ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2024-2025

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

- Έργο και Κινητική Ενέργεια
- Έργο Βαρυτικής Δύναμης και Δύναμης Ελατηρίου
- Έργο Μεταβλητής Δύναμης
- Ισχύς

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

- Συντηρητικές Δυνάμεις
- Δυναμική Ενέργεια
- Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας

ΦΥΣΙΚΗ I

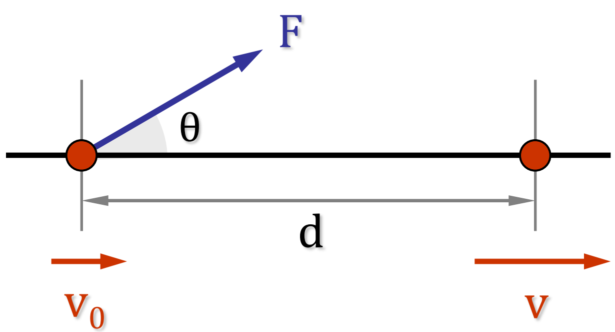
ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2024-2025

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ΦΑΡΑΚΟΣ	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΕΡΓΟ & ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ	4.1, 4.2, 4.4	7.1, 7.2, 7.4	7.1 έως 7.7	6.1, 6.2
ΕΡΓΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ	4.1, 4.2	7.3, 8.1, 8.4	7.8, 7.9	6.3, 6.4
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ	4.4.1, 4.5, 4.6	8.2, 8.3, 8.5, 8.6	8.1 έως 8.8	7.1 έως 7.5

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Επίδραση σταθερής δύναμης F σε σωματίδιο μάζας m



$$W = F_x \cdot d = F \cdot \cos\theta \cdot d = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d}}$$

Η δύναμη αυτή επιφέρει αλλαγή στην κινητική κατάσταση του σωματιδίου:

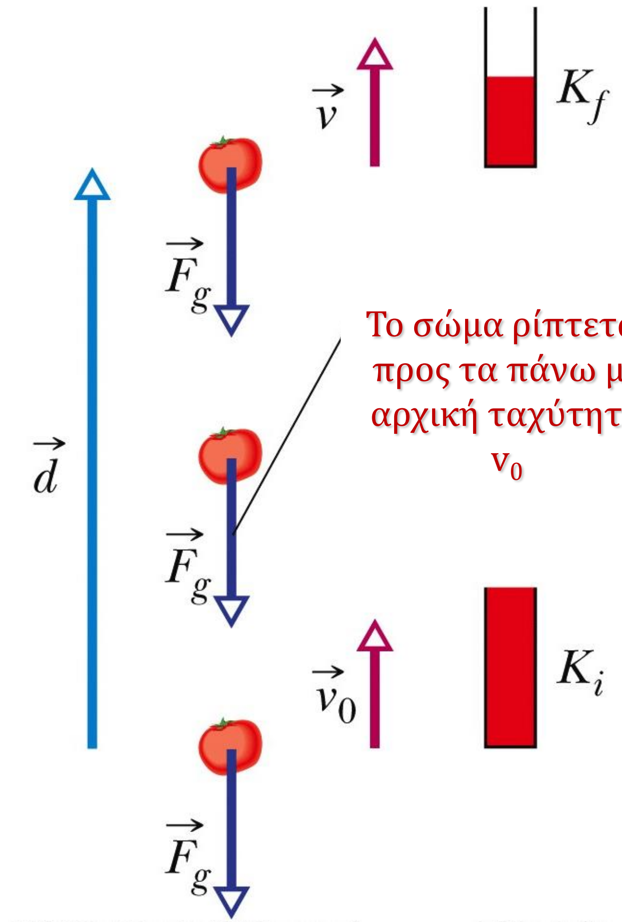
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v \Rightarrow v\,dv = a\,dx \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = a(x - x_0) = a\,d \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma\,d = F_x d = W$$

$$\boxed{K_f - K_i = W \quad \Leftrightarrow \quad K_f = K_i + W}$$

Έργο που εκτελείται από την βαρυτική δύναμη



Το σώμα ρίπτεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0

$$\boxed{K_f = K_i + W}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\,d\cos180^0$$

$$\Downarrow$$

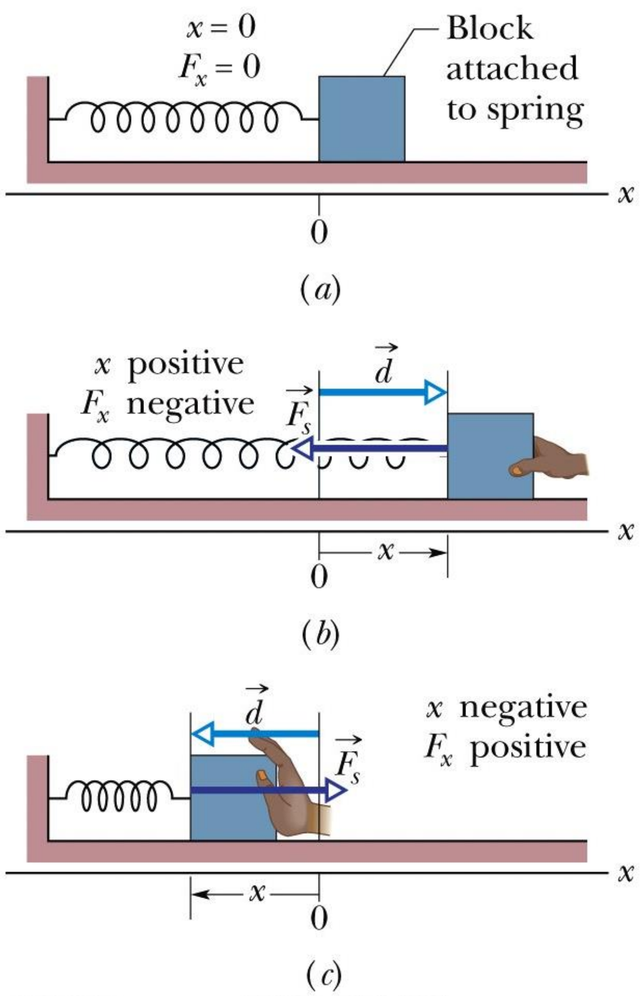
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\,d\,(-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgd}$$

Η βαρυτική δύναμη παράγει στην περίπτωση αυτή αρνητικό έργο και ελαττώνει την κινητική ενέργεια του σώματος.

Έργο που εκτελείται από τη δύναμη ελατηρίου



Νόμος του Hooke

$$\boxed{F_x = -k\,x}$$

$$\Downarrow$$

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx$$

$$\Downarrow$$

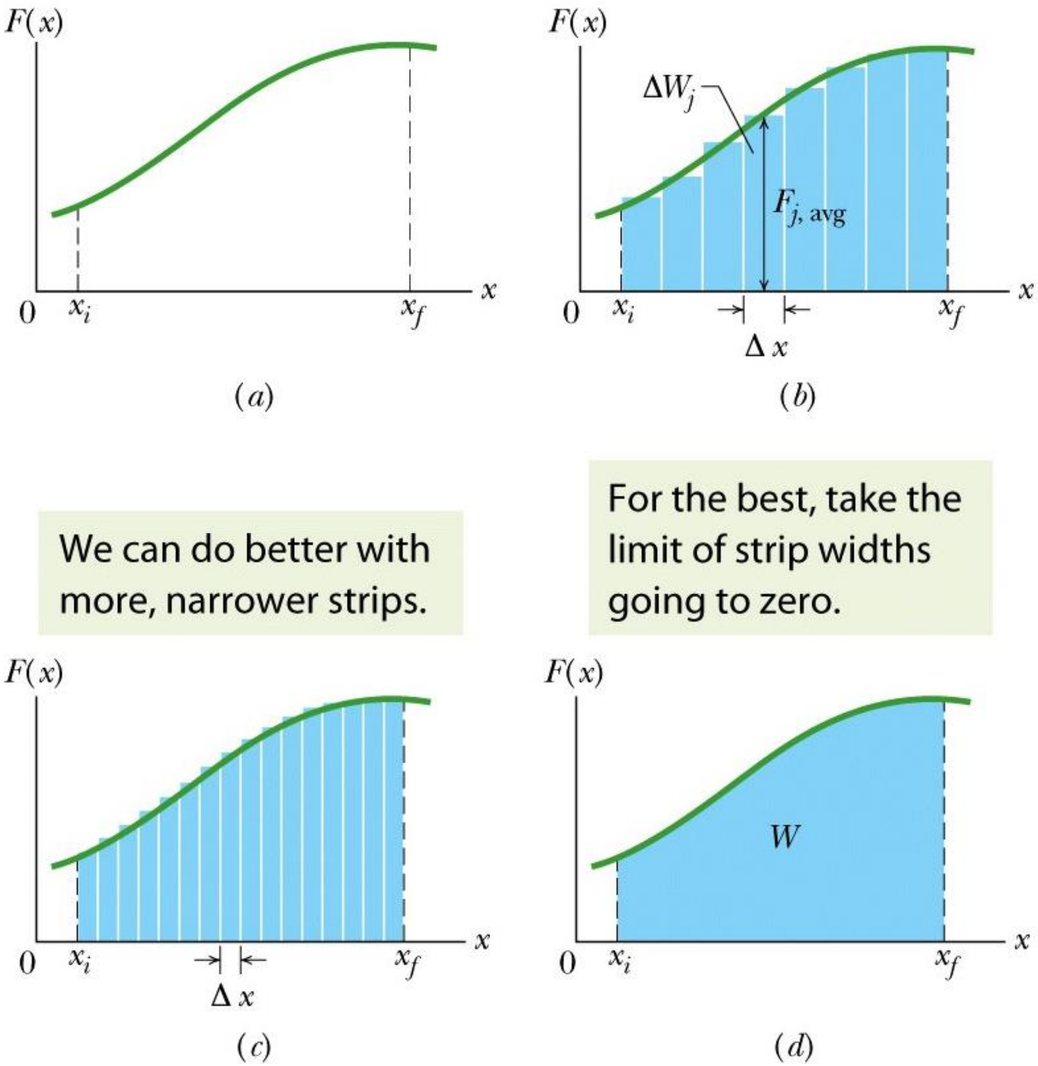
$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Το έργο είναι θετικό όταν το σώμα καταλήγει πιο κοντά ($x_f < x_i$) στη θέση ισορροπίας.

Για x_i=0 ισχύει: $$\boxed{W_s = -\frac{1}{2}kx^2}$$

ΕΡΓΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ανάλυση σε μία διάσταση



Το έργο μεταβλητής δύναμης σε μια διάσταση υπολογίζεται :

$$\boxed{W = \sum \Delta W_i = \sum F_i \, \Delta x}$$

$$\Downarrow$$

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum F_i \, \Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx}$$

Ανάλυση σε τρεις διαστάσεις

Το έργο μεταβλητής δύναμης σε τρεις διαστάσεις υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \\ d\vec{r} &= dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz}$$

Κατά συνέπεια:

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F από το σημείο (2,3) στο σημείο (3,0), όπου:

$$\vec{F} = 3x^2\,\hat{i} + 4\,\hat{j}$$

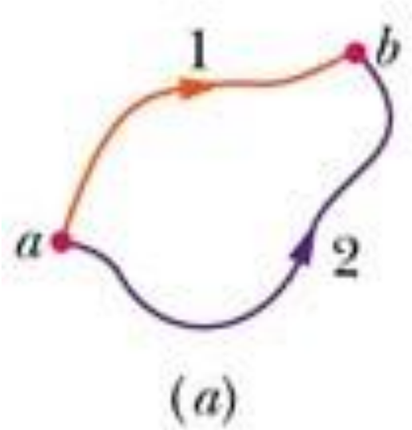
Γνωρίζουμε ότι $\boxed{W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy}$ οπότε:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy = \int_{2}^{3} 3x^2 dx + \int_{3}^{0} 4dy$$

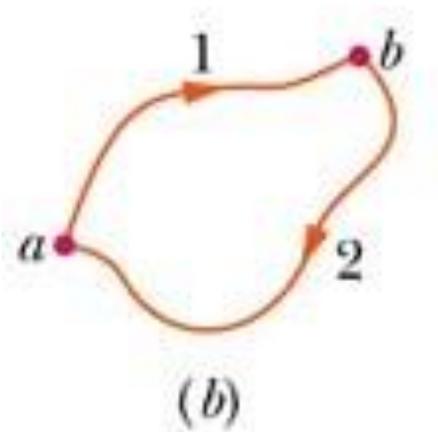
$$\Downarrow$$

$$W = x^3\Big|_2^3 + 4y\Big|_3^0 = (27-8)+(0-12) = 7\mathrm{J}$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ



(a)



(b)

Το έργο που παράγεται από μια συντηρητική δύναμη σε ένα σωματίδιο που κινείται από το σημείο a στο σημείο b δεν εξαρτάται από την τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο.

$$\boxed{W_{ab,1} = W_{ab,2}}$$

Κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής μια συντηρητική δύναμη δίνει συνολικό έργο μηδέν.

$$W_{ab,1} = W_{ab,2} = -W_{ba,2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W_{ab,1} + W_{ba,2} = W_{ab,1\to ba,2} = 0}$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Αν μια δύναμη **F** είναι συντηρητική, δηλαδή το παραγόμενο έργο εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση, τότε μπορεί να βρεθεί μια συνάρτηση **U** η οποία να αποδίδει ποσοτικά τη διαφορά αυτή ως:

$$\boxed{W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = U(x_i) - U(x_f) = -\Delta U}$$

Η συνάρτηση αυτή καλείται Δυναμικό ή Δυναμική Ενέργεια. Για το U ισχύει:

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = U(x_i) - U(x_f) \Rightarrow F(x)\,dx = -dU(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Για το δυναμικό γενικότερα ισχύει:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U = -\vec{\nabla}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} \right)$$

Για να είναι μια δύναμη συντηρητική αποδεικνύεται πως πρέπει να ισχύουν:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Τότε μπορεί να προσδιορισθεί η συνάρτηση U(x,y,z) έτσι ώστε

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Παράδειγμα

$$\boxed{\vec{F} = (x^2 + y^2)\,\hat{i} + 2xy\,\hat{j}}$$

Να βρεθεί το έργο της δύναμης αυτής από το σημείο (0,0) στο (2,4) κατά μήκος της καμπύλης: (α) y=2x (β) $y=x^2$

$\boxed{y = 2x}$

$$W_a = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy = \int_0^2 (x^2 + y^2)\,dx + \int_0^4 2xy\,dy = \int_0^2 (x^2 + 4x^2)\,dx + \int_0^4 y^2\,dy$$

$$\Downarrow$$

$$W = \left.\frac{5x^3}{3}\right|_0^2 + \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^4 = \frac{40}{3} + \frac{64}{3} = \frac{104}{3}$$

$\boxed{y = x^2}$

$$W_b = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy = \int_0^2 (x^2 + y^2)\,dx + \int_0^4 2xy\,dy = \int_0^2 (x^2 + x^4)\,dx + \int_0^4 2y^{3/2}\,dy$$

$$\Downarrow$$

$$W = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 + \left.\frac{4y^{5/2}}{5}\right|_0^4 = \frac{8}{3} + \frac{32}{5} + \frac{128}{5} = \frac{104}{3}$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Στο προηγούμενο παράδειγμα βρέθηκε $W_a=W_b$, όπως ήταν αναμενόμενο, δεδομένου ότι:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial (2xy)}{\partial x} = 2y = \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial y} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Άρα μπορεί να βρεθεί μια συνάρτηση **U(x,y)** τέτοια ώστε:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial x} = -F_x = -(x^2+y^2) \Rightarrow U = -\left(\dfrac{x^3}{3} + xy^2\right) + g(y) \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} = -F_y = -2xy \Rightarrow U = -xy^2 + f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x) = -\dfrac{x^3}{3} \\ g(y) = C \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{U(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy^2 + C}$$

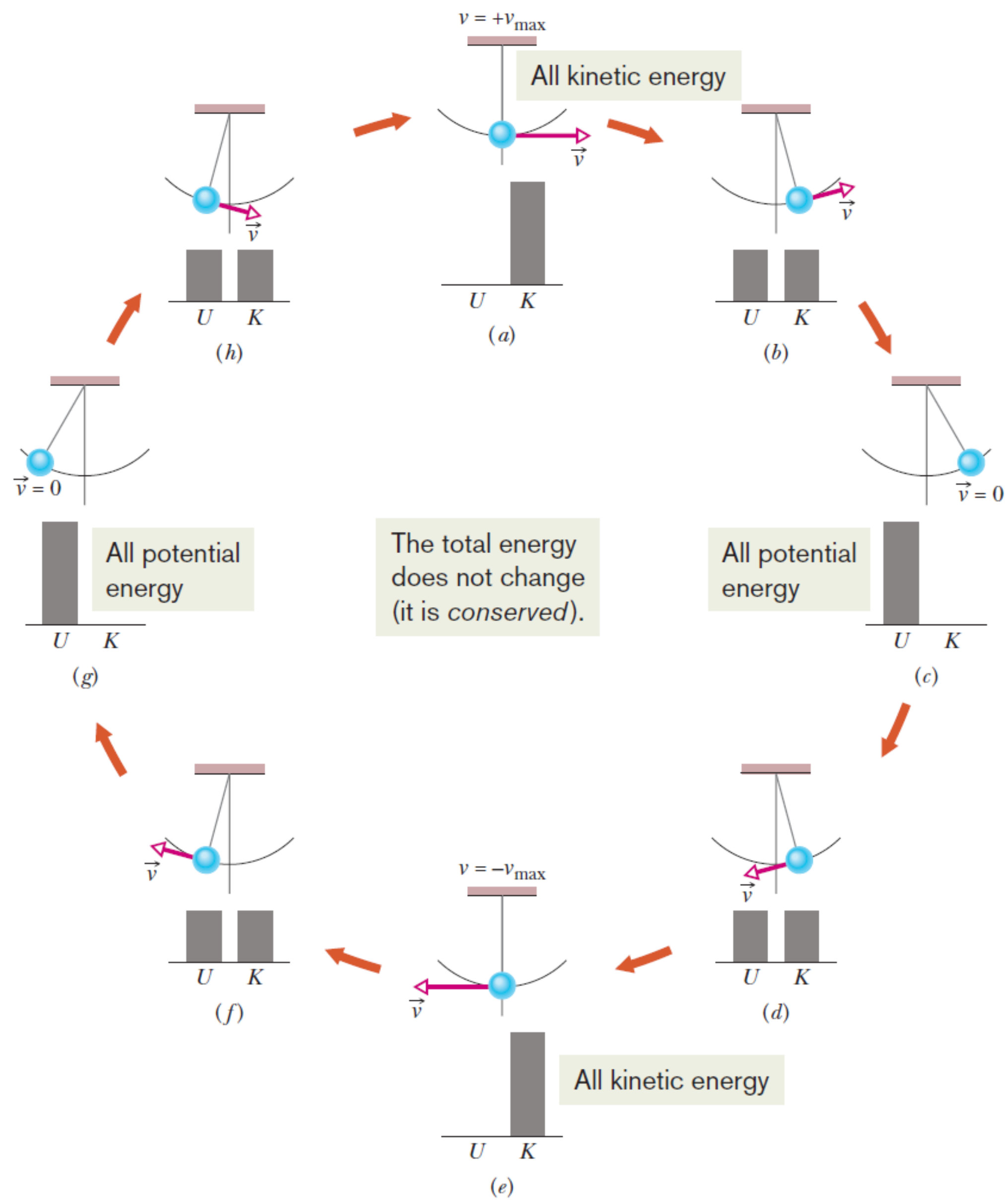
Εύκολα παρατηρούμε πως: $\quad U(0,0) - U(2,4) = \frac{8}{3} + 2\cdot 16 = \frac{104}{3}$

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$\begin{Bmatrix} \Delta K = W \\ \Delta U = -W \end{Bmatrix} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

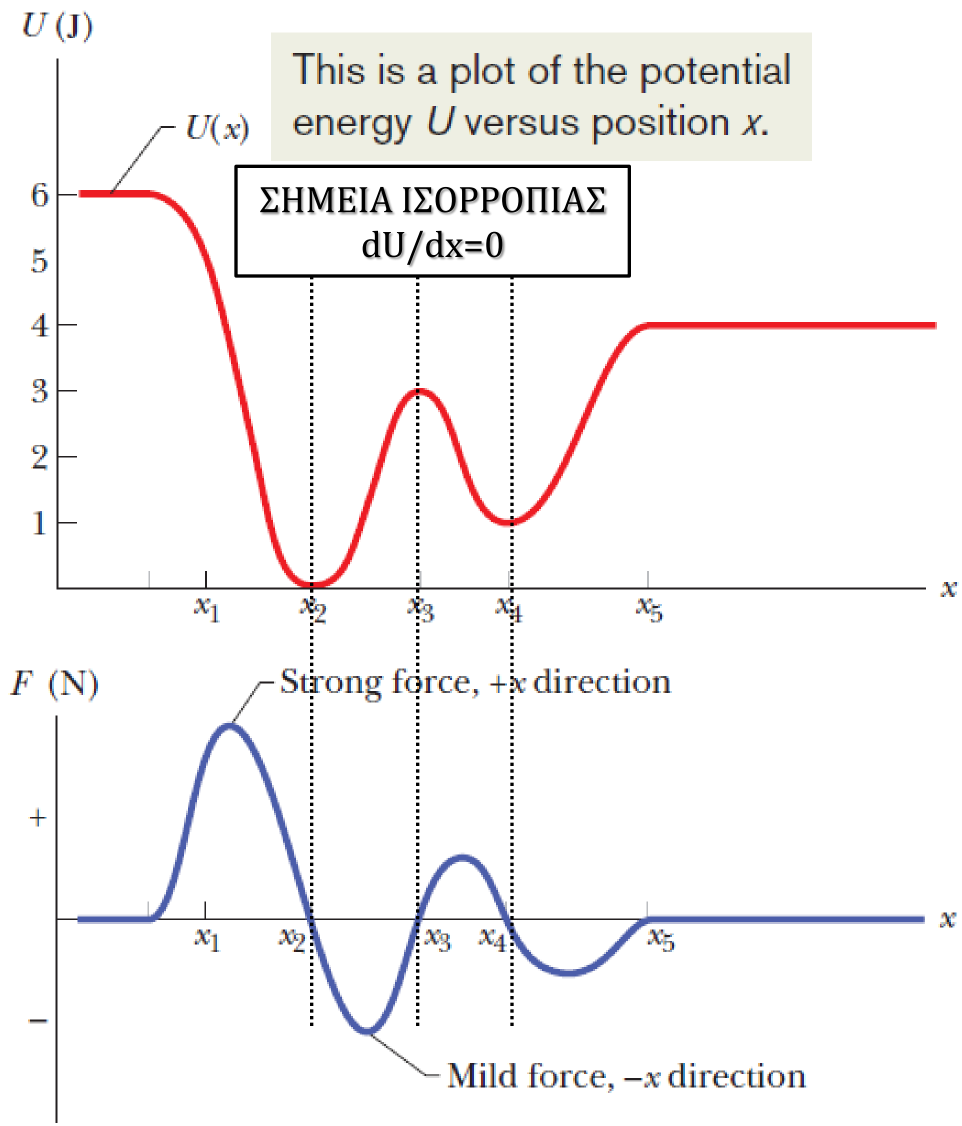
$$\Downarrow$$

$$\boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$



ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$



$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$