

ΦΥΣΙΚΗ Ι



ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2025-2026

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

- Έργο και Κινητική Ενέργεια
- Έργο Βαρυτικής Δύναμης και Δύναμης Ελατηρίου
- Έργο Μεταβλητής Δύναμης
- Ισχύς

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

- Συντηρητικές Δυνάμεις
- Δυναμική Ενέργεια
- Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

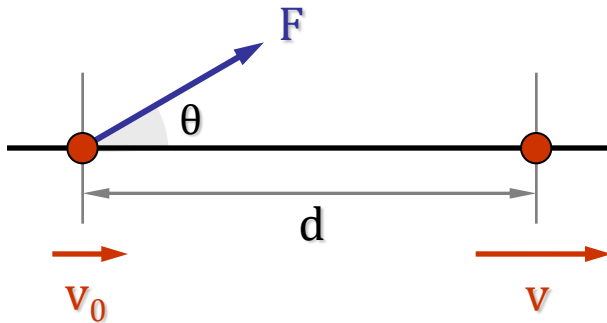
Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2025-2026

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ΦΑΡΑΚΟΣ	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΕΡΓΟ & ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ	4.1, 4.2, 4.4	7.1, 7.2, 7.4	7.1 έως 7.7	6.1, 6.2
ΕΡΓΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ	4.1, 4.2	7.3, 8.1, 8.4	7.8, 7.9	6.3, 6.4
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ	4.4.1, 4.5, 4.6	8.2, 8.3, 8.5, 8.6	8.1 έως 8.8	7.1 έως 7.5

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Επίδραση σταθερής δύναμης F σε σωματίδιο μάζας m



$$W = F_x \cdot d = F \cdot \cos\theta \cdot d = \vec{F} \cdot \vec{d}$$



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Η δύναμη αυτή επιφέρει αλλαγή στην κινητική κατάσταση του σωματιδίου:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \Rightarrow v dv = a dx \Rightarrow \int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a dx$$

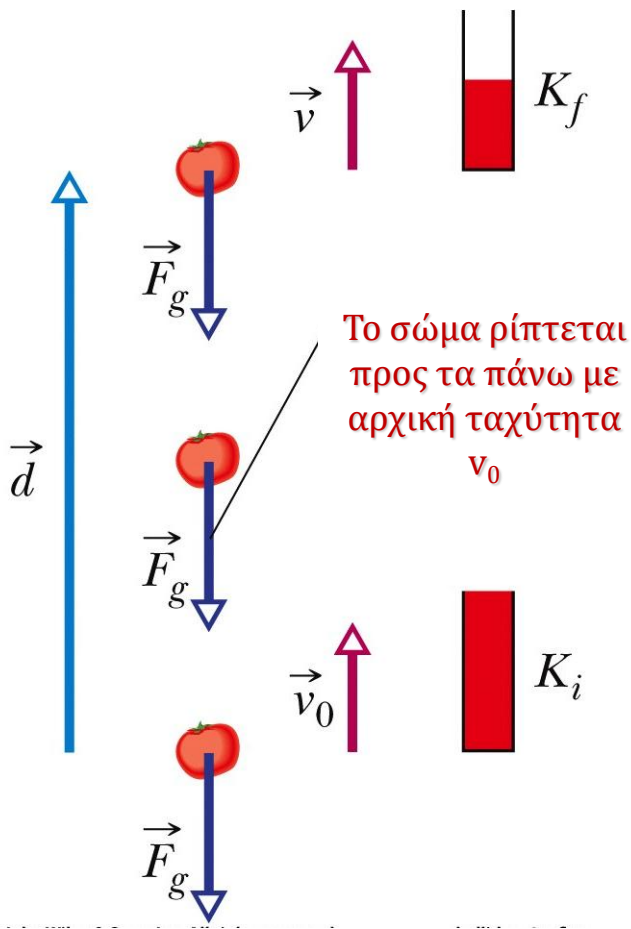


$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = a(x - x_0) = a d \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m a d = F_x d = W$$

$$K_f - K_i = W \Leftrightarrow K_f = K_i + W$$

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Έργο που εκτελείται από την βαρυτική δύναμη



$$K_f = K_i + W$$



$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgd \cos 180^\circ$$



$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgd(-1)$$

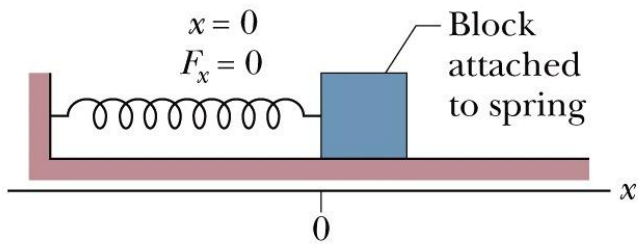


$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgd$$

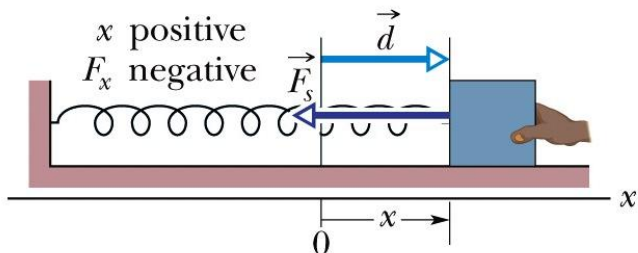
Η βαρυτική δύναμη παράγει στην περίπτωση αυτή αρνητικό έργο και ελαττώνει την κινητική ενέργεια του σώματος.

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

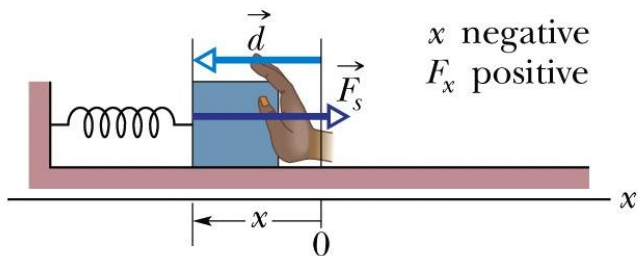
Έργο που εκτελείται από τη δύναμη ελατηρίου



(a)



(b)



(c)

Νόμος του Hooke

$$F_x = -kx$$



$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx$$



$$W_s = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2$$

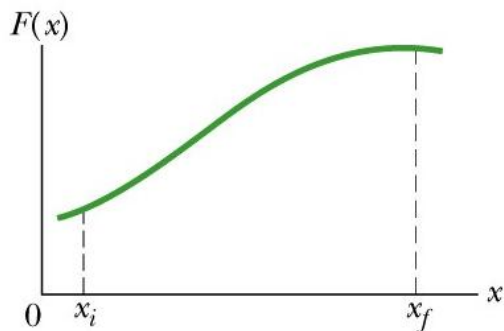
Το έργο είναι θετικό όταν το σώμα καταλήγει πιο κοντά ($x_f < x_i$) στη θέση ισορροπίας.

Για $x_i = 0$ ισχύει:

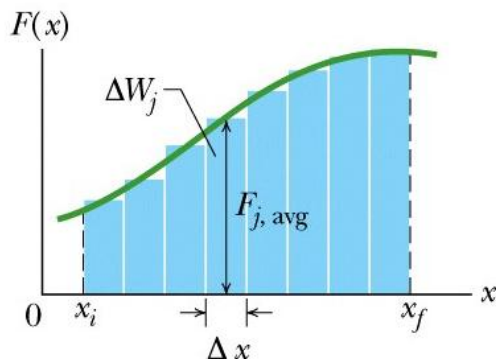
$$W_s = -\frac{1}{2} kx^2$$

ΕΡΓΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ανάλυση σε μία διάσταση

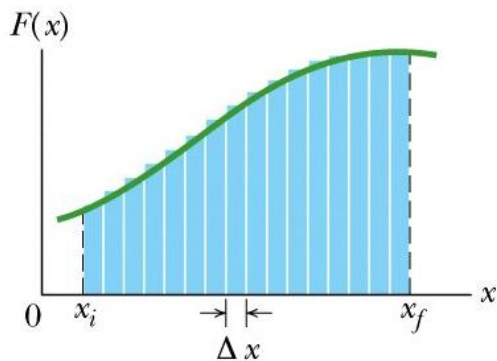


(a)



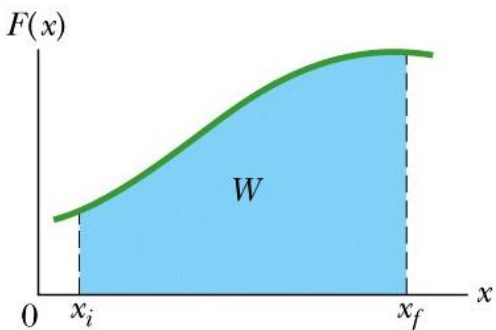
(b)

We can do better with more, narrower strips.



(c)

For the best, take the limit of strip widths going to zero.



(d)

Το έργο μεταβλητής δύναμης σε μια διάσταση υπολογίζεται :

$$W = \sum \Delta W_i = \sum F_i \Delta x$$



$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum F_i \Delta x$$



$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

ΕΡΓΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ανάλυση σε τρεις διαστάσεις

Το έργο μεταβλητής δύναμης σε τρεις διαστάσεις υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \\ d\vec{r} &= dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Κατά συνέπεια:

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$



$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

ΕΡΓΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F από το σημείο $(2,3)$ στο σημείο $(3,0)$, όπου:

$$\vec{F} = 3x^2 \hat{i} + 4 \hat{j}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy$$

οπότε:

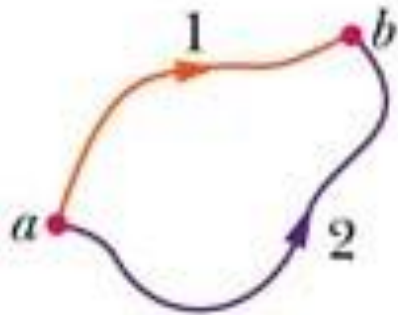
$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy = \int_2^3 3x^2 dx + \int_3^0 4 dy$$



$$W = x^3 \Big|_2^3 + 4y \Big|_3^0 = (27 - 8) + (0 - 12) = 7J$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

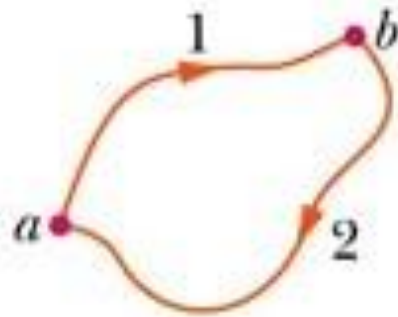
Το έργο που παράγεται από μια συντηρητική δύναμη σε ένα σωματίδιο που κινείται από το σημείο a στο σημείο b **δεν εξαρτάται** από την τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο.



(a)

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

Κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής μια συντηρητική δύναμη δίνει συνολικό έργο **μηδέν**.



(b)

$$W_{ab,1} = W_{ab,2} = -W_{ba,2}$$



$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = W_{ab,1 \rightarrow ba,2} = 0$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Αν μια δύναμη **F** είναι συντηρητική, δηλαδή το παραγόμενο έργο εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση, τότε μπορεί να βρεθεί μια συνάρτηση **U** η οποία να αποδίδει ποσοτικά τη διαφορά αυτή ως:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = U(x_i) - U(x_f) = -\Delta U$$

Η συνάρτηση αυτή καλείται **Δυναμικό** ή **Δυναμική Ενέργεια**. Για το U ισχύει:

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = U(x_i) - U(x_f) \Rightarrow F(x) dx = -dU(x)$$



$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Για το δυναμικό γενικότερα ισχύει:

$$\vec{F} = -\text{grad}U = -\vec{\nabla}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Για να είναι μια δύναμη συντηρητική αποδεικνύεται πως πρέπει να ισχύουν:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Τότε μπορεί να προσδιορισθεί η συνάρτηση $U(x,y,z)$ έτσι ώστε

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Παράδειγμα

$$\vec{F} = (x^2 + y^2) \hat{i} + 2xy \hat{j}$$

Να βρεθεί το έργο της δύναμης αυτής από το σημείο (0,0) στο (2,4) κατά μήκος της καμπύλης: (α) $y=2x$ (β) $y=x^2$

$$y = 2x$$

$$W_a = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy = \int_0^2 (x^2 + y^2) dx + \int_0^4 2xy dy = \int_0^2 (x^2 + 4x^2) dx + \int_0^4 y^2 dy$$



$$W = \left. \frac{5x^3}{3} \right|_0^2 + \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^4 = \frac{40}{3} + \frac{64}{3} = \frac{104}{3}$$

$$y = x^2$$

$$W_b = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy = \int_0^2 (x^2 + y^2) dx + \int_0^4 2xy dy = \int_0^2 (x^2 + x^4) dx + \int_0^4 2y^{3/2} dy$$



$$W = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 + \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^2 + \left. \frac{4y^{5/2}}{5} \right|_0^4 = \frac{8}{3} + \frac{32}{5} + \frac{128}{5} = \frac{104}{3}$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Στο προηγούμενο παράδειγμα βρέθηκε $\mathbf{W}_a = \mathbf{W}_b$, όπως ήταν αναμενόμενο, δεδομένου ότι:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial(2xy)}{\partial x} = 2y = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Άρα μπορεί να βρεθεί μια συνάρτηση $\mathbf{U(x,y)}$ τέτοια ώστε:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} = -F_x = -(x^2 + y^2) &\Rightarrow U = -\left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) + g(y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y = -2xy &\Rightarrow U = -xy^2 + f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -\frac{x^3}{3} \\ g(y) = C \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$U(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy^2 + C$$

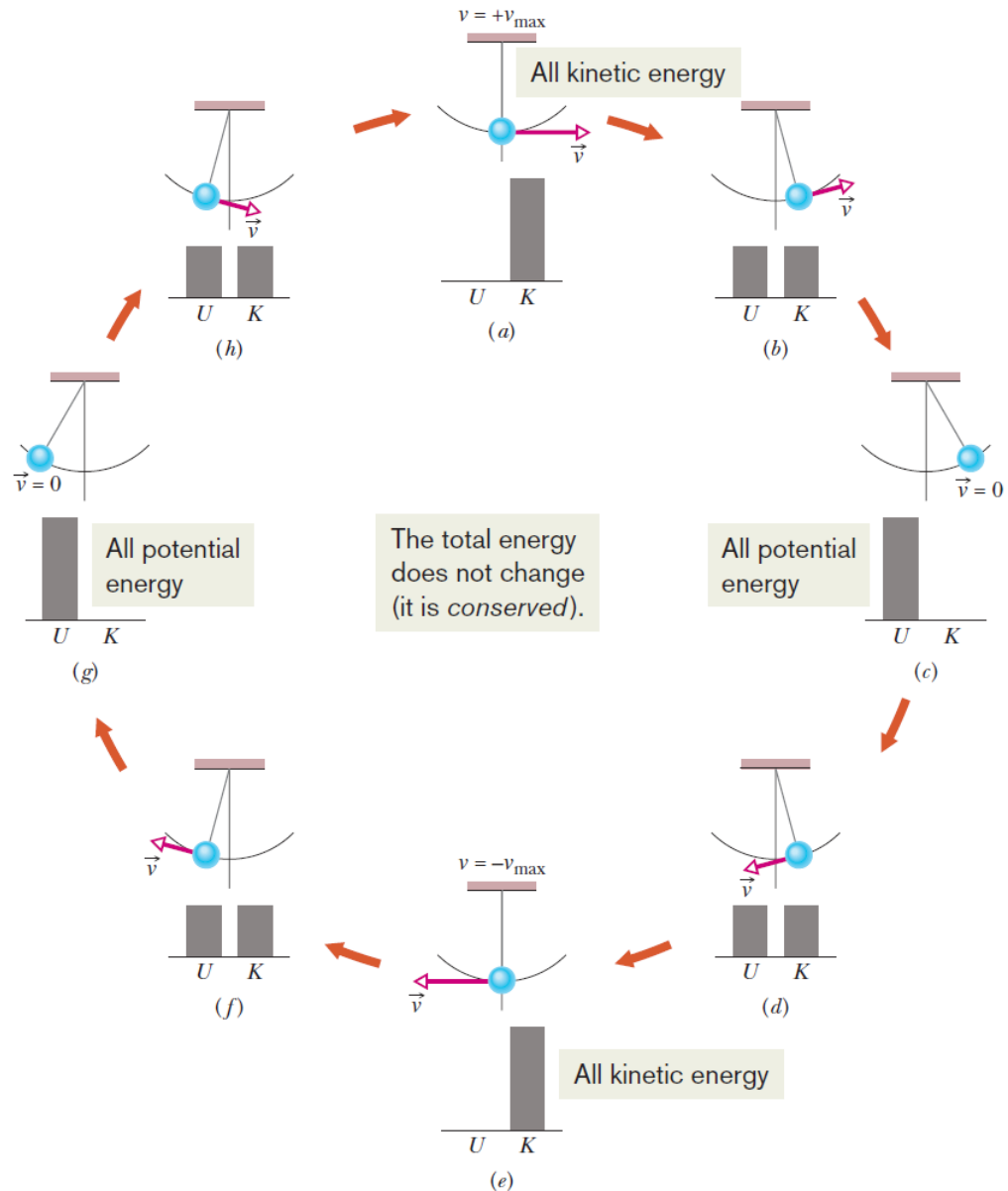
$$\text{Εύκολα παρατηρούμε πως: } U(0,0) - U(2,4) = \frac{8}{3} + 2 \cdot 16 = \frac{104}{3}$$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$\begin{cases} \Delta K = W \\ \Delta U = -W \end{cases} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

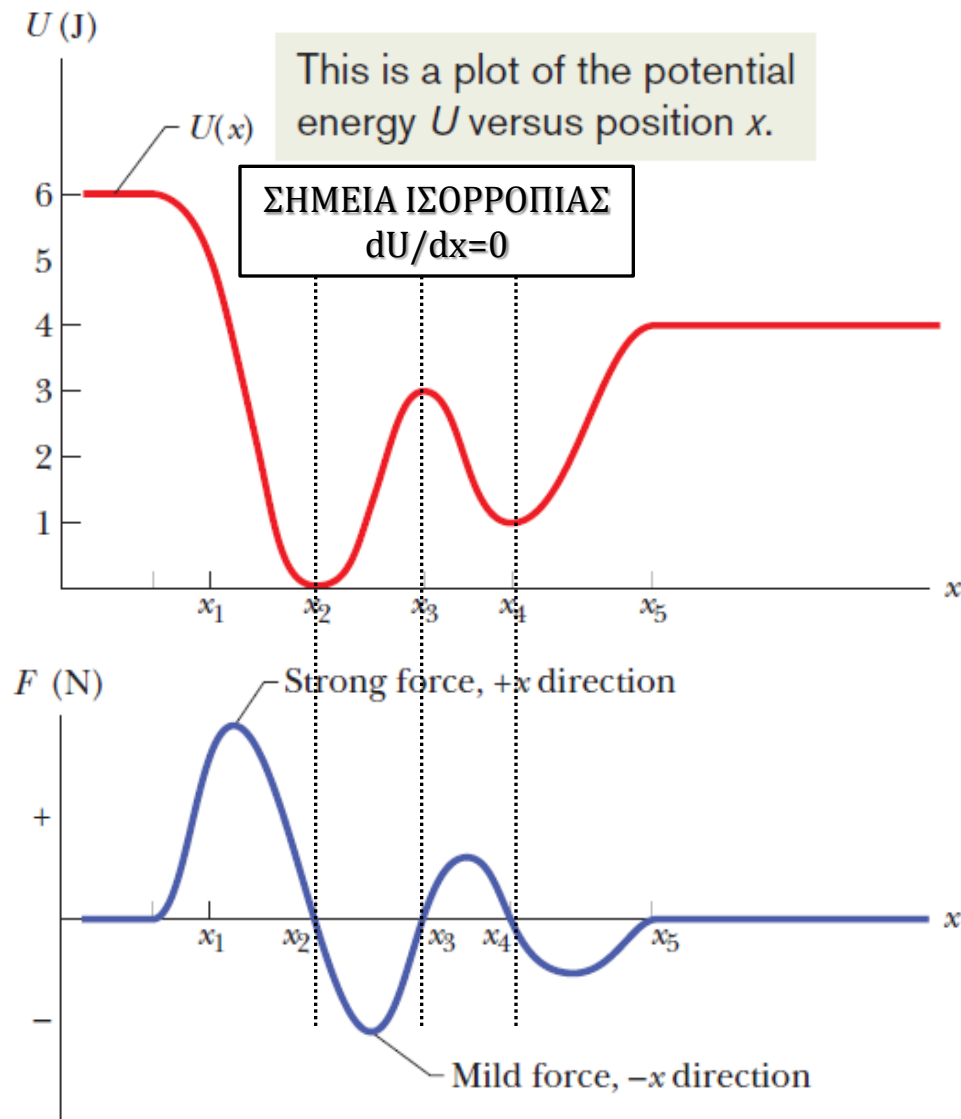


$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$



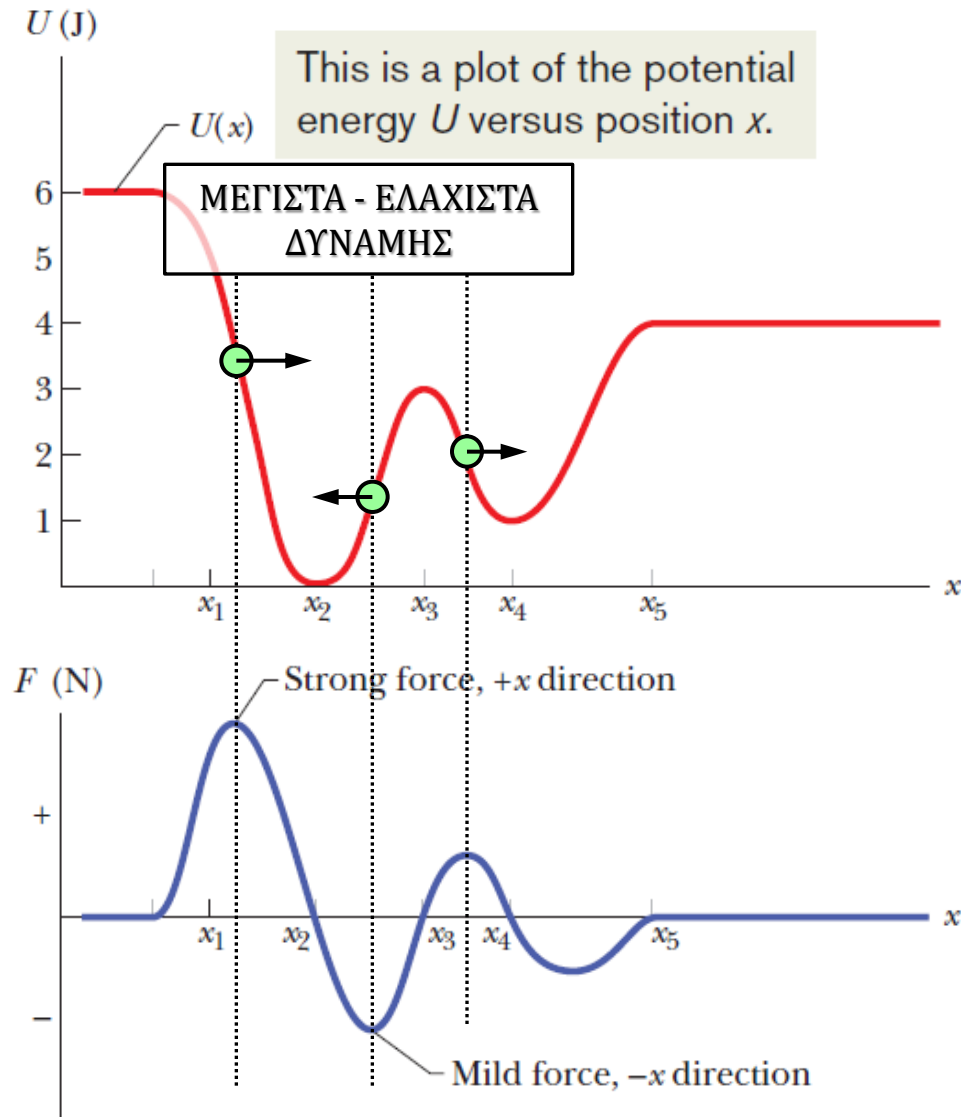
ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx}$$



ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx}$$



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Η έννοια της παραγωγίσης ενός βαθμωτού ή διανυσματικού πεδίου στον χώρο διευκολύνεται με την εισαγωγή του τελεστή ∇ (*Ανάδελτα* ή *Nabla*), ο οποίος ορίζεται ως:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

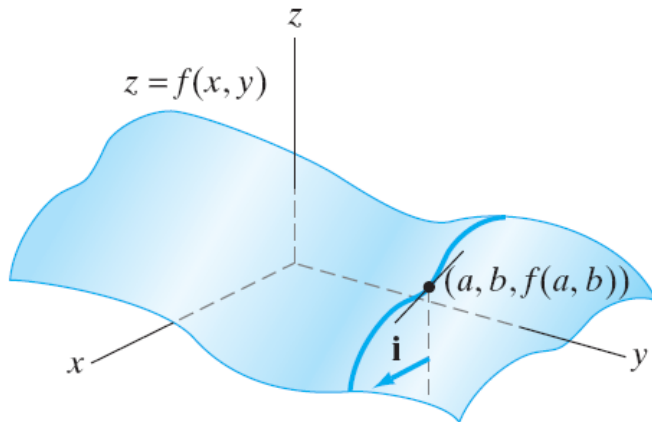
Διακρίνονται οι τρεις παρακάτω περιπτώσεις, ανάλογα με το εάν το πεδίο (η συνάρτηση) στο οποίο ο τελεστής αυτός επιδρά είναι βαθμωτό ή διανυσματικό:

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΟΡΙΣΜΑ	ΤΡΟΠΟΣ ΔΡΑΣΗΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
Κλίση (grad)	Βαθμωτό	$\vec{\nabla} f$	Διανυσματικό
Απόκλιση (div)	Διανυσματικό	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	Βαθμωτό
Στροβιλισμός (curl)	Διανυσματικό	$\vec{\nabla} \times \vec{F}$	Διανυσματικό

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Ως κλίση ενός βαθμωτού πεδίου (συνάρτησης) $f(x,y,z)$ ορίζεται ως το διανυσματικό πεδίο:

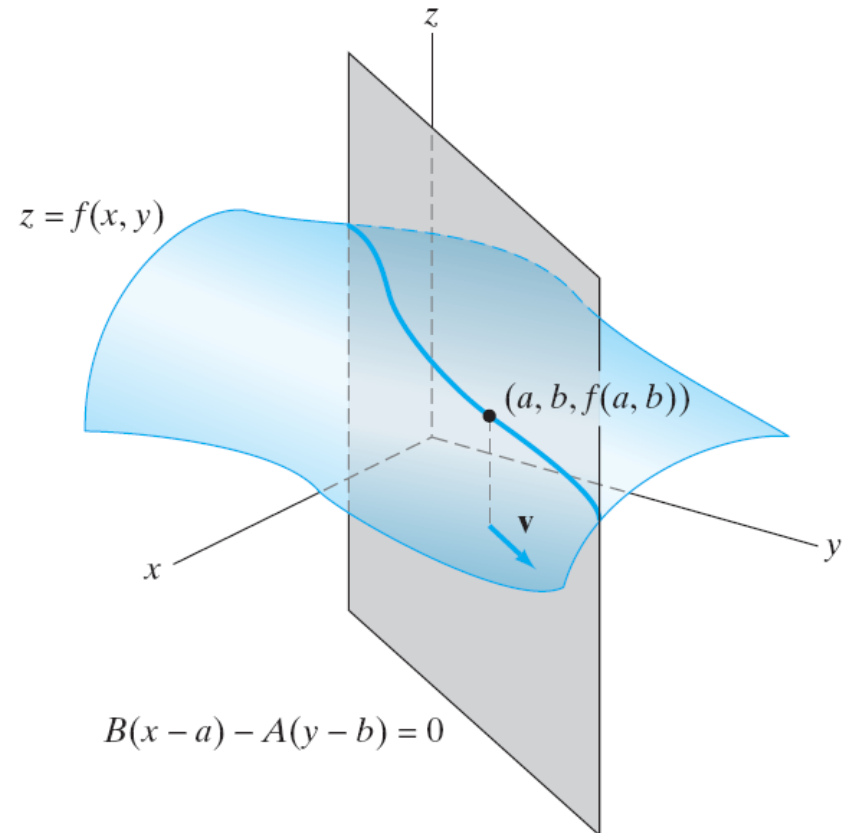
$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$



Το **grad f** δίνει την **παράγωγο** του βαθμωτού πεδίου **ανά κατεύθυνση**. Προφανώς το εσωτερικό γινόμενο

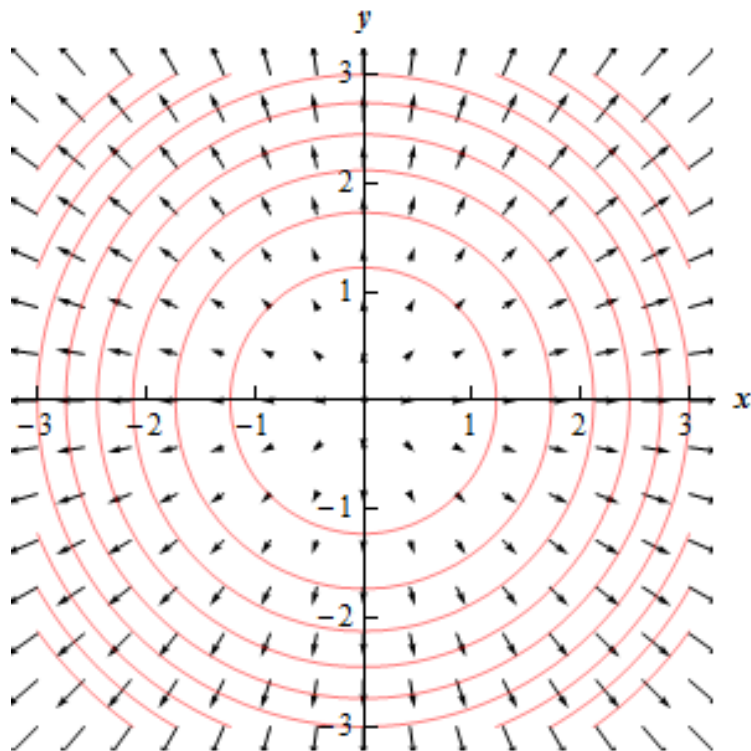
$$(\vec{\nabla} f) \cdot \vec{e}$$

είναι το μέγεθος της παραγώγου (μεταβολή του πεδίου) ως προς την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος **e**.

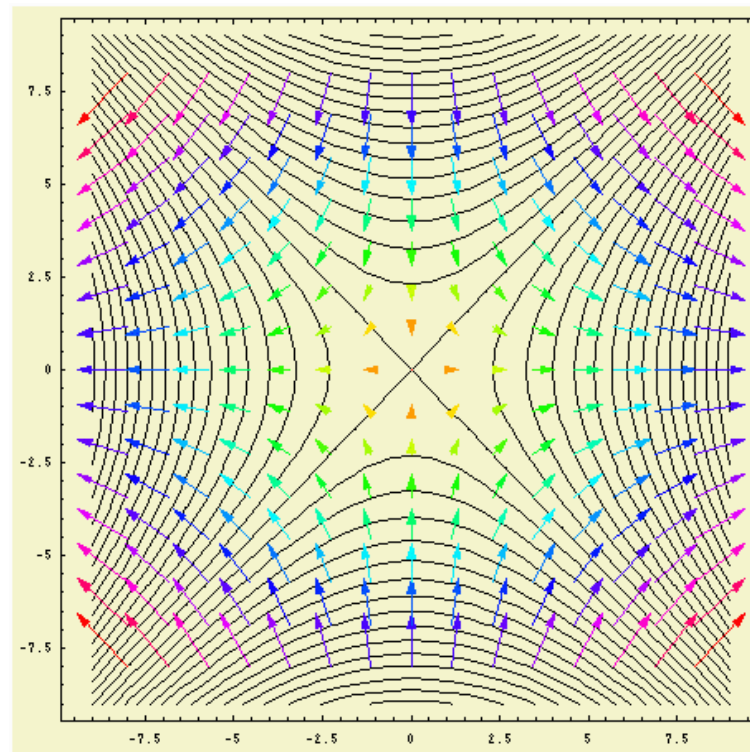


ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$



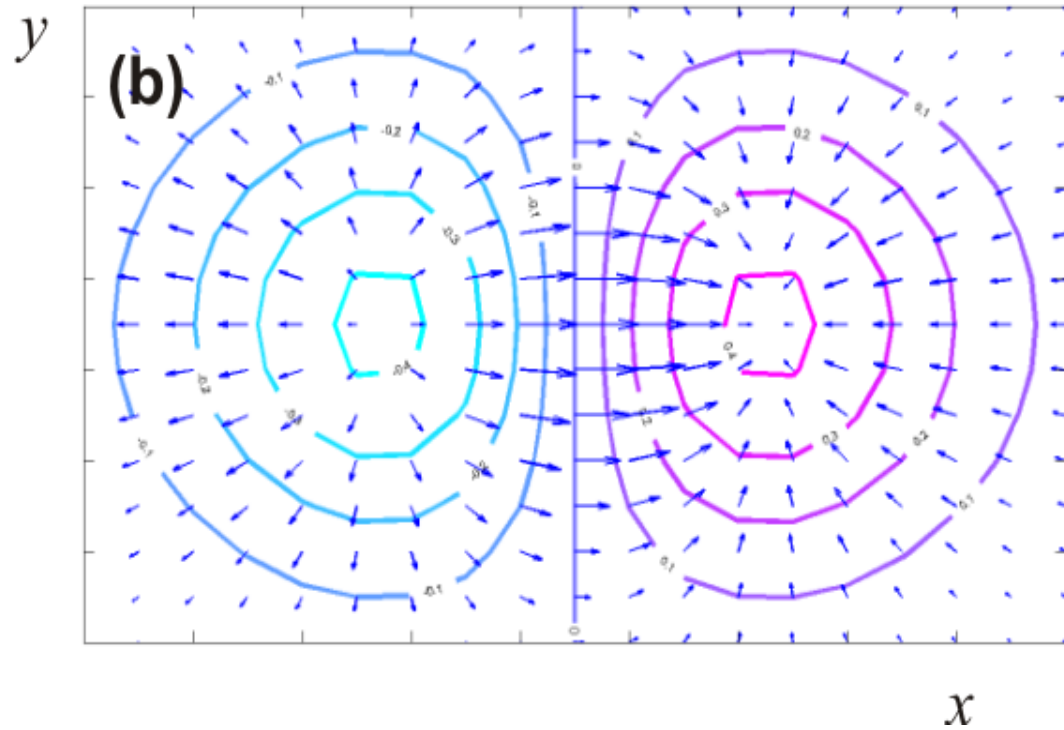
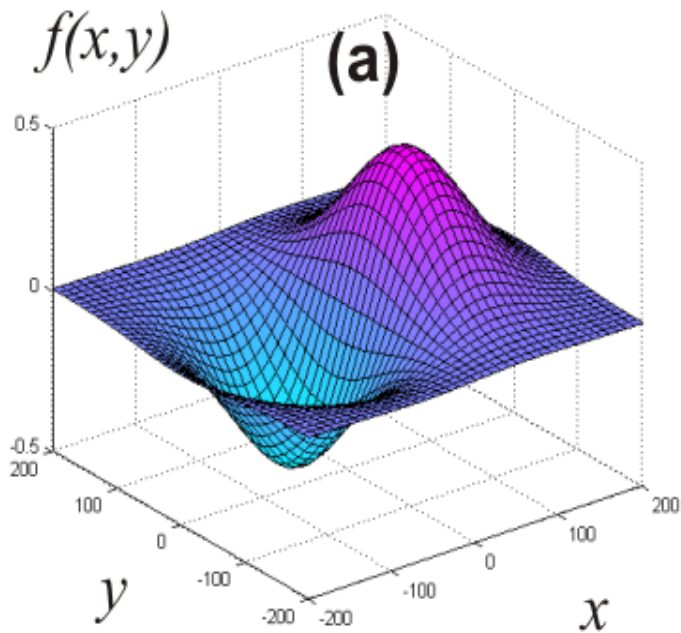
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = 2x\hat{i} + 2y\hat{j}$$



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$
$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = 2x\hat{i} - 2y\hat{j}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\text{grad}f = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$



ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

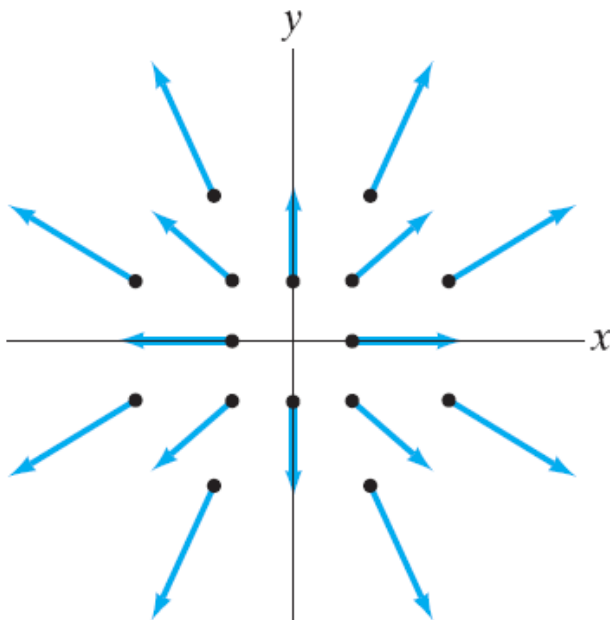
$$\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Παράδειγμα

$$\vec{F} = x \hat{i} + y \hat{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

Η **απόκλιση (divergence)** ενός διανυσματικού πεδίου είναι **βαθμωτό** μέγεθος. Προσομοιώνει την **ροή** υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την **ταχύτητα** του ρευστού.

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε **σταθερή (θετική) ροή (εκροή)** σε κάθε σημείο του χώρου.



ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

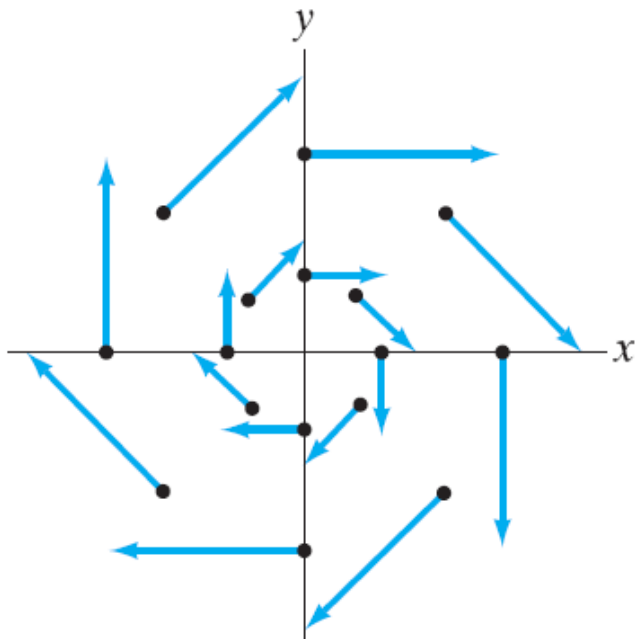
$$\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Παράδειγμα

$$\vec{F} = y \hat{i} - x \hat{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

Η **απόκλιση (divergence)** ενός διανυσματικού πεδίου είναι **βαθμωτό** μέγεθος. Προσομοιώνει την **ροή** υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την **ταχύτητα** του ρευστού.

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε **μηδενική ροή** σε κάθε σημείο του χώρου (το ρευστό μόνο στροβιλίζεται).



ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\text{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Η **στροβιλισμός (curl)** ενός διανυσματικού πεδίου είναι **διανυσματικό** μέγεθος. Δείχνει τον **στροβιλισμό** υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την **ταχύτητα** του ρευστού.

Όταν ένα διανυσματικό πεδίο έχει **μηδενικό στροβιλισμό** αποκαλείται **αστρόβιλο πεδίο**.

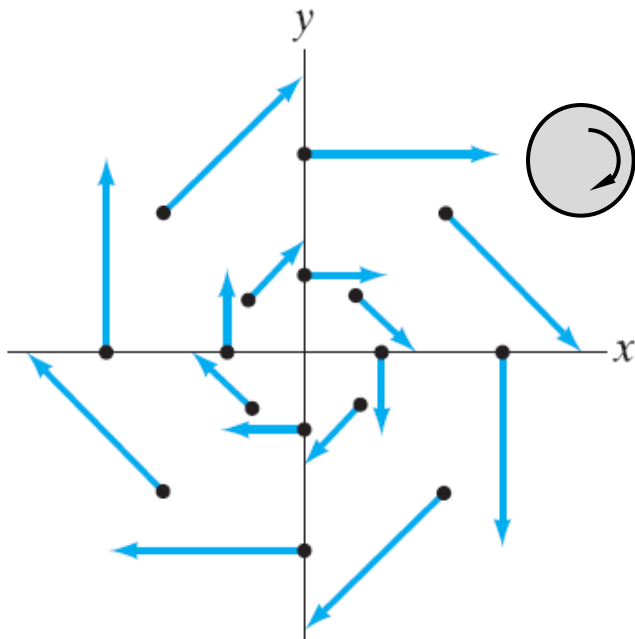
Ένας πρακτικός τρόπος για να βρεθεί ο στροβιλισμός ενός πεδίου σε κάποιο σημείο του είναι να μελετηθεί η **στροφική κίνηση** υποθετικού επίπεδου δίσκου φερόμενου στο σημείο αυτό.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\text{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα



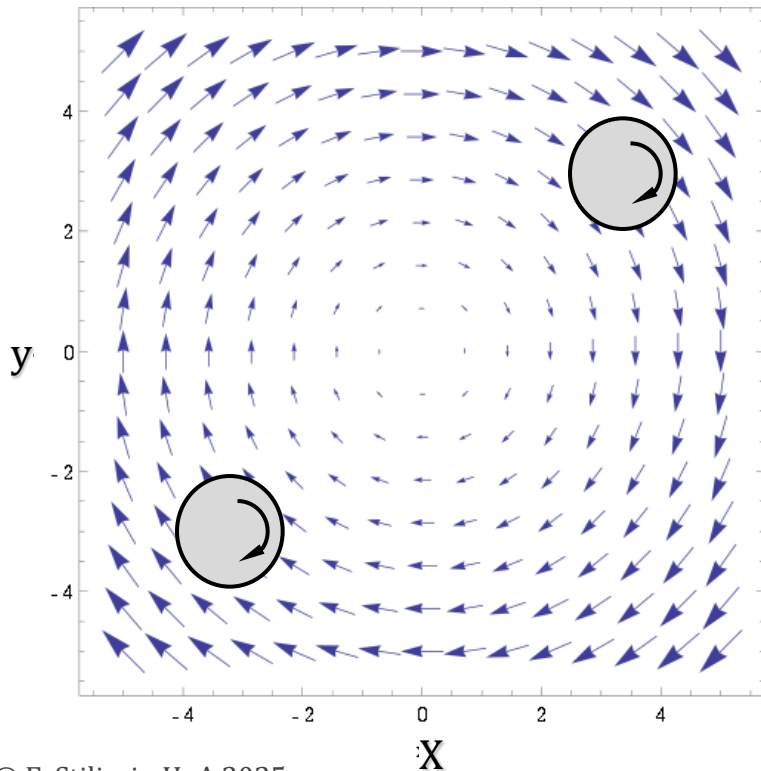
$$\vec{F} = y \hat{i} - x \hat{j}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\hat{k}$$

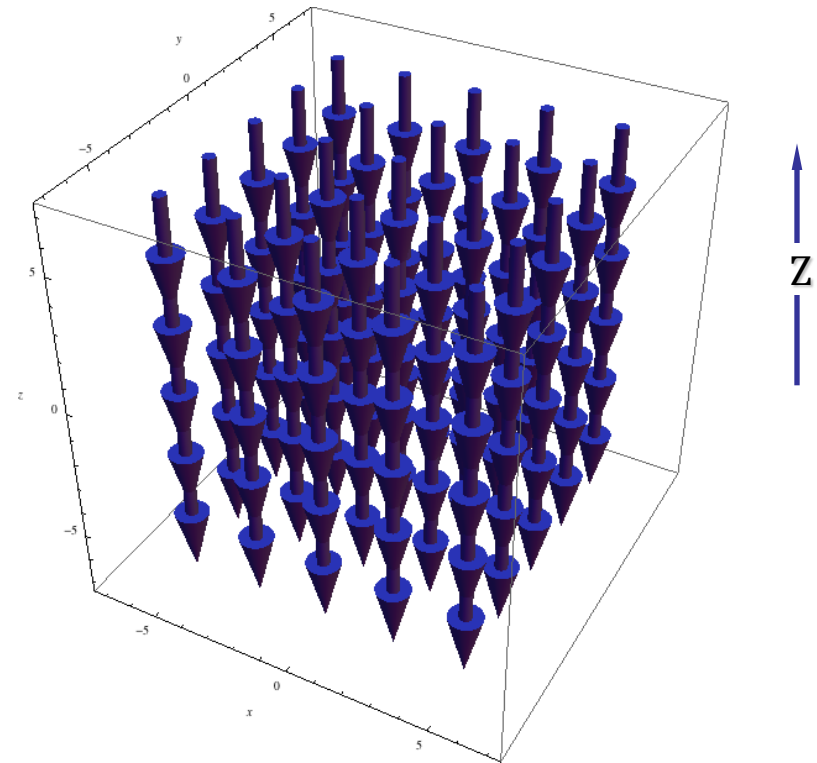
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\text{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{F} = y \hat{i} - x \hat{j}$$



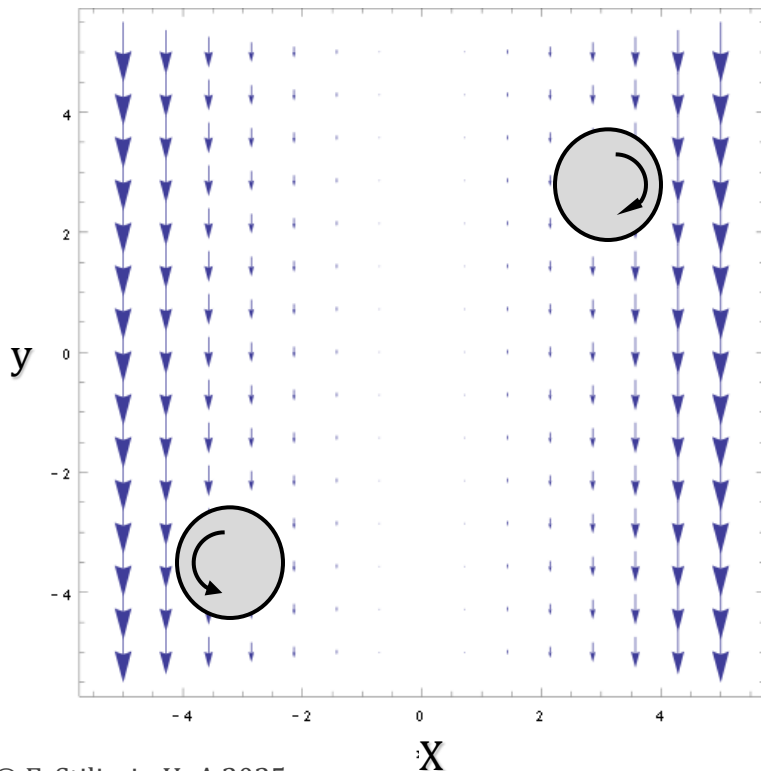
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -2 \hat{k}$$



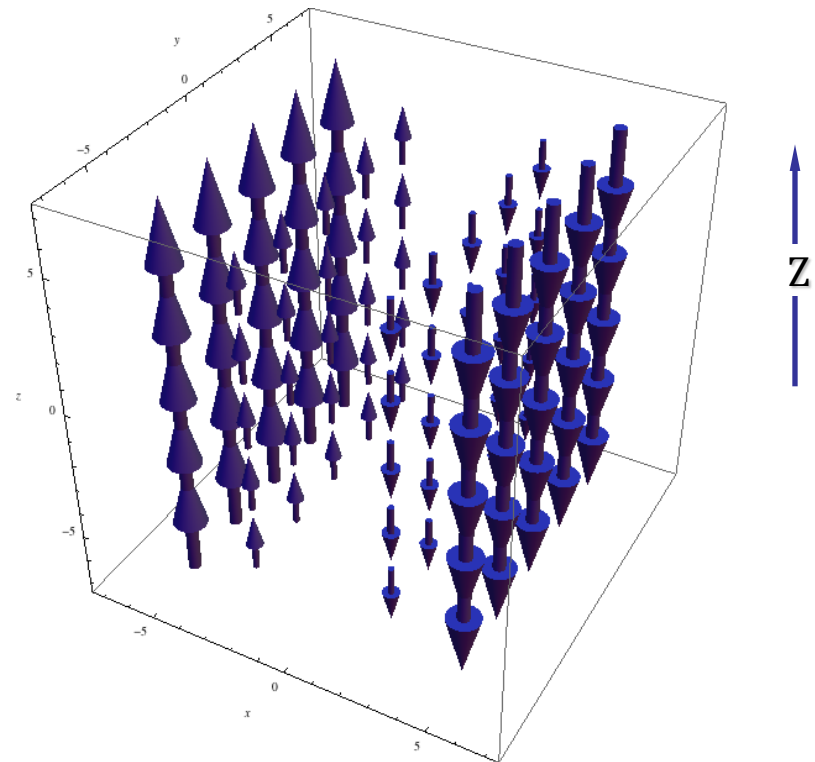
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\text{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{F} = -x^2 \hat{j}$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -2x \hat{k}$$



ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\text{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

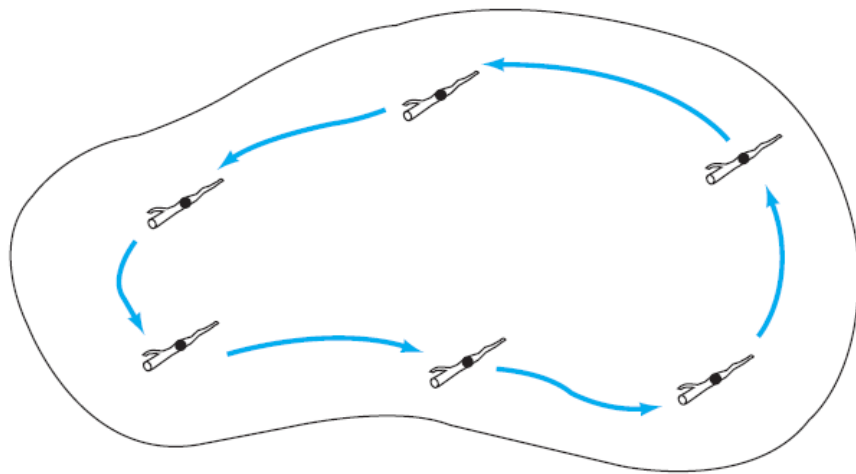
Αριθμητικό Παράδειγμα

$$\vec{F} = x^2 y \hat{i} - 2xz \hat{j} + (x + y - z) \hat{k}$$

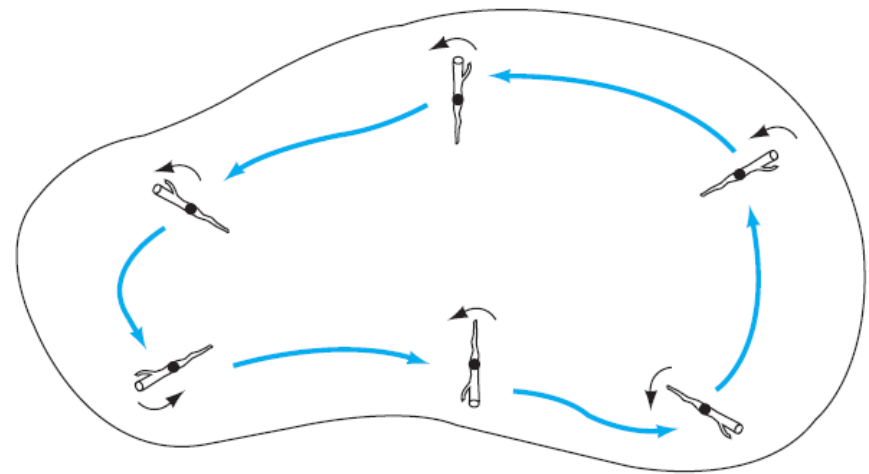
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & -2xz & x + y - z \end{vmatrix} = (2x + 1) \hat{i} - \hat{j} - (x^2 + 2z) \hat{k}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Σχηματικό παράδειγμα κίνησης ενός κλαδιού δέντρου στο υδάτινο ρεύμα μιας λίμνης. Το κλαδί ακολουθεί την πορεία που καθορίζει το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού στην επιφάνεια της λίμνης. Εάν ο προσανατολισμός του κλαδιού δεν αλλάζει (αριστερά), τότε δεν υπάρχει στροβιλισμός στο πεδίο των ταχυτήτων ($\text{curl}\vec{F}=\vec{0}$). Στην αντίθετη περίπτωση ύπαρξης στροβιλισμού (δεξιά), το κλαδί πέραν από την μεταφορική εκτελεί και περιστροφική κίνηση.



$$\text{curl}\vec{F} = \vec{0}$$



$$\text{curl}\vec{F} \neq \vec{0}$$