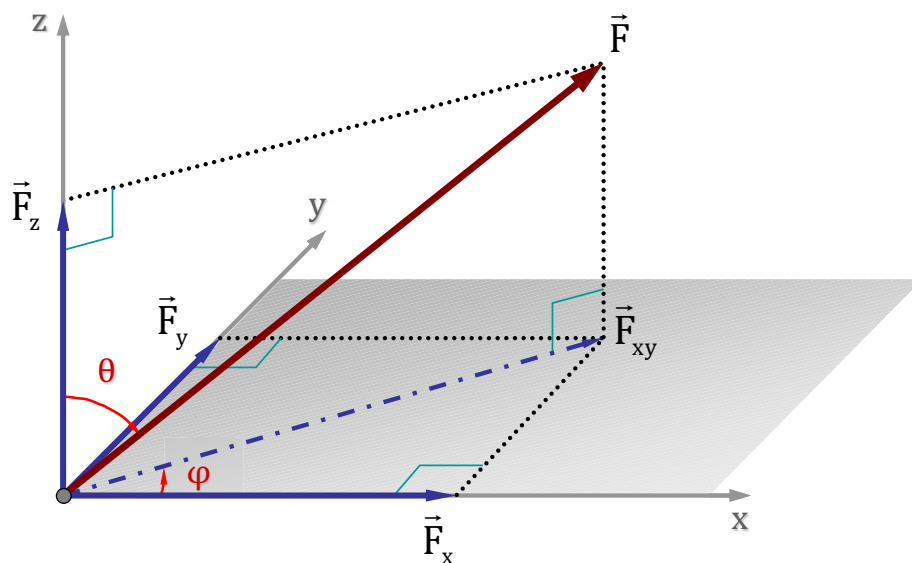
Αναζητώντας τώρα τις σταθερές m και n ώστε να ισχύει ο γραμμικός συνδυασμός $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$, καταλήγουμε στο εξής συμβατό σύστημα εξισώσεων:

$$m(1, 3, 2) + n(-1, -2, 0) = (1, 4, 4) \implies \begin{cases} m - n = 1 \\ 3m - 2n = 4 \\ 2m + 0n = 4 \end{cases} = 0 \implies \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}.$$

1.1.2 Σύνθεση και Ανάλυση Δυνάμεων

ΑΣΚΗΣΗ 1.9

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) οι συνιστώσες της δύναμης $\vec{F}$ έχουν μέτρα $F_x = 4N$, $F_y = 3N$ και $F_z = 5N$ αντίστοιχα. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης F καθώς και οι πολικές γωνίες θ και ϕ (οι οποίες εξ ορισμού είναι αντίστοιχα $\angle(F_z, F)$ και $\angle(F_x, F_{xy})$).



Λύση

Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης F δίνεται από τις προβολές F_x, F_y, F_z μέσω της σχέσης

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

η οποία απορρέει από τη διπλή εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα αντίστοιχα ορθογώνια τρίγωνα (βλέπε Σχήμα)

$$F = \sqrt{F_{xy}^2 + F_z^2} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}N$$

Για τις ζητούμενες γωνίες ισχύει:

$$\cos \theta = \frac{F_z}{F} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

$$\tan \phi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{3}{4} \iff \phi = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 36.9^\circ$$

Χρήση Εσωτερικού Γινομένου Διανυσμάτων

Ο υπολογισμός των γωνιών μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου των δύο διανυσμάτων που συνθέτουν την ζητούμενη γωνία. Για παράδειγμα η γωνία θ μπορεί να υπολογισθεί από το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{F} \cdot \vec{F}_z$.

$$\theta = \angle(F, F_z)$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{F}_z &= |\vec{F}| |\vec{F}_z| \cos\theta \implies (4, 3, 5) \cdot (0, 0, 5) = (5\sqrt{2}) 5 \cos\theta \\ \implies 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 5 &= 25\sqrt{2} \cos\theta \implies \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ \end{aligned}$$

Καθ' όμοιον τρόπον μπορούν να υπολογισθούν:

$$\phi = \angle(F_x, F_{xy})$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_x \cdot \vec{F}_{xy} &= |\vec{F}_x| |\vec{F}_{xy}| \cos\phi \implies (4, 0, 0) \cdot (4, 3, 0) = 4 \sqrt{4^2 + 3^2} \cos\phi \\ \implies 4 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 &= 20 \cos\phi \implies \cos\phi = \frac{4}{5} \implies \phi = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = 36.9^\circ \end{aligned}$$

$$\omega = \angle(F, F_x)$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{F}_x &= |\vec{F}| |\vec{F}_x| \cos\omega \implies (4, 3, 5) \cdot (4, 0, 0) = (5\sqrt{2}) 4 \cos\omega \\ \implies 4 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 &= 20\sqrt{2} \cos\omega \implies \cos\omega = \frac{4}{5\sqrt{2}} \implies \omega = \arccos\left(\frac{4\sqrt{2}}{10}\right) = 55.6^\circ \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.10

Να βρεθεί η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{F}_2 = (-2, 1, 1)$, $\vec{F}_3 = (1, 1, 2)$ και να υπολογισθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα z .

Λύση

Η συνισταμένη δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1, 2, 0) + (-2, 1, 1) + (1, 1, 2) = (0, 4, 3)$$

Είναι προφανές πως η δύναμη αυτή κείται στο επίπεδο (y, z) . Για την ζητούμενη γωνία:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \hat{k} &= |\vec{F}| |\hat{k}| \cos\theta \implies (0, 4, 3) \cdot (0, 0, 1) = \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot 1 \cdot \cos\theta \\ \implies 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 &= 5 \cos\theta \implies \cos\theta = \frac{3}{5} \implies \theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = 53.1^\circ \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.11

Η δύναμη του επιπέδου $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες κατά την κατεύθυνση των κάθετων διανυσμάτων $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j}$ και $\vec{v} = -\hat{i} + \hat{j}$.

Λύση

Θα χρειαστεί να προβάλλουμε το διάνυσμα $\vec{F}$ στις δύο ζητούμενες κατευθύνσεις, οπότε θα χρειαστούμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{u}$ και $\hat{v}$, τα οποία είναι αντίστοιχα :

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} \quad \& \quad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j}$$

Οι προβολές F_u και F_v υπολογίζονται ως :

$$F_u = \vec{F} \cdot \hat{u} = (3\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

και

$$F_v = \vec{F} \cdot \hat{v} = (3\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Κατά συνέπεια, η δύναμη $\vec{F}$ μπορεί να γραφεί στη βάση των μοναδιαίων $\hat{u}$ και $\hat{v}$ ως :

$$\vec{F} = \vec{F}_u + \vec{F}_v = F_u \hat{u} + F_v \hat{v} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \hat{u} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{v}$$

Διαπιστώσεις:

(α) Το μέτρο της δύναμης $|\vec{F}|$, όπως αναμένεται, παραμένει αναλλοίωτο και στα δύο συστήματα συντεταγμένων (x, y) και (u, v) :

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_u^2 + F_v^2} = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{2} + \frac{1}{2}} = 5$$

Ουσιαστικά, εδώ πρόκειται για στροφή του ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων γύρω από τον άξονα z.

(β) Οι παραπάνω συνιστώσες με βάση το σύστημα συντεταγμένων (x, y) μπορούν να γραφούν ως :

$$\vec{F}_u = \frac{7\sqrt{2}}{2} \hat{u} = \frac{7\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j}) = -\frac{7\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{7\sqrt{2}}{2} \hat{j}$$

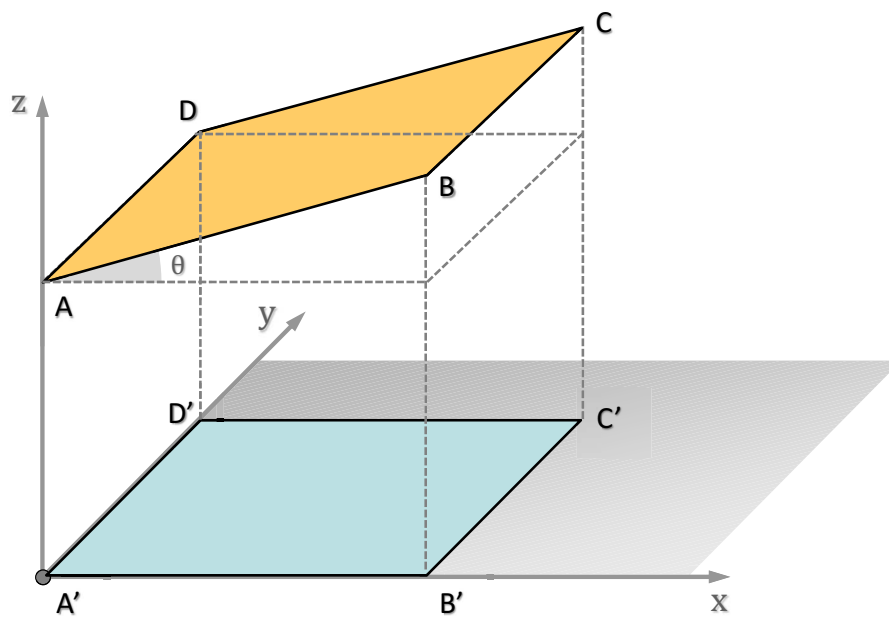
$$\vec{F}_v = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\hat{i} + \hat{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j}$$

Η ορθογωνιότητα των συνιστωσών $\vec{F}_u$ και $\vec{F}_v$ παραμένει, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί από τον μηδενισμό του εσωτερικού γινομένου :

$$\vec{F}_u \cdot \vec{F}_v = \left(-\frac{7\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{7\sqrt{2}}{2} \hat{j} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} \right) = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 0 \quad .$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.12

Δίνονται οι κορυφές ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου $A(0, 0, Z_0)$, $B(X_0, 0, Z_1)$, $C(X_0, Y_0, Z_1)$ και $D(0, Y_0, Z_0)$ όπως φαίνονται στο σχήμα. Αφού βρεθούν οι συντεταγμένες της προβολής του παραλληλογράμμου πάνω στο επίπεδο (XY) , να υπολογισθούν τα εμβαδά αμφοτέρων των παραλληλογράμμων και να βρεθεί η μεταξύ τους σχέση.



Λύση

Οι συντεταγμένες των προβολών των τεσσάρων κορυφών στο επίπεδο (XY) θα διατηρούν τις συντεταγμένες στα x και y αλλά θα έχουν μηδενική τη συντεταγμένη z . Συνεπώς θα είναι: $A'(0, 0, 0)$, $B'(X_0, 0, 0)$, $C'(X_0, Y_0, 0)$ και $D'(0, Y_0, 0)$. Για τα εμβαδά θα ισχύουν:

$$S(ABCD) = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = |\vec{AD}| |\vec{AB}| \sin 90^\circ = Y_0 \sqrt{X_0^2 + (Z_1 - Z_0)^2}$$

$$S(A'B'C'D') = |\vec{A'B'} \times \vec{A'D'}| = |\vec{A'D'}| |\vec{A'B'}| \sin 90^\circ = X_0 Y_0$$

Από το αποτέλεσμα αυτό είναι προφανές πως:

$$\frac{S(A'B'C'D')}{S(ABCD)} = \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + (Z_1 - Z_0)^2}} = \frac{|\vec{A'B'}|}{|\vec{AB}|} = \cos \theta$$

δηλαδή μεταξύ των εμβαδών ισχύει η σχέση :

$$\boxed{S(A'B'C'D') = S(ABCD) \cos \theta}$$

1.1.3 Ροπή και Ζεύγος Δυνάμεων

ΑΣΚΗΣΗ 1.13

Στο σημείο του χώρου $\vec{r} = (1, 1, 1)$ επενεργούν τέσσερις δυνάμεις $\vec{F}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{F}_2 = (2, -1, 0)$, $\vec{F}_3 = (-2, 1, 1)$ και $\vec{F}_4 = (0, 1, 1)$. Να βρεθεί η συνισταμένη ροπή του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων και να εξεταστεί εάν αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από τη συνισταμένη δύναμη με τον ίδιο μοχλοβραχίονα.

Λύση

Η συνισταμένη ροπή των δυνάμεων αυτών θα υπολογισθεί από το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους ροπών ως προς το σημείο αναφοράς (αρχή των αξόνων):

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4 = (\vec{r} \times \vec{F}_1) + (\vec{r} \times \vec{F}_2) + (\vec{r} \times \vec{F}_3) + (\vec{r} \times \vec{F}_4) \\ \Rightarrow \vec{\tau} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \vec{\tau} &= (1, 0, -1) + (1, 2, -3) + (0, -3, 3) + (0, -1, 1) = (2, -2, 0) \\ \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4 = (2, -2, 0)}\end{aligned}$$

Η ροπή της συνισταμένης δύναμης ως προς το ίδιο σημείο είναι:

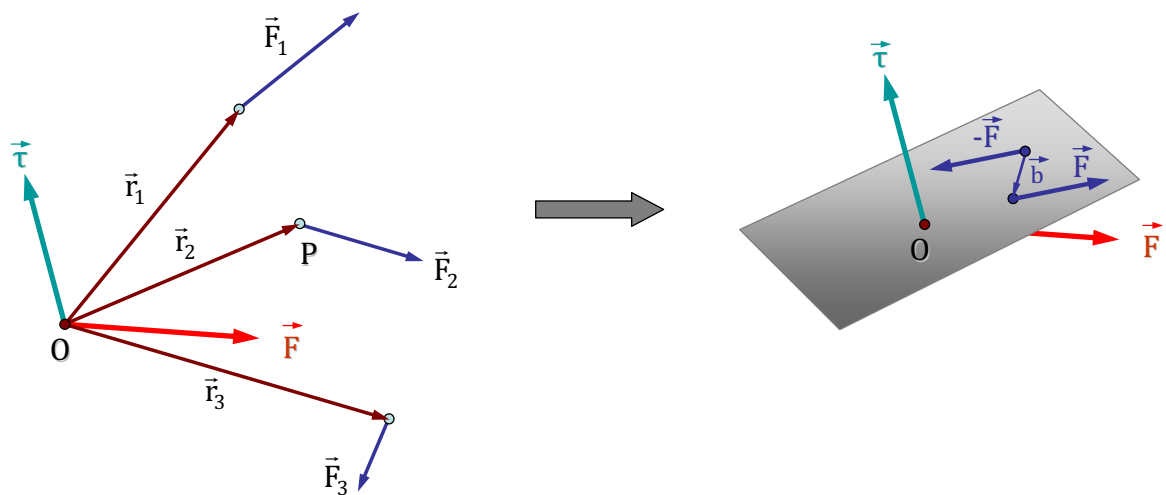
$$\begin{aligned}\vec{r} \times \vec{F} &= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4) = (1, 1, 1) \times (1, 1, 3) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (2, -2, 0) \\ \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (2, -2, 0)}\end{aligned}$$

Η ισοδυναμία είναι προφανής, όπως έχει ελεγχθεί και στη θεωρία, δεδομένου ότι για συντρέχουσες δυνάμεις ισχύει πάντα:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4 = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \vec{r} \times \vec{F}_4 = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4) = \vec{r} \times \vec{F}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.14

Τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{F}_2 = (-1, 2, 1)$ και $\vec{F}_3 = (1, -1, -1)$ επενεργούν σε στερεό σώμα στα σημεία $\vec{r}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{r}_2 = (1, 2, 0)$ και $\vec{r}_3 = (-1, 1, 1)$ αντίστοιχα. Να αντικατασταθούν οι δυνάμεις αυτές με μία δύναμη και ένα ζεύγος δυνάμεων, ώστε να επιφέρουν ισοδύναμα αποτελέσματα ως προς την μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Θεωρείστε για τον υπολογισμό των ροπών την αρχή των αξόνων. Γιατί δεν αρκεί στην περίπτωση αυτή μόνο η συνισταμένη δύναμη και είναι επιβεβλημένη και η εφαρμογή επιπρόσθετου ζεύγους;



Λύση

Η συνισταμένη δύναμη δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1, 1, 0) + (-1, 2, 1) + (1, -1, -1) \Rightarrow \boxed{\vec{F} = (1, 2, 0)}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η συνισταμένη ροπή ως προς την αρχή των αξόνων:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 \\ \Rightarrow \vec{\tau} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \vec{\tau} &= (-1, 1, 0) + (2, -1, 4) + (0, 0, 0) \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = (1, 0, 4)} \end{aligned}$$

Ελέγχουμε στη συνέχεια εάν η ευρεθείσα συνολική ροπή $\vec{\tau} = (1, 0, 4)$ έχει καθετότητα με τη συνισταμένη δύναμη $\vec{F} = (1, 2, 0)$:

$$\vec{F} \cdot \vec{\tau} = (1, 2, 0) \cdot (1, 0, 4) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 1 \neq 0$$

Συνάγουμε λοιπόν το συμπέρασμα πως η συνολική ροπή **δεν είναι κάθετη** στην συνισταμένη δύναμη. Κατά συνέπεια, **δεν υπάρχει δυνατότητα αντικατάστασης των δυνάμεων με μια μόνο δύναμη**, δεδομένου ότι δεν μπορεί να βρεθεί λύση για τη συνολική ροπή, η οποία ως το αποτέλεσμα του εξωτερικού γινομένου θέσης×δύναμης οφείλει να παρουσιάζει καθετότητα και στα δύο αυτά διανύσματα.

Η αδυναμία εύρεσης λύσης μπορεί να αποδειχτεί μαθηματικά με την παρακάτω σκέψη: Έστω πως υπήρχε διάνυσμα $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ τέτοιο ώστε $\vec{b} \times \vec{F} = \vec{\tau}$. Τότε θα έπρεπε:

$$\vec{b} \times \vec{F} = \vec{\tau} \Rightarrow (b_x, b_y, b_z) \times (F_x, F_y, F_z) = (\tau_x, \tau_y, \tau_z) \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (1, 0, 4)$$

$$\Rightarrow (-2b_z, b_z, 2b_x - b_y) = (1, 0, 4) \Rightarrow \begin{bmatrix} -2b_z = 1 \\ b_z = 0 \\ 2b_x - b_y = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_z = -1/2 \\ b_z = 0 \\ b_x = b_y/2 + 2 \end{bmatrix}$$

όπερ αδύνατον.

Αντικατάσταση με τη Συνισταμένη Δύναμη και Ζεύγος Δυνάμεων

Η ευρεθείσα συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ πρέπει να διέρχεται από την αρχή των αξόνων (σημείο υπολογισμού των ροπών), ώστε να μην συνεισφέρει ως προς την ροπή. Η συνολική ροπή $\vec{\tau}$ μπορεί τότε να αντικατασταθεί από ζεύγος δυνάμεων μέτρου R , το οποίο ως γνωστόν δεν συνεισφέρει στην μεταφορική κίνηση (μηδενική συνισταμένη δύναμη) αλλά μπορεί να προσδώσει την απαιτούμενη ροπή στο σώμα με κατάλληλη επιλογή του μοχλοβραχίονα $\vec{b}$. Το ζεύγος των δυνάμεων αυτών, όπως και το διάνυσμα $\vec{b}$, πρέπει να βρίσκεται σε **επίπεδο κάθετο στην ροπή $\vec{\tau}$** .

Για να βρούμε το επίπεδο (X, Y, Z) το οποίο είναι κάθετο στην ροπή $\vec{\tau} = (1, 0, 4)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, απλά απαιτούμε το εσωτερικό γινόμενο τους να μηδενίζεται, δηλαδή:

$$(X, Y, Z) \cdot (1, 0, 4) = 0 \Rightarrow \boxed{X+4Z=0}$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει το κάθετο επίπεδο στην συνολική ροπή $\vec{\tau}$ και πρέπει να ικανοποιείται τόσο από τις συνιστώσες της δύναμης $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$ όσο και απ' αυτές του μοχλοβραχίονα $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Επιπρόσθετα θα πρέπει $\vec{b} \times \vec{R} = \vec{\tau}$, συνθήκη η οποία εισάγει περιορισμούς στα μέτρα των ζητούμενων διανυσμάτων.

Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά πως η εύρεση του ζητούμενου ζεύγους δυνάμεων χαρακτηρίζεται από **απειρία λύσεων**. Αν επιλέξουμε για παράδειγμα το διάνυσμα του μοχλοβραχίονα να είναι $\vec{b} = (0, 1, 0)$, ώστε να ικανοποιείται η προηγούμενη εξίσωση του κάθετου στην $\vec{\tau}$ επιπέδου, τότε η δύναμη του ζεύγους πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\vec{b} \times \vec{R} = \vec{\tau} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = (1, 0, 4)$$

$$\Rightarrow (R_z, 0, -R_x) = (1, 0, 4) \Rightarrow \begin{pmatrix} R_x = -4 \\ R_z = +1 \end{pmatrix}$$

Κατά συνέπεια, μια λύση του προβλήματος αποτελεί το ζεύγος δυνάμεων

$$\vec{b} \times \vec{R} = (0, 1, 0) \times (-4, 0, 1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.15

Σταθερή δύναμη $\vec{F} = (1, 2, 3)$ μετακινείται από το σημείο (1) του χώρου $\vec{r}_1 = (1, -1, 1)$ στο σημείο (2) $\vec{r}_2 = (2, 2, -1)$. Να υπολογίσετε το παραγόμενο έργο W_{12} της δύναμης αυτής κατά την μετακίνηση $1 \rightarrow 2$.

Λύση

Η μετακίνηση της δύναμης περιγράφεται από το διάνυσμα:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (2, 2, -1) - (1, -1, 1) = (1, 3, -2)$$

Δεδομένου ότι η δύναμη παραμένει σταθερή, το παραγόμενο έργο θα δίνεται απλά από το εσωτερικό γινόμενο:

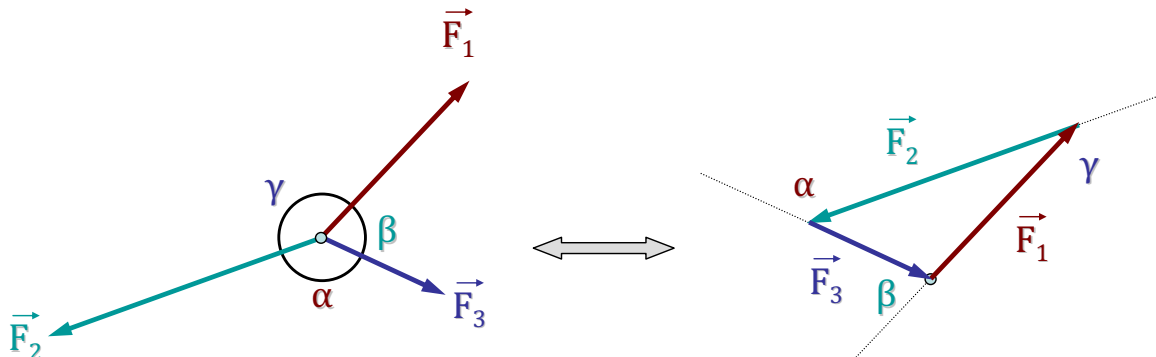
$$W_{12} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = (1\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (1\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = 1$$

στις αντίστοιχες μονάδες έργου.

1.1.4 Στατική Ισορροπία Σώματος

ΑΣΚΗΣΗ 1.16

Τρεις συντρέχουσες δυνάμεις σε υλικό σημείο ισορροπούν. Να αποδείξετε ότι τα μέτρα τους ικανοποιούν τον **νόμο των ημιτόνων**: $F_1/\sin\alpha = F_2/\sin\beta = F_3/\sin\gamma$, όπου α, β, γ οι αντίστοιχες γωνίες που σχηματίζουν τα άλλα δύο διανύσματα.



Λύση

Η ισορροπία τριών δυνάμεων σε υλικό σημείο διασφαλίζει το συνεπίπεδο των δυνάμεων. Από την ισχύ της σχέσης:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

και με παράλληλη μετάθεση των διανυσμάτων σχηματίζεται ένα τρίγωνο των δυνάμεων (βλέπε σχήμα). Γνωρίζουμε όμως, πως το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ισούται με το εμβαδόν του σχηματιζόμενου παραλληλόγραμμου, οπότε για το εν λόγω τρίγωνο των δυνάμεων θα ισχύει:

$$\Delta(F_1, F_2, F_3) = \frac{1}{2} |\vec{F}_1 \times \vec{F}_2| = \frac{1}{2} |\vec{F}_2 \times \vec{F}_3| = \frac{1}{2} |\vec{F}_3 \times \vec{F}_1|$$

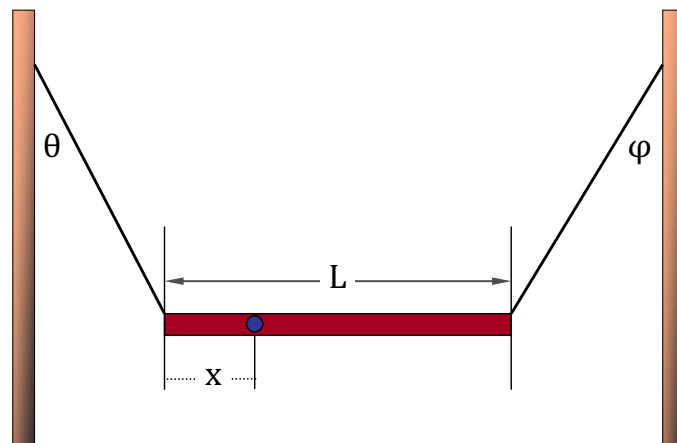
Αντικαθιστώντας τα μέτρα των εξωτερικών γινομένων παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}F_1F_2\sin\gamma = \frac{1}{2}F_2F_3\sin\alpha = \frac{1}{2}F_3F_1\sin\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F_3}{\sin\gamma}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.17

Μια **μη ομογενής ράβδος** κρέμεται και ηρεμεί σε οριζόντια θέση με δύο αβαρή συρματόσχοινα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα συρματόσχοινα σχηματίζουν γωνίες $\theta = 36.0^\circ$ και $\phi = 53.1^\circ$ με την κατακόρυφο. Εάν το μήκος L της ράβδου είναι 6.10 m , να υπολογίσετε την απόσταση x από το αριστερό άκρο της ράβδου μέχρι το κέντρο μάζας. (Άσκηση 12.31 Halliday-Resnick-Walker)



Λύση

Οι ασκούμενες στη ράβδο δυνάμεις, όλες άγνωστες ως προς το μέτρο, είναι:

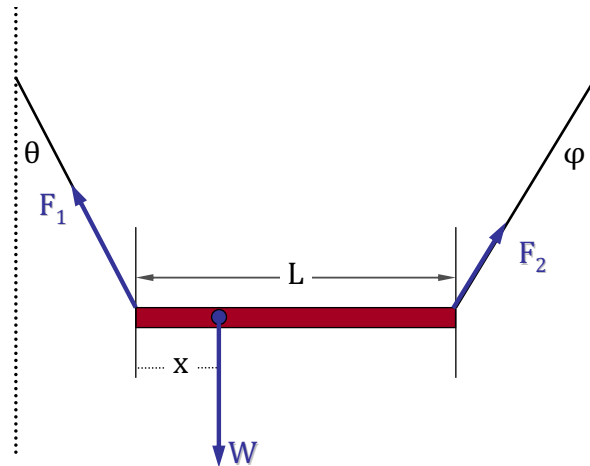
1. Η δύναμη στο αριστερό άκρο της από το συρματόσχοινο F_1
2. Η δύναμη στο δεξιό άκρο της από το συρματόσχοινο F_2
3. Το βάρος της W σε απόσταση x από το αριστερό της άκρο.

Αναλύοντας τις δυνάμεις F_1 και F_2 σε οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες, και απαιτώντας στατική ισορροπία για τη ράβδο, καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_1\sin\theta + F_2\sin\phi = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1\cos\theta + F_2\cos\phi - W = 0$$

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow -x \cdot W + L \cdot F_2\cos\phi = 0$$



Οι εξισώσεις αυτές δίνουν κατά σειρά :

$$F_1 = F_2 \frac{\sin \phi}{\sin \theta}$$

$$W = F_1 \cos \theta + F_2 \cos \phi \Rightarrow W = F_2 \left[\frac{\sin \phi}{\sin \theta} \cos \theta + \cos \phi \right] = F_2 \frac{\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta}{\sin \theta}$$

$$x = L \frac{F_2 \cos \phi}{W} \Rightarrow x = L \frac{\cos \phi \sin \theta}{\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta} \Rightarrow \boxed{x = L \frac{1}{\tan \phi \cot \theta + 1}}$$

Μετά από αντικατάσταση προκύπτει η παρακάτω αριθμητική τιμή για το x :

$$x = L \frac{1}{\tan \phi \cot \theta + 1} = 6.1 \frac{1}{\tan 53.1^\circ \cot 36.0^\circ + 1} = 2.15 \text{ m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.18

Σώμα μάζας m κρέμεται δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο με το σχοινί 1 και στην οριζόντια οροφή με το σχοινί 2. Το σχοινί 1 σχηματίζει γωνία ϕ ενώ το σχοινί 2 σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Για σταθερή γωνία ϕ , να βρεθεί η τιμή της θ που ελαχιστοποιεί την τάση στο σχοινί 2. Πόση είναι η ελάχιστη αυτή τάση ;

(Άσκηση 12.60 Halliday-Resnick-Walker)

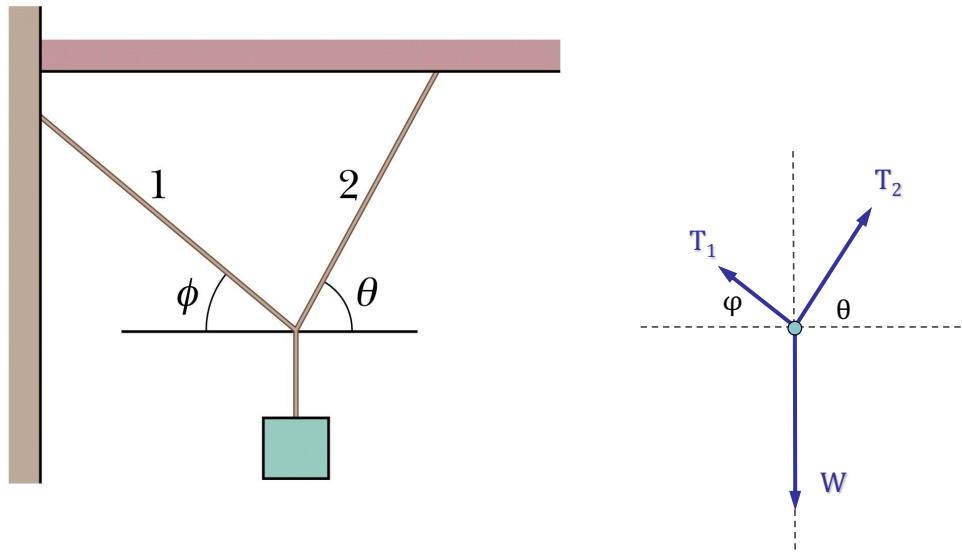
Λύση

Εάν θεωρήσουμε τις τάσεις T_1 και T_2 αντίστοιχα στα σχοινιά 1 και 2, τότε η ισορροπία του σώματος δίνει τις παρακάτω εξισώσεις για τις συνιστώσες δυνάμεις σε κατακόρυφη και οριζόντια κατεύθυνση :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \sin \phi + T_2 \sin \theta = W \\ T_1 \cos \phi = T_2 \cos \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{T_1 \sin \phi}{T_1 \cos \phi} = \frac{W - T_2 \sin \theta}{T_2 \cos \theta} \Rightarrow \tan \phi = \frac{W - T_2 \sin \theta}{T_2 \cos \theta}$$

Επιλύοντας την εξίσωση αυτή ως προς T_2 καταλήγουμε στη σχέση :

$$T_2 = \frac{W}{\sin \theta + \cos \theta \tan \phi} = \frac{mg}{\sin \theta + \cos \theta \tan \phi}$$



Για σταθερή μάζα m και γωνία ϕ , η T_2 εξαρτάται μόνο από τη γωνία θ . Η εύρεση του ακρότατου της συνάρτησης αυτής θα δώσει τη ζητούμενη τιμή της γωνίας:

$$\frac{\partial T_2}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{-mg}{(\sin\theta + \cos\theta \tan\phi)^2} (\cos\theta - \sin\theta \tan\phi) = 0$$

Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται όταν $\sin\theta \tan\phi = \cos\theta$, δηλαδή όταν:

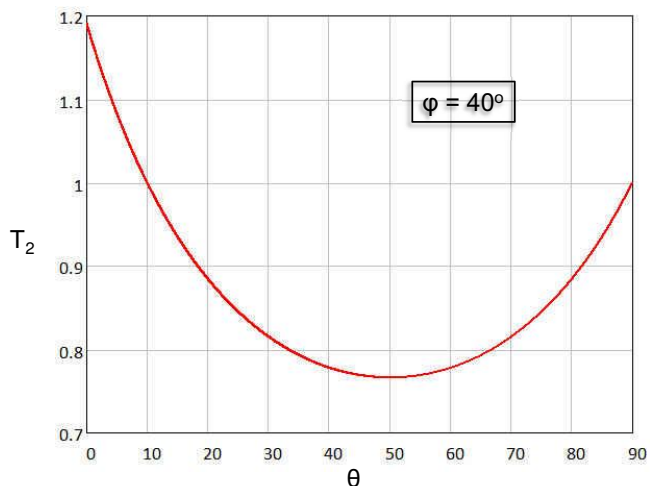
$$\tan\theta \tan\phi = 1 \Rightarrow \tan\theta = \cot\phi \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \phi}$$

Η ελάχιστη τάση T_2^{min} στην περίπτωση αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$T_2^{min} = T_2(\theta = \frac{\pi}{2} - \phi) = \frac{mg}{\sin(\pi/2 - \phi) + \cos(\pi/2 - \phi) \tan\phi} = \frac{mg}{\cos\phi + \sin\phi \tan\phi}$$

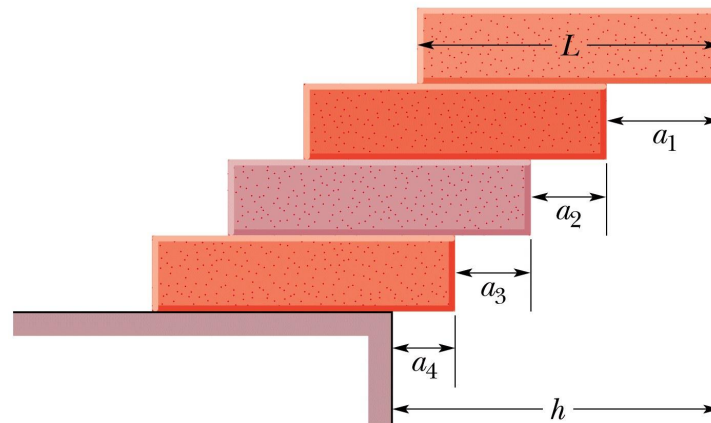
$$\Rightarrow \boxed{T_2^{min} = mg \cos\phi}$$

Στην γενική περίπτωση, η εξάρτηση της T_2 από τη γωνία θ , για σταθερή ϕ , δίνεται από τη σχέση που βρέθηκε προηγούμενα. Παράδειγμα της εξάρτησης αυτής για $\phi = 40^\circ$ δίνεται στο διπλανό διάγραμμα, όπου το ελάχιστο για την T_2 (εκπεφρασμένη σε μονάδες βάρους $W = mg$) βρίσκεται όντως στο $\theta = 90^\circ - \phi = 50^\circ$.



ΑΣΚΗΣΗ 1.19

Τέσσερα τούβλα μήκους L , όμοια και ομογενή, στοιβάζονται το ένα πάνω στο άλλο, όπως φαίνονται στο σχήμα, με τέτοιο τρόπο ώστε μέρος από το καθένα να προεξέχει από το προηγούμενο. Να βρείτε, σαν συνάρτηση του L , τις μέγιστες τιμές για τα a_1, a_2, a_3, a_4 και του $h = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, έτσι ώστε η στοιβάδα να βρίσκεται σε ισορροπία.
(Άσκηση 12.63 Halliday-Resnick-Walker)



Λύση

Το κέντρο βάρους του ανώτερου σώματος πρέπει οριακά να καλύπτεται από το δεξιό άκρο του υποκείμενου σώματος. Κατά συνέπεια $a_1 = L/2$. Για $n = 2$ τούβλα, το κέντρο βάρους του συστήματος βρίσκεται στο μέσο του $L/2$, άρα $a_2 = 1/2 \times L/2 = L/4$. Στην γενική περίπτωση που έχουμε n συνολικά σώματα, δηλαδή $(n - 1)$ υπερκείμενα και ένα σώμα υποκείμενο, το κέντρο βάρους θα υπολογίζεται από τη σχέση ισορροπίας:

$$(n - 1)mg a_n = mg\left(\frac{L}{2} - a_n\right) \Rightarrow n a_n = \frac{L}{2} \Rightarrow a_n = \frac{L}{2n}$$

δηλαδή για τα τέσσερα τούβλα ισχύει:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \rightarrow a_1 = L/2 \\ n = 2 \rightarrow a_2 = L/4 \\ n = 3 \rightarrow a_3 = L/6 \\ n = 4 \rightarrow a_4 = L/8 \end{array} \right\}$$

και συνεπώς

$$h = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{h = \frac{25}{24}L}$$

Στη γενική περίπτωση που στοιβάζονται n συνολικά σώματα, ή μέγιστη απόσταση h που μπορεί να επιτευχθεί χωρίς να ανατραπούν τα σώματα θα δίνεται από τη σχέση:

$$h = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \boxed{h = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}$$

1.2 Συστήματα Συντεταγμένων

ΑΣΚΗΣΗ 1.20

Δίδεται το σημείο $(1, -1, 1)$ των Καρτεσιανών συντεταγμένων. Ποιες είναι οι αντίστοιχες σφαιρικές του συντεταγμένες;

Λύση

Οι σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ \phi &= \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{7\pi}{4} \\ \theta &= \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right) = 54.7^\circ\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\theta = \operatorname{acos}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54.7^\circ$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.21

Αντίστροφα, το σημείο $(\rho, \phi, \theta) = (3, \pi/6, \pi/4)$ των σφαιρικών συντεταγμένων, να εκφραστεί σε Καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες.

Λύση

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 3 \\ \phi = \pi/6 = 30^\circ \\ \theta = \pi/4 = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \sin\theta \cos\phi = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ y = \rho \sin\theta \sin\phi = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ z = \rho \cos\theta = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 3 \\ \phi = \pi/6 = 30^\circ \\ \theta = \pi/4 = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \rho \sin\theta = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \phi = \phi = \pi/6 \\ z = \rho \cos\theta = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\}$$

Άρα οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$, οι δε αντίστοιχες κυλινδρικές $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \pi/6, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.22

Δίδεται σε πολικές συντεταγμένες η εξίσωση $r = 8 \cos \phi$. Τι εκφράζει η εξίσωση αυτή;

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με r καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$r = 8 \cos \phi \implies r^2 = 8r \cos \phi$$

Γνωρίζοντας πως για τις πολικές συντεταγμένες $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ x = r \cos \phi \end{cases}$ η εξίσωση διαμορφώνεται ως:

$$x^2 + y^2 = 8x \implies x^2 - 8x + y^2 = 0 \implies (x^2 - 8x + 16) + y^2 = 16 \implies (x - 4)^2 + y^2 = 4^2$$

Κατά συνέπεια, η εν λόγω εξίσωση παριστά έναν κύκλο στο επίπεδο XY με κέντρο το $(4, 0)$ και ακτίνα 4.

ΑΣΚΗΣΗ 1.23

Τι εκφράζει η επιφάνεια $z = 2r$ των κυλινδρικών συντεταγμένων;

Λύση

Τετραγωνίζοντας αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης αυτής και λαμβάνοντας υπόψη πως $r^2 = x^2 + y^2$ καταλήγουμε στη σχέση:

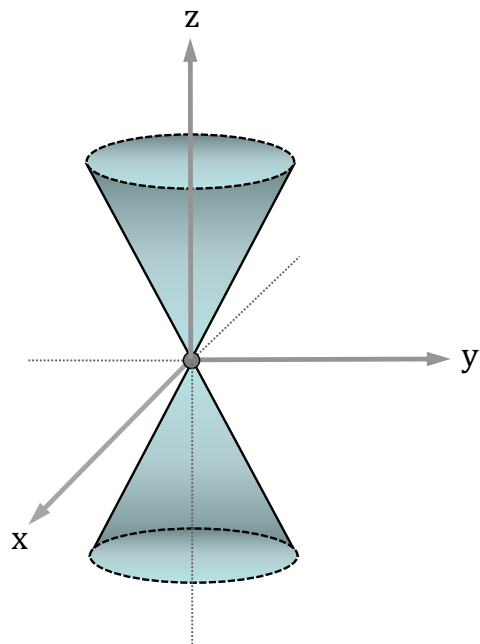
$$z = 2r \implies z^2 = 4r^2 \implies z^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$\implies z = \pm 2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

Κάθε μια από τις εξισώσεις:

$$z = \begin{cases} +2 \sqrt{x^2 + y^2} \\ -2 \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

εκφράζει την επιφάνεια ενός κώνου στον τρισδιάστατο χώρο. Η γωνία κορυφής των κωνικών αυτών επιφανειών καθορίζεται από τη σταθερά αναλογίας μεταξύ z και r . Στην παρούσα άσκηση, η εφαπτομένη της γωνίας αυτής είναι $1/2$.



ΑΣΚΗΣΗ 1.24

Πώς εκφράζεται η προηγούμενη εξίσωση των κυλινδρικών συντεταγμένων $z = 2r$ (κωνικές επιφάνειες) σε σφαιρικές συντεταγμένες;

Λύση

Επειδή οι συντεταγμένες r και z των κυλινδρικών συντεταγμένων εκφράζονται αντιστοιχα μέσω των σφαιρικών με τις σχέσεις $\begin{cases} r = \rho \sin\theta \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$, η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$z = 2r \implies \rho \cos\theta = 2\rho \sin\theta \implies \tan\theta = \frac{1}{2} \implies \theta \simeq 26.6^\circ$$

Γενικά, η εξίσωση $\theta = \text{const}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι ο γεωμετρικός τόπος μιας κωνικής επιφάνειας, εκτεινόμενης και προς τα δύο ημισφαίρια, με γωνία κορυφής θ .

ΑΣΚΗΣΗ 1.25

Ποια η γεωμετρική σημασία των παρακάτω απεικονίσεων σε κυλινδρικές συντεταγμένες;

1. $(r, \phi, z) \longrightarrow (r, \phi, -z)$
2. $(r, \phi, z) \longrightarrow (r, \phi + \pi, z)$
3. $(r, \phi, z) \longrightarrow (r, \phi + \pi, -z)$

Ποιες είναι οι αντίστοιχες απεικονίσεις σε σφαιρικές συντεταγμένες;

Λύση

1. Κατοπτρισμός σημείου ως προς το επίπεδο XY . Η αντίστοιχη απεικόνιση σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\rho, \phi, \theta) \longrightarrow (\rho, \phi, \pi - \theta)$
2. Στροφή κατά γωνία π ως προς τον άξονα z . Η αντίστοιχη απεικόνιση σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\rho, \phi, \theta) \longrightarrow (\rho, \phi + \pi, \theta)$
3. Το συμμετρικό του σημείου ως προς την αρχή των αξόνων. Η αντίστοιχη απεικόνιση σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\rho, \phi, \theta) \longrightarrow (\rho, \phi + \pi, \pi - \theta)$

Παρατηρείστε πως η απεικόνιση (3) είναι το αποτέλεσμα των δύο προηγούμενων απεικονίσεων (1) + (2), χωρίς η σειρά δράσης να παίζει κάποιο ρόλο, δηλαδή ισχύει $(3) = (1) + (2) = (2) + (1)$.

1.3 Παραγωγή

1.3.1 Μερικές Παράγωγοι

ΑΣΚΗΣΗ 1.26

Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ για τις συναρτήσεις:

1. $f(x, y) = x^2y + y^3$
2. $f(x, y) = e^{-x/y}$
3. $f(x, y) = \cos(xy) + x\sin(y)$

Λύση

1. Για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2y + y^3$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy + 0 = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 3y^2\end{aligned}$$

2. Για τη συνάρτηση $f(x, y) = e^{-x/y}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-x/y} \left(\frac{-1}{y} \right) = -\frac{1}{y} e^{-x/y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{-x/y} \left(\frac{x}{y^2} \right) = \frac{x}{y^2} e^{-x/y}\end{aligned}$$

3. Για τη συνάρτηση $f(x, y) = \cos(xy) + x\sin(y)$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -\sin(xy) \cdot y + \sin(y) = -y\sin(xy) + \sin(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\sin(xy) \cdot x + x\cos(y) = -x\sin(xy) + x\cos(y)\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.27

Δίδεται η συνάρτηση $g(u, v) = u/v + e^{u/v}$, όπου $u = u(t) = t^2$ και $v = v(t) = t$. Με βάση τον κανόνα της αλυσίδας να υπολογισθεί η ολική παράγωγος $\frac{dg}{dt}$ και το αποτέλεσμα να επαληθευθεί με άμεση αντικατάσταση των $u(t)$ και $v(t)$ στην συνάρτηση $g(u, v)$.

Λύση

Με βάση τον κανόνα της αλυσίδας ισχύει:

$$dg/dt = (\partial g/\partial u)(du/dt) + (\partial g/\partial v)(dv/dt)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow dg/gt &= \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v} e^{u/v} \right) (du/dt) + \left(-\frac{u}{v^2} - \frac{u}{v^2} e^{u/v} \right) (dv/dt) \\
\Rightarrow dg/gt &= \frac{1}{v} (1 + e^{u/v}) (du/dt) - \frac{u}{v^2} (1 + e^{u/v}) (dv/dt) \\
\Rightarrow dg/gt &= \frac{1}{t} (1 + e^t) 2t - 1 \cdot (1 + e^t) \cdot 1 = 1 + e^t \\
\Rightarrow \boxed{\frac{dg}{gt} &= 1 + e^t}
\end{aligned}$$

Επαλήθευση

Με άμεση αντικατάσταση των $u(t)$ και $v(t)$ στην συνάρτηση $g(u, v)$ αυτή γίνεται:

$$g(t) = g[u(t), v(t)] = \frac{t^2}{t} + e^{t^2/t} = t + e^t$$

οπότε η παράγωγος υπολογίζεται άμεσα ως $dg/dt = d(t + e^t)/dt = 1 + e^t$

ΑΣΚΗΣΗ 1.28

Για τη συνάρτηση $w(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ και με βάση τον κανόνα της αλυσίδας να υπολογισθεί η ολική παράγωγος $\frac{dw}{dt}$, εάν είναι γνωστό πως $x = x(t) = e^t \cos t$, $y = y(t) = e^t \sin t$ και $z = z(t) = e^t$. Το αποτέλεσμα να επαληθευθεί με άμεση αντικατάσταση των $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ στην συνάρτηση $w(x, y, z)$.

Λύση

Ο κανόνας της αλυσίδας που ισχύει στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Υπολογίζουμε κάθε έναν όρο του παραπάνω αθροίσματος ξεχωριστά:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} = (2x)(e^t \cos t - e^t \sin t) = 2e^t \cos t (e^t \cos t - e^t \sin t) = 2e^{2t} (\cos^2 t - \sin t \cos t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2y)(e^t \sin t + e^t \cos t) = 2e^t \sin t (e^t \sin t + e^t \cos t) = 2e^{2t} (\sin^2 t + \sin t \cos t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} = (2z)(e^t) = 2e^t (e^t) = 2e^{2t}$$

Κατά συνέπεια, η ολική παράγωγος είναι:

$$\frac{dw}{dt} = 2e^{2t} (\cos^2 t - \sin t \cos t) + 2e^{2t} (\sin^2 t + \sin t \cos t) + 2e^{2t} = 4e^{2t}$$

Επαλήθευση

Άμεση αντικατάσταση των $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ στην συνάρτηση $w(x, y, z)$ δίνει:

$$w(t) = w[x(t), y(t), z(t)] = (e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2 + (e^t)^2 = e^{2t} (\cos^2 t + \sin^2 t) + e^{2t} = 2e^{2t}$$

οπότε εύκολα εξάγεται πως

$$\frac{dw}{dt} = 4e^{2t}$$

1.3.2 Παράγωγος ανά Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 1.29

Για το ένα βαθμωτό πεδίο του χώρου ισχύει $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$. Να υπολογισθεί η κλίση ∇f του πεδίου αυτού και να ευρεθεί η παράγωγός του κατά την κατεύθυνση $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{k}$ στο σημείο $P(2, 1, 3)$.

Λύση

Με βάση τον ορισμό της κλίσης βαθμωτού πεδίου θα ισχύει:

$$\nabla f = (\partial f / \partial x) \hat{i} + (\partial f / \partial y) \hat{j} + (\partial f / \partial z) \hat{k} \implies \nabla f = 4x\hat{i} + 6y\hat{j} + 2z\hat{k}$$

Ως γνωστόν, η παράγωγος κατά μοναδιαία κατεύθυνση $\hat{e}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο $(\nabla f) \cdot \hat{e}$. Επειδή όμως το δοθέν διάνυσμα $\vec{a}$ δεν είναι μοναδιαίο, η ζητούμενη παράγωγος του πεδίου κατά την κατεύθυνση $\vec{a}$ είναι:

$$(\nabla f) \cdot \frac{\vec{a}}{a} = (4x\hat{i} + 6y\hat{j} + 2z\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{k}) \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4x - 4z}{\sqrt{5}}$$

Οπότε στο ζητούμενο σημείο $P(2, 1, 3)$ η παράγωγος υπολογίζεται ίση με $-4/\sqrt{5}$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.30

Για το διανυσματικό πεδίο του χώρου $\vec{V} = y^2\hat{i} + z^2\hat{j} + x^2\hat{k}$ να υπολογισθεί η απόκλιση του στο σημείο $P(1, 1, 1)$. Ποιος ο στροβιλισμός του πεδίου αυτού;

Λύση

Η απόκλιση (div) του διανυσματικού πεδίου είναι το βαθμωτό μέγεθος:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \partial V_x / \partial x + \partial V_y / \partial y + \partial V_z / \partial z$$

οπότε

$$\nabla \cdot \vec{V} = \partial y^2 / \partial x + \partial z^2 / \partial y + \partial x^2 / \partial z = 0 + 0 + 0 = 0$$

Άρα η απόκλιση του πεδίου είναι μηδενική σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου.

Για τον στροβιλισμό (*curl*) του πεδίου ισχύει:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix}$$

$$\implies \nabla \times \vec{V} = -2z\hat{i} - 2x\hat{j} - 2y\hat{k}$$

Στο σημείο $P(1, 1, 1)$ ο στροβιλισμός του πεδίου είναι λοιπόν:

$$\nabla \times \vec{V}(P) = -2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

Όπως φαίνεται από το παραπάνω αποτέλεσμα ο στροβιλισμός στο πεδίο αυτό είναι διάφορος του μηδενός, αυξανόμενος κατ' απόλυτη τιμή καθώς το σημείο απομακρύνεται της αρχής των αξόνων. Μηδενισμός του στροβιλισμού υπάρχει μόνο στην αρχή των αξόνων.

ΑΣΚΗΣΗ 1.31

Η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου $f(x, y, z)$ αποδίδεται από τη σχέση $\nabla f(x, y, z) = 2xy\hat{i} + (x^2 + z)\hat{j} + y\hat{k}$. Μπορείτε να προσδιορίσετε το βαθμωτό πεδίο $f(x, y, z)$;

Λύση

Η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου δίνεται εξ ορισμού από τη σχέση

$$\nabla f(x, y, z) = (\partial f/\partial x)\hat{i} + (\partial f/\partial y)\hat{j} + (\partial f/\partial z)\hat{k}$$

και κατά συνέπεια θα ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\partial f/\partial x = 2xy \quad \partial f/\partial y = x^2 + z \quad \partial f/\partial z = y.$$

Ξεκινώντας από την πρώτη σχέση και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\partial f/\partial x = 2xy \implies f(x, y, z) = x^2 y + g(y, z)$$

Η εισαγωγή της άγνωστης συνάρτησης $g(y, z)$ ισοδυναμεί με την σταθερά της ολοκλήρωσης. Η μερική παράγωγος ως προς y του παραπάνω αποτελέσματος, κάνοντας χρήση και της ισότητας της εκφώνησης, δίνει:

$$\partial f/\partial y = x^2 + z \implies \partial[x^2 y + g(y, z)]/\partial y = x^2 + z$$

$$\implies x^2 + \partial g(y, z)/\partial y = x^2 + z \implies \partial g(y, z)/\partial y = z \implies g(y, z) = yz + h(z)$$

Κατά συνέπεια, η άγνωστη συνάρτηση του βαθμωτού πεδίου διαμορφώνεται τώρα στην:

$$f(x, y, z) = x^2 y + yz + h(z)$$

Ομοίως, κάνοντας χρήση και της τρίτης εξίσωσης, έχουμε:

$$\begin{aligned}\partial f / \partial z = y &\implies \partial [x^2 y + yz + h(z)] / \partial z = y \\ \implies 0 + y + h'(z) = y &\implies h'(z) = 0 \implies h(z) = C\end{aligned}$$

Συμπερασματικά, η ζητούμενη συνάρτηση είναι λοιπόν:

$$\boxed{f(x, y, z) = x^2 y + yz + C}$$

Σημείωση

Η εύρεση της βαθμωτής συνάρτησης $f(x, y, z)$ καθίσταται δυνατή, όπως θα συζητηθεί αργότερα, εκ του γεγονότος ότι το δοθέν διανυσματικό πεδίο είναι *ασπρόβιλο*, δηλαδή $\nabla \times \vec{F} = 0$ όπου $\vec{F} = \nabla f(x, y, z)$. Πράγματι, για το δοθέν πεδίο ισχύει:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy & x^2 + z & y \end{vmatrix} \\ \implies \nabla \times \vec{F} &= \hat{i} \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 + z & y \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ 2xy & y \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ 2xy & x^2 + z \end{vmatrix} \\ \implies \nabla \times \vec{F} &= (1 - 1)\hat{i} - (0 - 0)\hat{j} + (2x - 2x)\hat{k} = 0\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.32

Ομοίως, εάν η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου είναι $\nabla f(x, y, z) = yz\hat{i} + xz\hat{j} + (xy + e^z)\hat{k}$, να προσδιορίσετε το βαθμωτό πεδίο $f(x, y, z)$.

Λύση

Ως γνωστόν, η κλίση του βαθμωτού πεδίου δίνεται από τη σχέση

$$\nabla f(x, y, z) = (\partial f / \partial x)\hat{i} + (\partial f / \partial y)\hat{j} + (\partial f / \partial z)\hat{k}$$

οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\partial f / \partial x = yz \qquad \partial f / \partial y = xz \qquad \partial f / \partial z = xy + e^z .$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη σχέση έχουμε:

$$\partial f / \partial x = yz \implies f(x, y, z) = xyz + g(y, z)$$

Όπως και προηγούμενα, η εισαγωγή της άγνωστης συνάρτησης $g(y, z)$ ισοδυναμεί με την σταθερά της ολοκλήρωσης. Η μερική παράγωγος ως προς y του παραπάνω

αποτελέσματος, κάνοντας χρήση και της ισότητας της εκφώνησης, δίνει:

$$\partial f / \partial y = xz \implies \partial [xyz + g(y, z)] / \partial y = xz$$

$$\implies xz + \partial g(y, z) / \partial y = xz \implies \partial g(y, z) / \partial y = 0 \implies g(y, z) = h(z)$$

Έτσι λοιπόν, η άγνωστη συνάρτηση του βαθμωτού πεδίου διαμορφώνεται τώρα στην:

$$f(x, y, z) = xyz + h(z)$$

Ομοίως, κάνοντας χρήση και της τρίτης εξίσωσης, έχουμε:

$$\partial f / \partial z = xy + e^z \implies \partial [xyz + h(z)] / \partial z = xy + e^z$$

$$\implies xy + h'(z) = xy + e^z \implies h'(z) = e^z \implies h(z) = e^z + C$$

Καταληκτικά, η ζητούμενη συνάρτηση είναι λοιπόν:

$$\boxed{f(x, y, z) = xyz + e^z + C}$$

Η επαλήθευση της εκφώνησης με την ευρεθείσα συνάρτηση είναι προφανής. Επίσης, μπορούμε κι εδώ να εξετάσουμε τον μηδενισμό του $\nabla \times [F = \nabla f(x, y, z)]$. Πράγματι, για το δοθέν πεδίο ισχύει:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & xz & xy + e^z \end{vmatrix}$$

$$\implies \nabla \times \vec{F} = \hat{i} \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & xy + e^z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ yz & xy + e^z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ yz & xz \end{vmatrix}$$

$$\implies \nabla \times \vec{F} = (x - x)\hat{i} - (y - y)\hat{j} + (z - z)\hat{k} = 0$$

1.4 Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1.33

Για τα ακόλουθα τρία διανύσματα, πόσο είναι το $3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B})$;

$$\vec{A} = 2.0\hat{i} + 3.0\hat{j} - 4.0\hat{k} \quad \vec{B} = -3.0\hat{i} + 4.0\hat{j} + 2.0\hat{k} \quad \vec{C} = -7.0\hat{i} + 8.0\hat{j}$$

Απάντηση: -540

(Άσκηση 3.38 Halliday-Resnick-Walker)

ΑΣΚΗΣΗ 1.34

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$. (α) Να αποδείξετε ότι το $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{A})$ είναι πάντα μηδέν. (β) Με τι ισούται το μέτρο του $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A})$ αν τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ σχηματίζουν γωνία θ ;

Απάντηση: (β) $A^2 B \sin \theta$

ΑΣΚΗΣΗ 1.35

Να προσδιοριστεί η σταθερά λ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - 4\hat{k}$ και $\vec{c} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ να είναι συνεπίπεδα.

Απάντηση: $\lambda = 5/3$

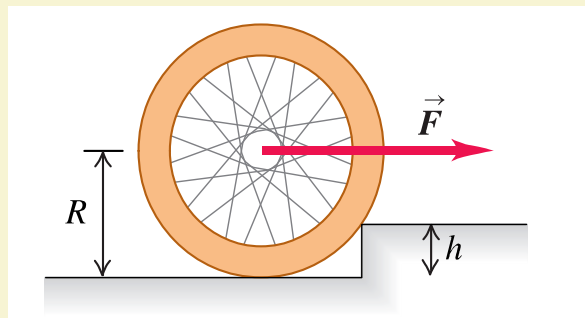
ΑΣΚΗΣΗ 1.36

Οι πλευρές ενός παραλληλεπιπέδου ορίζονται από τα διανύσματα $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{k}$ και $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$. Να αποδειχθεί πως τα διανύσματα αυτά δεν είναι συνεπίπεδα και να υπολογιστεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν.

Απάντηση: $V = 10$

ΑΣΚΗΣΗ 1.37

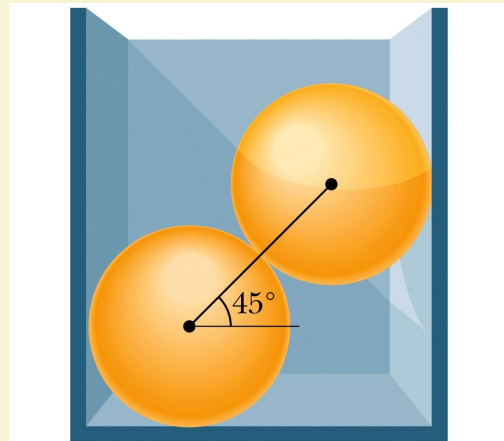
Τροχός ποδηλάτου ακτίνας R και μάζας m προσπαθεί να ανέβει πεζοδρόμιο ύψους h . Ποια είναι η ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη για να συμβεί αυτό όταν: (α) Η δύναμη εφαρμόζεται στο κέντρο του τροχού. (β) Η δύναμη εφαρμόζεται στο πάνω μέρος του τροχού.



Απάντηση: (α) $F_{\min} = mg \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R - h}$, (β) $F_{\min} = mg \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{2R - h}$
 (Άσκηση 11.72 Young-Freedman)

ΑΣΚΗΣΗ 1.38

Οι δύο πανομοιότυπες ομογενείς σφαίρες του σχήματος, κάθε μία μάζας m , ηρεμούν χωρίς τριβή μέσα σε άκαμπτο ορθογώνιο δοχείο. Η ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δύο σφαιρών βρίσκεται σε γωνία 45° ως προς την οριζόντιο. Να βρείτε τα μέτρα των δυνάμεων στις σφαίρες από: (α) το κάτω μέρος του δοχείου, (β) την αριστερή πλευρά του δοχείου, (γ) την δεξιά πλευρά του δοχείου και (δ) μεταξύ τους.



(Υπόδειξη: Η δύναμη της μιας σφαίρας στην άλλη έχει φορέα την ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας τους.)

Απάντηση: (α) $2mg$, (β) mg , (γ) mg , (δ) $\sqrt{2}mg$
 (Άσκηση 12.64 Halliday-Resnick-Walker)

ΑΣΚΗΣΗ 1.39

Εκφράστε την καρτεσιανή επιφάνεια $xz = 1$ σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Απάντηση: $\rho^2 \sin(2\theta) \cos\phi = 2$

ΑΣΚΗΣΗ 1.40

Να προσδιοριστεί η βαθμωτή συνάρτηση $f(x, y, z)$ εάν είναι γνωστό πως η κλίση της ισούται με:

1. $\nabla f = 6x\hat{i} - 4y\hat{j} + 2z\hat{k}$

2. $\nabla f = (y + z)\hat{i} + (z + x)\hat{j} + (x + y)\hat{k}$

Απάντηση: (1) $f(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 + z^2 + C$ (2) $f(x, y, z) = xy + yz + zx + C$

ΑΣΚΗΣΗ 1.41

Να επαληθεύσετε τον κανόνα της αλυσίδας υπολογίζοντας την παράγωγο df/dt για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2/(2 + \cos y)$ εάν δίδεται πως $x(t) = e^t$ και $y(t) = e^{-t}$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.42

Για βαθμωτό πεδίο f να αποδειχθεί πως $\text{curl } \nabla f = \nabla \times (\nabla f) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.43

Δίδεται το διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων $\vec{V} = \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j}$, το ποίο προσεγγίζει την επιφανειακή κυκλική κίνηση του νερού σε δοχείο όταν υπάρχει εκροή στη βάση του. Να αποδειχθεί ότι το διανυσματικό αυτό πεδίο είναι αστρόβιλο.