ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2025-2026

ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

- Ομαλή Σχετική Μεταφορική Κίνηση
- Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου

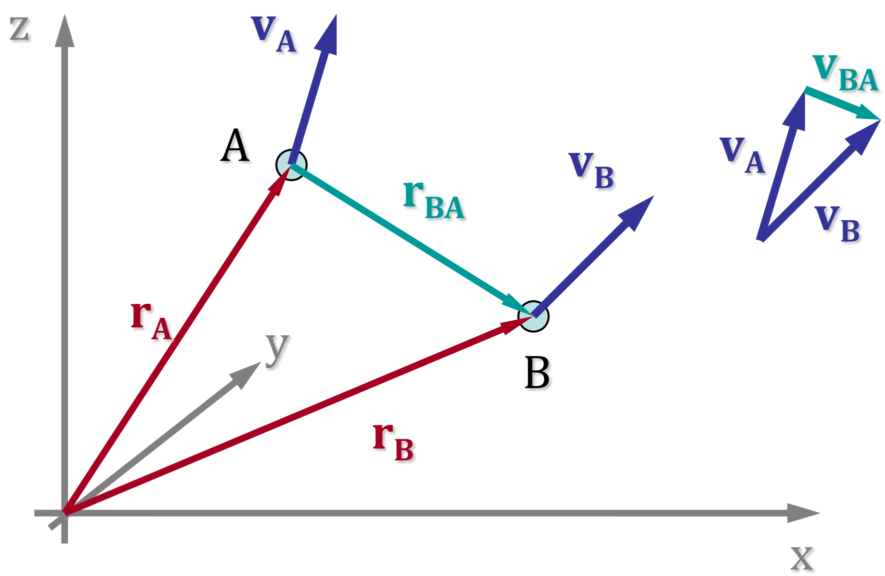
ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

- Μετασχηματισμός Lorentz
- Πείραμα Michelson – Morley
- Αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας
- Ταυτόχρονα Γεγονότα
- Διαστολή Χρόνου & Συστολή Μήκους
- Μετασχηματισμός Ταχυτήτων
- Ορμή και Ενέργεια

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ΦΑΡΑΚΟΣ	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	1.6.2, 3.1	3.9	4.8, 4.9	3.5
ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	Α1, Α2, Α3, Α5	21.1 έως 21.13	37.1 έως 37.12	37.1 έως 37.9

ΣΧΕΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ



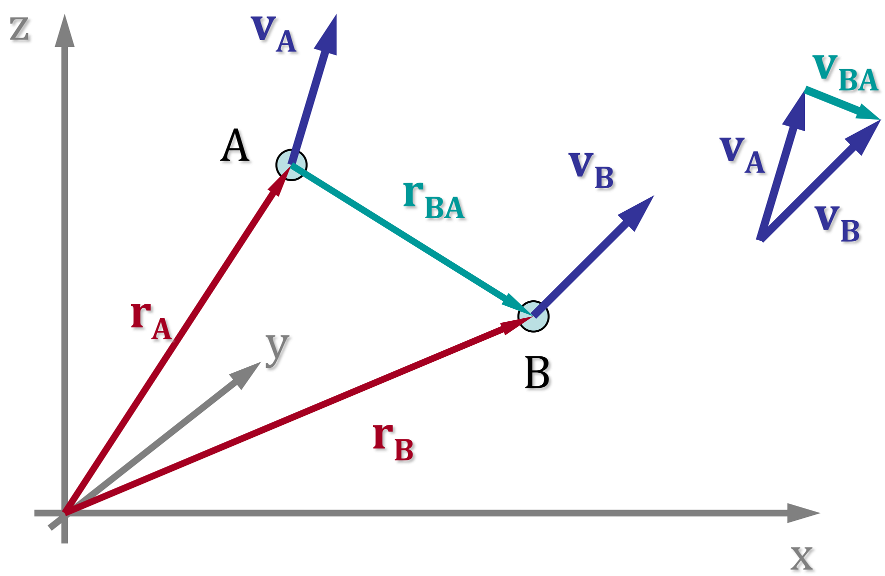
Τα σώματα A και B με διανύσματα θέσης $\mathbf{r_A}$ και $\mathbf{r_B}$ έχουν ταχύτητες $\mathbf{v_A}$ και $\mathbf{v_B}$ αντίστοιχα.

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}\ , \ \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt}$$

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Η σχετική ταχύτητα δύο σωμάτων βρίσκεται από τη διαφορά των σχετικών ταχυτήτων τους ως προς τον παρατηρητή.



Τα σώματα Α και Β με διανύσματα θέσης $\mathbf{r_A}$ και $\mathbf{r_B}$ έχουν ταχύτητες $\mathbf{v_A}$ και $\mathbf{v_B}$ αντίστοιχα.

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}\ , \ \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt}$$

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

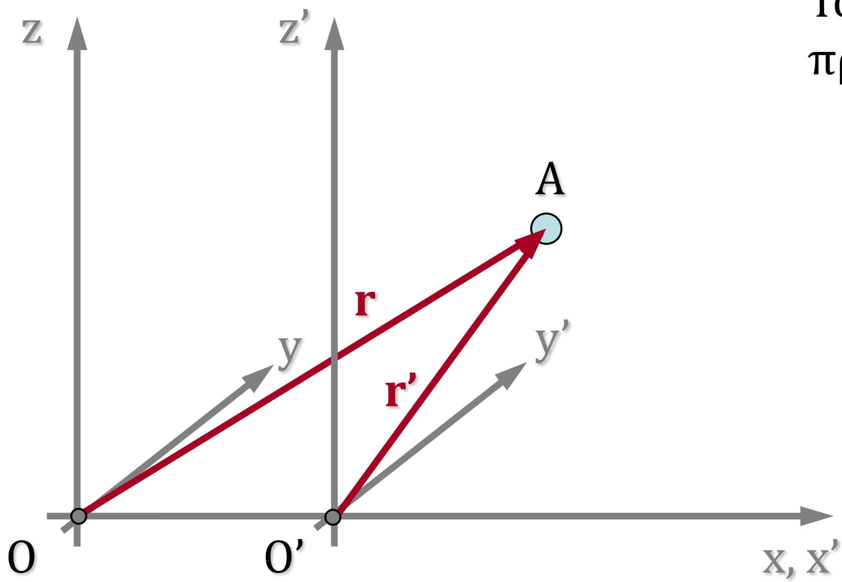
Η σχετική ταχύτητα του Β ως προς το Α ($\mathbf{v_{BA}}$) είναι αντίθετη με την σχετική ταχύτητα του Α ως προς το Β ($\mathbf{v_{AB}}$)

$$\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}$$

Επιτάχυνση

$$\frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) = \frac{d\vec{v}_B}{dt} - \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

ΟΜΑΛΗ ΣΧΕΤΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Το σύστημα O'(x'y'z') κινείται ομαλά ως προς το O(xyz) με σταθερή ταχύτητα v.

$$\vec{v} = \vec{v}_{OO'}\ ,\ \vec{r} = \overrightarrow{OA},\ \vec{r}' = \overrightarrow{O'A}$$

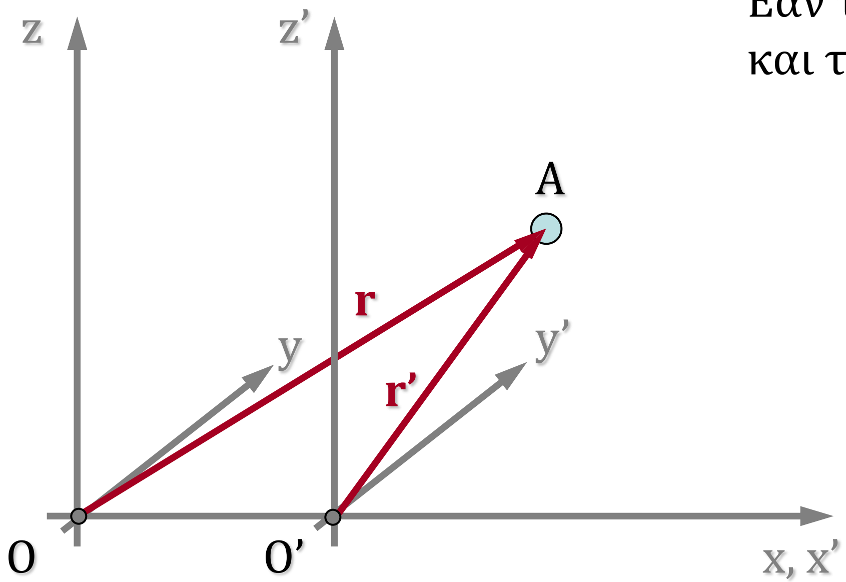
$$\vec{r}' = \vec{r} - \overrightarrow{OO'} = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$\boxed{\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t}$$

Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}$$

ΟΜΑΛΗ ΣΧΕΤΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Εάν το κινητό έχει ταχύτητα **u** στο σύστημα O και ταχύτητα **u’** στο O’, τότε

$$\vec{v} = \vec{v}_{OO'}\ ,\ \vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt},\ \vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\boxed{\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}}$$

Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x - v \\ u'_y &= u_y \\ u'_z &= u_z \\ \vec{a}' &= \vec{a} \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} u_x &= u'_x + v \\ u_y &= u'_y \\ u_z &= u'_z \\ \vec{a} &= \vec{a}' \end{aligned}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

Παρόλο που οι Γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί δεν είχαν πρόβλημα με την Νευτώνεια Μηχανική, οι εξισώσεις Maxwell στον ηλεκτρομαγνητισμό δεν παρέμεναν αναλλοίωτες για διαφορετικούς αδρανειακούς παρατηρητές.

Οι δυνατές εναλλακτικές που παρουσιάζονταν ήταν οι εξής:

1. Διατήρηση της γενικευμένης ισχύος των Γαλιλαϊκών μετασχηματισμών στη Νευτώνεια Μηχανική αλλά όχι στην Ηλεκτροδυναμική. Εάν η εναλλακτική αυτή ήταν σωστή, θα έπρεπε να βρεθεί κάποιο προτιμούμενο αδρανειακό σύστημα για τη δεύτερη περίπτωση (αιθέρας).

2. Η ορθότητα των Γαλιλαϊκών μετασχηματισμών είναι δοσμένη, αλλά οι εξισώσεις Maxwell είναι λανθασμένες.

3. Γενικευμένη ισχύς των φυσικών νόμων για όλα τα αδρανειακά συστήματα με ταυτόχρονη αναθεώρηση των Γαλιλαϊκών μετασχηματισμών.

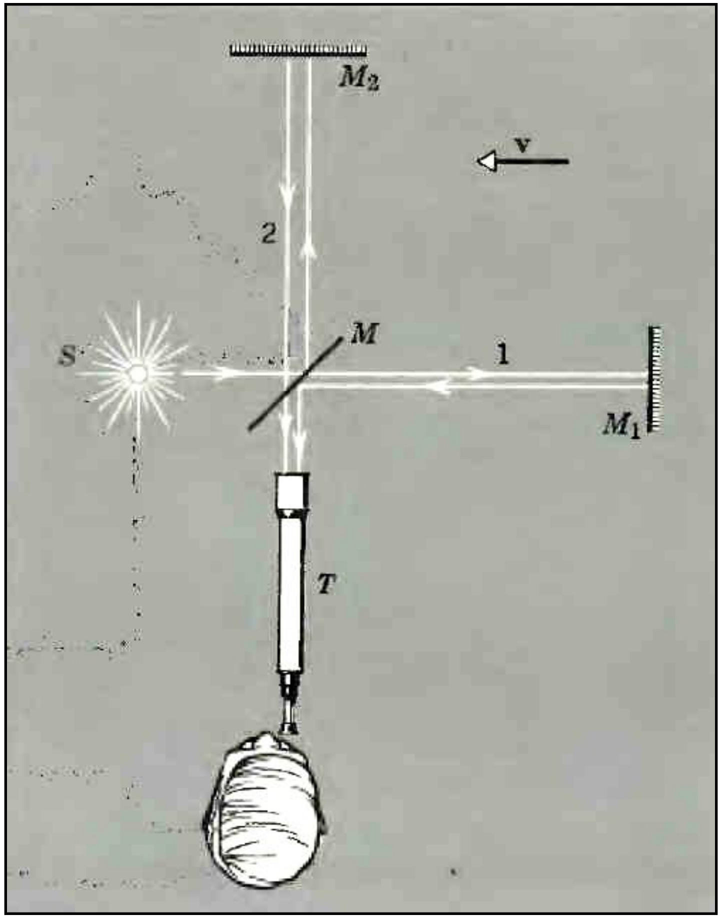
Για την εξήγηση των νόμων της ηλεκτροδυναμικής κινουμένων σωμάτων, ο Ολλανδός Φυσικός H. Lorentz αναγκάστηκε να εισάγει το 1895 καινούργιους χωροχρονικούς μετασχηματισμούς, οι οποίοι διατηρούν την ισχύ των εξισώσεων Maxwell στα διάφορα αδρανειακά συστήματα.

ΠΕΙΡΑΜΑ MICHELSON – MORLEY

Συμβολόμετρο του Michelson

Πρώτα πειράματα το 1881 (Potsdam) – Σε συνεργασία με τον Morley to 1887 (Cleveland)

R.S. Shankland: *“Michelson-Morley Experiment”*, Am. J. Phys. **32** (1963) 16-35



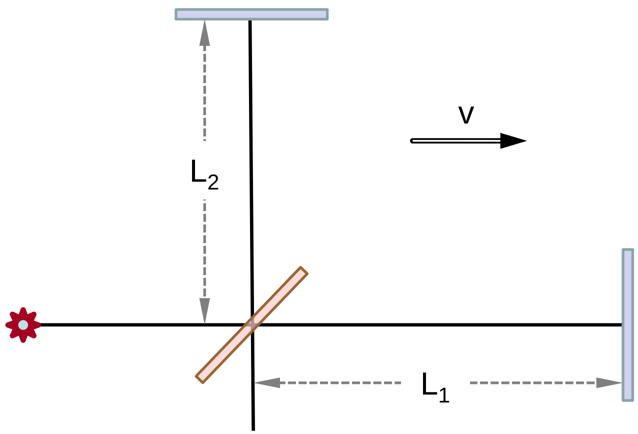
Αρχή του συμβολόμετρου Michelson

Αναζήτηση ύπαρξης αιθέρα

Αλλαγή της παρατηρούμενης εικόνας συμβολής εξ αιτίας της σχετικής κίνησης της Γης μέσα στο περιβάλλον του αιθέρα.

Παρατηρούμενοι κροσσοί συμβολής

Ανάλυση του Πειράματος Michelson – Morley



Οι κάθετοι βραχίονες του συμβολόμετρου έχουν μήκη L_1 και L_2.

Η συσκευή είναι τοποθετημένη έτσι ώστε να κινείται μέσα στον υποθετικό αιθέρα κατά μήκος του οριζόντιου βραχίονα (L_1) με ταχύτητα v.

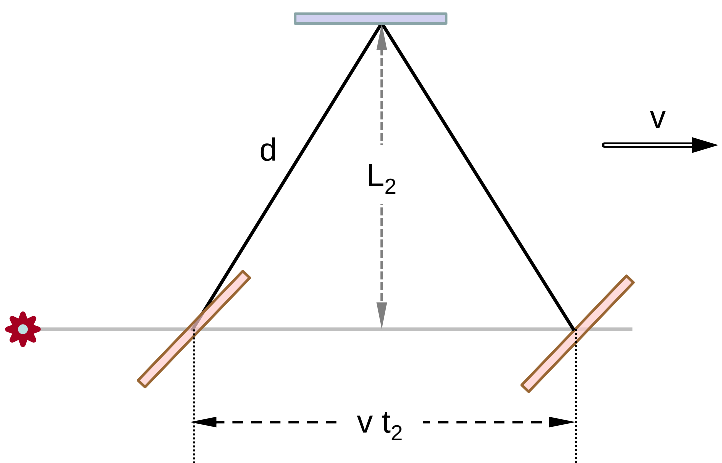
Υπολογισμός του χρόνου t_1

Λόγω της σχετικής κίνησης του οριζόντιου βραχίονα με ταχύτητα v ως προς τον αιθέρα, όπου το φως κινείται με ταχύτητα c, ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται το φώς για να διανύσει την απόσταση L προς και από το ανακλαστικό κάτοπτρο είναι:

$$t_1 = \frac{L_1}{c-v} + \frac{L_1}{c+v} = \frac{L_1\left[(c+v)+(c-v)\right]}{(c-v)(c+v)} = \frac{2cL_1}{c^2-v^2}$$

$$t_1 = \frac{2L_1}{c}\frac{1}{1-v^2/c^2} \Leftrightarrow t_1 = \frac{2L_1}{c}\frac{1}{1-\beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Ανάλυση του Πειράματος Michelson – Morley



Υπολογισμός του χρόνου t_2

Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση δεν επηρεάζεται από την ταχύτητα v και παραμένει σταθερή c. Εξ αιτίας της οριζόντιας κίνησης όμως της συσκευής με ταχύτητα v, η διαδρομή δεν είναι η L_2 αλλά η d, υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες την L_2 και $vt_2/2$.

Ο χρόνος t_2 υπολογίζεται λοιπόν:

$$t_2 = \frac{2d}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{L_2^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4}} \Leftrightarrow t_2^2 c^2 = 4\left[L_2^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4}\right] \Leftrightarrow t_2^2\left(c^2 - v^2\right) = 4L_2^2$$

$$t_2 = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Leftrightarrow t_2 = \frac{2L_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ΠΕΙΡΑΜΑ MICHELSON – MORLEY

Ανάλυση του Πειράματος Michelson – Morley

Η διαφορά χρόνου διάδοσης του φωτός στους δύο βραχίονες του συμβολόμετρου είναι αυτή που καθορίζει τη διαφορά φάσης συμβολής των κυμάτων και κατά συνέπεια τον παρατηρούμενο σχηματισμό των κροσσών συμβολής. Στην περίπτωση αυτή η διαφορά χρόνου Δt υπολογίζεται:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{2L_1}{c}\frac{1}{1-\beta^2}$$

Εάν η συσκευή περιστραφεί κατά 90°, ο ρόλος των διαδρομών εναλλάσσεται, οπότε η νέα διαφορά χρόνου Δt' που θα προκύψει από τη διάδοση του φωτός στους δύο βραχίονες του συμβολόμετρου είναι:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{2L_2}{c}\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{2L_1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Κατά συνέπεια, η μεταβολή φάσης που θα προκύψει από την περιστροφή της συσκευής κατά 90° θα είναι:

$$\boxed{\Delta t' - \Delta t = \frac{2(L_1+L_2)}{c}\left[\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]}$$

Ανάλυση του Πειράματος Michelson – Morley

Κάνοντας χρήση των αναπτυγμάτων σε δυναμοσειρά του β των δύο όρων που υπεισέρχονται στη σχέση:

$$\frac{1}{1-\beta^2} = \left(1-\beta^2\right)^{-1} = 1+\beta^2+\beta^4+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4+\cdots$$

και κρατώντας το ανάπτυγμα με όρους μέχρι δευτέρας τάξεως, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{2\left(L_1+L_2\right)}{c}\left[\frac{1}{1-\beta^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] = \frac{2\left(L_1+L_2\right)}{c}\left[1+\beta^2-1-\frac{1}{2}\beta^2\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta t' - \Delta t = \frac{L_1+L_2}{c}\beta^2}$$

Αυτή η χρονική διαφορά είναι υπεύθυνη για την αλλαγή των παρατηρούμενων κροσσών συμβολής στο συμβολόμετρο του πειράματος Michelson – Morley.

Ανάλυση του Πειράματος Michelson – Morley

Η μεταβολή στον αριθμό των παρατηρούμενων κροσσών συμβολής ΔΝ εξαιτίας της χρονικής διαφοράς πριν και μετά την περιστροφή της συσκευής υπολογίζεται από την περίοδο Τ της φωτεινής ακτίνας (με μήκος κύματος λ):

$$\Delta N = \frac{\Delta t' - \Delta t}{T} = \frac{L_1 + L_2}{cT}\beta^2 = \frac{L_1 + L_2}{\lambda}\beta^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta N = \frac{L_1 + L_2}{\lambda}\beta^2}$$

Στο πείραμα του Michelson – Morley (1887), το συνολικό μήκος της διαδρομής ήταν L_1+L_2=22m. Για ταχύτητα της Γης v=30km/s γύρω από τον Ήλιο (εξαρτάται από την εποχή), η αναμενόμενη μεταβολή στον αριθμό των κροσσών συμβολής είναι:

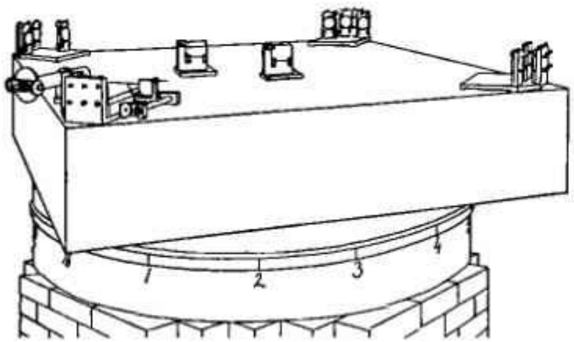
$$L_1 + L_2 = 22 \text{ m} \qquad \lambda = 550 \text{ nm} \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{30}{300\,000} = 10^{-4}$$

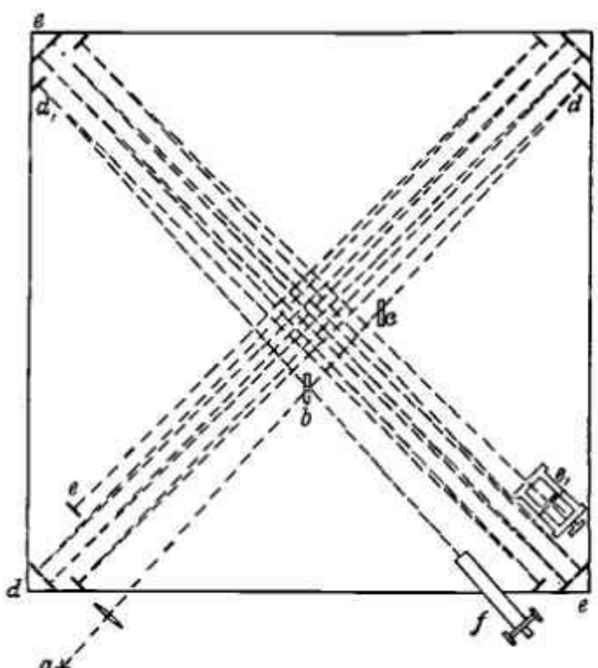
$$\Delta N = \frac{L_1 + L_2}{\lambda}\beta^2 = \frac{22}{550 \times 10^{-9}}\left(10^{-4}\right)^2 = 0.4$$

Η παρατηρήσιμη αυτή διαφορά στους κροσσούς συμβολής **ΟΥΔΕΠΟΤΕ** μετρήθηκε, ακόμη και σε μεταγενέστερα πειράματα μεγαλύτερης ακρίβειας.

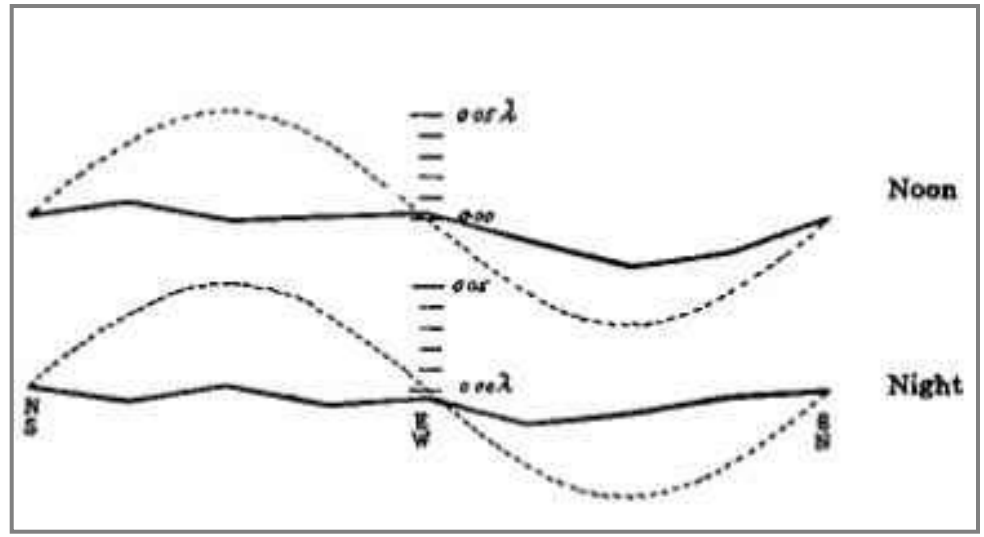
ΠΕΙΡΑΜΑ MICHELSON – MORLEY

Συμβολόμετρο Michelson





Αποτελέσματα μετρήσεων



Η ύπαρξη αιθέρα θα έπρεπε να δίνει την προβλεπόμενη μετατόπιση των κροσσών συμβολής του σχήματος σε διαφορετικούς προσανατολισμούς της συσκευής:

Αναμενόμενο αποτέλεσμα: Διακεκομμένη γραμμή x 8
Παρατηρούμενο αποτέλεσμα: Συνεχής γραμμή

ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, όπως διατυπώθηκε από τον Einstein το 1905, στηρίχθηκε στα εξής δύο αξιώματα:

1ο Αξίωμα: Οι νόμοι της Φυσικής είναι οι ίδιοι για όλους τους παρατηρητές σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Κανένα σύστημα αναφοράς δεν είναι προτιμητέο σε σχέση με κάποιο άλλο.

Διεύρυνση του Γαλιλαϊκού νόμου περί ισχύος του των νόμων της Μηχανικής σε αδρανειακά συστήματα ώστε να περιλαμβάνονται *όλοι οι νόμοι της Φυσικής*, ιδιαίτερα αυτοί του Ηλεκτρομαγνητισμού και της Οπτικής.

2ο Αξίωμα: Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή c σε όλες τις διευθύνσεις και σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Στη Φυσική υπάρχει μια απόλυτη ταχύτητα c με την οποία ταξιδεύει το φως, ίδια προς όλες τις διευθύνσεις και σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Κανένα αντικείμενο που μεταφέρει ενέργεια ή πληροφορία δεν μπορεί να ξεπεράσει το όριο αυτό.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

Έστω οι χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος στο αδρανειακό σύστημα O είναι

O: (x, y, z, t)

ενώ σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα O’ κινούμενο με ταχύτητα v σχετικά με το πρώτο είναι

O’: (x’, y’, z’, t’)

Με βάση το 2ο αξίωμα της Ειδικής Θεωρίας της σχετικότητας, ότι η ταχύτητα του φωτός παραμένει σταθερή και ίση με c σε κάθε αδρανειακό σύστημα, θα ισχύει:

$$\boxed{\begin{gathered} r = ct \\ x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \end{gathered}} \qquad \boxed{\begin{gathered} r' = ct' \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{gathered}}$$

Εάν δεχθούμε γραμμική εξάρτηση του x’⟷x στον αντίστοιχο Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό (σταθερά k) και εξάρτηση του t’⟷t και από τη θέση του γεγονότος (σταθερές a και b), τότε οι μετασχηματισμοί μπορούν να γραφούν:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= k(x - vt) \\ t' &= a(t - bx) \end{aligned}}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

$$r = ct \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$r' = ct' \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

$$x' = k(x - vt)$$
$$t' = a(t - bx)$$

$$k^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2a^2(t^2 - 2bxt + b^2x^2)$$

$$(k^2 - b^2a^2c^2)x^2 - 2(k^2v - ba^2c^2)xt + y^2 + z^2 = (a^2 - k^2v^2/c^2)c^2t^2$$

$$k^2 - b^2a^2c^2 = 1 \qquad k^2v - ba^2c^2 = 0 \qquad a^2 - k^2v^2/c^2 = 1$$

$$k = a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad b = \frac{v}{c^2}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

$$r = ct$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$r' = ct'$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

$$x' = k(x - vt)$$
$$t' = a(t - bx)$$

$$x' = k(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = a(t - bx) = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

Αντίστροφα, εάν αναζητηθούν οι χωροχρονικές εκφράσεις για τον παρατηρητή του συστήματος S' σαν συνάρτηση αυτών του συστήματος S, τότε προκύπτουν οι ίδιες εξισώσεις αλλά με αντίθετο πρόσημο στην ταχύτητα v, δηλαδή ισχύουν:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2) \end{aligned}$$

Παράμετρος της ταχύτητας

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Συντελεστής Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Απλή Εφαρμογή Μετασχηματισμών Lorentz

Σύστημα αναφοράς S’ κινείται με ταχύτητα **v=0.60c** ως προς άλλο σύστημα αναφοράς S. Παρατηρητής στο S μετράει δύο γεγονότα, τα οποία συμβαίνουν στην ίδια θέση **$x_1=x_2=10$m** τις χρονικές στιγμές **$t_1=20$ns** και **$t_2=60$ns**. Να δοθούν οι χωροχρονικές συντεταγμένες των δύο αυτών γεγονότων για το σύστημα S’.

Ανάλυση δεδομένων

Ο παράγοντας Lorentz γ υπολογίζεται από τη σχέση: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0.60^2}} = 1.25$

Η ταχύτητα του φωτός είναι αριθμητικά ίση με c = 0.30 m/ns, οπότε η ταχύτητα του αδρανειακού συστήματος S’ ως προς το S είναι ίση με: $v = 0.60c = 0.18\, m/ns$

Μετασχηματισμοί Lorentz

Κάνοντας χρήση των ευρεθέντων εξισώσεων μετασχηματισμού $\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - vt) \\ t' &= \gamma\,(t - vx/c^2) \end{aligned}}$ έχουμε:

1ο γεγονός

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ t'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2ο γεγονός

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_2 \\ t'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 50 \end{pmatrix}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

Απλή Εφαρμογή Μετασχηματισμών Lorentz

Σύστημα αναφοράς S’ κινείται με ταχύτητα **v=0.60c** ως προς άλλο σύστημα αναφοράς S. Παρατηρητής στο S μετράει δύο γεγονότα, τα οποία συμβαίνουν στην ίδια θέση **x_1=x_2=10m** τις χρονικές στιγμές **t_1=20ns** και **t_2=60ns**. Να δοθούν οι χωροχρονικές συντεταγμένες των δύο αυτών γεγονότων για το σύστημα S’.

Πρώτη διαπίστωση

Οι προηγούμενες λύσεις με τους αντίστροφους μετασχηματισμούς

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma\,(x'+vt') \\ t &= \gamma\,(t'+vx'/c^2) \end{aligned}}$$

οδηγούν:

1ο γεγονός

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ t'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

2ο γεγονός

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ t'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 50 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \end{pmatrix}$$

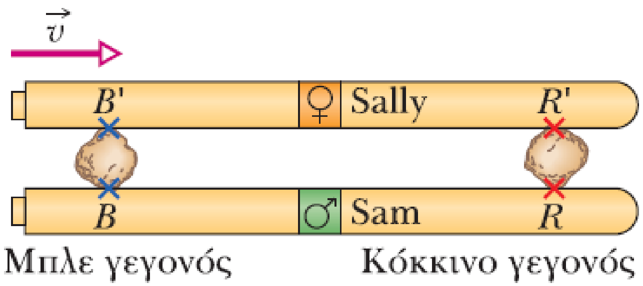
δηλαδή στις χωροχρονικές συντεταγμένες του S, όπως δόθηκαν αρχικά.

Δεύτερη διαπίστωση

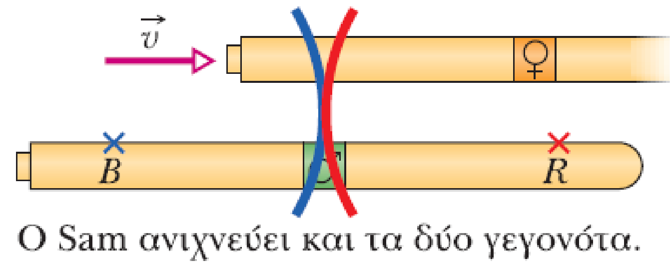
Η χρονική απόσταση των δύο γεγονότων για τον παρατηρητή στο S είναι $\Delta t = t_2 - t_1 = 60 - 20 = 40$ns, ενώ για τον S’ είναι $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 50 - 0 = 50$ns. Δηλαδή ή χρονική απόσταση Δt’ φαίνεται **διεσταλμένη** κατά τον παράγοντα Lorentz: $\Delta t' = \gamma\,\Delta t = 1.25 \times 40 = 50$ns.

Το φαινόμενο αυτό της διαστολής του χρόνου θα αναλυθεί στα επόμενα.

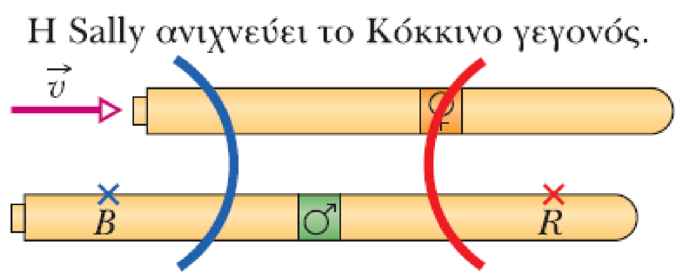
Η Σχετικότητα του Ταυτόχρονου



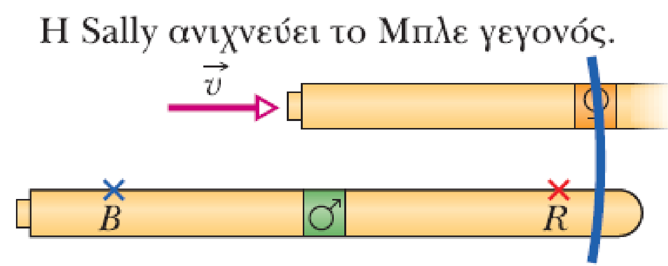
(α)



(γ)



(β)

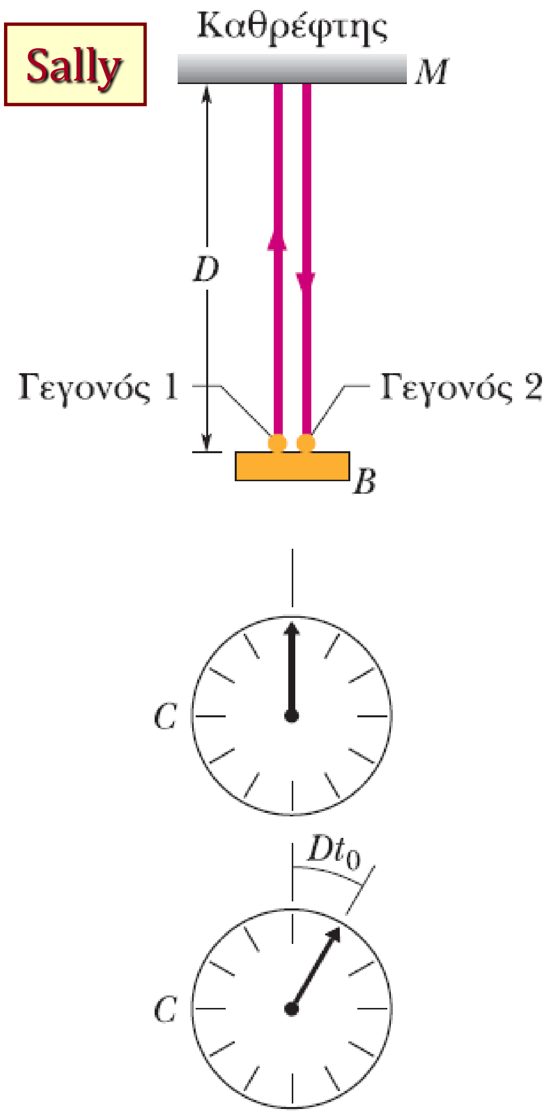


(δ)

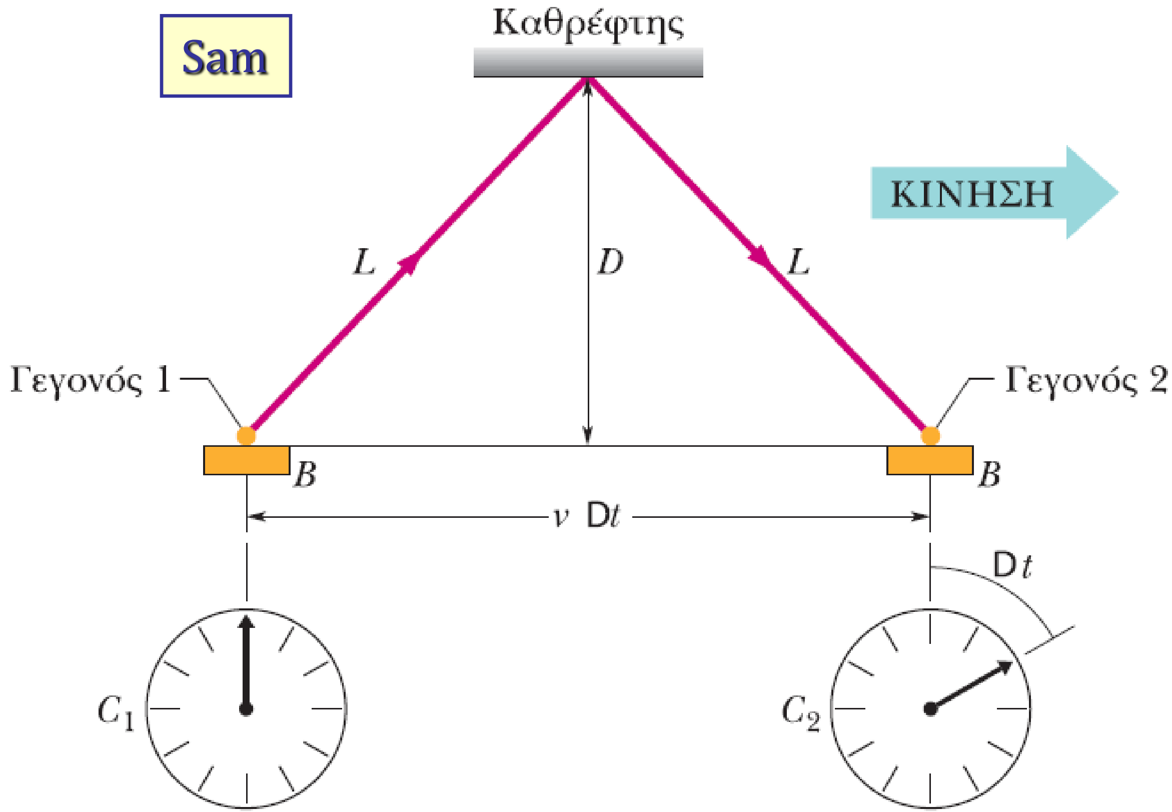
Παρατηρητές που βρίσκονται σε σχετική κίνηση, γενικά δεν συμφωνούν εάν δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα.

Η Σχετικότητα του Χρόνου

Sally



Sam



Sally : $$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}$$

Ταξιδεύει με το τραίνο

Sam : $$\Delta t = \frac{2L}{c}$$

Στέκεται στο σταθμό

Η Σχετικότητα του Χρόνου

Sally : $\Delta t_0 = \dfrac{2D}{c}$

Sam : $\Delta t = \dfrac{2L}{c}$

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + D^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\Delta t_0\right)^2}$$

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\Delta t_0\right)^2} \Rightarrow c^2\Delta t^2 = v^2\Delta t^2 + c^2\Delta t_0^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}}$$

Διαστολή του Χρόνου

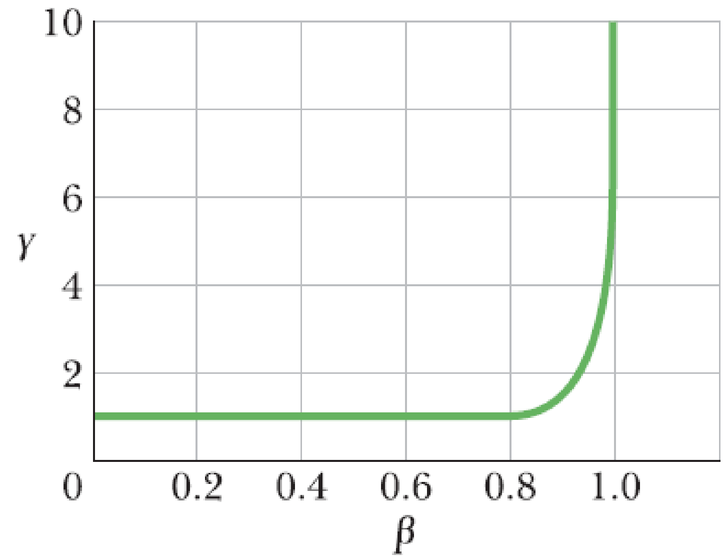
$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}} \Longleftrightarrow \boxed{\Delta t = \gamma \Delta t_0}$$

Παράμετρος της ταχύτητας

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c}}$$

Συντελεστής Lorentz

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$



Ιδιοχρονικό Διάστημα ή Ιδιόχρονος Δt_0: Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο συμβάντα αδρανειακού συστήματος τα οποία βρίσκονται στην ίδια θέση.

Οι τιμές αυτού του χρονικού διαστήματος σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα είναι πάντα μεγαλύτερες.

Διαστολή του Χρόνου

Τα μιόνια (μ) παράγονται στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας από την αλληλεπίδραση της κοσμικής ακτινοβολίας με τα πρώτα ατμοσφαιρικά μόρια. Παρά το γεγονός πως η μέσος χρόνος ζωής των μιονίων είναι μόνο $\Delta t_0 = 2.2\mu s$ στο (ακίνητο) σύστημα του εργαστηρίου, καταφέρνουν να διασχίσουν με ταχύτητα $v = 0.9994c$ όλο το πάχος της ατμόσφαιρας και να φτάσουν στην επιφάνεια της γης. Πώς συμβαίνει αυτό;

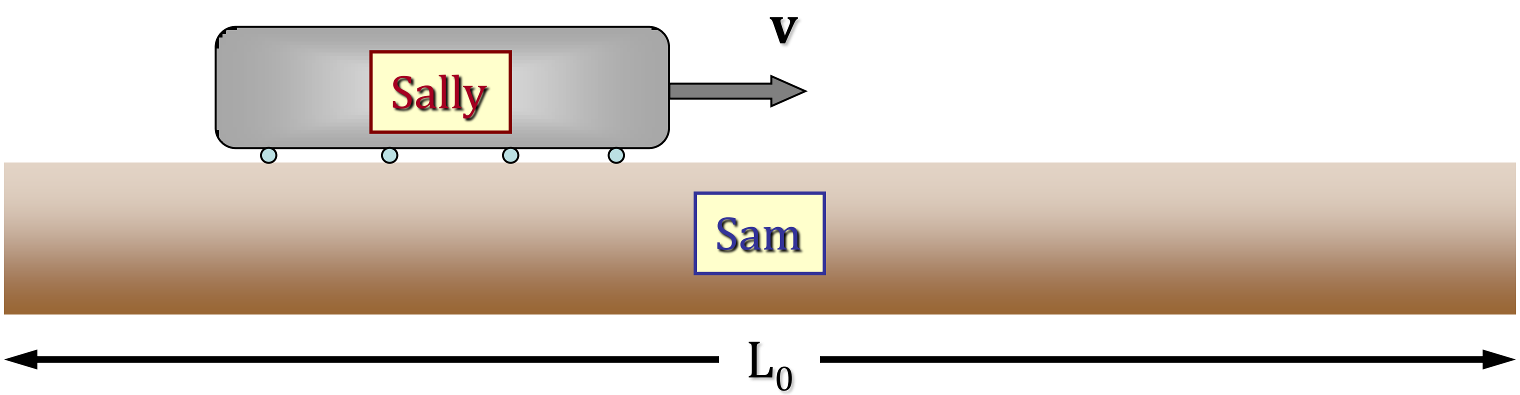
Απόσταση σε χρόνο Δt_0 $$\Delta t_0 v = (2.2 \cdot 10^{-6} s) \times (3 \cdot 10^8 m/s) = 660m$$

Ο χρόνος Δt_0 αποτελεί τον ιδιοχρόνο ζωής του μιονίου στο σταθερό σύστημα αναφοράς του. Αντίθετα, για ένα γήινο παρατηρητή, ο χρόνος αυτός θα είναι διασταλμένος κατά τον παράγοντα Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.9994)^2}} = 28.87 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \gamma \Delta t_0 = 28.87 \cdot 2.2\mu s = 63.5\mu s$$

Απόσταση σε χρόνο Δt $$\Delta t v = (63.5 \cdot 10^{-6} s) \times (3 \cdot 10^8 m/s) = 19050m$$

Η Σχετικότητα του Μήκους



Sam : $L_0 = v\Delta t$

Στέκεται στο σταθμό

Sally : $L = v\Delta t_0$

Ταξιδεύει με το τραίνο

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v\Delta t_0}{v\Delta t} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Συστολή του Μήκους

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Μήκος Ηρεμίας ή Ιδιομήκος L_0

Το μήκος ενός αντικειμένου που μετριέται στο σύστημα ηρεμίας του αντικειμένου.

Μετρήσεις μήκους σε άλλα συστήματα αναφοράς που βρίσκονται σε σχετική κίνηση, παράλληλη με το μήκος αυτό, δίνουν πάντα μικρότερα αποτελέσματα.

Οι Εξισώσεις Μετασχηματισμού του Lorentz

Παράμετρος της ταχύτητας

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Συντελεστής Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2) \end{aligned}$$

Οι Εξισώσεις Μετασχηματισμού του Lorentz για Ζευγάρια Γεγονότων

Παράμετρος της ταχύτητας

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Συντελεστής Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x / c^2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$
$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x' / c^2)$$

Οι εξισώσεις αυτές επιτρέπουν την μετατροπή χωρικών και χρονικών διαστημάτων από ένα αδρανειακό σύστημα σε ένα άλλο.

ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Σύστημα αναφοράς S’ κινείται με ταχύτητα v=0.90c ως προς άλλο σύστημα αναφοράς S. Παρατηρητής στο S’ μετράει δύο γεγονότα, τα οποία συμβαίνουν στις παρακάτω χωροχρονικές συντεταγμένες: Το ΚΙΤΡΙΝΟ γεγονός στις (5.0m, 20ns) και το ΠΡΑΣΙΝΟ γεγονός στις (-2.0m, 45ns). Ποιες οι χωροχρονικές συντεταγμένες για τον παρατηρητή στο σύστημα S; Πόσο το χρονικό διάστημα των δύο γεγονότων που μετράει ο καθένας;

Οι μετασχηματισμοί Lorentz για το σύστημα S δίνονται από τις σχέσεις όπου ο συντελεστής γ υπολογίζεται:

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma(t' + vx'/c^2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.90^2}} = 2.3$$

Οι χωροχρονικές συντεταγμένες στο S για v=0.90c=0.27m/ns είναι λοιπόν:

ΚΙΤΡΙΝΟ ΓΕΓΟΝΟΣ (S)	ΠΡΑΣΙΝΟ ΓΕΓΟΝΟΣ (S)
x_Y=2.3(5.0+0.27*20)=23.9m	x_G=2.3(-2.0+0.27*45)=23.3m
t_Y=2.3(20+0.27*5.0/0.30^2)=80.5ns	t_G=2.3(45+0.27*(-2.0)/0.30^2)=89.7ns

$\Delta t(S) = t_G - t_Y = 89.7 - 80.5 = 9.2$ ns

$\Delta t'(S') = t'_G - t'_Y = 45 - 20 = 25$ ns

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LORENTZ

Εάν ένα γεγονός S:(x, y, z, t) μετασχηματίζεται στο S':(x', y', z', t') μέσω του μετασχηματισμού Lorentz $L_{S'}$, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός L_S επαναφέρει το γεγονός στις αρχικές συντεταγμένες, δηλαδή $L_S(L_{S'}) = 1$.

$L_{S'}$	L_S
$x' = \gamma(x - vt)$	$x = \gamma(x' + vt')$
$t' = \gamma(t - vx/c^2)$	$t = \gamma(t' + vx'/c^2)$

Απόδειξη

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma\left[\gamma(x - vt) + v\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\right] = \gamma^2\left(x - vt + vt - x\frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^2(1-\beta^2)\,x = x$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) = \gamma\left[\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) + \frac{v\gamma(x - vt)}{c^2}\right] = \gamma^2\left(t - \frac{vx}{c^2} + \frac{vx}{c^2} - t\frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^2(1-\beta^2)\,t = t$$

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LORENTZ

Εάν ένα γεγονός S:(x, y, z, t) μετασχηματίζεται στο S’:(x’, y’, z’, t’) μέσω του μετασχηματισμού Lorentz $L_{S'}$, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός L_S επαναφέρει το γεγονός στις αρχικές συντεταγμένες, δηλαδή $L_S(L_{S'}) = 1$.

$$L_{S'}$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

$$L_S$$
$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$t = \gamma(t' + vx'/c^2)$$

Παρατήρηση

Είναι προφανές πως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz διατηρεί την ίδια συναρτησιακή εξάρτηση με μόνη διαφορά αυτή του προσήμου. Δηλαδή, εδώ είναι καταφανής η ιδιότητα ισοδυναμίας των αδρανειακών συστημάτων, σύμφωνα με την οποία:

Εάν θεωρήσω το πρώτο αδρανειακό σύστημα ακίνητο και το δεύτερο κινούμενο με ταχύτητα +v, αυτό είναι ισοδύναμο με το να θεωρήσω το δεύτερο αδρανειακό σύστημα ακίνητο και το πρώτο κινούμενο με ταχύτητα –v.

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LORENTZ

Κάνοντας χρήση **πινάκων** για τη διατύπωση των μετασχηματισμών Lorentz οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί μπορούν τώρα να γραφούν ως:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & +v \\ +v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

Ο πρώτος πίνακας αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό $L_{S'}$ ενώ ο δεύτερος (αντίστροφός του) αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό L_S. Είναι εύκολο να αποδειχθεί πως το γινόμενό τους δίνει τον **μοναδιαίο** πίνακα:

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 & +v \\ +v/c^2 & 1 \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 - v^2/c^2 & 0 \\ 0 & 1 - v^2/c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων

Το σύστημα O' κινείται με ομαλή ταχύτητα v σε σχέση με το O.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)} \Rightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - v\Delta x/c^2} = \frac{\Delta x/\Delta t - v}{1 - v(\Delta x/\Delta t)c^2}$$

$\Delta x'/\Delta t' = u_x'$: Η ταχύτητα του σώματος όπως μετράται από το **O'**

$\Delta x/\Delta t = u_x$: Η ταχύτητα του σώματος όπως μετράται από το **O**

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}$$

Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων

$\Delta x'/\Delta t' = u_x'$: Η ταχύτητα του σώματος όπως μετράται από το **O'**

$\Delta x/\Delta t = u_x$: Η ταχύτητα του σώματος όπως μετράται από το **O**

Ισοδύναμα, μπορεί να θεωρηθεί το σύστημα O' *«ακίνητο»,* οπότε το σύστημα O κινείται με ταχύτητα **–v**.

$$u_x = \frac{u_x' - (-v)}{1 - u_x'(-v)/c^2} = \frac{u_x' + v}{1 + u_x' v/c^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u_x = \frac{u_x' + v}{1 + u_x' v/c^2}}$$

Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων

Παρατήρηση 1

$$\boxed{u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}} \xrightarrow{\; v \ll c \;} \boxed{u_x' = u_x - v}$$

Παρατήρηση 2 Ο μετασχηματισμός ταχυτήτων μπορεί να υπολογισθεί επίσης ως ακολούθως:

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \Big/ \frac{dt'}{dt}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{d}{dt}[\gamma(x - vt)] = \gamma(\frac{dx}{dt} - v) = \gamma(u_x - v) \\ \frac{dt'}{dt} &= \frac{d}{dt}[\gamma(t - \frac{vx}{c^2})] = \gamma(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}) = \gamma(1 - \frac{u_x v}{c^2}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_x' = \frac{\gamma(u_x - v)}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}$$

$$\boxed{u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}}$$

Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων

Παρατήρηση 3

Ο μετασχηματισμός ταχυτήτων για τις άλλες συνιστώσες υπολογίζεται:

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \Big/ \frac{dt'}{dt}$$

$$y' = y \qquad \frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}$$

$$u_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dz'}{dt} \Big/ \frac{dt'}{dt}$$

$$z' = z \qquad \frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

$$u_z' = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}$$

Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων

Παρατήρηση 4

Εάν σε κάποιο από τα δύο αδρανειακά συστήματα η ταχύτητα είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός, για παράδειγμα $u_x=c$, τότε αυτή μετασχηματίζεται:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} \xrightarrow{u_x = c} u'_x = \frac{c - v}{1 - cv/c^2} = \frac{c-v}{c-v}c = c$$

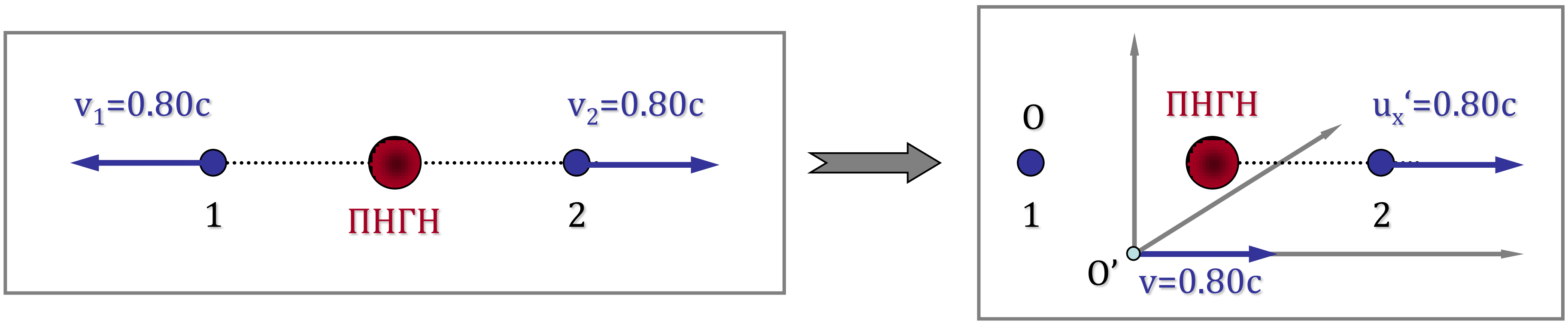
Δηλαδή και στο άλλο αδρανειακό σύστημα η ταχύτητα έχει μέτρο ίσο με την ταχύτητα του φωτός, όπως ακριβώς απαιτεί το δεύτερο αξίωμα του Einstein, ασχέτως με το μέτρο της ταχύτητας v.

Σε αντίθεση με τα παραπάνω, ένας Γαλιλαϊκός μετασχηματισμός δεν διατηρεί την ταχύτητα του φωτός σταθερή στα διάφορα αδρανειακά συστήματα.

ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Μια πηγή εκπέμπει δύο ηλεκτρόνια κινούμενα σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητα 0.80c το καθένα σε σχέση με την πηγή. Ο Γαλιλαϊκός μετασχηματισμός υπολογίζει σαν σχετική ταχύτητα του ενός ηλεκτρονίου σε σχέση με το άλλο την εσφαλμένη τιμή 0.80c+0.80c=1.60c.

Πώς θα υπολογισθεί με βάση την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας η σχετική αυτή ταχύτητα;



- Θεωρούμε το ηλεκτρόνιο-1 ακίνητο (Σύστημα Ο)
- Θεωρούμε την πηγή ακίνητη σε κινούμενο (ως προς το Ο) Σύστημα Ο΄
- Η ταχύτητα του Ο' σε σχέση με το Ο πρέπει να είναι v=0.80c
- Στο σύστημα Ο' το ηλεκτρόνιο-2 κινείται με ταχύτητα u_x'=0.80c

Η ζητούμενη σχετική ταχύτητα του ηλεκτρονίου-2 σε σχέση με το 1 είναι η u_x , πώς δηλαδή μετασχηματίζεται η ταχύτητα u_x' στο σύστημα Ο:

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + u_x' v / c^2} = \frac{0.80c + 0.80c}{1 + 0.80 \cdot 0.80} = \frac{1.60c}{1.64} \Rightarrow \boxed{u_x = 0.976c}$$

Σχετικιστική έκφραση Ορμής

Κλασσική Μηχανική

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

• Το σώμα διανύει απόσταση Δx σε χρόνο Δt
• Δt_0 είναι ο χρόνος του παρατηρητή που κινείται με το σωματίδιο (ιδιοχρόνος)

Σχετικιστική Έκφραση

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0}$$

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0} \Rightarrow p = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta t_0} \Rightarrow p = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\gamma$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p = \gamma m v}$$

Η εξίσωση αυτή διαφέρει από τον κλασσικό ορισμό μόνο κατά τον συντελεστή Lorentz.

Σχετικιστική έκφραση Ενέργειας

Ενέργεια Ηρεμίας

$$E_0 = mc^2$$

K: Κινητική Ενέργεια

$$\boxed{E = \gamma mc^2}$$

Ολική Ενέργεια

$$E = E_0 + K = mc^2 + K$$

$$E = \gamma mc^2 \Rightarrow E_0 + K = \gamma mc^2 \Rightarrow K = \gamma mc^2 - E_0 = \gamma mc^2 - mc^2$$

$$\boxed{K = (\gamma - 1) mc^2}$$

Σχετικιστική έκφραση Ενέργειας

Ενέργεια Ηρεμίας

$$E_0 = mc^2$$

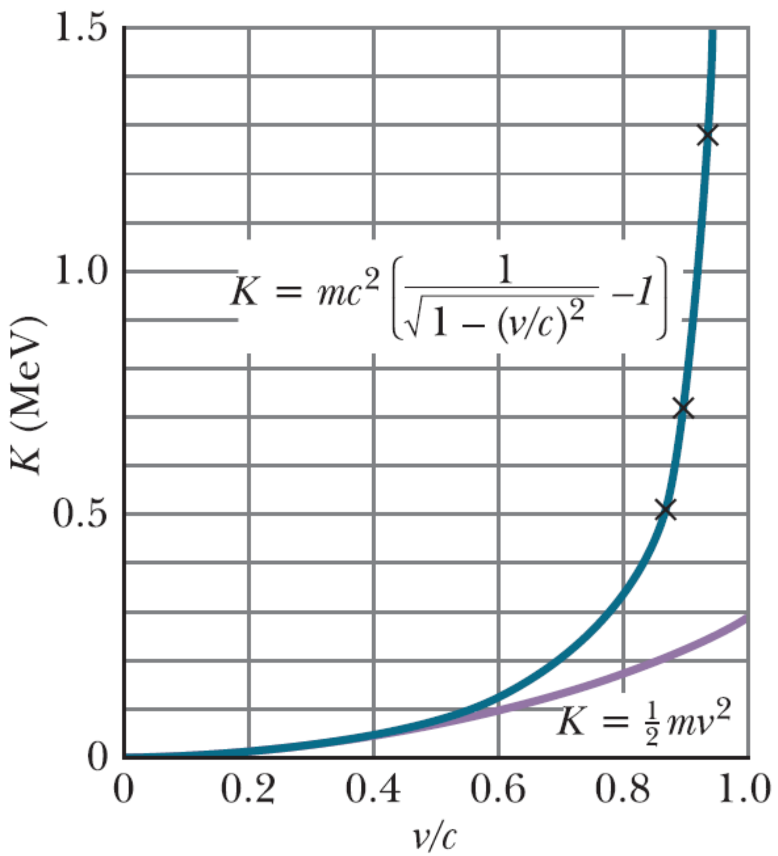
K: Κινητική Ενέργεια

$$\boxed{K = (\gamma - 1)mc^2}$$

Ολική Ενέργεια

$$E = E_0 + K = mc^2 + K$$

Διαφορά της κινητικής ενέργειας ηλεκτρονίου με τον κλασσικό και τον σχετικιστικό ορισμό.



Τα πειραματικά σημεία (Χ) επιβεβαιώνουν την σχετικιστική συμπεριφορά του ηλεκτρονίου.

Σχετικιστική έκφραση Ενέργειας

Ενέργεια Ηρεμίας

$$E_0 = mc^2$$

K: Κινητική Ενέργεια

$$\boxed{K = (\gamma - 1)mc^2}$$

Ολική Ενέργεια

$$E = E_0 + K = mc^2 + K$$

Παράδειγμα

Εάν σε ένα σωματίδιο είναι K=2E_0 τότε:

$$K = 2E_0 \Rightarrow E = E_0 + K = E_0 + 2E_0 \Rightarrow E = 3E_0 \Rightarrow \gamma = 3$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 3 \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

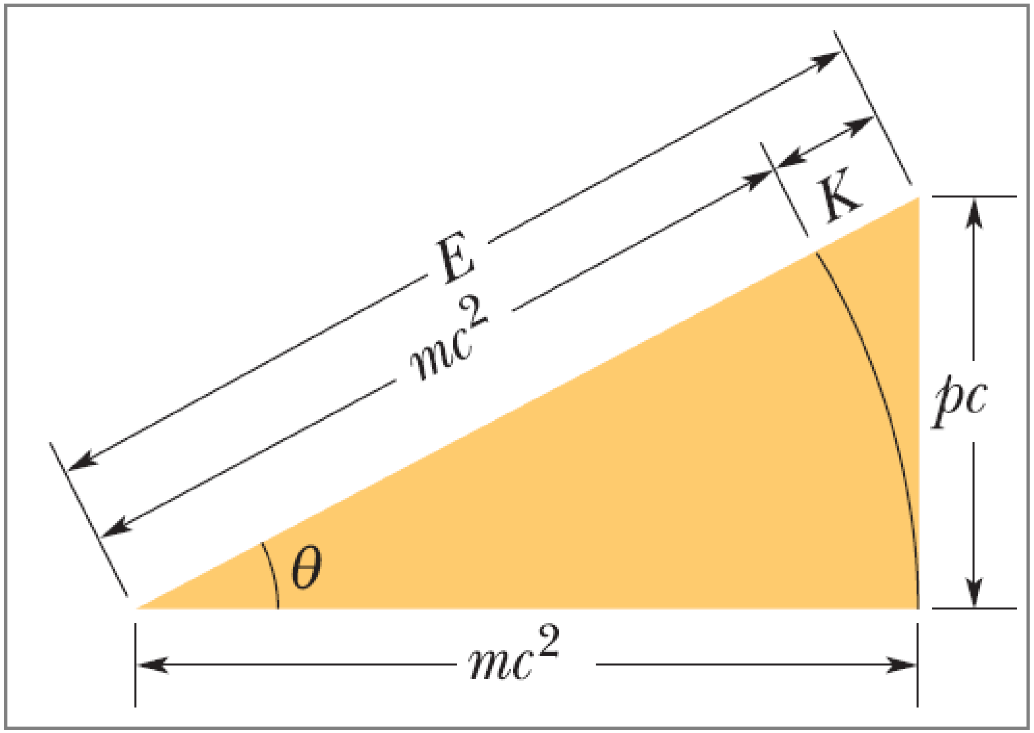
$$\boxed{\beta = 0.943}$$

Ορμή και Κινητική Ενέργεια

Απαλοιφή της ταχύτητας από τους σχετικιστικούς τύπους της Ενέργειας και της Ορμής δίνει:

$$\boxed{E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2}$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα για Ορμή, Ενέργεια Ηρεμίας και Ολική Ενέργεια!



Απόδειξη

$$E = \gamma mc^2 \Rightarrow E^2 = \gamma^2 m^2 c^4$$
$$p = \gamma mv \;\; \Rightarrow p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$$

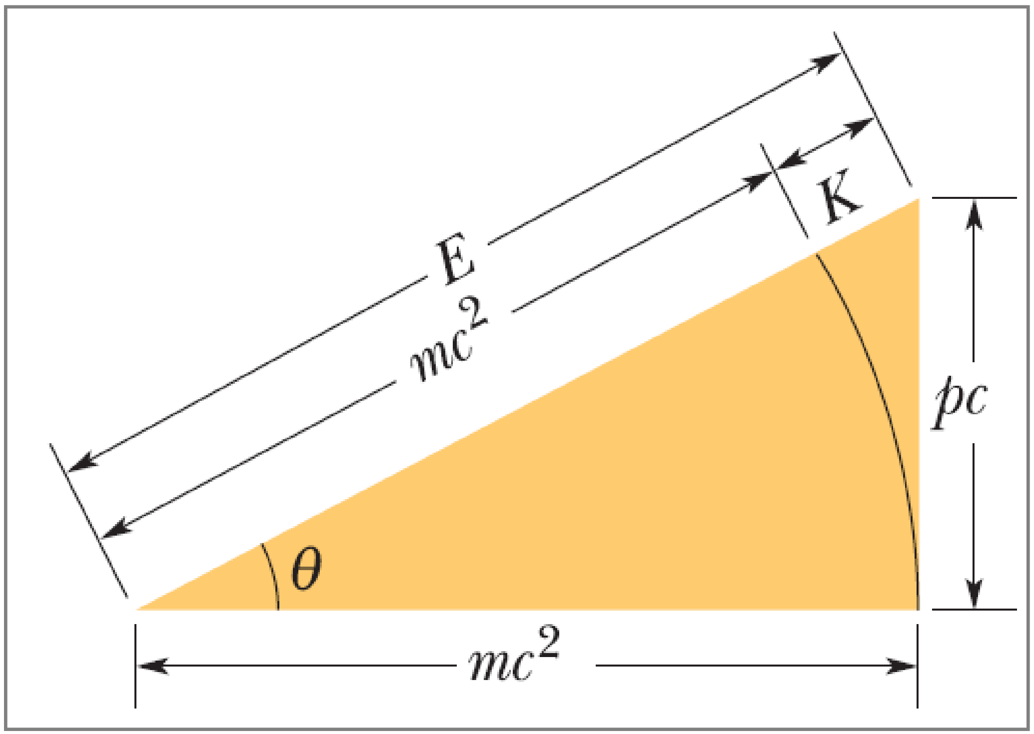
$$\begin{aligned} E^2 - p^2c^2 &= \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 \\ &= \gamma^2 m^2 c^2 (c^2 - v^2) \\ &= m^2 c^2 \cdot \gamma^2 (c^2 - v^2) \\ &= m^2 c^2 \cdot c^2 = m^2 c^4 \end{aligned}$$

Ορμή και Κινητική Ενέργεια

Πυθαγόρειο Θεώρημα για Ορμή, Ενέργεια Ηρεμίας και Ολική Ενέργεια!

$$\boxed{E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\theta &= \beta \\ \cos\theta &= 1/\gamma \end{aligned}}$$



Απόδειξη

$$\sin\theta = \frac{pc}{E} = \frac{\gamma m v \cdot c}{\gamma m c^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{v}{c} = \beta$$

$$\cos\theta = \frac{mc^2}{E} = \frac{mc^2}{\gamma m c^2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\gamma}$$

Κώνος Φωτός

Χωροχρονικό διάγραμμα ενός δισδιάστατου κόσμου με τα όρια του κώνου φωτός.