ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-2024

Ευσταθιος Γ. Στυλιαρης

Τμημα Φυσικης
ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 2023

Μέρος των ασκήσεων του παρόντος φυλλαδίου παρουσιάστηκαν κατά τις παραδόσεις του μαθήματος **ΦΥΣΙΚΗ-Ι** το χειμερινό εξάμηνο του Ακαδημαϊκού Έτους 2023-2024 και αποτελούν συνοδευτικό υλικό των διαφανειών των αντίστοιχων κεφαλαίων.

ST202310080058-V1.07
Εθνικον & Καποδιστριακον Πανεπιστημιον Αθηνων

Κεφάλαιο 1

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Εσωτερικο & Εξωτερικο Γινομενο Διανυσματων {Ορισμοί}
- Δυναμεις {Διανυσματικός Χαρακτήρας Δυνάμεων, Σύνθεση Δυνάμεων}
- Ροπη {Η Έννοια της Ροπής, Ροπή Πολλών Δυνάμεων, Ζεύγος Δυνάμεων}
- Στατικη Ισορροπια Σωματος {Ισορροπία Σωματιδίου, Στατική Ισορροπία Στερεού Σώματος}
- Συστηματα Συντεταγμενων {Καρτεσιανές, Πολικές, Κυλινδρικές & Σφαιρικές Συντεταγμένες}
- Παραγωγος Συναρτησης Πολλων Μεταβλητων {Μερική Παράγωγος, Σύνθετη Συνάρτηση & Κανόνας της Αλυσίδας}
- Παραγωγος στον Διανυσματικο Χωρο {Παράγωγος Διανύσματος, Ο Τελεστής ∇ και οι Τρεις Βασικές Διεργασίες: Κλίση - Απόκλιση - Στροβιλισμός}
- Κεντρο Μαζας (Βαρους) {Ορισμός Κέντρου Μάζας & Βάρους, Εύρεση Κέντρου Μάζας με Ολοκλήρωση}

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο αντιμετωπίζονται απλά προβλήματα κατανόησης του διανυσματικού λογισμού, όπως είναι το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Χωρίς την αυστηρή εισαγωγή της έννοιας της δύναμης και εκμεταλλευόμενοι τον διανυσματικό της χαρακτήρα, παρουσιάζονται οι πρώτες απλές πράξεις μεταξύ διανυσμάτων, όπως είναι η σύνθεση δυνάμεων και η εύρεση γωνιακών παραμέτρων βασιζόμενοι στο εσωτερικό τους γινόμενο. Η έννοια της ροπής εισάγεται ως το εξωτερικό γινόμενο θέσης - δύναμης και με βάση τον διανυσματικό ορισμό ζεύγους δυνάμεων εξετάζεται η σύνθεση πολλών δυνάμεων, είτε αυτές είναι συντρέχουσες σε ένα σημείο, είτε εφαρμόζονται σε διαφορετικά σημεία στερεού σώματος. Παράλληλα, η στατική ισορροπία στερεών σωμάτων για συνεπίπεδες δυνάμεις εισάγει μια πληθώρα από ενδιαφέρουσες ασκήσεις.

Στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο πέραν του συστήματος των Καρτεσιανών Συντεταγμένων εισάγονται τα συστήματα των Κυλινδρικών και Σφαιρικών Συντεταγμένων. Γίνεται λεπτομερής αναφορά στις μετατροπές συντεταγμένων από το ένα σύστημα στο άλλο και παρουσιάζονται απλοί γεωμετρικοί τόποι με τις αντίστοιχες εξισώσεις τους στα διάφορα συστήματα.

Η έννοια της απλής παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής επεκτείνεται στην μερική παράγωγο συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Δίνονται παραδείγματα με απλές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και γίνεται σύντομη αναφορά στο ολικό διαφορικό και τον κανόνα της αλυσίδας για σύνθετες συναρτήσεις. Παράλληλα αναπτύσσεται η έννοια της παραγώγου διανύσματος και εισάγεται η αναγκαιότητα της παραγώγου ανά κατεύθυνση στον τρισδιάστατο χώρο. Αφού ορισθεί ο τελεστής ∇ αναφέρονται οι τρεις βασικές διεργασίες που μπορεί αυτός να επιτελέσει σε βαθμωτά και διανυσματικά πεδία: Κλίση ($grad\, f$), Απόκλιση ($div\, \vec{F}$) και Στροβιλισμός ($curl\, \vec{F}$) αποδίδοντας παράλληλα και την βασική φυσική ερμηνεία των μεγεθών αυτών.

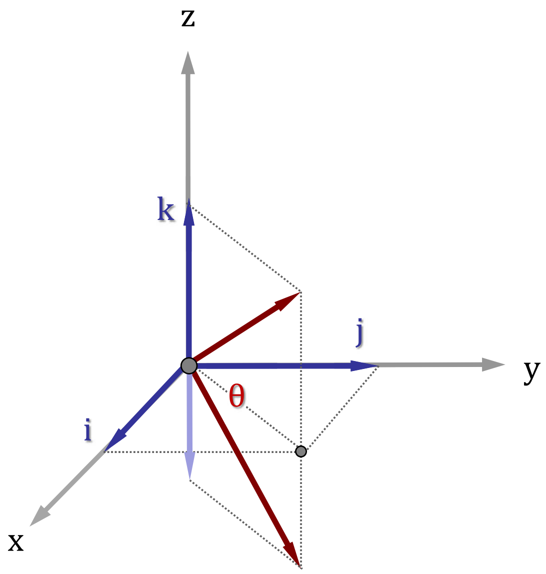
Τέλος, δίνεται ο ορισμός του Κέντρου Βάρους & Μάζας στερεού σώματος και αποδεικνύεται η ταύτιση των όρων αυτών σε ομογενές βαρυτικό πεδίο. Αναπτύσσεται η μεθοδολογία του ολοκληρωτικού λογισμού στην εύρεση του κέντρου μάζας. Απλές εφαρμογές δίνονται στο τελευταίο μέρος της ενότητας αυτής.

1.1 Διανύσματα

1.1.1 Εσωτερικό και Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

ΑΣΚΗΣΗ 1.1

Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ και $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$.



Λύση

Τα δύο διανύσματα που προκύπτουν από τους παραπάνω συνδυασμούς των μοναδιαίων διανυσμάτων έχουν συντεταγμένες $(+1,+1,+1)$ και $(+1,+1,-1)$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a|\ |b| \cos\theta$$

και δεδομένου ότι το μέτρο κάθε ενός από τα παραπάνω διανύσματα είναι $\sqrt{3}$, λαμβάνουμε:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\,|b|} = \frac{(1,1,1)\cdot(1,1,-1)}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{1\cdot1+1\cdot1+1\cdot(-1)}{3} = \frac{1}{3}$$

απ΄ όπου συνάγεται πως:

$$\theta = arccos\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 70.5^o$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2

Δίνονται τα διανύσματα: $\begin{bmatrix} \vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \\ \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} \\ \vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} \end{bmatrix}$

Να υπολογισθούν τα γινόμενα $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ και $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

Λύση

Πρόκειται για εξωτερικά γινόμενα, οπότε, με βάση τον ορισμό, θα γίνει χρήση της ορίζουσας. Έτσι έχουμε:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

Ομοίως:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

Κάνοντας χρήση του πρώτου αποτελέσματος υπολογίζουμε:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = (3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{i} - 7\hat{j} + 11\hat{k}$$

Τέλος, κάνοντας χρήση του δεύτερου αποτελέσματος υπολογίζουμε:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \times (-7\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 12\hat{j} + 10\hat{k}$$

Σημείωση: Από τα δύο τελευταία αποτελέσματα παρατηρείστε πως στο εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

.

ΑΣΚΗΣΗ 1.3

Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ είναι πάντα ίσο με μηδέν.

Λύση

Το διάνυσμα $\vec{c}$ που ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Κατά συνέπεια το εσωτερικό γινόμενό του $\vec{c}$ με καθένα από τα διανύσματα αυτά είναι λόγω καθετότητας ίσο με μηδέν:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$$

Μια πιο αυστηρή μαθηματική απόδειξη δίδεται παρακάτω:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Η παραπάνω ορίζουσα είναι μηδενική καθόσον δύο γραμμές της (a_i) είναι ταυτόσημες. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε όταν πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά και με το $\vec{b}$. Τότε θα υπάρχουν ξανά δύο σειρές (b_i) που είναι πάλι ταυτόσημες.

ΑΣΚΗΣΗ 1.4

Αν το άθροισμα και η διαφορά δύο διανυσμάτων είναι διανύσματα κάθετα, τότε τα δύο διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.

Λύση

Έστω ότι τα δύο διανύσματα είναι $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Τότε, με βάση την εκφώνηση, τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} - \vec{b}$ είναι κάθετα, άρα:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 0 \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Longrightarrow |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\Longrightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 \Longrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Γεωμετρική ερμηνεία: Εάν στις πλευρές ενός παραλληλογράμμου αντιστοιχηθούν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$, τότε οι δύο διαγώνιές του αντιστοιχούν στα διανύσματα $(\vec{a}+\vec{b})$ και $(\vec{a}-\vec{b})$. Είναι γεωμετρικά γνωστό πως, εάν οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου γίνουν κάθετες, τότε το σχήμα μετατρέπεται σε ρόμβο, του οποίου όλες οι πλευρές είναι ίσες, άρα $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.5

Να αποδείξετε πως το αποτέλεσμα του εξωτερικού γινομένου τριών διανυσμάτων της μορφής $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{b}$ και $\vec{c}$ και μάλιστα ισχύει: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Λύση

Το εξωτερικό γινόμενο $\vec{b} \times \vec{c}$ θα είναι ένα διάνυσμα, έστω $\vec{d}$, το οποίο θα είναι κάθετο στο επίπεδο (bc) των διανυσμάτων $\vec{b}$ και $\vec{c}$. Κατά συνέπεια, το ζητούμενο εξωτερικό γινόμενο $\vec{a} \times \vec{d}$ θα είναι κάθετο στο επίπεδο (ad), άρα θα βρίσκεται υποχρεωτικά στο επίπεδο (bc). Έτσι λοιπόν θα μπορεί να αναλύεται σε συνιστώσες του $\vec{b}$ και $\vec{c}$, δηλαδή να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = m\vec{b} + n\vec{c}$$

όπου m και n προσδιοριστέα βαθμωτά μεγέθη. Αν προσπαθήσουμε να εκφράσουμε το $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ με τη μορφή ορίζουσας, θα πάρουμε

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right)\times\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Υπολογίζοντας τη συνιστώσα $\hat{i}$ από την παραπάνω σύνθετη ορίζουσα, παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = a_2(b_1c_2 - b_2c_1) \; + \; a_3(b_1c_3 - b_3c_1)$$

$$= (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1$$

όπου προσθαφαιρώντας τον όρο $a_1b_1c_1$ καταλήγουμε στο:

$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 = (\vec{a}\cdot\vec{c})b_1 - (\vec{a}\cdot\vec{b})c_1$$

Ομοίως και κυκλικά για τις άλλες δύο συνιστώσες $\hat{j}$ και $\hat{k}$ προκύπτουν αντίστοιχα τα αποτελέσματα

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})b_2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})c_2 \quad , \quad (\vec{a}\cdot\vec{c})b_3 - (\vec{a}\cdot\vec{b})c_3$$

οπότε οι ζητούμενοι συντελεστές m και n είναι: $\boxed{m = \vec{a}\cdot\vec{c} \quad , \quad n = -\vec{a}\cdot\vec{b}}$

ΑΣΚΗΣΗ 1.6

Να αποδείξετε πως $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = a^2b^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$.

Λύση

Α′ Μέλος

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = \left(|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \sin\theta\right)^2 = a^2b^2\sin^2\theta$$

Β′ Μέλος

$$a^2b^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 = a^2b^2 - \left(|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\theta\right)^2 = a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\theta = a^2b^2(1-\cos^2\theta) = a^2b^2\sin^2\theta$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.7

Να αποδείξετε πως $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = 2\vec{b}\times\vec{a}$.

Λύση

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \end{vmatrix}$$

Δεδομένου πως η τιμή μιας ορίζουσας δεν αλλάζει εάν προσθέσουμε σε μια γραμμή (L:Line) ή στήλη (C:Columne) οποιοδήποτε πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής ή στήλης αντίστοιχα, μπορούμε με τις παρακάτω διαδικασίες να πάρουμε:

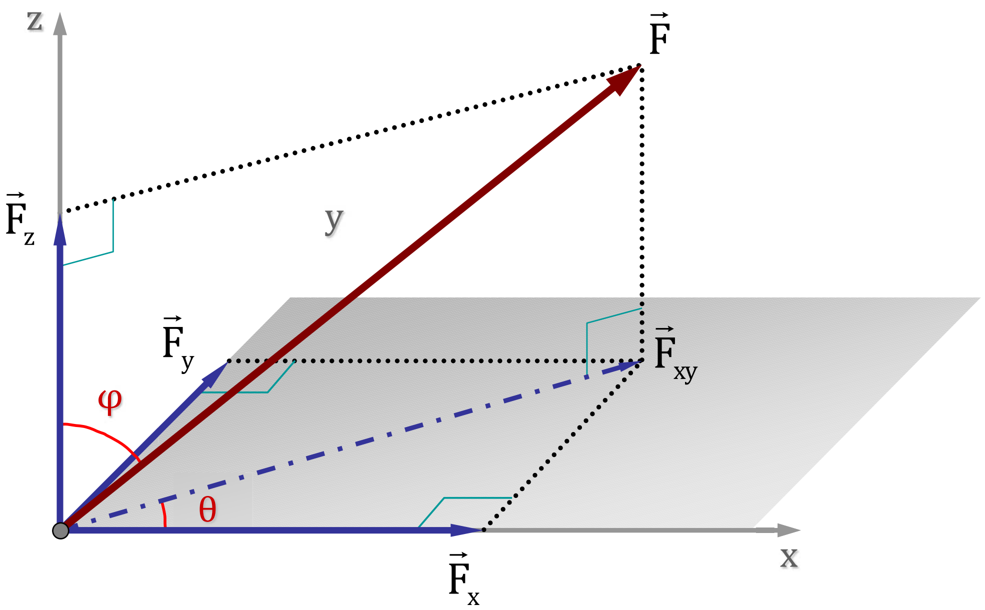
$$(L2{+}L3)\to L3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \end{vmatrix} = (L2{-}L3/2)\to L2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \end{vmatrix}$$

οπότε καταλήγουμε στη σχέση: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = 2\vec{b}\times\vec{a}$.

1.1.2 Σύνθεση Δυνάμεων

ΑΣΚΗΣΗ 1.8

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) οι συνιστώσες κάποιας δύναμης $\vec{F}$ έχουν μέτρα $F_x = 4N$, $F_y = 3N$ και $F_z = 5N$ αντίστοιχα. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης F καθώς και οι πολικές γωνίες ϕ και θ (οι οποίες εξ ορισμού είναι αντίστοιχα $\angle(F_z, F)$ και $\angle(F_x, F_{xy})$.



Λύση

Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης F δίνεται από τις προβολές F_x, F_y, F_z μέσω της σχέσης

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

η οποία απορρέει από τη διπλή εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα αντίστοιχα ορθογώνια τρίγωνα (βλέπε Σχήμα)

$$F = \sqrt{F_{xy}^2 + F_z^2} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}N$$

Για τις ζητούμενες γωνίες ισχύει:

$$\cos\phi = \frac{F_z}{F} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow \phi = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^o$$

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 36.9^o$$

Χρήση Εσωτερικού Γινομένου Διανυσμάτων

Ο υπολογισμός των γωνιών μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου των δύο διανυσμάτων που συνθέτουν την ζητούμενη γωνία. Για παράδειγμα η γωνία φ μπορεί να υπολογισθεί από το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{F} \cdot \vec{F}_z$.

$\boxed{\phi = \angle(F, F_z)}$

$$\vec{F} \cdot \vec{F}_z = |\vec{F}|\ |\vec{F}_z|\ cos\phi \Longrightarrow (4,3,5) \cdot (0,0,5) = (5\sqrt{2})\ 5\ cos\phi$$

$$\Longrightarrow 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 5 = 25\sqrt{2}\ cos\phi \Longrightarrow cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \phi = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^o$$

Καθ΄ όμοιον τρόπον μπορούν να υπολογισθούν:

$\boxed{\theta = \angle(F_x, F_{xy})}$

$$\vec{F}_x \cdot \vec{F}_{xy} = |\vec{F}_x|\ |\vec{F}_{xy}|\ cos\theta \Longrightarrow (4,0,0) \cdot (4,3,0) = 4\ \sqrt{4^2 + 3^2}\ cos\theta$$

$$\Longrightarrow 4 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 20\ cos\theta \Longrightarrow cos\theta = \frac{4}{5} \Longrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = 36.9^o$$

$\boxed{\omega = \angle(F, F_x)}$

$$\vec{F} \cdot \vec{F}_x = |\vec{F}|\ |\vec{F}_x|\ cos\omega \Longrightarrow (4,3,5) \cdot (4,0,0) = (5\sqrt{2})\ 4\ cos\omega$$

$$\Longrightarrow 4 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 20\sqrt{2}\ cos\omega \Longrightarrow cos\omega = \frac{4}{5\sqrt{2}} \Longrightarrow \omega = \arccos\left(\frac{4\sqrt{2}}{10}\right) = 55.6^o$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.9

Να βρεθεί η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_1 = (1,2,0)$, $\vec{F}_2 = (-2,1,1)$, $\vec{F}_3 = (1,1,2)$ και να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα z.

Λύση

Η συνισταμένη δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1,2,0) + (-2,1,1) + (1,1,2) = (0,4,3)$$

Είναι προφανές πως η δύναμη αυτή κείται στο επίπεδο (y, z). Για την ζητούμενη γωνία:

$$\vec{F}\cdot\hat{k} = |\vec{F}|\,|\hat{k}|\;cos\phi \Longrightarrow (0,4,3)\cdot(0,0,1) = \sqrt{4^2+3^2}\cdot 1\cdot cos\phi$$

$$\Longrightarrow 0\cdot 0 + 4\cdot 0 + 3\cdot 1 = 5\;cos\phi \Longrightarrow cos\phi = \frac{3}{5} \Longrightarrow \phi = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = 53.1^o$$

1.1.3 Ροπή και Ζεύγος Δυνάμεων

ΑΣΚΗΣΗ 1.10

Στο σημείο του χώρου $\vec{r} = (1,1,1)$ επενεργούν τέσσερις δυνάμεις $\vec{F_1} = (1,0,1)$, $\vec{F_2} = (2,-1,0)$, $\vec{F_3} = (-2,1,1)$ και $\vec{F_4} = (0,1,1)$. Να βρεθεί η συνισταμένη ροπή του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων και να εξεταστεί εάν αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από τη συνισταμένη δύναμη με τον ίδιο μοχλοβραχίονα.

Η συνισταμένη ροπή των δυνάμεων αυτών θα υπολογισθεί από το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους ροπών ως προς το σημείο αναφοράς (αρχή των αξόνων):

$$\vec{\tau} = \vec{\tau_1} + \vec{\tau_2} + \vec{\tau_3} + \vec{\tau_4} = (\vec{r}\times\vec{F_1}) + (\vec{r}\times\vec{F_2}) + (\vec{r}\times\vec{F_3}) + (\vec{r}\times\vec{F_4})$$

$$\Longrightarrow \vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{\tau} = (1,0,-1) + (1,2,-3) + (0,-3,3) + (0,-1,1) = (2,-2,0)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{\tau_1} + \vec{\tau_2} + \vec{\tau_3} + \vec{\tau_4} = (2,-2,0)}$$

Η ροπή της συνισταμένης δύναμης ως προς το ίδιο σημείο είναι:

$$\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times(\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}) = (1,1,1)\times(1,1,3) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (2,-2,0)$$

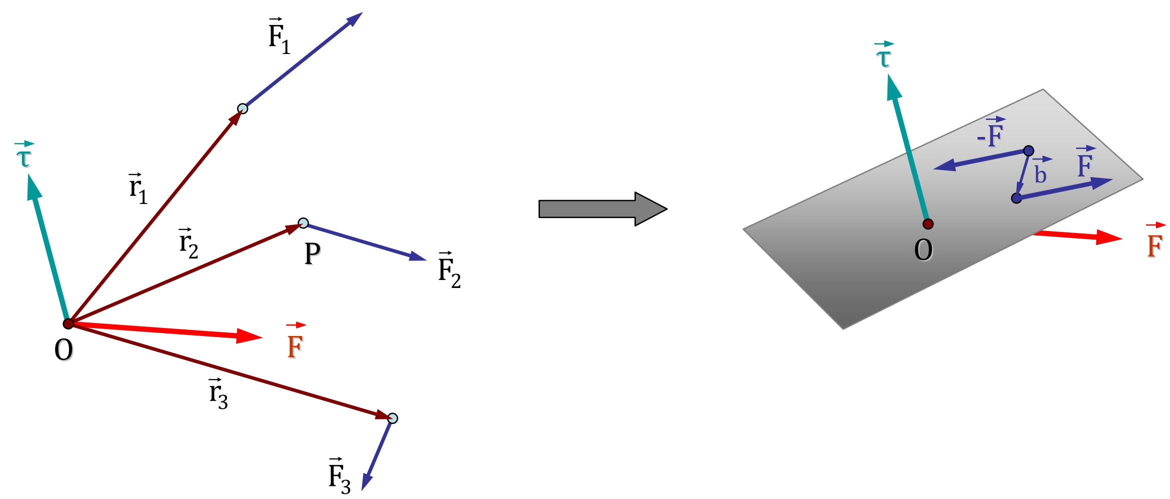
$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = (2,-2,0)}$$

Η ισοδυναμία είναι προφανής, όπως έχει ελεγχθεί και στη θεωρία, δεδομένου ότι για συντρέχουσες δυνάμεις ισχύει πάντα:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau_1}+\vec{\tau_2}+\vec{\tau_3}+\vec{\tau_4} = \vec{r}\times\vec{F_1}+\vec{r}\times\vec{F_2}+\vec{r}\times\vec{F_3}+\vec{r}\times\vec{F_4} = \vec{r}\times(\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}) = \vec{r}\times\vec{F}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.11

Τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1 = (1,1,0)$, $\vec{F}_2 = (-1,2,1)$ και $\vec{F}_3 = (1,-1,-1)$ επενεργούν σε στερεό σώμα στα σημεία $\vec{r}_1 = (1,1,1)$, $\vec{r}_2 = (1,2,0)$ και $\vec{r}_3 = (-1,1,1)$ αντίστοιχα. Να αντικατασταθούν οι δυνάμεις αυτές με μία δύναμη και ένα ζεύγος δυνάμεων, ώστε να επιφέρουν ισοδύναμα αποτελέσματα ως προς την μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Θεωρείστε για τον υπολογισμό των ροπών την αρχή των αξόνων. Γιατί δεν αρκεί στην περίπτωση αυτή μόνο η συνισταμένη δύναμη και είναι επιβεβλημένη και η εφαρμογή επιπρόσθετου ζεύγους;



Λύση

Η συνισταμένη δύναμη δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1,1,0) + (-1,2,1) + (1,-1,-1) \Longrightarrow \boxed{\vec{F} = (1,2,0)}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η συνισταμένη ροπή ως προς την αρχή των αξόνων:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

$$\Longrightarrow \vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{\tau} = (-1,1,0) + (2,-1,4) + (0,0,0) \Longrightarrow \boxed{\vec{\tau} = (1,0,4)}$$

Ελέγχουμε στη συνέχεια εάν η ευρεθείσα συνολική ροπή $\vec{\tau} = (1, 0, 4)$ έχει καθετότητα με τη συνισταμένη δύναμη $\vec{F} = (1, 2, 0)$:

$$\vec{F} \cdot \vec{\tau} = (1, 2, 0) \cdot (1, 0, 4) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 1 \neq 0$$

Συνάγουμε λοιπόν το συμπέρασμα πως η συνολική ροπή **δεν είναι κάθετη** στην συνισταμένη δύναμη. Κατά συνέπεια, **δεν υπάρχει δυνατότητα αντικατάστασης των δυνάμεων με μια μόνο δύναμη**, δεδομένου ότι δεν μπορεί να βρεθεί λύση για τη συνολική ροπή, η οποία ως το αποτέλεσμα του εξωτερικού γινομένου θέσης×δύναμης οφείλει να παρουσιάζει καθετότητα και στα δύο αυτά διανύσματα.

Η αδυναμία εύρεσης λύσης μπορεί να αποδειχτεί μαθηματικά με την παρακάτω σκέψη: Έστω πως υπήρχε διάνυσμα $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ τέτοιο ώστε $\vec{b} \times \vec{F} = \vec{\tau}$. Τότε θα έπρεπε:

$$\vec{b} \times \vec{F} = \vec{\tau} \Longrightarrow (b_x, b_y, b_z) \times (F_x, F_y, F_z) = (\tau_x, \tau_y, \tau_z) \Longrightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (1, 0, 4)$$

$$\Longrightarrow (-2b_z, b_z, 2b_x - b_y) = (1, 0, 4) \Longrightarrow \begin{bmatrix} -2b_z = 1 \\ b_z = 0 \\ 2b_x - b_y = 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} b_z = -1/2 \\ b_z = 0 \\ b_x = b_y/2 + 2 \end{bmatrix}$$

όπερ αδύνατον.

Αντικατάσταση με τη Συνισταμένη και Ζεύγος Δυνάμεων

Η ευρεθείσα συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ πρέπει να διέρχεται από την αρχή των αξόνων (σημείο υπολογισμού των ροπών), ώστε να μην συνεισφέρει ως προς την ροπή. Η συνολική ροπή $\vec{\tau}$ μπορεί τότε να αντικατασταθεί από ζεύγος δυνάμεων μέτρου R, το οποίο ως γνωστόν δεν συνεισφέρει στην μεταφορική κίνηση (μηδενική συνισταμένη δύναμη) αλλά μπορεί να προσδώσει την απαιτούμενη ροπή στο σώμα με κατάλληλη επιλογή του μοχλοβραχίονα $\vec{b}$. Το ζεύγος των δυνάμεων αυτών, όπως και το διάνυσμα $\vec{b}$, πρέπει να βρίσκεται σε **κάθετο στην $\vec{\tau}$ επίπεδο**.

Για να βρούμε το επίπεδο (X, Y, Z) το οποίο είναι κάθετο στην ροπή $\vec{\tau} = (1, 0, 4)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, απλά απαιτούμε το εσωτερικό γινόμενο τους να μηδενίζεται, δηλαδή:

$$(X, Y, Z) \cdot (1, 0, 4) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{X+4Z=0}}$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει το κάθετο επίπεδο στην συνολική ροπή $\vec{\tau}$ και πρέπει να ικανοποιείται τόσο από τις συνιστώσες της δύναμης $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$ όσο και απ΄ αυτές του μοχλοβραχίονα $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Επιπρόσθετα θα πρέπει $\vec{b} \times \vec{R} = \vec{\tau}$, συνθήκη η οποία εισάγει περιορισμούς στα μέτρα των ζητουμένων διανυσμάτων.

Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά πως η εύρεση του ζητούμενου ζεύγους δυνάμεων χαρακτηρίζεται από **απειρία λύσεων**. Αν επιλέξουμε για παράδειγμα το διάνυσμα του μοχλοβραχίονα να είναι $\vec{b} = (0, 1, 0)$, ώστε να ικανοποιείται η προηγούμενη εξίσωση του κάθετου στην $\vec{\tau}$ επιπέδου, τότε η δύναμη του ζεύγους πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\vec{b} \times \vec{R} = \vec{\tau} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \ (1, 0, 4)$$

$$\Longrightarrow (R_z, 0, -R_x) = (1, 0, 4) \Longrightarrow \begin{pmatrix} R_x = -4 \\ R_z = +1 \end{pmatrix}$$

Κατά συνέπεια, μια λύση του προβλήματος αποτελεί το ζεύγος δυνάμεων

$$\vec{b} \times \vec{R} = (0, 1, 0) \times (-4, 0, 1)$$

.

ΑΣΚΗΣΗ 1.12

Σταθερή δύναμη $\vec{F} = (1, 2, 3)$ μετακινείται από το σημείο (1) του χώρου $\vec{r}_1 = (1, -1, 1)$ στο σημείο (2) $\vec{r}_2 = (2, 2, -1)$. Να υπολογίσετε το παραγόμενο έργο W_{12} της δύναμης αυτής κατά την μετακίνηση $1 \to 2$.

Λύση

Η μετακίνηση της δύναμης περιγράφεται από το διάνυσμα:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (2, 2, -1) - (1, -1, 1) = (1, 3, -2)$$

Δεδομένου ότι η δύναμη παραμένει σταθερή, το παραγόμενο έργο θα δίνεται απλά από το εσωτερικό γινόμενο:

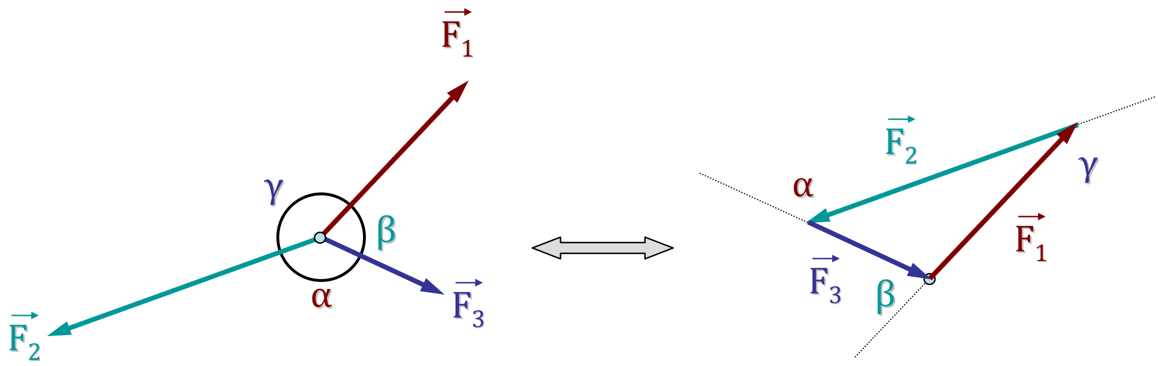
$$W_{12} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (1\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (1\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = 1$$

στις αντίστοιχες μονάδες έργου.

1.1.4 Στατική Ισορροπία Σώματος

ΑΣΚΗΣΗ 1.13

Τρεις συντρέχουσες δυνάμεις σε υλικό σημείο ισορροπούν. Να αποδείξετε ότι τα μέτρα τους ικανοποιούν τον **νόμο των ημιτόνων**: $F_1/sin\alpha = F_2/sin\beta = F_3/sin\gamma$, όπου α,β,γ οι αντίστοιχες γωνίες που σχηματίζουν τα άλλα δύο διανύσματα.



Λύση

Η ισορροπία τριών δυνάμεων σε υλικό σημείο διασφαλίζει το συνεπίπεδο των δυνάμεων. Από την ισχύ της σχέσης:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

και με παράλληλη μετάθεση των διανυσμάτων σχηματίζεται ένα τρίγωνο των δυνάμεων (βλέπε σχήμα). Γνωρίζουμε όμως, πως το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ισούται με το εμβαδόν του σχηματιζόμενου παραλληλόγραμμου, οπότε για το εν λόγω τρίγωνο των δυνάμεων θα ισχύει:

$$\triangle(F_1, F_2, F_3) = \frac{1}{2}\left|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{F}_2 \times \vec{F}_3\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{F}_3 \times \vec{F}_1\right|$$

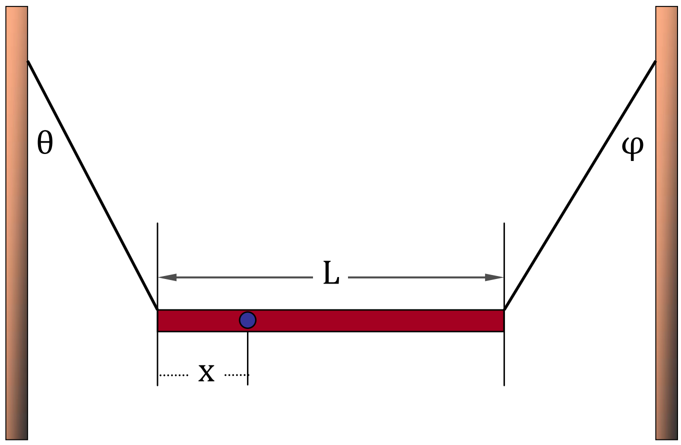
Αντικαθιστώντας τα μέτρα των εξωτερικών γινομένων παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}F_1F_2sin\gamma \;=\; \frac{1}{2}F_2F_3sin\alpha \;=\; \frac{1}{2}F_3F_1sin\beta$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{F_1}{sin\alpha} \;=\; \frac{F_2}{sin\beta} \;=\; \frac{F_3}{sin\gamma}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.14

Μια **μη ομογενής ράβδος** κρέμεται και ηρεμεί σε οριζόντια θέση με δύο αβαρή συρματόσχοινα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα συρματόσχοινα σχηματίζουν γωνίες $\theta = 36.0^o$ και $\phi = 53.1^o$ με την κατακόρυφο. Εάν το μήκος L της ράβδου είναι $6.10\ m$, να υπολογίσετε την απόσταση x από το αριστερό άκρο της ράβδου μέχρι το κέντρο μάζας. *(Άσκηση 12.31 Halliday-Resnick-Walker)*



Λύση

Οι ασκούμενες στη ράβδο δυνάμεις, όλες άγνωστες ως προς το μέτρο, είναι:

1. Η δύναμη στο αριστερό άκρο της από το συρματόσχοινο F_1
2. Η δύναμη στο δεξιό άκρο της από το συρματόσχοινο F_2
3. Το βάρος της W σε απόσταση x από το αριστερό της άκρο.

Αναλύοντας τις δυνάμεις F_1 και F_2 σε οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες, και απαιτώντας στατική ισορροπία για τη ράβδο, καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις:

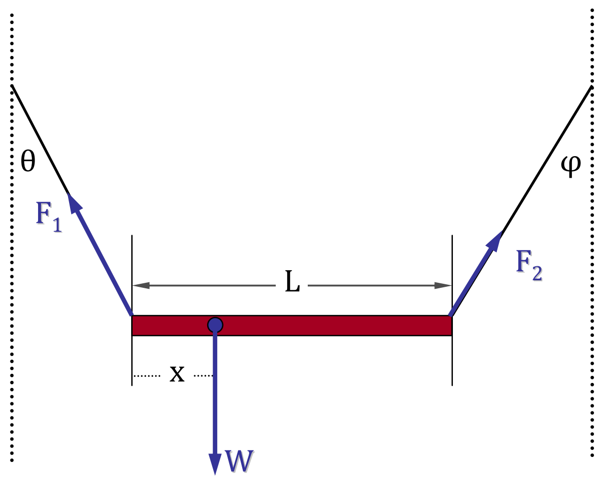
$$\sum F_x = 0 - F_1 sin\theta + F_2 sin\phi = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow F_1 cos\theta + F_2 cos\phi - W = 0$$

$$\sum \tau = 0 \Longrightarrow -x \cdot W + L \cdot F_2 cos\phi = 0$$

Οι εξισώσεις αυτές δίνουν κατά σειρά:

$$F_1 = F_2 \frac{sin\phi}{sin\theta}$$



$$W = F_1 cos\theta + F_2 cos\phi \Longrightarrow W = F_2\left[\frac{sin\phi}{sin\theta}cos\theta + cos\phi\right] = F_2\frac{sin\phi\ cos\theta + cos\phi\ sin\theta}{sin\theta}$$

$$x = L\frac{F_2 cos\phi}{W} \Longrightarrow x = L\ \frac{cos\phi\ sin\theta}{sin\phi\ cos\theta + cos\phi\ sin\theta} \Longrightarrow \boxed{x\ =\ L\ \frac{1}{tan\phi\ \ \cot\theta\ +\ 1}}$$

Μετά από αντικατάσταση προκύπτει η παρακάτω αριθμητική τιμή για το x:

$$x =\ L\ \frac{1}{tan\phi\ \ \cot\theta\ +\ 1} = 6.1\frac{1}{tan53.1^o\ cot36.0^o\ +\ 1} = 2.15\ m$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.15

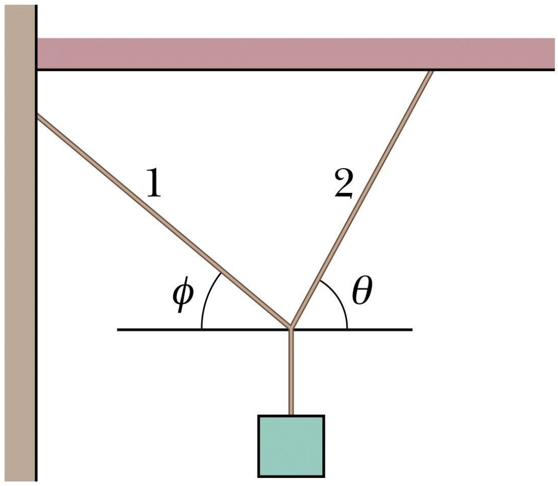
Σώμα μάζας m κρέμεται δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο με το σχοινί 1 και στην οριζόντια οροφή με το σχοινί 2. Το σχοινί 1 σχηματίζει γωνία φ ενώ το σχοινί 2 σχηματίζει γωνία ϑ με το οριζόντιο επίπεδο. Για σταθερή γωνία φ, να βρεθεί η τιμή της ϑ που ελαχιστοποιεί την τάση στο σχοινί 2. Πόση είναι η ελάχιστη αυτή τάση;

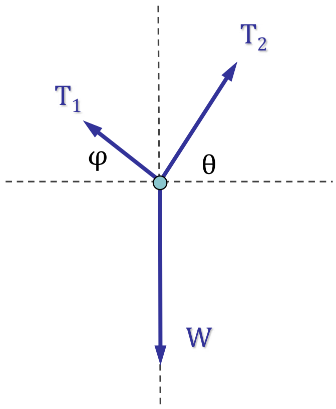
(Άσκηση 12.60 Halliday-Resnick-Walker)

Λύση

Εάν θεωρήσουμε τις τάσεις T_1 και T_2 αντίστοιχα στα σχοινιά 1 και 2, τότε η ισορροπία του σώματος δίνει τις παρακάτω εξισώσεις για τις συνιστώσες δυνάμεις σε κατακόρυφη και οριζόντια κατεύθυνση:

$$\left\{\begin{array}{l} T_1\ sin\phi + T_2\ sin\theta = W \\ T_1\ cos\phi = T_2\ cos\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{T_1\ sin\phi}{T_1\ cos\phi} = \frac{W - T_2\ sin\theta}{T_2\ cos\theta} \Longrightarrow tan\phi = \frac{W - T_2\ sin\theta}{T_2\ cos\theta}$$





Επιλύοντας την εξίσωση αυτή ως προς T_2 καταλήγουμε στη σχέση:

$$T_2 = \frac{W}{sin\theta + cos\theta \ \tan\phi} = \frac{mg}{sin\theta + cos\theta \ \tan\phi}$$

Για σταθερή μάζα m και γωνία φ, η T_2 εξαρτάται μόνο από τη γωνία ϑ. Η εύρεση του ακρότατου της συνάρτησης αυτής θα δώσει τη ζητούμενη τιμή της γωνίας:

$$\frac{\partial T_2}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \frac{-mg}{(sin\theta + cos\theta \ \tan\phi)^2} \ (cos\theta - sin\theta \ tan\phi) = 0$$

Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται όταν $sin\theta \ tan\phi = cos\theta$, δηλαδή όταν:

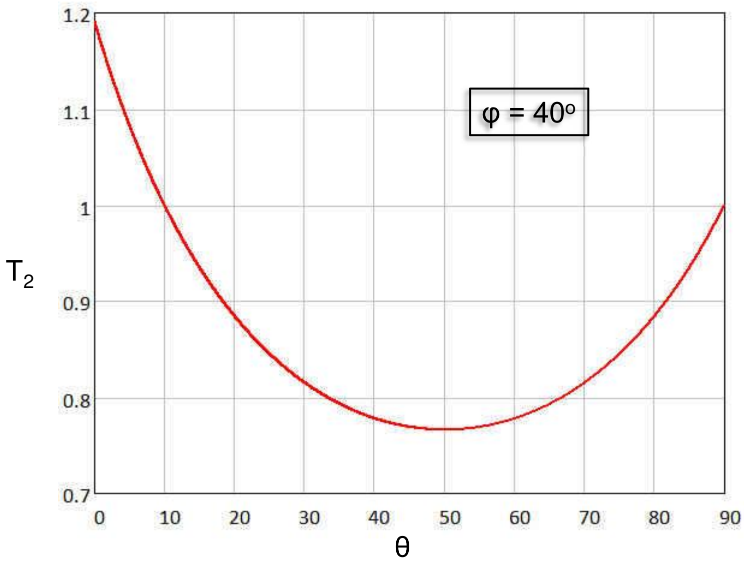
$$tan\theta \ tan\phi = 1 \Longrightarrow tan\theta = cot\phi \Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \phi}$$

Η ελάχιστη τάση T_2^{min} στην περίπτωση αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$T_2^{min} = T_2(\theta = \frac{\pi}{2} - \phi) = \frac{mg}{sin(\pi/2 - \phi) + cos(\pi/2 - \phi) \ tan\phi} = \frac{mg}{cos\phi + sin\phi \ tan\phi}$$

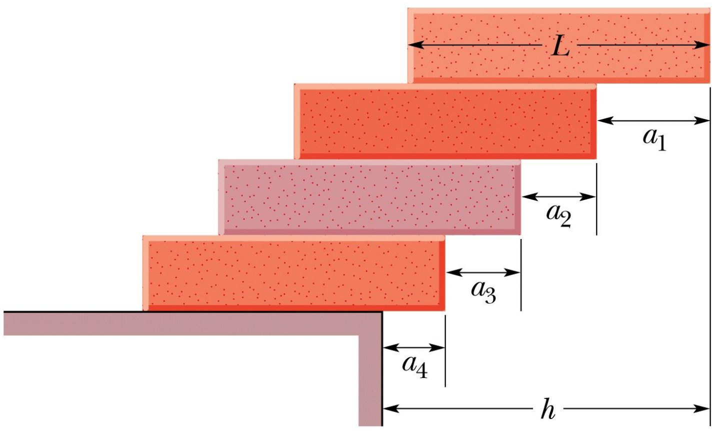
$$\Longrightarrow \boxed{T_2^{min} = mg \ cos\phi}$$

Στην γενική περίπτωση, η εξάρτηση της T_2 από τη γωνία ϑ, για σταθερή φ, δίνεται από τη σχέση που βρέθηκε προηγούμενα. Παράδειγμα της εξάρτησης αυτής για $\phi = 40^o$ δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα, όπου το ελάχιστο για την T_2 (σε μονάδες βάρους $W = mg$) βρίσκεται όντως στο $\theta = 50^o$.



ΑΣΚΗΣΗ 1.16

Τέσσερα τούβλα μήκους L, όμοια και ομογενή, στοιβάζονται το ένα πάνω στο άλλο, όπως φαίνονται στο σχήμα, με τέτοιο τρόπο ώστε μέρος από το καθένα να προεξέχει από το προηγούμενο. Να βρείτε, σαν συνάρτηση του L, τις μέγιστες τιμές για τα a_1, a_2, a_3, a_4 και του $h = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, έτσι ώστε η στοιβάδα να βρίσκεται σε ισορροπία. *(Άσκηση 12.63 Halliday-Resnick-Walker)*



Λύση

Το κέντρο βάρους του ανώτερου σώματος πρέπει οριακά να καλύπτεται από το δεξιό άκρο του υποκείμενου σώματος. Κατά συνέπεια $a_1 = L/2$. Για $n = 2$ τούβλα, το κέντρο βάρους του συστήματος βρίσκεται στο μέσο του $L/2$, άρα $a_2 = 1/2 \times L/2 =$

$L/4$. Στην γενική περίπτωση που έχουμε n συνολικά σώματα, δηλαδή $(n-1)$ υπερκείμενα και ένα σώμα υποκείμενο, το κέντρο βάρος θα υπολογίζεται από τη σχέση ισορροπίας:

$$(n-1)mg\ a_n = mg(\frac{L}{2} - a_n) \Longrightarrow n\ a_n = \frac{L}{2} \Longrightarrow a_n = \frac{L}{2n}$$

δηλαδή για τα τέσσερα τούβλα ισχύει:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \rightarrow a_1 = L/2 \\ n = 2 \rightarrow a_2 = L/4 \\ n = 3 \rightarrow a_3 = L/6 \\ n = 4 \rightarrow a_4 = L/8 \end{array} \right\}$$

και συνεπώς

$$h = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{L}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \Longrightarrow \boxed{h = \frac{25}{24}L}$$

Στη γενική περίπτωση που στοιβάζονται n συνολικά σώματα, ή μέγιστη απόσταση h που μπορεί να επιτευχθεί χωρίς να ανατραπούν τα σώματα θα δίνεται από τη σχέση:

$$h = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \boxed{h = \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}$$

1.2 Συστήματα Συντεταγμένων

ΑΣΚΗΣΗ 1.17

Δίδεται το σημείο (1,-1,1) των Καρτεσιανών συντεταγμένων. Ποιες είναι οι αντίστοιχες σφαιρικές του συντεταγμένες;

Λύση

Οι σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι:

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\theta = atan(\frac{y}{x}) = atan(\frac{-1}{1}) = \frac{7\pi}{4}$$

$$\phi = atan(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}) = atan(\frac{\sqrt{2}}{1}) = 54.7^o$$

ή ισοδύναμα

$$\phi = acos(\frac{z}{\rho}) = acos(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 54.7^o$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.18

Αντίστροφα, το σημείο $(3, \pi/6, \pi/4)$ των σφαιρικών συντεταγμένων, να εκφραστεί σε Καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες.

Λύση

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} \rho = 3 \\ \theta = \pi/6 = 30^o \\ \phi = \pi/4 = 45^o \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \rho sin\phi cos\theta = 3\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ y = \rho sin\phi sin\theta = 3\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ z = \rho cos\phi = 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho = 3 \\ \theta = \pi/6 = 30^o \\ \phi = \pi/4 = 45^o \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \rho sin\phi = 3\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta = \theta = \pi/6 \\ z = \rho cos\phi = 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$$

Άρα οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$, οι δε αντίστοιχες κυλινδρικές $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \pi/6, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.19

Δίδεται σε πολικές συντεταγμένες η εξίσωση $r = 8\,cos\theta$. Τι εκφράζει η εξίσωση αυτή;

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με r καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$r = 8\,cos\theta \Longrightarrow r^2 = 8r\,cos\theta$$

Γνωρίζοντας πως για τις πολικές συντεταγμένες $\left\{\begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \\ x = r\,cos\theta \end{array}\right\}$ η εξίσωση διαμορφώνεται ως:

$$x^2+y^2 = 8x \Longrightarrow x^2-8x+y^2 = 0 \Longrightarrow (x^2-8x+16)+y^2 = 16 \Longrightarrow (x-4)^2+y^2 = 4^2$$

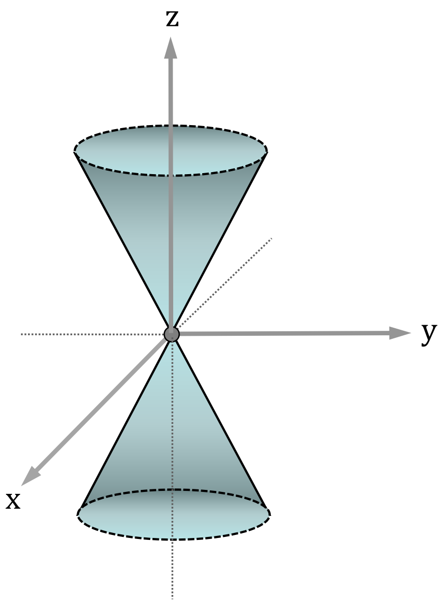
Κατά συνέπεια, η εν λόγω εξίσωση παριστά έναν κύκλο στο επίπεδο XY με κέντρο το $(4, 0)$ και ακτίνα 4.

ΑΣΚΗΣΗ 1.20

Τι εκφράζει η επιφάνεια $z = 2r$ των κυλινδρικών συντεταγμένων;

Λύση

Τετραγωνίζοντας αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης αυτής και λαμβάνοντας υπόψη πως $r^2 = x^2 + y^2$ καταλήγουμε στη σχέση:



$$z = 2r \Longrightarrow z^2 = 4r^2 \Longrightarrow z^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$\Longrightarrow z = \pm 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Κάθε μια από τις εξισώσεις:

$$z = \left\{ \begin{array}{c} +2\sqrt{x^2 + y^2} \\ -2\sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right\}$$

εκφράζει την επιφάνεια ενός κώνου στον τρισδιάστατο χώρο.

ΑΣΚΗΣΗ 1.21

Πώς εκφράζεται η προηγούμενη εξίσωση των κυλινδρικών συντεταγμένων $z = 2r$ (κωνικές επιφάνειες) σε σφαιρικές συντεταγμένες;

Λύση

Επειδή οι συντεταγμένες r και z των κυλινδρικών συντεταγμένων εκφράζονται αντίστοιχα μέσω των σφαιρικών με τις σχέσεις $\left\{ \begin{array}{c} r = \rho\, sin\phi \\ z = \rho\, cos\phi \end{array} \right\}$, η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$z = 2r \Longrightarrow \rho\, cos\phi = 2\rho\, sin\phi \Longrightarrow tan\phi = \frac{1}{2} \Longrightarrow \phi \simeq 26.6^o$$

Γενικά η εξίσωση $\phi = const.$ σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι ο γεωμετρικός τόπος μιας κωνικής επιφάνειας, εκτεινόμενης και προς τα δύο ημισφαίρια.

ΑΣΚΗΣΗ 1.22

Ποια η γεωμετρική σημασία των παρακάτω απεικονίσεων σε κυλινδρικές συντεταγμένες;

1. $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta, -z)$
2. $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta + \pi, z)$
3. $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta + \pi, -z)$

Ποιες είναι οι αντίστοιχες απεικονίσεις σε σφαιρικές συντεταγμένες·

Λύση

1. Ανάκλαση ως προς το επίπεδο XY. Η αντίστοιχη απεικόνιση σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\rho, \theta, \phi) \longrightarrow (\rho, \theta, \pi - \phi)$
2. Στροφή κατά γωνία ϑ ως προς τον άξονα z. Η αντίστοιχη απεικόνιση σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\rho, \theta, \phi) \longrightarrow (\rho, \theta + \pi, \phi)$
3. Το συμμετρικό του σημείου ως προς την αρχή των αξόνων. Η αντίστοιχη απεικόνιση σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(\rho, \theta, \phi) \longrightarrow (\rho, \theta + \pi, \pi - \phi)$

1.3 Παραγώγιση

1.3.1 Μερικές Παράγωγοι

ΑΣΚΗΣΗ 1.23

Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ για τις συναρτήσεις:

1. $f(x, y) = x^2 y + y^3$
2. $f(x, y) = e^{-x/y}$
3. $f(x, y) = cos(xy) + xsin(y)$

Λύση

1. Για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2 y + y^3$ ισχύει:

$$\partial f/\partial x = 2xy + 0 = 2xy$$
$$\partial f/\partial y = x^2 + 3y^2$$

2. Για τη συνάρτηση $f(x,y) = e^{-x/y}$ ισχύει:

$$\partial f/\partial x = e^{-x/y}\left(\frac{-1}{y}\right) = -\frac{1}{y}e^{-x/y}$$
$$\partial f/\partial y = e^{-x/y}\left(\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y^2}e^{-x/y}$$

3. Για τη συνάρτηση $f(x,y) = cos(xy) + xsin(y)$ ισχύει:

$$\partial f/\partial x = -sin(xy)\cdot y + sin(y) = -ysin(xy) + sin(y)$$
$$\partial f/\partial y = -sin(xy)\cdot x + xcos(y) = -xsin(xy) + xcos(y)$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.24

Δίδεται η συνάρτηση $g(u,v) = u/v + e^{u/v}$, όπου $u = u(t) = t^2$ και $v = v(t) = t$. Με βάση τον κανόνα της αλυσίδας να υπολογισθεί η ολική παράγωγος $\frac{dg}{dt}$ και το αποτέλεσμα να επαληθευθεί με άμεση αντικατάσταση των $u(t)$ και $v(t)$ στην συνάρτηση $g(u,v)$.

Λύση

Με βάση τον κανόνα της αλυσίδας ισχύει:

$$dg/dt = (\partial g/\partial u)(du/dt) + (\partial g/\partial v)(dv/dt)$$

$$\Longrightarrow dg/gt = \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v}e^{u/v}\right)(du/dt) + \left(-\frac{u}{v^2} - \frac{u}{v^2}e^{u/v}\right)(dv/dt)$$

$$\Longrightarrow dg/gt = \frac{1}{v}\left(1 + e^{u/v}\right)(du/dt) - \frac{u}{v^2}\left(1 + e^{u/v}\right)(dv/dt)$$

$$\Longrightarrow dg/gt = \frac{1}{t}\left(1 + e^{t}\right)2t - 1\cdot\left(1 + e^{t}\right)\cdot 1 = 1 + e^t$$

Επαλήθευση

Με άμεση αντικατάσταση των $u(t)$ και $v(t)$ στην συνάρτηση $g(u,v)$ αυτή γίνεται:

$$g(t) = g[u(t), v(t)] = \frac{t^2}{t} + e^{t^2/t} = t + e^t$$

οπότε η παράγωγος υπολογίζεται άμεσα ως $dg/dt = d(t + e^t)/dt = 1 + e^t$

1.3.2 Παράγωγος ανά Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 1.25

Για το ένα βαθμωτό πεδίο του χώρου ισχύει $f(x,y,z) = 2x^2+3y^2+z^2$. Να υπολογισθεί η κλίση ∇f του πεδίου αυτού και να ευρεθεί η παράγωγός του κατά την κατεύθυνση $\vec{a} = \hat{\imath} - 2\hat{k}$ στο σημείο $P(2,1,3)$.

Λύση

Με βάση τον ορισμό της κλίσης βαθμωτού πεδίου θα ισχύει:

$$\nabla f = (\partial f/\partial x)\,\hat{\imath} + (\partial f/\partial y)\,\hat{\jmath} + (\partial f/\partial z)\,\hat{k} \Longrightarrow \nabla f = 4x\hat{\imath} + 6y\hat{\jmath} + 2z\hat{k}$$

Ως γνωστόν, η παράγωγος κατά μοναδιαία κατεύθυνση $\hat{e}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο $(\nabla f)\cdot\hat{e}$. Επειδή όμως το δοθέν διάνυσμα $\vec{a}$ δεν είναι μοναδιαίο, η ζητούμενη παράγωγος του πεδίου κατά την κατεύθυνση $\vec{a}$ είναι:

$$(\nabla f)\cdot\frac{\vec{a}}{a} = \left(4x\hat{\imath} + 6y\hat{\jmath} + 2z\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{\imath} - 2\hat{k}\right)\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4x-4z}{\sqrt{5}}$$

Οπότε στο ζητούμενο σημείο $P(2,1,3)$ η παράγωγος υπολογίζεται ίση με $-4/\sqrt{5}$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.26

Για το διανυσματικό πεδίο του χώρου $\vec{V} = y^2\hat{\imath} + z^2\hat{\jmath} + x^2\hat{k}$ να υπολογισθεί η απόκλισή του στο σημείο $P(1,1,1)$. Ποιος ο στροβιλισμός του πεδίου αυτού;

Λύση

Η απόκλιση (div) του διανυσματικού πεδίου είναι το βαθμωτό μέγεθος:

$$\nabla\vec{V} = \partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z$$

οπότε

$$\nabla\vec{V} = \partial y^2/\partial x + \partial z^2/\partial y + \partial x^2/\partial z = 0+0+0 = 0$$

Άρα η απόκλιση του πεδίου είναι μηδενική σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου.

Για τον στροβιλισμό ($curl$) του πεδίου ισχύει:

$$\nabla\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ V_x&V_y&V_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ y^2&z^2&x^2\end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \nabla\times\vec{V}=-2z\hat{i}-2x\hat{j}-2y\hat{k}$$

Στο σημείο $P(1,1,1)$ ο στροβιλισμός του πεδίου είναι λοιπόν:

$$\nabla\times\vec{V}(P)=-2\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$$

Όπως φαίνεται από το παραπάνω αποτέλεσμα ο στροβιλισμός στο πεδίο αυτό είναι διάφορος του μηδενός, αυξανόμενος κατ΄ απόλυτη τιμή καθώς το σημείο απομακρύνεται της αρχής των αξόνων. Μηδενισμός του στροβιλισμού υπάρχει μόνο στην αρχή των αξόνων.

ΑΣΚΗΣΗ 1.27

Η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου $f(x,y,z)$ αποδίδεται από τη σχέση $\nabla f(x,y,z)=2xy\hat{i}+(x^2+z)\hat{j}+y\hat{k}$. Μπορείτε να προσδιορίσετε το βαθμωτό πεδίο $f(x,y,z)$;

Λύση

Εφόσον η κλίση του βαθμωτού πεδίου δίνεται από τη σχέση $\nabla f(x,y,z)=\partial f/\partial x\hat{i}+\partial f/\partial y\hat{j}+\partial f/\partial z\hat{k}$, τότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\partial f/\partial x=2xy\qquad \partial f/\partial y=x^2+z\qquad \partial f/\partial z=y$$

Ξεκινώντας από την πρώτη σχέση και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\partial f/\partial x=2xy\quad\Longrightarrow\quad f(x,y,z)=x^2y+g(y,z)$$

Η εισαγωγή της άγνωστης συνάρτησης $g(y,z)$ ισοδυναμεί με την σταθερά της ολοκλήρωσης. Η μερική παράγωγος ως προς y του παραπάνω αποτελέσματος, κάνοντας χρήση και την ισότητα της εκφώνησης, δίνει:

$$\partial f/\partial y=x^2+z\quad\Longrightarrow\quad \partial[x^2y+g(y,z)]/\partial y=x^2+z$$

$$\Longrightarrow\quad x^2+\partial g(y,z)/\partial y=x^2+z\quad\Longrightarrow\quad \partial g(y,z)/\partial y=z\quad\Longrightarrow\quad g(y,z)=yz+h(z)$$

Κατά συνέπεια, η άγνωστη συνάρτηση του βαθμωτού πεδίου διαμορφώνεται τώρα στην:

$$f(x,y,z) = x^2y + yz + h(z)$$

Ομοίως, κάνοντας χρήση και της τρίτης εξίσωσης, έχουμε:

$$\partial f/\partial z = y \quad \Longrightarrow \quad \partial[x^2y + yz + h(z)]/\partial z = y$$

$$\Longrightarrow \quad 0 + y + h'(z) = y \quad \Longrightarrow \quad h'(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad h(z) = \mathcal{C}$$

Συμπερασματικά, η ζητούμενη συνάρτηση είναι λοιπόν:

$$\boxed{f(x,y,z) = x^2y + yz + \mathcal{C}}$$

Σημείωση

Η εύρεση της βαθμωτής συνάρτησης $f(x,y,z)$ καθίσταται δυνατή, όπως θα συζητηθεί αργότερα, εκ του γεγονότος ότι το δοθέν διανυσματικό πεδίο είναι *αστρόβιλο*, δηλαδή $\nabla \times \vec{F} = 0$ όπου $\vec{F} = \nabla f(x,y,z)$ Πράγματι, για το δοθέν πεδίο ισχύει:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy & x^2+z & y \end{vmatrix}$$

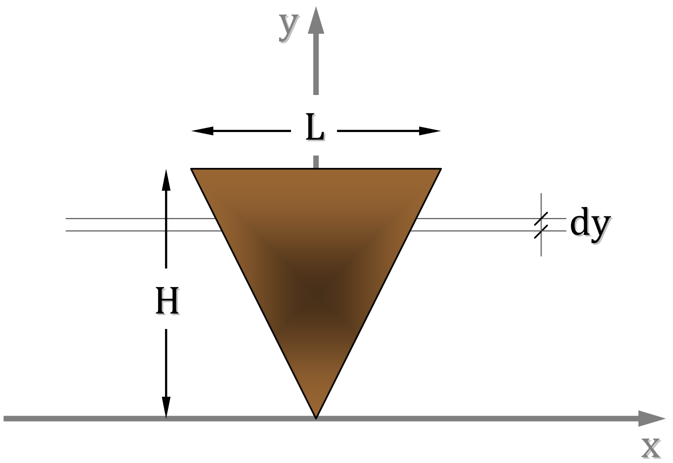
$$\Longrightarrow \quad \nabla \times \vec{F} = \hat{i} \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2+z & y \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ 2xy & y \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ 2xy & x^2+z \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla \times \vec{F} = (1-1)\hat{i} - (0-0)\hat{j} + (2x-2x)\hat{k} = 0$$

1.4 Κέντρο Μάζας Σώματος

ΑΣΚΗΣΗ 1.28

Με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης, να αποδειχθεί πως το κέντρο μάζας ομογενούς πλάκας σχήματος ισοσκελούς τριγώνου ύψους H βρίσκεται επί του ύψους και σε απόσταση $2/3H$ από την κορυφή.



Λύση

Τοποθετώντας το ισοσκελές τρίγωνο όπως στο σχήμα, είναι προφανές πως $x_{CM} = 0$. Άρα αναζητείται το κέντρο βάρους στον άξονα συμμετρίας y_{CM}. Για στοιχειώδες μήκος dy πρέπει λοιπόν να εκφράσουμε τον στοιχειώδη όγκο dV σαν συνάρτηση του y. Υποθέτοντας ότι το πάχος της πλάκας (κατεύθυνση z) είναι h έχουμε:

$$dV = h \cdot 2x \cdot dy = h \cdot (\frac{y}{H}L) \cdot dy$$

Κατά συνέπεια, για σταθερή πυκνότητα ρ_0 ισχύει:

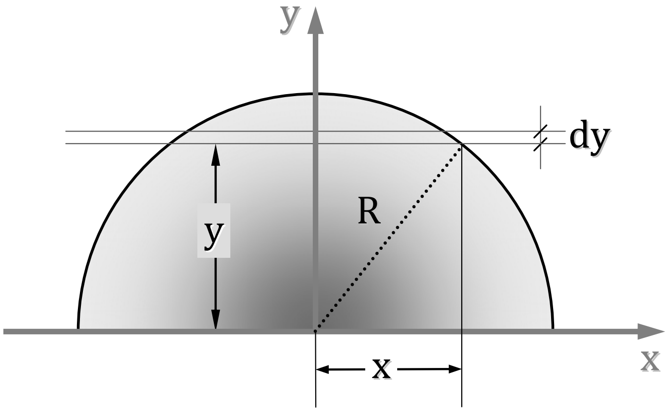
$$dm = \rho_0 dV = \rho_0 h(\frac{y}{H}L)dy = \frac{\rho_0 hL}{H} ydy$$

οπότε η y-συντεταγμένη του κέντρου μάζας θα δίνεται από τη σχέση:

$$y_{CM} = \frac{\int\limits_0^H ydm}{\int\limits_0^H dm} = \frac{\int\limits_0^H y\frac{\rho_0 hL}{H}ydy}{\int\limits_0^H \frac{\rho_0 hL}{H}ydy} = \frac{\int\limits_0^H y^2 dy}{\int\limits_0^H ydy} = \frac{H^3/3}{H^2/2} = \frac{2}{3}H \Longrightarrow \boxed{y_{CM} = \frac{2}{3}H}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.29

Ομοίως, με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης, να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς πλάκας ημικυκλικού σχήματος ακτίνας R.



Λύση

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, ο άξονας συμμετρίας είναι ο άξονας y με $x_{CM} = 0$. Για δοσμένο y επιλέγεται στοιχειώδες dy και γίνεται προσπάθεια να εκφραστεί το αντίστοιχο μήκος x συναρτήσει του y. Από τη γεωμετρία του σχήματος συνάγεται:

$$x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

οπότε

$$dm = \rho_0 dV = \rho_0 \cdot (h \cdot 2x) \cdot dy = \rho_0 \cdot (h \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2}) \cdot dy = 2\rho_0 \cdot h \cdot \sqrt{R^2 - y^2} \cdot dy$$

Προφανώς τα όρια ολοκλήρωσης της ανεξάρτητης μεταβλητής y κυμαίνονται από 0 έως R:

$$y_{CM} = \frac{\int_0^R y\ dm}{\int_M dm} = \frac{\int_0^R y \cdot (2\rho_0 \cdot h)\sqrt{R^2 - y^2} \cdot dy}{M} = \frac{2\rho_0 \cdot h \int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\ dy}{\rho_0 \cdot h \cdot \pi R^2/2}$$

$$\Longrightarrow y_{CM} = \frac{4\int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\ dy}{\pi R^2}$$

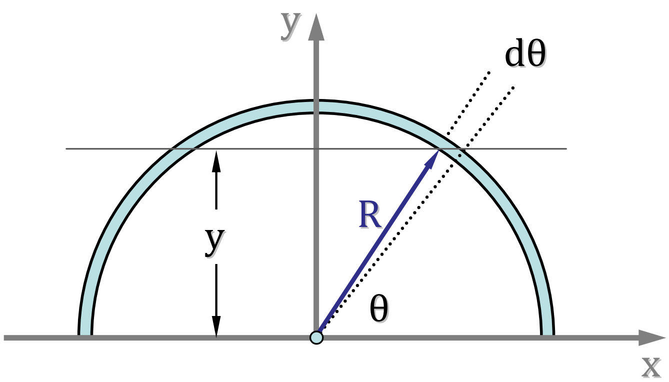
Το ολοκλήρωμα του αριθμητή υπολογίζεται με αλλαγή μεταβλητής $u^2 = R^2 - y^2$, οπότε $2udu = -2ydy$:

$$y_{CM} = \frac{4\int\limits_R^0 -u \cdot u\ du}{\pi R^2} = \frac{4\int\limits_0^R u^2\ du}{\pi R^2} = \frac{4R^3/3}{\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\boxed{y_{CM} = \frac{4R}{3\pi}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.30

Να βρεθεί με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης το κέντρο μάζας λεπτού ομογενούς κυλινδρικού σύρματος, το οποίο σχηματίζει ημικύκλιο ακτίνας R.



Λύση

Όπως και στα προηγούμενα, ο άξονας συμμετρίας είναι ο άξονας y με $x_{CM} = 0$. Επειδή οι καρτεσιανές συντεταγμένες δεν εξυπηρετούν στην περίπτωση αυτή, επιλέγονται οι πολικές συντεταγμένες. Για δοσμένο y επιλέγεται στοιχειώδες μήκος τόξου dl το οποίο ορίζεται από τη σταθερή ακτίνα R και την στοιχειώδη μεταβολή $d\theta$ της πολικής γωνίας ϑ. Από τη γεωμετρία του σχήματος συνάγεται πως $dl = Rd\theta$ οπότε, υποθέτοντας πως η διατομή του σύρματος είναι S, ισχύει:

$$dm = \rho_0 dV = \rho_0 \cdot S \cdot dl = \rho_0 \cdot S \cdot R \cdot d\theta$$

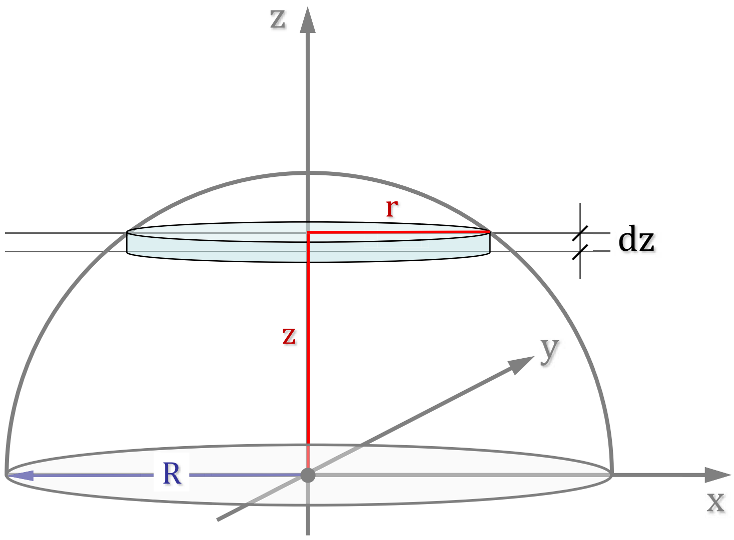
Τα όρια ολοκλήρωσης της ανεξάρτητης μεταβλητής θ κυμαίνονται από 0 έως π:

$$y_{CM} = \frac{\int\limits_0^\pi y\ dm}{\int\limits_M dm} = \frac{\int\limits_0^\pi R\,sin\theta \cdot (\rho_0 \cdot S \cdot R)d\theta}{M} = \frac{\rho_0 \cdot S \cdot R^2 \int\limits_0^\pi sin\theta\ d\theta}{\rho_0 \cdot S \cdot \pi R}$$

$$\Longrightarrow y_{CM} = \frac{R\,(cos0 - cos\pi)}{\pi} = \frac{2}{\pi}R \Longrightarrow \boxed{y_{CM} = \frac{2}{\pi}R}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.31

Να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς ημισφαιρίου ακτίνας R.



Λύση

Το κέντρο της βάσης του ημισφαιρίου τοποθετείται στην αρχή των αξόνων, έτσι ώστε $x_{CM} = y_{CM} = 0$. Αναζητείται λοιπόν το z_{CM}. Σε τυχαία απόσταση z τα δύο παράλληλα προς τη βάση επίπεδα που απέχουν dz αποκόπτουν κύκλο ακτίνας r και μάζας:

$$dm = \rho_0 dV = \rho_0 \pi r^2 dz$$

οπότε

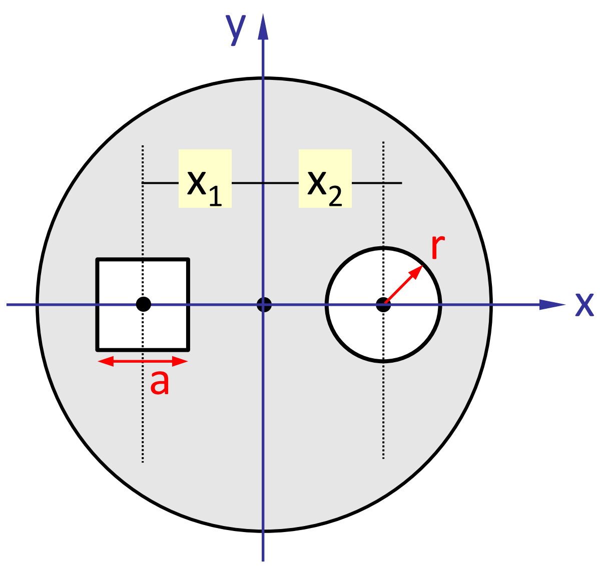
$$z_{CM} = \frac{\int\limits_M z dm}{\int\limits_M dm} = \frac{\int\limits_0^R z\rho_0 \pi r^2 dz}{1/2 \cdot \rho_0 \cdot V_{sph}} = \frac{\int\limits_0^R z\rho_0 \pi (R^2 - z^2) dz}{1/2 \cdot \rho_0 \cdot 4/3\pi R^3}$$

$$\Longrightarrow z_{CM} = \frac{3}{2R^3} \int\limits_0^R (zR^2 - z^3) dz = \frac{3}{2R^3} \left(\frac{R^2}{2} R^2 - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{3}{2R^3} \frac{R^4}{4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_{CM} = \tfrac{3}{8} R}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.32

Από ομογενή δίσκο αποκόπτονται πέριξ του κέντρου και επί της ίδιας διαμέτρου τετραγωνικό και κυκλικό τμήμα με πλευρά a και ακτίνα r αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Αν οι αποστάσεις των αποκοπέντων τμημάτων από το κέντρο του δίσκου είναι αντίστοιχα x_1 και x_2, ποιός πρέπει να είναι ο λόγος τους για να μην μετακινηθεί το κέντρο μάζας του εναπομένοντος δίσκου;



Λύση

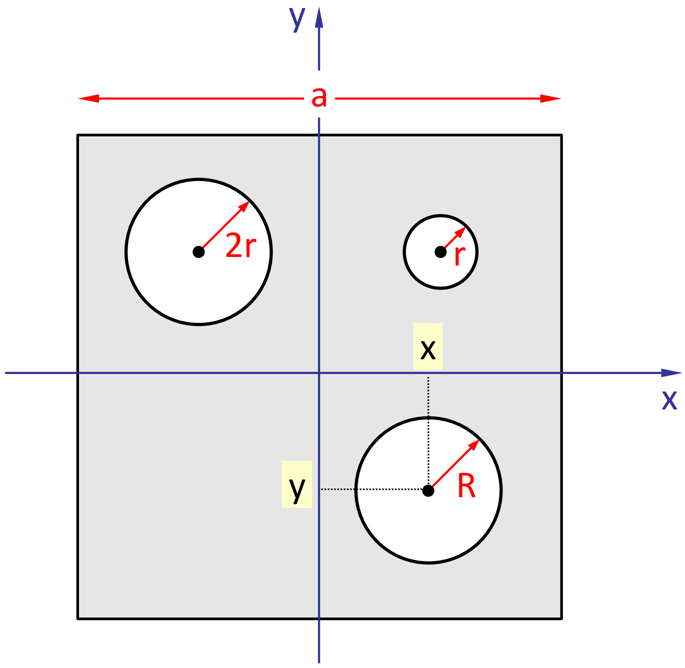
Τοποθετώντας την διαμέτρο με τα κέντρα των αποκοπέντων τμημάτων επί του άξονα x, των οποίων οι μάζες είναι m_1 και m_2, ισχύει:

$$x_1 m_1 = x_2 m_2 \Longrightarrow x_1\ \rho_0\ a^2 = x_2\ \rho_0\ \pi r^2 \Longrightarrow \boxed{x_1/x_2 = \pi\,(r/a)^2}$$

Στην παραπάνω ανάλυση υποτίθεται πως ρ_0 είναι η επιφανειακή πυκνότητα του σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ 1.33

Από τετράγωνο ομογενή δίσκο πλευράς a αποκόπτονται στα κέντρα των δύο πάνω τεταρτημορίων του δύο κυκλικά τμήματα ακτίνων $r_1 = r$ και $r_2 = 2r$ αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Να διερευνηθεί η θέση και το μέγεθος τρίτου κυκλικού τμήματος που πρέπει να αποκοπεί, ώστε να μην μετακινηθεί το αρχικό κέντρο μάζας.



Λύση

Έστω m_1 και m_2 οι μάζες των αποκοπέντων κυκλικών τμημάτων και $R(x, y)$ και m η ακτίνα και μάζα του ζητούμενου κυκλικού τμήματος Αν ο τετράγωνος δίσκος τοποθετηθεί παράλληλα στους ορθογώνιους άξονες xy με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων, για να μην μετακινηθεί το κέντρο μάζας θα πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_2 m_2 = x_1 m_1 + xm \\ y_2 m_2 + y_1 m_1 = ym \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (a/2)\pi(2r)^2 = (a/2)\pi r^2 + x\pi R^2 \\ (a/2)\pi(2r)^2 + (a/2)\pi r^2 = y\pi R^2 \end{array} \right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2ar^2 = (a/2)r^2 + xR^2 \\ 2ar^2 + (a/2)r^2 = yR^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3a/2 = x\,(R/r)^2 \\ 5a/2 = y\,(R/r)^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{x/y = 3/5}$$

Από τις άπειρες λύσεις που εισάγει η παραπάνω σχέση, ας υποθέσουμε πως $x = \lambda a$ $(0 < x < a/2 \to 0 < \lambda < 1/2)$, οπότε και $y = 5/3\lambda a$ $(0 < y < a/2 \to 0 < \lambda < 3/10)$. Τότε, οποιαδήποτε από τις παραπάνω σχέσεις δίνει:

$$3a/2 = x\,(R/r)^2 = \lambda a\,(R/r)^2 \Longrightarrow \boxed{R = \sqrt{\tfrac{3}{2\lambda}}\; r}$$

Είναι προφανές πως όσο απομακρυσμένο από το κέντρο βρίσκεται το κυκλικό τμήμα που πρέπει να αφαιρεθεί, τόσο μικρότερη η ακτίνα του R και συνεπώς η μάζα του. Περιορισμό στα παραπάνω θέτει όχι μόνο η συνθήκη $0 < y < a/2 \to 0 < \lambda < 3/10$ που προαναφέρθηκε, αλλά και το γεγονός πως πρέπει $x + R < a/2$ και $y + R < a/2$.

1.5 Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1.34

Για τα ακόλουθα τρία διανύσματα, πόσο είναι το $3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B})$;

$\vec{A} = 2.0\hat{\imath} + 3.0\hat{\jmath} - 4.0\hat{k}$ $\quad \vec{B} = -3.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath} + 2.0\hat{k}$ $\quad \vec{C} = -7.0\hat{\imath} + 8.0\hat{\jmath}$

Απάντηση: -540 *(Άσκηση 3.38 Halliday-Resnick-Walker)*

ΑΣΚΗΣΗ 1.35

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$. (α) Να αποδείξετε ότι το $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})$ είναι πάντα μηδέν. (β) Με τι ισούται το μέτρο του $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A})$ αν τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ σχηματίζουν γωνία ϑ;

Απάντηση: (β) $A^2 B sin\theta$

ΑΣΚΗΣΗ 1.36

Να προσδιοριστεί η σταθερά λ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{\imath} - 4\hat{k}$ και $\vec{c} = \hat{\imath} + \lambda\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ να είναι συνεπίπεδα.

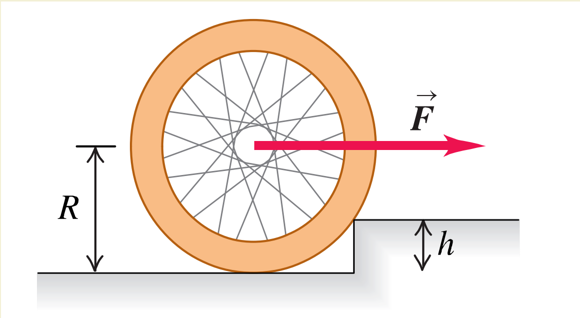
Απάντηση: $\lambda = 5/3$

ΑΣΚΗΣΗ 1.37

Οι πλευρές ενός παραλληλεπιπέδου ορίζονται από τα διανύσματα $\vec{a} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$, $\vec{b} = 5\hat{\imath} - 3\hat{k}$ και $\vec{c} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$. Να αποδειχθεί πως τα διανύσματα αυτά δεν είναι συνεπίπεδα και να υπολογιστεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν.

Απάντηση: $V = 10$

ΑΣΚΗΣΗ 1.38

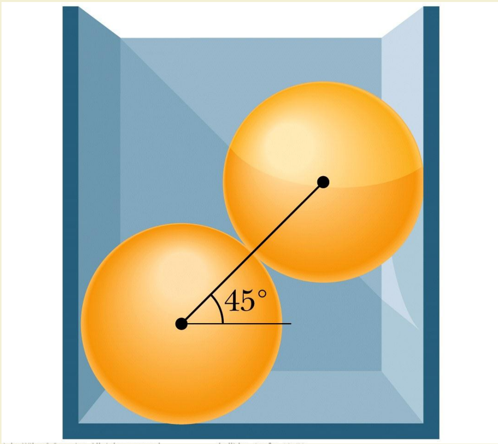


Τροχός ποδηλάτου ακτίνας R και μάζας m προσπαθεί να ανέβει πεζοδρόμιο ύψους h. Ποια είναι η ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη για να συμβεί αυτό όταν: (α) Η δύναμη εφαρμόζεται στο κέντρο του τροχού. (β) Η δύναμη εφαρμόζεται στο πάνω μέρος του τροχού.

Απάντηση: (α) $F_{min} = mg\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}$, (β) $F_{min} = mg\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{2R-h}$

(Άσκηση 11.72 Young-Freedman)

ΑΣΚΗΣΗ 1.39



Οι δύο πανομοιότυπες ομογενείς σφαίρες του σχήματος, κάθε μία μάζας m, ηρεμούν χωρίς τριβή μέσα σε άκαμπτο ορθογώνιο δοχείο. Η ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δύο σφαιρών βρίσκεται σε γωνία 45^o ως προς την οριζόντιο. Να βρείτε τα μέτρα των δυνάμεων στις σφαίρες από: (α) το κάτω μέρος του δοχείου, (β) την αριστερή πλευρά του δοχείου, (γ) την δεξιά πλευρά του δοχείου και (δ) μεταξύ τους. (Υπόδειξη: Η δύναμη της μιας σφαίρας στην άλλη έχει φορέα την ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας τους.)

Απάντηση: (α) $2mg$, (β) mg, (γ) mg, (δ) $\sqrt{2}mg$

(Άσκηση 12.64 Halliday-Resnick-Walker)

ΑΣΚΗΣΗ 1.40

Εκφράστε την καρτεσιανή επιφάνεια $xz = 1$ σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Απάντηση: $\rho^2\, sin(2\phi)\, cos\theta = 2$

ΑΣΚΗΣΗ 1.41

Να προσδιοριστεί η βαθμωτή συνάρτηση $f(x, y, z)$ εάν είναι γνωστό πως η κλίση της ισούται με:

1. $\nabla f = 6x\hat{i} - 4y\hat{j} + 2z\hat{k}$

2. $\nabla f = (y + z)\hat{i} + (z + x)\hat{j} + (x + y)\hat{k}$

Απάντηση: (1) $f(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 + z^2$ (2) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$

ΑΣΚΗΣΗ 1.42

Να επαληθεύσετε τον κανόνα της αλυσίδας υπολογίζοντας την παράγωγο df/dt για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2/(2 + cosy)$ εάν δίδεται πως $x(t) = e^t$ και $y(t) = e^{-t}$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.43

Για βαθμωτό πεδίο f να αποδειχθεί πως $curl\,\nabla f = \nabla \times (\nabla f) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.44

Δίδεται το διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων $\vec{V} = \frac{y}{x^2+y^2}\hat{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}$, το ποίο προσεγγίζει την επιφανειακή κυκλική κίνηση του νερού σε δοχείο όταν υπάρχει εκροή στη βάση του. Να αποδειχθεί ότι το διανυσματικό αυτό πεδίο είναι αστρόβιλο.

Κεφάλαιο 2

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

- Ευθυγραμμη Κινηση {Μέση και Στιγμιαία Ταχύτητα και Επιτάχυνση, Διαφορικές & Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Κίνησης, Σταθερή Επιτάχυνση, Κατακόρυφη Ρίψη}
- Κινηση σε Τρεις Διαστασεις {Διάνυσμα Θέσης, Μετατόπιση, Διανυσματικός Ορισμός Ταχύτητας και Επιτάχυνσης, Καμπυλόγραμμη Κίνηση, Εφαπτομενική και Κάθετη Συνιστώσα της Επιτάχυνσης}
- Κινηση στο Επιπεδο {Κυκλική Κίνηση, Κίνηση Βλημάτων, Παραμετρικές Εξισώσεις, Εξισώσεις Τροχιάς}

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγεται με διαφόριση η έννοια της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Η ευθύγραμμη κίνηση σε μια κατεύθυνση εξετάζεται με τις διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις κίνησης και γίνεται ειδική αναφορά σε προβλήματα με σταθερή επιτάχυνση, όπως της κατακόρυφης ρίψης αντικειμένων χωρίς τριβές στο βαρυτικό πεδίο. Η εξέταση της κίνησης σε τρεις διαστάσεις γενικεύεται με την εισαγωγή του διανύσματος θέσης και των αντίστοιχων παραγώγων του για την θεμελίωση της γενικευμένης έννοιας της ταχύτητας και επιτάχυνσης στο χώρο για δεδομένη τροχιά.

Εξετάζεται σε γενικευμένη μορφή η καμπυλόγραμμη κίνηση με εισαγωγή του μοναδιαίου εφαπτομενικού και κάθετου διανύσματος στην τροχιά. Όλες οι προηγούμενες έννοιες εξειδικεύονται στην κυκλική κίνηση σημείου στο επίπεδο και παρουσιάζεται η ανεξαρτησία των κινήσεων στην πλάγια βολή με την πληθώρα των γνωστών προβλημάτων της.

2.1 Ευθύγραμμη Κίνηση

ΑΣΚΗΣΗ 2.1

Σώμα κινείται στον άξονα των x σύμφωνα με την εξίσωση $x = 2t^3 + 5t^2 + 5$, όπου το x δίνεται σε μέτρα (m) και το t σε δευτερόλεπτα (s). Να βρεθούν: (α) Η ταχύτητα $v(t)$ και η επιτάχυνση $a(t)$ του σώματος. (β) Η μέση ταχύτητα v_{av} και μέση επιτάχυνση a_{av} στο χρονικό διάστημα από $t = 2s$ μέχρι $t = 3s$.

(Παράδειγμα 5.4 Alonso-Finn)

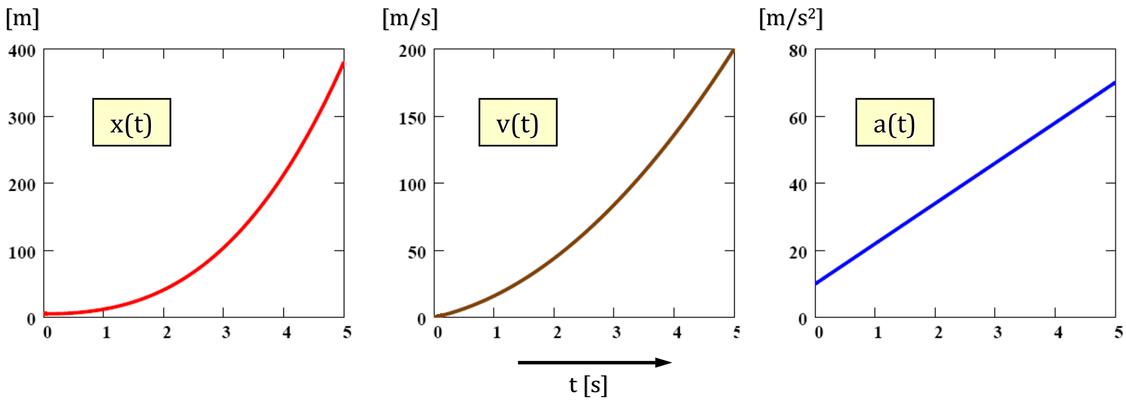
Λύση

(α) Με συνεχείς παραγωγίσεις λαμβάνουμε:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^3 + 5t^2 + 5) = 6t^2 + 10t \quad (m/s)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(6t^2 + 10t) = 12t + 10 \quad (m/s^2)$$

Οι παραστάσεις των τριών αυτών κινηματικών μεταβλητών συναρτήσει του χρόνου δίνονται στα παρακάτω γραφήματα.



(β) Οι ζητούμενες μέσες τιμές ταχύτητας και επιτάχυνσης υπολογίζονται:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(3) - v(2)}{3 - 2} = \frac{84 - 44}{1} = 40\ m/s^2$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(3) - x(2)}{3 - 2} = \frac{104 - 41}{1} = 63\ m/s$$

Συγκριτικά, οι τιμές των μεγεθών αυτών για το μέσο $t = (2+3)/2 = 2.5\ s$ είναι $a(t = 2.5) = 40\ m/s^2$ και $v(t = 2.5) = 62.5\ m/s$. Πώς δικαιολογείται το ότι $a_{av}(\Delta t = t_2 - t_1) = a[(t_1 + t_2)/2]$;

ΑΣΚΗΣΗ 2.2

Η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από τη σχέση $a = (4-t^2)\ m/s^2$. Υπολογίστε την ταχύτητα και το διάστημα που διανύει το σώμα σαν συνάρτηση του χρόνου, αν γνωρίζουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 3s$ ισχύει $v = 2\ m/s$ και $x = 9m$. *(Άσκηση 5.15 Alonso-Finn)*

Λύση

Για την εύρεση της ταχύτητας:

$$a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow dv = adt \Longrightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} (4-t^2)dt \Longrightarrow v - v_0 = 4t - \frac{t^3}{3}$$

Κάνοντας χρήση της δοσμένης συνθήκης $v(3) = 2$ παίρνουμε: $2 = v_0 + 4 \cdot 3 - 3^3/3$, άρα $v_0 = -1$ και κατά συνέπεια:

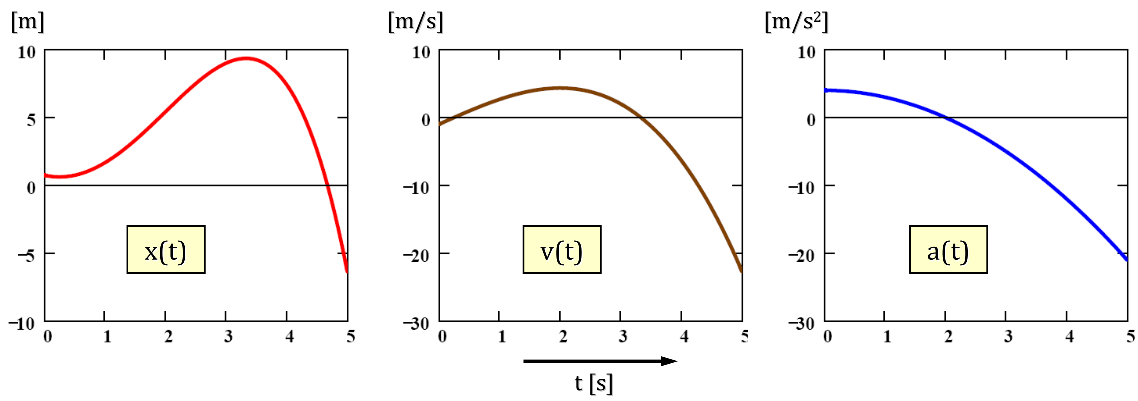
$$\boxed{v(t) = -\tfrac{1}{3}t^3 + 4t - 1}$$

Ομοίως για το διάστημα:

$$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow dx = vdt \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (-\frac{1}{3}t^3 + 4t - 1)dt \Longrightarrow x - x_0 = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 - t$$

και επειδή $x(3) = 9$ συνάγεται $x_0 = 3/4$, οπότε: $\boxed{x(t) = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 - t + \frac{3}{4}}$

Οι γραφικές παραστάσεις των κινηματικών συναρτήσεων απόστασης, ταχύτητας και επιτάχυνσης δίνονται αντίστοιχα στο παρακάτω σχήμα.



ΑΣΚΗΣΗ 2.3

Στην ευθύγραμμη κίνηση σώματος γνωρίζουμε την εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο, η οποία δίνεται από τη σχέση $v(t) = (3t^2 - 4)\ m/s$. Εάν γνωρίζουμε πως για $t = 0s$ το κινητό διέρχεται από το σημείο $x = 0m$, να βρεθεί εάν το κινητό μπορεί να περάσει ξανά από το σημείο $x = 0m$ και με ποια ταχύτητα και επιτάχυνση;

Λύση

Από την εξίσωση της ταχύτητας με ολοκλήρωση λαμβάνουμε:

$$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow dx = vdt \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (3t^2 - 4)dt \Longrightarrow x - x_0 = t^3 - 4t$$

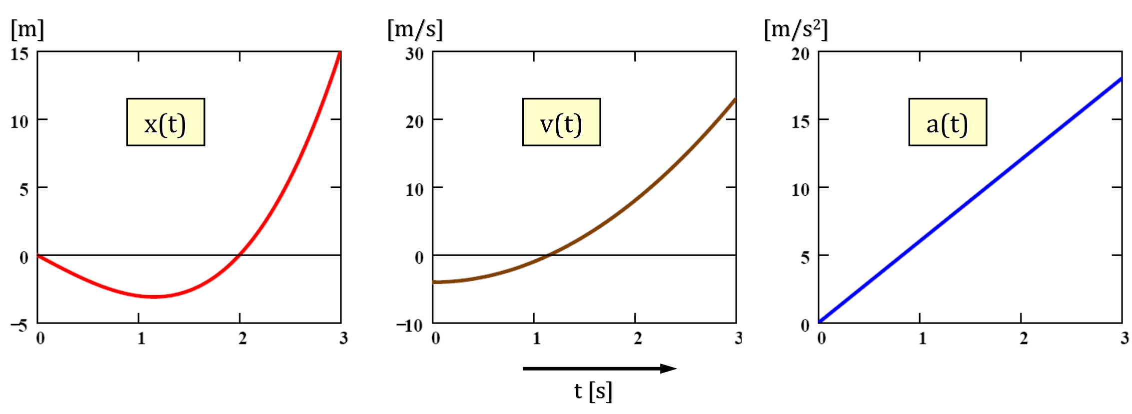
και δεδομένου ότι $x(t = 0) = 0$ πρέπει $x_0 = 0$, οπότε $\boxed{x(t) = t^3 - 4t = t(t^2 - 4)}$.

Οι ρίζες της τριτοβάθμιας αυτής σχέσης είναι $\{0, +2, -2\}$, άρα είναι προφανές πως για $t = 2s$ (η περίπτωση αρνητικού χρόνου απορρίπτεται) το κινητό διέρχεται ξανά από το $x = 0$ με ταχύτητα $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8\ m/s$.

Ο υπολογισμός της επιτάχυνσης γίνεται με διαφόριση της ταχύτητας:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 4) = 6t\ m/s^2 \Longrightarrow \boxed{a(t) = 6t} \Longrightarrow a(t = 2) = 12\ m/s^2.$$

Οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών αυτών δίνονται στο παρακάτω σχήμα:



ΑΣΚΗΣΗ 2.4

Σώμα κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a = 6\sqrt[3]{x}\ ms^{-2}$. Εάν γνωρίζουμε ότι για $t = 2s$ ισχύει $v = 27\ m/s$ και $x = 27m$, να υπολογιστούν οι κινηματικές εξισώσεις του διαστήματος, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.

(Άσκηση Κ3 Ιωάννου-Τρικαλινός)

Λύση

Στην άσκηση αυτή η επιτάχυνση δίνεται σαν **συνάρτηση της απόστασης**, οπότε χρειάζεται προετοιμασία των διαφορικών πριν την ολοκλήρωση. Γνωρίζουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} dv = adt \\ v = dx/dt \end{array} \right\} \Longrightarrow vdv = a\frac{dx}{dt}dt \Longrightarrow vdv = adx$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα η παραπάνω σχέση με ολοκλήρωση δίνει:

$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} 6x^{1/3}dx \Longrightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = 6\frac{3}{4}(x^{4/3} - x_0^{4/3}) \Longrightarrow v^2 = 9x^{4/3} + (v_0^2 - 9x_0^{4/3})$$

$$\Longrightarrow v^2 = 9x^{4/3} + \mathcal{C}$$

Η σταθερά $\mathcal{C}$ υπολογίζεται από τη συνθήκη $[x = 27, v = 27]$, η οποία δίνει

$$27^2 = 9 \cdot 27^{4/3} + \mathcal{C} \Longrightarrow 3^6 = 3^2 \cdot 3^4 + \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{C} = 0 \Longrightarrow \boxed{v = 3x^{2/3}}$$

Συνεχίζοντας την ολοκλήρωση παίρνουμε:

$$v = 3x^{2/3} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = 3x^{2/3} \Longrightarrow \frac{dx}{3x^{2/3}} = dt \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \int_{0}^{t} dt$$

$$\Longrightarrow x^{1/3} - x_0^{1/3} = t \Longrightarrow x^{1/3} = t + x_0^{1/3} \Longrightarrow x^{1/3} = t + \mathcal{C}$$

Η σταθερά υπολογίζεται πάλι από τα δεδομένα $[t = 2, x = 27]$, οπότε

$$27^{1/3} = 2 + \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{C} = 1 \Longrightarrow \boxed{x = (t+1)^3}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το διάστημα σαν συνάρτηση του χρόνου. Οι ζητούμενες εκφράσεις της ταχύτητας και επιτάχυνσης μπορούν εύκολα πλέον να υπολογισθούν με επάλληλες παραγωγίσεις:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t+1)^3 \Longrightarrow \boxed{v(t) = 3(t+1)^2}$$

και αντίστοιχα

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}3(t+1)^2 \Longrightarrow \boxed{a(t) = 6(t+1)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.5

Σώμα κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση η οποία περιγράφεται συναρτήσει της θέσης του από τη σχέση $a = 4x$ σε μονάδες m/s^2. Εάν τη χρονική στιγμή $t = 0\,s$ ισχύει $v_0 = 2\,m/s$ και $x_0 = 1\,m$, να υπολογιστούν οι κινηματικές εξισώσεις του διαστήματος, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα ισχύει η σχέση $vdv = adx$, η οποία με την ολοκλήρωση δίνει:

$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} 4xdx \Longrightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = 2(x^2 - x_0^2) \Longrightarrow v^2 = 4x^2 + (v_0^2 - 4x_0^2) = 4x^2 + (2^2 - 4\cdot 1)$$

$$\boxed{v = 2x}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x \Longrightarrow \frac{dx}{2x} = dt \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2x}dx = \int_{t_0}^{t} dt \Longrightarrow ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = 2(t - t_0) \Longrightarrow lnx = 2t$$

$$\boxed{x(t) = e^{2t}}$$

Από την εξίσωση αυτή του διαστήματος συναρτήσει του χρόνου προκύπτουν εύκολα οι εξισώσεις της ταχύτητας και επιτάχυνσης:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow v(t) = 2e^{2t}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow a(t) = 4e^{2t}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα είναι προφανής η επαλήθευση της σχέσης $a = 4x$ που δίδεται ως δεδομένο στο πρόβλημα.

ΑΣΚΗΣΗ 2.6

Η επιτάχυνση σωματιδίου κινουμένου ευθύγραμμα περιγράφεται από τη σχέση $a = -kv^2$, όπου k σταθερά. Εάν οι αρχικές τιμές ($t = 0$) για τη θέση και την ταχύτητα του κινητού είναι αντίστοιχα x_0 και v_0, να εκφραστεί η θέση του κινητού συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Στην άσκηση αυτή η επιτάχυνση δίνεται σαν **συνάρτηση της ταχύτητας**. Κάνοντας χρήση του ορισμού της επιτάχυνσης και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$a = -kv^2 \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = -kv^2 \Longrightarrow \frac{dv}{v^2} = -kdt \Longrightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{1}{v^2}dv = \int_{0}^{t} -kdt \Longrightarrow \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -kt$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt = \frac{1 + kv_0 t}{v_0}$$

$$\boxed{v = \frac{v_0}{1+kv_0 t}}$$

$$v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + kv_0 t} \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} \frac{v_0}{1 + kv_0 t} dt$$

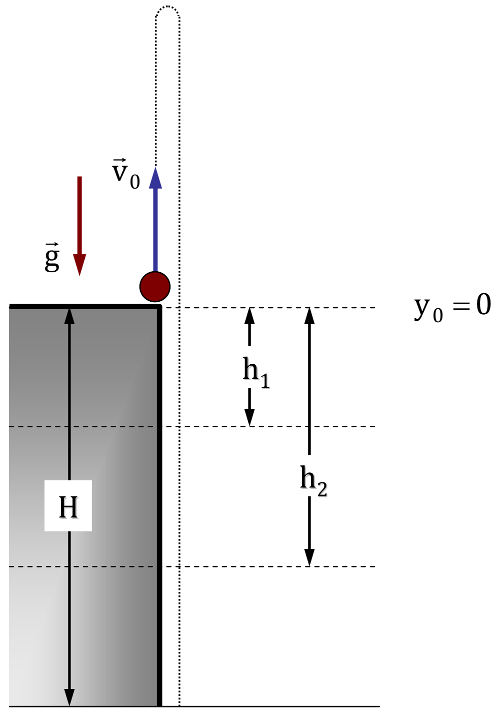
$$\Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \frac{1}{kv_0} \int_{0}^{t} \frac{v_0}{1 + kv_0 t} d(1 + kv_0 t) \Longrightarrow x - x_0 = \frac{1}{k} ln\,(1 + kv_0 t)$$

$$\boxed{x = x_0 + \frac{1}{k} ln\,(1 + kv_0 t)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.7

Πειραματιστής ρίχνει από την άκρη ταράτσας πολυκατοικίας ύψους $H = 24m$ κατακόρυφα προς τα πάνω μικρή μπάλα με αρχική ταχύτητα v_0 τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$. Έχοντας συγχρονίσει τα χρονόμετρά τους, παρατηρητές απέχοντες $\Delta h = 10m$ και ευρισκόμενοι στα παράθυρά τους βλέπουν τη μπάλα να περνά με κατεύθυνση προς τα κάτω με χρονική καθυστέρηση $\Delta t = t_2 - t_1 = 0.8s$ ο δεύτερος από τον πρώτο. Σε ποιο ύψος βρίσκονται οι παρατηρητές, εάν είναι γνωστό πως η μπάλα φτάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_3 = 3s$; Αγνοείστε την αντίσταση του αέρα. Δίδεται $g = 9.80\ m/s^2$.

Λύση



Έστω ότι οι δύο παρατηρητές βρίσκονται σε απόσταση h_1 και h_2 από την ταράτσα της πολυκατοικίας. Θεωρώντας το σημείο ρίψης της μπάλας ως την αρχή του άξονα y, τότε για τη μονοδιάστατη κίνηση κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα y έχουμε τις εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} -h_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \\ -h_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \\ -H = v_0 t_3 - \frac{1}{2} g t_3^2 \end{array} \right\}$$

Από την τρίτη εξίσωση είναι δυνατόν να υπολογισθεί η αρχική ταχύτητα του σώματος:

$$-H = v_0 t_3 - \frac{1}{2} g t_3^2 \Longrightarrow v_0 = \frac{1}{2} g t_3 - \frac{H}{t_3} \Longrightarrow v_0 = \frac{1}{2} 9.80 \cdot 3 - \frac{24}{3} \Longrightarrow v_0 = 6.7 m/s^2$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε:

$$-h_1 + h_2 = v_0 (t_1 - t_2) - \frac{1}{2} g (t_1^2 - t_2^2) \Longrightarrow \Delta h = -v_0 \Delta t - \frac{1}{2} g (t_1 - t_2)(t_1 + t_2)$$

$$\Longrightarrow \Delta h = -v_0 \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t (2t_1 + \Delta t) \Longrightarrow t_1 = \frac{v_0 \Delta t + \Delta h}{g \Delta t} - \frac{\Delta t}{2}$$

απ΄ όπου με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$t_1 = \frac{6.7 \cdot 0.8 + 10.0}{9.80 \cdot 0.8} - \frac{0.8}{2} \Longrightarrow t_1 = 1.56 s$$

και αντίστοιχα $t_2 = 2.36s$. Οι χρονικές αυτές τιμές προσδιορίζουν τις απόλυτες αποστάσεις:

$$-h_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \Longrightarrow h_1 = -6.7 \cdot 1.56 + 1/2 \cdot 9.80 \cdot 1.56^2 \Longrightarrow \boxed{h_1 = 1.47 m}$$

$$-h_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \Longrightarrow h_2 = -6.7 \cdot 2.36 + 1/2 \cdot 9.80 \cdot 2.36^2 \Longrightarrow \boxed{h_2 = 11.47 m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.8

Ένα αντικείμενο, αρχικά ακίνητο, πέφτει διανύοντας απόσταση h. Αν διανύει $0.50h$ στο τελευταίο $1.00s$, να βρείτε (α) το χρόνο και (β) το ύψος της πτώσης του. (γ) Να ερμηνεύσετε την φυσικά μη αποδεκτή λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως προς t που βρίσκετε. *(Άσκηση 2.60 Halliday-Resnick)*

Λύση

(α) Δεδομένου ότι η αρχική ταχύτητα της ελεύθερης πτώσης είναι $v_0 = 0$ η κίνηση κατά την κατακόρυφο περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2$$

Βασιζόμενοι στα δεδομένα της άσκησης, εάν για $y = -h$ το σώμα χρειάζεται χρόνο t, τότε για $y = -0.50h$ το σώμα τα χρειάζεται χρόνο $(t-1)s$. Δηλαδή:

$$\left\{ \begin{array}{l} -0.50h = -\frac{1}{2}g(t-1)^2 \\ -h = -\frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h/2 = \frac{1}{2}g(t-1)^2 \\ h = \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h = g(t-1)^2 \\ h = \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\}$$

Το σύστημα αυτό μας οδηγεί στην δευτεροβάθμια εξίσωση του χρόνου:

$$g(t-1)^2 = \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow 2(t-1)^2 = t^2 \Longrightarrow t^2 - 4t + 2 = 0 \Longrightarrow t = 2 \pm \sqrt{2}$$

Επειδή πρέπει $t > 1$, η φυσικά αποδεκτή λύση είναι η $\boxed{t = 2 + \sqrt{2}\ s}$

(β) $h = \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 9.80 \cdot (2+\sqrt{2})^2 \Longrightarrow \boxed{h = 57.1\ m}$.

(γ) Η φυσικά μη αποδεκτή λύση $t = 2 - \sqrt{2}\ s$ αντιστοιχεί στην κίνηση ενός σώματος που στον χρόνο $(2-\sqrt{2}) - 1 = 1 - \sqrt{2} = -0.41\ s$ βρίσκεται στο $0.50h$, ενώ μετά παρέλευση ενός δευτερολέπτου στο h. Αυτό είναι ισοδύναμο με ρίψη του σώματος **προς τα πάνω** από το ύψος $0.50h$ με αρχική ταχύτητα v_0 και άφιξή του στο h μετά από ένα δευτερόλεπτο. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, μπορεί εύκολα να ελεγχθεί πως τα μεγέθη $v_0 = 4.06\ m/s$ και $h = 1.68\ m$ αποτελούν μια λύση του προβλήματος, η οποία περιγράφει τη κίνηση ενός σώματος με τις παραπάνω αρχικές συνθήκες, όπου για $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στο ανώτατο ύψος $h = 1.68\ m$ με μηδενική ταχύτητα.

2.2 Διανυσματικός Ορισμός Κίνησης

ΑΣΚΗΣΗ 2.9

Σωματίδιο κινείται έτσι ώστε η θέση του (σε μέτρα) ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα) να είναι $\vec{r} = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$. Να γράψετε (α) τις εκφράσεις για την ταχύτητά του και την επιτάχυνσή του ως συνάρτηση του χρόνου (β) την εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου.

(Άσκηση 4.11 Halliday-Resnick)

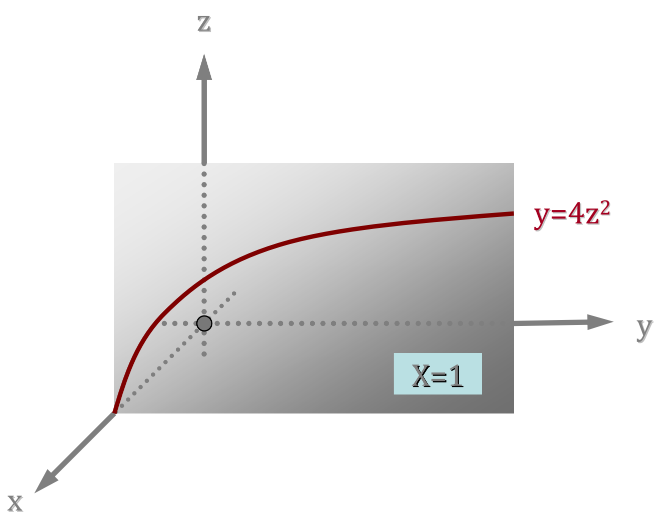
Λύση

(α) *Διανυσματικές εξισώσεις ταχύτητας & επιτάχυνσης*

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}) \Longrightarrow \boxed{\vec{v}(t) = 8t\hat{j} + \hat{k}}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(8t\hat{j} + \hat{k}) \Longrightarrow \boxed{\vec{a}(t) = 8\hat{j}}$$

(β) *Εξίσωση τροχιάς*



Καθώς η επιτάχυνση $\vec{a}(t) = 8\hat{j}$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου (σταθερή) και το x παραμένει σταθερό, η τροχιά θα είναι παραβολή στο επίπεδο (yz) κάθετο στον άξονα των x στην τιμή $x = 1$. Το επίπεδο αυτό παρίσταται στο σχήμα ως $X = 1$. Η εξίσωση της τροχιάς σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 1 \\ y(t) = 4t^2 \\ z(t) = t \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4z^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4z^2 \end{array}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.10

Οι συντεταγμένες της θέσης ενός κινητού δίνονται από τις εξισώσεις: $x(t) = 3cos(t)$, $y(t) = 3sin(t)$ και $z(t) = 2t^2$ σε μονάδες SI. Να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα της επιτάχυνσης έχει σταθερό μέτρο. Μπορείτε να περιγράψετε τι είδους κίνηση εκτελεί το κινητό;

Λύση

Αρχικά υπολογίζεται η ταχύτητα και μέσω αυτής η επιτάχυνση:

$$\left\{\begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_x = \frac{d}{dt}[3cos(t)] \\ v_y = \frac{d}{dt}[3sin(t)] \\ v_z = \frac{d}{dt}(2t^2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_x = -3sin(t) \\ v_y = +3cos(t) \\ v_z = 4t \end{array}\right\}$$

Κατά συνέπεια:

$$\left\{\begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_x = \frac{d}{dt}[-3sin(t)] \\ a_y = \frac{d}{dt}[+3cos(t)] \\ a_z = \frac{d}{dt}(4t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_x = -3cos(t) \\ a_y = -3sin(t) \\ a_z = 4 \end{array}\right\}$$

οπότε το μέτρο της επιτάχυνσης είναι

$$a = \sqrt{[-3cos(t)]^2 + [-3sin(t)]^2 + 4^2} = \sqrt{3^2[cos^2(t) + sin^2(t)] + 4^2} \Longrightarrow \boxed{a = 5\ ms^{-2}}$$

Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις της θέσης του κινητού $x^2 + y^2 = 3^2$, η προβολή της τροχιάς στο επίπεδο (XY) είναι κύκλος ακτίνας $R = 3\ m$. Το κινητό εκτελεί σ' αυτό το επίπεδο ομαλή κυκλική κίνηση με $v_{xy} = 3\ m/s$ ενώ κατά την κατεύθυνση z εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με $a_z = 4\ m/s^2$. Η συνολική του λοιπόν κίνηση είναι **ελικοειδής** με αυξανόμενο z-βηματισμό (τετραγωνικά) με τον χρόνο.

ΑΣΚΗΣΗ 2.11

Η θέση ενός κινητού περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$, όπου $x(t) = 3t^2 + 5t$, $y(t) = -t^3 + 1$ και $z(t) = 2t$ σε μονάδες SI. Να βρεθούν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης;

Λύση

Η άσκηση αυτή αποτελεί απλή εφαρμογή του διανυσματικού ορισμού της ταχύτητας και της επιτάχυνσης:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \frac{d}{dt}(3t^2+5t)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(-t^3+1)\hat{\jmath} + \frac{d}{dt}(2t)\hat{k}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{v} = (6t+5)\hat{\imath} - 3t^2\hat{\jmath} + 2\hat{k}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d}{dt}(6t+5)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(-3t^2)\hat{\jmath} + \frac{d}{dt}(2)\hat{k}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{a} = 6\hat{\imath} - 6t\hat{\jmath}}$$

Παρατηρούμε πως το διάνυσμα της επιτάχυνσης κινείται στο επίπεδο (XY), το δε μέτρο της είναι: $a = \sqrt{6^2 + (6t)^2} = 6\sqrt{1+t^2}$, προφανώς εξαρτώμενο από τον χρόνο.

2.3 Κίνηση στο Επίπεδο

ΑΣΚΗΣΗ 2.12

Οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίου στο επίπεδο περιγράφονται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = 2t^2 + 3$ και $y(t) = 3t^2 + 1$ στους αντίστοιχους άξονες. Να βρεθούν τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης καθώς και η εξίσωση τροχιάς του κινητού αυτού.

Λύση

Είναι προφανές πως τα x και y έχουν γραμμική εξάρτηση μεταξύ τους, όπως φαίνεται από την απαλοιφή του χρόνου:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2t^2+3 \\ y(t) = 3t^2+1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x(t) = 6t^2+9 \\ 2y(t) = 6t^2+2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 3x - 2y = 7 \Longrightarrow \boxed{y = 3/2x - 7/2}$$

Η τροχιά του κινητού είναι συνεπώς μια ευθεία με κλίση $k = 3/2$. Τα διανύσματα της ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι αντίστοιχα:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(2t^2+3)\hat{\imath} + (3t^2+1)\hat{\jmath}\right] = 4t\hat{\imath} + 6t\hat{\jmath}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4t\hat{\imath} + 6t\hat{\jmath}\right) = 4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, η κλίση και των δύο αυτών διανυσμάτων είναι $k = 3/2$, ταυτόσημη δηλαδή με την κλίση της ευθύγραμμης τροχιάς του κινητού. Παρατηρείστε ότι η τετραγωνική εξάρτηση των συντεταγμένων $x(t)$ και $y(t)$ από το χρόνο δίνει σαν αποτέλεσμα σταθερή επιτάχυνση.

ΑΣΚΗΣΗ 2.13

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (xy) και η επιτάχυνσή του περιγράφεται στο σύστημα μονάδων SI από τις εξισώσεις: $\left\{ \begin{array}{l} a_x = -2sin(t) \\ a_y = -3cos(t) \end{array} \right\}$. Εάν για $t = 0$ ισχύουν $\left\{ \begin{array}{l} v_{x0} = 2 \\ v_{y0} = 0 \end{array} \right\}$ και $\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y_0 = 6 \end{array} \right\}$, να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

Λύση

Είναι προφανές πως η εξίσωση τροχιάς θα βρεθεί με επάλληλες ολοκληρώσεις της επιτάχυνσης κάνοντας χρήση των αρχικών συνθηκών:

$$v_x = \int a_x dt = \int [-2sin(t)]dt = +2cos(t) + \mathcal{C}_1$$

$$v_y = \int a_y dt = \int [-3cos(t)]dt = -3sin(t) + \mathcal{C}_2$$

Με βάση τις αρχικές συνθήκες της ταχύτητας για $t = 0$ συνάγεται πως $\mathcal{C}_1 = 0$ καθώς και $\mathcal{C}_2 = 0$. Οπότε:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(t) = +2cos(t) \\ v_y(t) = -3sin(t) \end{array} \right\}$$

και κατά συνέπεια

$$x(t) = \int v_x dt = \int [+2cos(t)]dt = +2sin(t) + \mathcal{C}_1$$

$$y(t) = \int y_x dt = \int [-3sin(t)]dt = +3cos(t) + \mathcal{C}_2$$

Βάσει των αρχικών συνθηκών προκύπτει $\mathcal{C}_1 = 2$ και $\mathcal{C}_2 = 3$ οπότε καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2sin(t) + 2 \\ y = 3cos(3) + 3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-2}{2} = sin(t) \\ \frac{y-3}{3} = cos(3) \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1}$$

Άρα η εξίσωση τροχιάς είναι έλλειψη με κέντρο $(x_0, y_0) = (2, 3)$ και ημιάξονες $p_x = 2$ και $p_y = 3$ αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ 2.14

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (xy) και για τις συνιστώσες της ταχύτητάς του ισχύει $v_x = 4t^3 + 4t\ m/s$, $v_y = 4t\ m/s$. Για $t = 0s$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $(1, 2)$. Βρείτε την εξίσωση τροχιάς του σωματιδίου.

(Άσκηση 2.7 Ιωάννου-Τρικαλινός

Λύση

Ολοκλήρωση των συνιστωσών της ταχύτητας δίνει:

$$x(t) = \int (4t^3 + 4t)dt = t^4 + 2t^2 + \mathcal{C}_1$$

$$y(t) = \int (4t)dt = 2t^2 + \mathcal{C}_2$$

και με βάση τις αρχικές συνθήκες για $t = 0 \rightarrow (x_0, y_0) = (1, 2)$ παίρνουμε $\mathcal{C}_1 = 1$, $\mathcal{C}_2 = 2$. Οπότε η εξίσωση της τροχιάς είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t^4 + 2t^2 + 1 \\ y(t) = 2t^2 + 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = (t^2 + 1)^2 \\ y(t) = 2(t^2 + 1) \end{array} \right\} \Longrightarrow x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}y^2}$$

Η τροχιά του σωματιδίου διαγράφει λοιπόν παραβολική τροχιά στο επίπεδο (xy).

ΑΣΚΗΣΗ 2.15

Το διάνυσμα θέσης κινητού στο επίπεδο (xy) δίνεται από τη σχέση $\vec{r} = \alpha t\hat{i} + \beta t^2\hat{j}$, όπου α και β σταθερές. Αφού πρώτα βρεθεί η τροχιά του κινητού, να υπολογισθούν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και να εκφραστεί η μεταξύ των γωνία φ συναρτήσει του χρόνου.

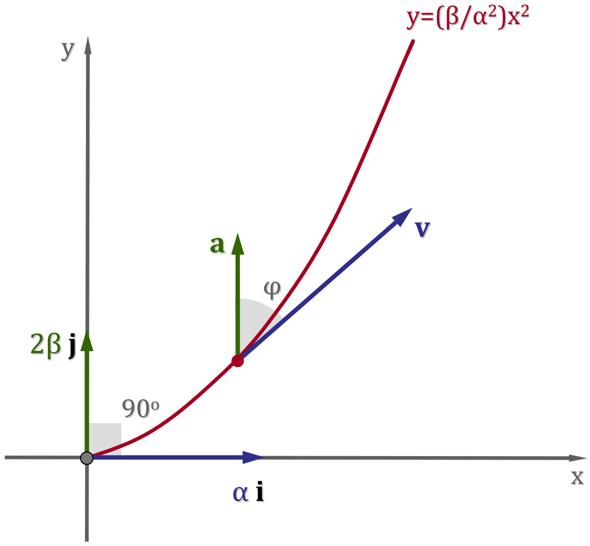
Λύση

Για τις συνιστώσες $x(t)$ και $y(t)$ της τροχιάς ισχύουν:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \alpha t \\ y(t) = \beta t^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{x^2}{y} = \frac{\alpha^2}{\beta} \Longrightarrow \boxed{y = \left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right) x^2}$$

Η τροχιά είναι λοιπόν η παραβολή $y = \lambda x^2$ με σταθερά $\lambda = \beta/\alpha^2$.

Από το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = \alpha t\hat{i} + \beta t^2\hat{j}$ υπολογίζονται τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης:



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\alpha t\hat{i} + \beta t^2\hat{j}\right) = \alpha\hat{i} + 2\beta t\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\alpha\hat{i} + 2\beta t\hat{j}\right) = 0\hat{i} + 2\beta\hat{j}$$

Παρατηρούμε πως η επιτάχυνση $\vec{a}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα (ανεξάρτητο του χρόνου) με μέτρο 2β κατά την κατεύθυνση y. Αντίθετα, η ταχύτητα $\vec{v}$ έχει μια σταθερή συνιστώσα, μέτρου α, κατά τη κατεύθυνση x και μια χρονοεξαρτώμενη, η οποία είναι ανάλογη του χρόνου με μέτρο $2\beta t$, κατά τη κατεύθυνση y.

Η ζητούμενη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων ταχύτητας και επιτάχυνσης μπορεί να υπολογισθεί εύκολα κάνοντας χρήση του εσωτερικού των γινομένου:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = |\vec{v}|\,|\vec{a}|\,cos\phi \Longrightarrow \left(\alpha\hat{i} + 2\beta t\hat{j}\right)\cdot\left(0\hat{i} + 2\beta\hat{j}\right) = \left(\sqrt{\alpha^2 + (2\beta t)^2}\right)(2\beta)\ cos\phi$$

$$\Longrightarrow 4\beta^2 t = 2\beta\sqrt{\alpha^2 + (2\beta t)^2}\,cos\phi \Longrightarrow cos\phi = \frac{2\beta t}{\sqrt{\alpha^2 + (2\beta t)^2}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha/2\beta t)^2}}}\ \text{ή ισοδύναμα}\ \boxed{tan\phi = \frac{a}{2\beta t}}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα φαίνεται πως η γωνία φ τείνει στο μηδέν καθώς μεγαλώνει ο χρόνος t της κίνησης ($cos\phi \to 1$ ή $tan\phi \to 0$). Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς η χρονοεξαρτώμενη συνιστώσα της ταχύτητας $\vec{v}$ είναι κατά την κατεύθυνση y μόνο, οπότε το διάνυσμα της ταχύτητας τείνει να ταυτιστεί με την σταθερή κατεύθυνση του διανύσματος της επιτάχυνσης.

Στην αρχή της κίνησης ($t = 0$) όταν το κινητό βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (το διάνυσμα θέσης γίνεται $\vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j}$ για $t = 0$) τα δύο διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι κάθετα, όπως φαίνεται από τις σχέσεις που προκύπτουν. Κατά συνέπεια, η επιτάχυνση τη στιγμή αυτή είναι εξ΄ ολοκλήρου κεντρομόλος, δηλαδή:

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}(t=0) = \alpha\hat{i} + 0\hat{j}\\ \vec{a}(t=0) = 0\hat{i} + 2\beta\hat{j}\end{array}\right\} \Longrightarrow |\vec{a}| = |\vec{a}_N| = \frac{v^2}{\rho} \Longrightarrow 2\beta = \frac{\alpha^2}{\rho} \Longrightarrow \rho = \frac{\alpha^2}{2\beta}$$

η ακτίνα καμπυλότητας μπορεί να εκφραστεί μέσω των σταθερών α και β με την παραπάνω απλή σχέση.

ΑΣΚΗΣΗ 2.16

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (xy) με διάνυσμα ταχύτητας $\vec{V}(x,y) = 2\hat{\imath} + 4x\hat{\jmath}$. Ποιά είναι η εξίσωση τροχιάς του και ποιά η ακτίνα καμπυλότητας τη χρονική στιγμή $t = 1/4$; Δίνεται η αρχική συνθήκη για $t = 0$ πως $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Λύση

Από την εκφώνηση της άσκησης έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = \frac{dx}{dt} = 2 \\ V_y = \frac{dy}{dt} = 4x \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2t + \mathcal{C}\ (=0) \\ \frac{dy}{dt} = 4x \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ \frac{dy}{dt} = 8t \end{array} \right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 4t^2 + \mathcal{C}\ (=0) \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 4t^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{y = x^2}$$

Η ζητούμενη τροχιά είναι λοιπόν η παραβολή $y = x^2$. Με βάση τις εξισώσεις της θέσης του κινητού εκπεφρασμένες ως προς τον χρόνο t, παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 4t^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_x = 2 \\ V_y = 8t \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 8 \end{array} \right\}$$

Για $t = 1/4$ τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης γίνονται αντίστοιχα:

$$\vec{V} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \qquad \vec{a} = 8\hat{\jmath}$$

Η ακτίνα καμπυλότητας μπορεί να προσδιοριστεί από την κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}_N$ μέσω της σχέσης $a_N = V^2/\rho$. Θα πρέπει λοιπόν να υπολογισθεί πρώτα η κεντρομόλος συνιστώσα. Το μέτρο της επιτρόχιας συνιστώσας a_T της επιτάχυνσης προκύπτει από την προβολή της $\vec{a}$ στην κατεύθυνση της ταχύτητας:

$$a_T = \vec{a} \cdot \hat{u}_T = \vec{a} \cdot \vec{V}/V = (8\hat{\jmath}) \cdot (2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})/\sqrt{2^2 + 2^2} = 4\sqrt{2}$$

Κατά συνέπεια είναι $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}$ και άρα η ακτίνα καμπυλότητας υπολογίζεται:

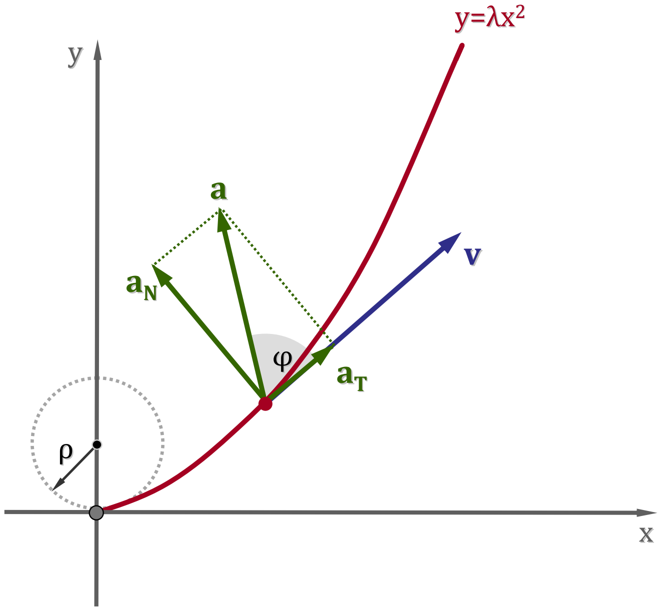
$$\rho = V^2/a_N = (2^2 + 2^2)/4\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \rho = \sqrt{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.17

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (xy) διαγράφοντας την παραβολή $y = \lambda x^2$. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση και η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο σημείο $x = 0$.

Λύση

Η άσκηση αυτή διαφοροποιείται από την προηγούμενη, παρ' όλο που η τροχιά τυχαίνει να έχει την ίδια μορφή (παραβολική). Στην παρούσα άσκηση δεν είναι γνωστές οι παραμετρικές εξισώσεις των συντεταγμένων της θέσης. Οπότε, με βάση τον ορισμό της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, θα ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:



$$\left\{\begin{array}{l} \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \\ \vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \\ \vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{r} = x\hat{i} + \lambda x^2\hat{j} \\ \vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + 2\lambda x\frac{dx}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + 2\lambda x v_x\hat{j} \\ \vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \left(2\lambda\frac{dx}{dt}v_x + 2\lambda x\frac{dv_x}{dt}\right)\hat{j} \end{array}\right\}$$

Άρα τελικά η επιτάχυνση μπορεί να γραφεί στην διανυσματική μορφή:

$$\boxed{\vec{a} = a_x\hat{i} + \left(2\lambda v_x^2 + 2\lambda x a_x\right)\hat{j}}$$

Για $x = 0$ είναι $\vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j}$ και τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{a}$ γίνονται αντίστοιχα:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{v} = v_x\hat{i} + 0\hat{j} \\ \vec{a} = a_x\hat{i} + 2\lambda v_x^2\,\hat{j} \end{array}\right\}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις παρατηρούμε πως η επιτρόχιος συνιστώσα $\vec{a}_T$ της επιτάχυνσης ταυτίζεται με την $\vec{a}_x$ συνιστώσα της (ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα), οπότε η κεντρομόλος είναι: $\vec{a}_N = \vec{a}_y = 2\lambda v_x^2\,\hat{j}$. Άρα θα ισχύει:

$$|\vec{a}_N| = \frac{v^2}{\rho} \Longrightarrow 2\lambda v_x^2 = \frac{v_x^2}{\rho} \Longrightarrow \boxed{\rho = \frac{1}{2\lambda}}$$

Παρατηρείστε πως το αποτέλεσμα είναι ταυτόσημο με αυτό της άσκησης 2.15.

ΑΣΚΗΣΗ 2.18

Σώμα κινείται στο επίπεδο σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R = 2m$ με γωνιακή επιτάχυνση $a_A = (6t + 2)\ rad/s^2$. Εάν τη χρονική στιγμή $t = 0s$ γωνιακή ταχύτητα και η γωνία είναι αντίστοιχα $\omega_0 = 0\ rad/s$, $\theta_0 = 0\ rad$ να βρεθούν τα διανύσματα της γραμμικής εφαπτομενικής και κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{a}_T$ και $\vec{a}_N$ αντίστοιχα.

Λύση

Η γωνιακή ταχύτητα και η γωνία προκύπτουν από την ολοκλήρωση της γωνιακής επιτάχυνσης:

$$\omega(t) = \int a_A(t)dt = \int (6t + 2)dt = 3t^2 + 2t + \mathcal{C} \Longrightarrow \omega(t) = 3t^2 + 2t$$

$$\theta(t) = \int \omega(t)dt = \int (3t^2 + 2t)dt = t^3 + t^2 + \mathcal{C} \Longrightarrow \theta(t) = t^3 + t^2$$

Η γραμμική ταχύτητα του σωματιδίου θα δίνεται από τη σχέση:

$$v(t) = R\omega(t) = 2(3t^2 + 2t) = (6t^2 + 4t)\ m/s$$

οπότε η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης έχει μέτρο:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 12t + 4 \Longrightarrow \boxed{\vec{a}_T = (12t + 4)\hat{u}_T\ m/s^2}$$

ενώ η κεντρομόλος συνιστώσα έχει μέτρο:

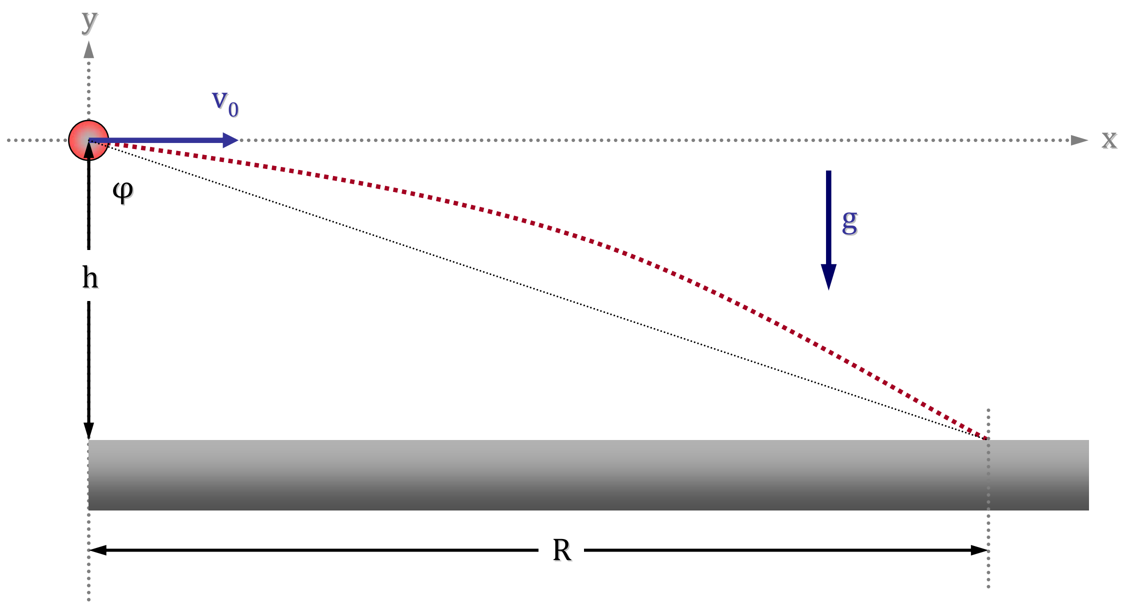
$$a_N = R\omega^2 = 2(3t^2 + 2t)^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{a}_N = 2t^2(3t + 2)^2\hat{u}_N\ m/s^2}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{u}_T$ και $\hat{u}_N$ είναι αντίστοιχα εφαπτόμενο και κάθετο (κεντρομόλο) στη κυκλική τροχιά στο σημείο της επιβατικής ακτίνας.

2.4 Βολές

ΑΣΚΗΣΗ 2.19

Σώμα, ελεύθερο αντιστάσεων και άλλων τριβών, βάλλεται από ύψος h με οριζόντια ταχύτητα v_0. Να βρεθεί το βεληνεκές R καθώς και η γωνία φ που σχηματίζεται από την ευθεία που συνδέει το σημείο βολής και πρόσκρουσης στο έδαφος με την κατακόρυφο.



Λύση

Από την ανεξαρτησία των κινήσεων στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα σχηματίζουμε τις εξισώσεις κίνησης:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = v_0 t \\ -h = -\frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = v_0\sqrt{2h/g} \\ t = \sqrt{2h/g} \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{R = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Για τη γωνία φ ισχύει:

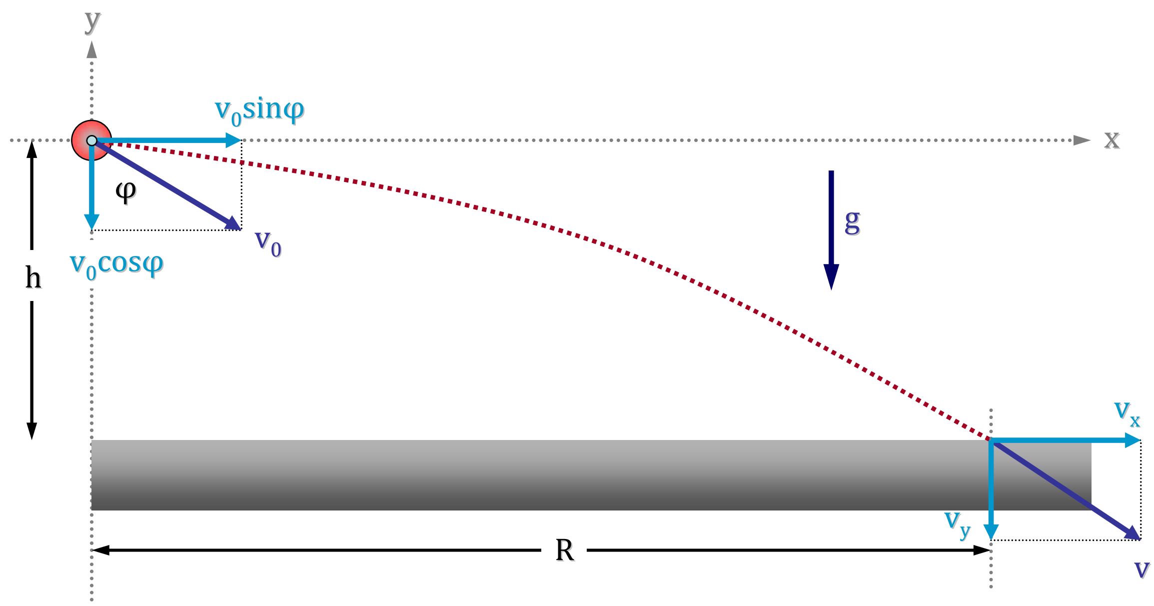
$$tan\phi = \frac{R}{h} = \frac{v_0\sqrt{2h/g}}{h} \Longrightarrow \boxed{tan\phi = v_0\sqrt{\frac{2}{hg}}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.20

Βλήμα, ελεύθερο αντιστάσεων και άλλων τριβών, εκτοξεύεται από ύψος $h = 500m$ με ταχύτητα v_0 προς τα κάτω, σχηματίζοντας γωνία $\phi = 60^o$ με την κατακόρυφο. Να βρεθεί το βεληνεκές R της βολής αυτής, εάν το σώμα συναντά το έδαφος $t = 4s$ μετά την εκτόξευση. Ποιο το μέτρο της αρχικής ταχύτητας v_0 και ποιο της τελικής v;

Λύση

Όπως και στην προηγούμενη άσκηση γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα. Στον οριζόντιο άξονα έχουμε την συνιστώσα της ταχύτητας



$v_{0x} = v_0 sin\phi$, ενώ στον κατακόρυφο αντίστοιχα την $v_{0y} = v_0 cos\phi$.

$$\left\{\begin{array}{l} v_x = v_0 sin\phi \\ R = (v_0 sin\phi)t \\ -v_y = -v_0 cos\phi - gt \\ -h = (-v_0 cos\phi)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} v_x = v_0 sin\phi & (1) \\ R = (v_0 sin\phi)t & (2) \\ v_y = v_0 cos\phi + gt & (3) \\ h = (v_0 cos\phi)t + \frac{1}{2}gt^2 & (4) \end{array}\right\}$$

Από την τελευταία εξίσωση (4) υπολογίζουμε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας v_0 και το αντικαθιστούμε στην (2):

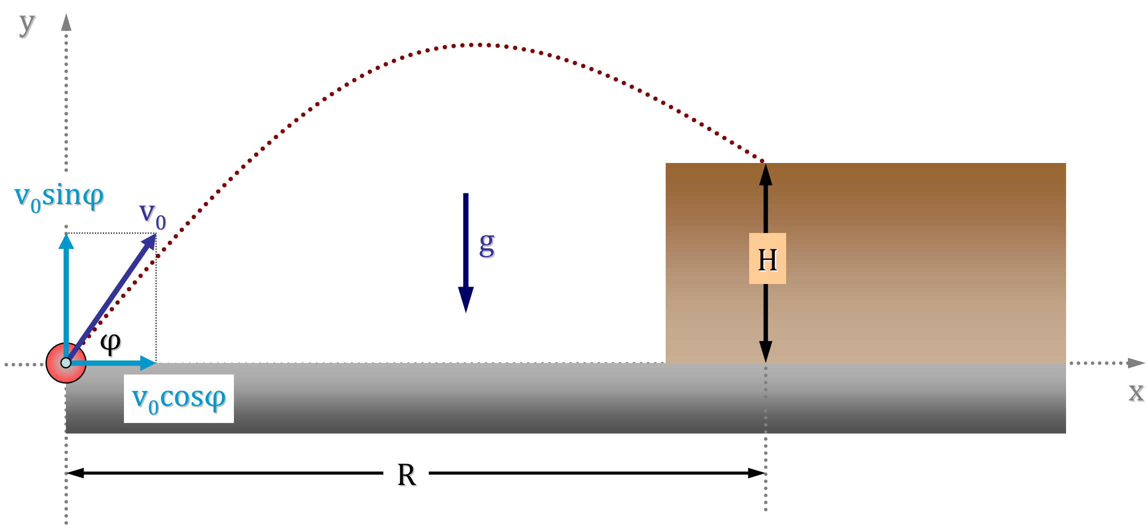
$$\left\{\begin{array}{ll} v_x = v_0 sin\phi & (1) \\ R = (h - gt^2/2)(tsin\phi)/(tcos\phi) & (2) \\ v_y = v_0 cos\phi + gt & (3) \\ v_0 = (h - gt^2/2)/(tcos\phi) & (4) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \boxed{R = (h - gt^2/2)tan\phi} \\ \\ \boxed{v_0 = (h - gt^2/2)/(tcos\phi)} \end{array}\right\}$$

Μετά από αντικατάσταση βρίσκουμε $\boxed{R = 730\ m}$ και $\boxed{v_0 = 210\ m/s}$. Για τον υπολογισμό της τελικής ταχύτητας θα προστεθούν διανυσματικά η αμετάβλητη οριζόντια συνιστώσα v_x (1) και η τελική κατακόρυφη v_y (3):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(210 sin60^o)^2 + (210 cos60^o + 9.8 \cdot 4)^2} \Longrightarrow \boxed{v = 232\ m/s}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.21

Βλήμα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα v_0 υπό γωνία φ και συναντά την ταράτσα κτιρίου ύψους H σε οριζόντια απόσταση R. Θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα, να υπολογίσετε την γωνία βολής φ εάν δίνονται τα μεγέθη $R = 200\ m$, $H = 50\ m$ και $v_0 = 60\ m/s$.



Λύση

Οι εξισώσεις της κίνησης για χρόνο πτήσης του βλήματος t, ο οποίος καθορίζεται από την κατακόρυφη κίνηση, είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = (v_0 cos\phi)t \\ H = (v_0 sin\phi)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = R/(v_0 cos\phi) \\ H = R(v_0 sin\phi)/(v_0 cos\phi) - \frac{1}{2}gR^2/(v_0 cos\phi)^2 \end{array} \right\}$$

Η δεύτερη των εξισώσεων είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την $tan\phi$:

$$H = Rtan\phi - \frac{1}{2}gR^2/(v_0 cos\phi)^2 \Longrightarrow H = Rtan\phi - \frac{gR^2}{2v_0^2}(1 + tan^2\phi) \Longrightarrow$$

$$\boxed{tan^2\phi - \frac{2v_0^2}{gR}tan\phi + \frac{2v_0^2 H}{gR^2} + 1 = 0}$$

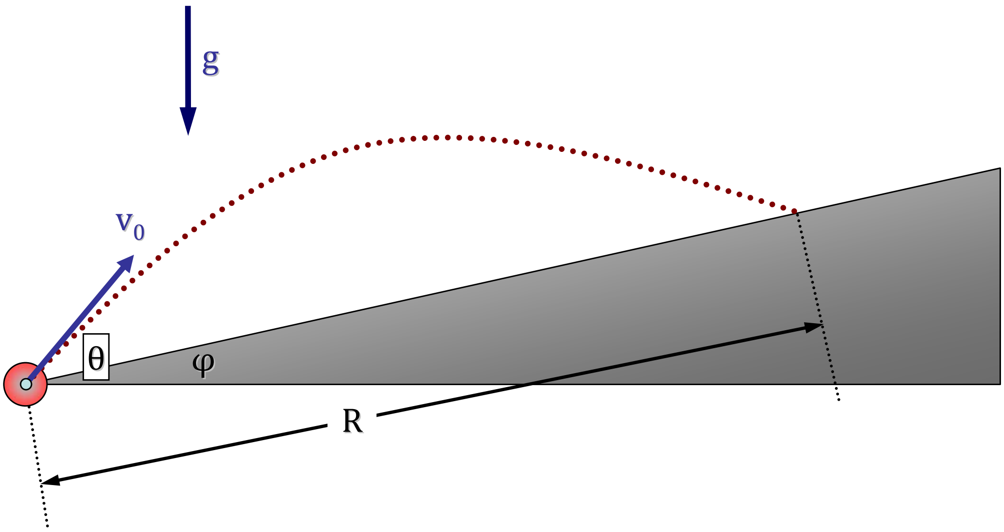
Με τα δεδομένα της άσκησης, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$tan^2\phi - 3.673tan\phi + 1.735 = 0 \Longrightarrow tan\phi_1 = 3.117\ , tan\phi_2 = 0.557 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\phi_1 = 72.2^o}\ ,\ \boxed{\phi_2 = 29.1^o}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.22

Βλήμα εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας φ υπό γωνία ϑ ως προς τον ορίζοντα. Να υπολογιστεί το βεληνεκές R επί του κεκλιμένου επιπέδου.



Λύση

<u>*ΜΕΘΟΔΟΣ Α*</u>

Αναλύουμε τη κίνηση του βλήματος στον άξονα παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο και στον αντίστοιχο κάθετο. Στην περίπτωση αυτή, και στις δύο αυτές κατευθύνσεις δρα η βαρυτική επιτάχυνση με μέτρα $gsin\phi$ και $gcos\phi$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = v_0 cos(\theta - \phi)t - \frac{1}{2}g(sin\phi)t^2 \\ 0 = v_0 sin(\theta - \phi)t - \frac{1}{2}g(cos\phi)t^2 \end{array} \right\}$$

Η δεύτερη των εξισώσεων λυόμενη ως προς τον χρόνο t δίνει:

$$t = \frac{2v_0}{g}\frac{sin(\theta - \phi)}{cos\phi}$$

και μετά από αντικατάσταση στην πρώτη λαμβάνουμε για το βεληνεκές R την παρακάτω σχέση:

$$R = v_0 cos(\theta - \phi)\frac{2v_0}{g}\frac{sin(\theta - \phi)}{cos\phi} - \frac{1}{2}gsin\phi\frac{2^2v_0^2}{g^2}\frac{sin^2(\theta - \phi)}{cos^2\phi} \Longrightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\frac{cos(\theta - \phi)sin(\theta - \phi)cos\phi - sin\phi sin^2(\theta - \phi)}{cos^2\phi} \Longrightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{sin(\theta - \phi)[cos(\theta - \phi)cos\phi - sin\phi sin(\theta - \phi)]}{cos^2\phi} \Longrightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{sin(\theta - \phi)cos(\theta - \phi + \phi)}{cos^2\phi} \Longrightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{sin(\theta - \phi)cos\theta}{cos^2\phi}}$$

Η σχέση αυτή για την οριακή περίπτωση $\phi = 0$ απλοποιείται στην γνωστή σχέση του βεληνεκούς για το οριζόντιο επίπεδο $R = \frac{2v_0^2}{g} sin\theta cos\theta = \frac{v_0^2}{g} sin2\theta$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΣ Β</u>

Αναζητούμε το σημείο τομής της τροχιάς του βλήματος και του κεκλιμένου επιπέδου. Οι εξισώσεις αυτές αντίστοιχα είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = xtan\theta - gx^2/2(v_0 cos\theta)^2 \\ y = xtan\phi \end{array} \right\} \Longrightarrow xtan\theta - gx^2/2(v_0 cos\theta)^2 = xtan\phi \Longrightarrow$$

$$x = \frac{2v_0^2}{g}(tan\theta - tan\phi)cos^2\theta$$

Αλλά το x δίνεται μέσω του βεληνεκούς και της γωνίας φ ως $x = Rcos\phi$, οπότε:

$$Rcos\phi = \frac{2v_0^2}{g}(tan\theta - tan\phi)cos^2\theta \Longrightarrow R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{tan\theta - tan\phi}{cos\phi} cos^2\theta \Longrightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{sin\theta cos\theta - cos^2\theta tan\phi}{cos\phi} \Longrightarrow R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{cos\theta(sin\theta - cos\theta sin\phi/cos\phi)}{cos\phi} \Longrightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{cos\theta(sin\theta cos\phi - cos\theta sin\phi)}{cos^2\phi} \Longrightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{sin(\theta - \phi)cos\theta}{cos^2\phi}}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ίδιο με την προηγούμενη μέθοδο αποτέλεσμα.

2.5 Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 2.23

Ένας ζογκλέρ συνηθίζει να πετάει τις μπάλες κατακόρυφα προς τα πάνω μέχρι κάποιο ύψος H. Πόσο ψηλά πρέπει να πετάξει τις μπάλες ώστε αυτές να μείνουν στον αέρα για διπλάσιο χρόνο;

Απάντηση: $4H$ *(Άσκηση 2.99 Halliday-Resnick)*

ΑΣΚΗΣΗ 2.24

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (xy) με συντεταγμένες $x(t) = at^2$ και $y(t) = bt$, όπου a και b σταθερές. (α) Να υπολογισθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του. (β) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (γ) Να εκφρασθεί η γωνία φ μεταξύ των διανυσμάτων της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ως συνάρτηση του χρόνου.

Απάντηση: (α) $\vec{v} = 2at\vec{i} + b\vec{j}$, $\vec{a} = 2a\vec{i}$ (β) $y^2 = \frac{b^2}{a}x$ (γ) $tan\phi = \frac{b}{2at}$

ΑΣΚΗΣΗ 2.25

Ένα πουλί πετά στο επίπεδο (xy) με ένα διάνυσμα ταχύτητας που δίνεται από τη σχέση $\vec{v} = (\alpha - \beta t^2)\vec{i} + \gamma t\vec{j}$ με σταθερές $\alpha = 2.4\ m/s$, $\beta = 1.8\ m/s^3$, $\gamma = 4.0\ m/s^2$. Ο άξονας x είναι οριζόντιος, ενώ ο y δείχνει κατακόρυφα προς τα πάνω. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το πουλί βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. (α) Να υπολογιστούν η θέση και η επιτάχυνσή του σαν συνάρτηση του χρόνου. (β) Σε τι ύψος βρίσκεται το πουλί όταν περνάει για πρώτη φορά από το $x = 0$ μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$;

Απάντηση: (β) $y = 8\ m$ *(Άσκηση 3.46 Young-Freedman)*

ΑΣΚΗΣΗ 2.26

Παίκτης του γκολφ ξεκινά από ύψωμα δίνοντας στη μπάλα του αρχική ταχύτητα $43\ m/s$ με γωνία 30^o πάνω από την οριζόντια κατεύθυνση. Η μπάλα πέφτει σε επίπεδο με γρασίδι και σε οριζόντια απόσταση $180\ m$ από το σημείο βολής. (α) Πόσο πάνω από την περιοχή με γρασίδι βρίσκεται το ύψωμα; (β) Πόση είναι η ταχύτητα της μπάλας καθώς χτυπά στο γρασίδι;

Απάντηση: (α) 11 m (β) 45 m/s *(Άσκηση 4.131 Halliday-Resnick)*

ΑΣΚΗΣΗ 2.27

Κινούμενο σώμα στο επίπεδο (xy) έχει συντεταγμένες $x = \alpha t$ και $y = \beta sin(\alpha t)$, όπου α και β θετικές σταθερές. Να αποδείξετε πως το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ανάλογο της απόστασης του κινούμενου σώματος από τον άξονα των x. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η μορφή της τροχιάς του σώματος.

Κεφάλαιο 3

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

- Νομοι του Νευτωνα {Νόμος της Αδράνειας - Αδρανειακό Σύστημα, Μάζα και Ορμή, Αρχή διατήρησης της Ορμής, Δύναμη - Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα, Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα}
- Ειδικες Περιπτωσεις Δυναμεων {Βαρυτική Δύναμη - Βάρος, Κάθετη Δύναμη σε Επιφάνεια, Τάση Νήματος}
- Τριβη {Δύναμη Τριβής, Οπισθέλκουσα Δύναμη και Οριακή Ταχύτητα}

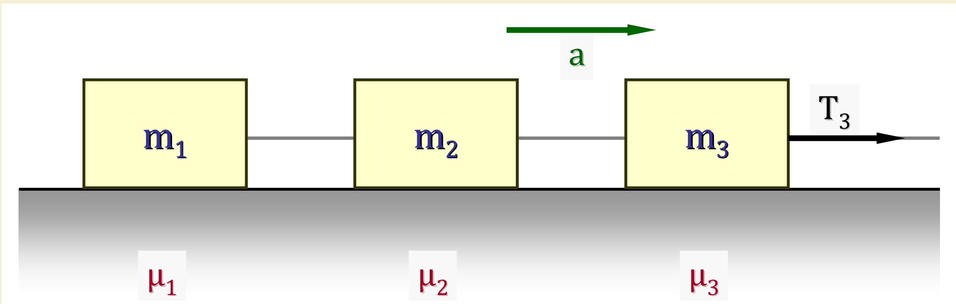
Αφού διατυπωθούν οι Νόμοι του Νεύτωνα εξετάζεται η κίνηση ενός απλού σώματος ή συστοιχίας σωμάτων συνδεδεμένων με αβαρές και μη εκτατό νήμα. Η μηχανή του *Atwood* αποτελεί κλασικό θεωρητικό παράδειγμα και δίνονται διάφορα συνδυαστικά παραδείγματα κίνησης σωμάτων σε οριζόντιο και κεκλιμένο επίπεδο. Εισάγεται η έννοια της δύναμης της τριβής και εξετάζονται ποικίλες περιπτώσεις κίνησης με τις οριακές τους περιπτώσεις.

Τέλος δίνεται η έννοια της οπισθέλκουσας δύναμης, όπως είναι η αντίσταση σώματος κινούμενου σε ρευστό, και η εξάρτησή της από την ταχύτητα. Επιλύονται οι περιπτώσεις όπου η αντίσταση είναι ανάλογη της ταχύτητας και ευρίσκεται η έκφραση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου καθώς και η οριακή της τιμή.

3.1 Δυναμική Σώματος με Τριβή

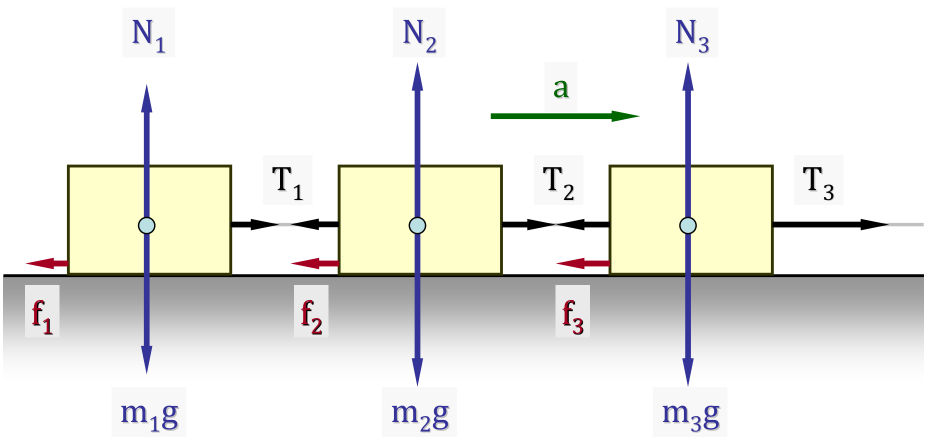
ΑΣΚΗΣΗ 3.1

Συστοιχία τριών σωμάτων με μάζες αντίστοιχα m_1, m_2 και m_3, συνδεδεμένων με αβαρές και μη εκτατό νήμα, κινείται σε οριζόντιο δάπεδο υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $\vec{T}_3$, η οποία εφαρμόζεται στο τρίτο σώμα. Να υπολογιστούν οι οριζόντιες τάσεις του νήματος και η συνολική επιτάχυνση $\vec{a}$ του συστήματος: (α) Όταν δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ των σωμάτων και του δαπέδου και (β) Όταν οι συντελεστές τριβής ολίσθησης για τα τρία σώματα με το δάπεδο είναι μ_1, μ_2 και μ_3 αντίστοιχα. Πώς διαμορφώνονται οι παραπάνω απαντήσεις όταν οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες $m_1 = m_2 = m_3 = m$ ή όταν οι συντελεστές τριβής είναι ίσοι με $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$;



Λύση

Στην πιο γενική περίπτωση διαφορετικών μαζών και συντελεστών τριβής οι ασκούμενες στα τρία σώματα δυνάμεις έχουν όπως στο παρακάτω σχήμα. Προφανώς οι αντιδράσεις



του δαπέδου N_i εξουδετερώνουν την δύναμη του βάρους $m_i g$ κάθε σώματος, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις $N_1 = m_1 g$, $N_2 = m_2 g$ και $N_3 = m_3 g$.

Κατά συνέπεια, οι εξισώσεις κίνησης στη γενική περίπτωση για κάθε σώμα περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$\left\{\begin{array}{l} T_1 - f_1 = m_1 a \\ T_2 - T_1 - f_2 = m_2 a \\ T_3 - T_2 - f_3 = m_3 a \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} T_1 - m_1 g\mu_1 = m_1 a \\ T_2 - T_1 - m_2 g\mu_2 = m_2 a \\ T_3 - T_2 - m_3 g\mu_3 = m_3 a \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} T_1 & = & m_1 a + m_1 g\mu_1 \\ T_2 - T_1 & = & m_2 a + m_2 g\mu_2 \\ T_3 - T_2 & = & m_3 a + m_3 g\mu_3 \end{array}\right\}$$

<u>(α) Περίπτωση χωρίς Τριβές $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$</u>

Στην περίπτωση αυτή το σετ των εξισώσεων διαμορφώνεται στην απλή μορφή:

$$\left\{\begin{array}{l} T_1 = m_1 a \\ T_2 - T_1 = m_2 a \\ T_3 - T_2 = m_3 a \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_1 a = m_2 a \\ T_3 - (m_1 + m_2) a = m_3 a \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} T_1 = m_1 a \\ T_2 = (m_1 + m_2) a \\ T_3 = (m_1 + m_2 + m_3) a \end{array}\right\}$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι η επιτάχυνση a και οι τάσεις T_1 και T_2:

$$\boxed{a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3}}$$

$$\boxed{T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} T_3}$$

$$\boxed{T_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} T_3}$$

Παρατηρούμε πως $T_1 < T_2 < T_3$, ενώ στην ειδική περίπτωση ίσων μαζών το αποτέλεσμα αυτό απλοποιείται στις σχέσεις:

$$a = \frac{T_3}{3m} \quad , \quad T_1 = \frac{1}{3} T_3 \quad , \quad T_2 = \frac{2}{3} T_3$$

<u>(β) Περίπτωση με Τριβές</u>

Στην περίπτωση αυτή, οι προηγούμενες γενικές εξισώσεις διαμορφώνονται στην παρακάτω μορφή:

$$\left\{\begin{array}{l} T_1 = m_1 a + m_1 g\mu_1 \\ T_2 = m_2 a + m_2 g\mu_2 + T_1 \\ T_3 = m_3 a + m_3 g\mu_3 + T_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} T_1 = m_1(a + g\mu_1) \\ T_2 = m_2(a + g\mu_2) + m_1(a + g\mu_1) \\ T_3 = m_3(a + g\mu_3) + m_2(a + g\mu_2) + m_1(a + g\mu_1) \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (1) & T_1 = m_1 a + m_1 \mu_1 g \\ (2) & T_2 = (m_1 + m_2)a + (m_1\mu_1 + m_2\mu_2)g \\ (3) & T_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a + (m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3)g \end{array} \right\}$$

Από την εξίσωση (3) προκύπτει για την επιτάχυνση a η σχέση:

$$\boxed{a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} - \frac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3}{m_1 + m_2 + m_3} g}$$

Για την περίπτωση που οι συντελεστές τριβής είναι ίσοι με μ, η παραπάνω σχέση απλοποιείται στην

$$\boxed{a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} - \mu g}$$

ενώ οι αντίστοιχες τάσεις υπολογίζονται από τις (1) και (2):

$$T_1 = m_1 a + m_1 \mu g \Longrightarrow T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} T_3 - m_1 \mu g + m_1 \mu g$$

$$\Longrightarrow \boxed{T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} T_3}$$

και

$$T_2 = (m_1+m_2)a+(m_1+m_2)\mu g \Longrightarrow T_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} T_3 - (m_1+m_2)\mu g + (m_1+m_2)\mu g$$

$$\Longrightarrow \boxed{T_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} T_3}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Στην περίπτωση του κοινού συντελεστή τριβής μ των σωμάτων με το δάπεδο, οι τάσεις των νημάτων είναι ταυτόσημες με την περίπτωση όπου δεν υπάρχει τριβή!

2. Στην γενική περίπτωση τριβών με διαφορετικούς συντελεστές, η επιταχυνόμενη κίνηση της συστοιχίας απαιτεί $a \geq 0$, δηλαδή:

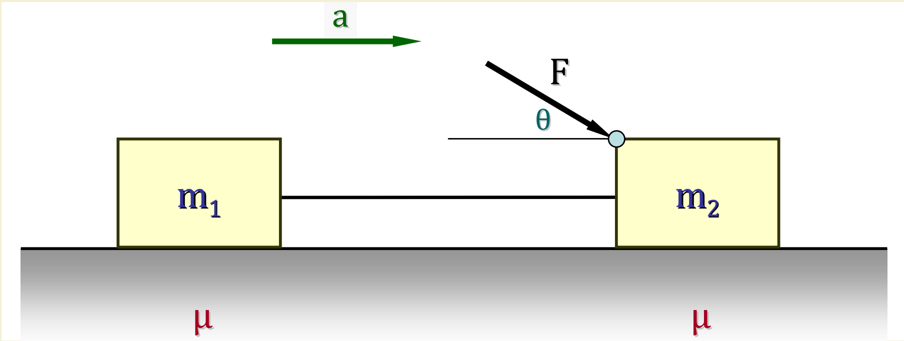
$$a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} - \frac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3}{m_1 + m_2 + m_3} g \geq 0$$

$$\Longrightarrow T_3 \geq (m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3) g$$

3. Σε οποιαδήποτε των περιπτώσεων ισχύει πάντα για τις τάσεις του νήματος η ανισότητα $T_1 < T_2 < T_3$.

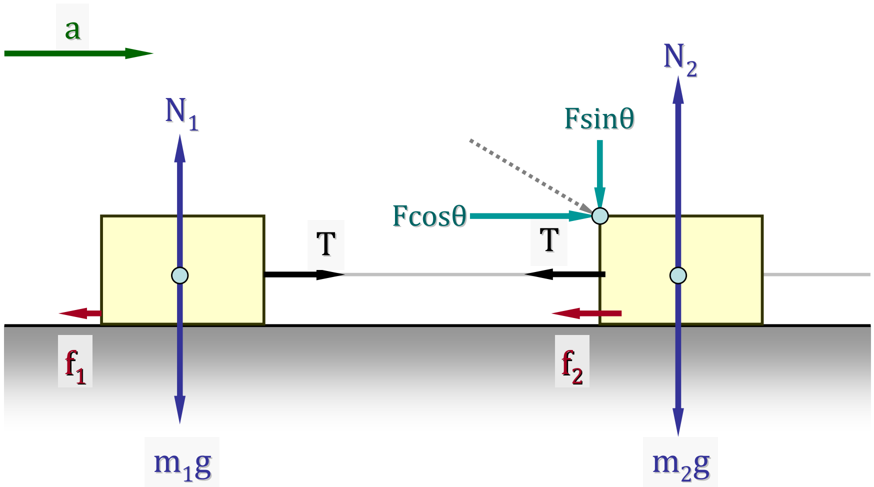
ΑΣΚΗΣΗ 3.2

Δύο σώματα μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα είναι συνδεδεμένα με αβαρές και μη εκτατό νήμα και ολισθαίνουν σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση δύναμης $\vec{F}$ η οποία δρα στο σώμα 2 σχηματίζοντας γωνία ϑ με το οριζόντιο επίπεδο. Εάν ο κοινός συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του επιπέδου είναι μ, να υπολογισθεί η επιτάχυνση $\vec{a}$ του συστήματος των δύο σωμάτων καθώς και η τάση του νήματος T.



Λύση

Αναλύοντας τη δύναμη $\vec{F}$ στις συνιστώσες της, μέτρου $Fcos\theta$ (οριζόντια) και $Fsin\theta$ (κάθετη στο επίπεδο) και συμπεριλαμβάνοντας την τάση T του νήματος και τις αντίστοιχες τριβές των σωμάτων f_1 και f_2 έχουμε το σύνολο των δυνάμεων όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Για τις αντιδράσεις του επιπέδου N_1 και N_2 στα σώματα 1 και 2



αντίστοιχα ισχύουν $N_1 = m_1 g$ και $N_2 = m_2 g + Fsin\theta$. Λαμβάνοντας τη κίνηση κάθε σώματος χωριστά σχηματίζουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left\{ \begin{array}{l} T - f_1 = m_1 a \\ Fcos\theta - T - f_2 = m_2 a \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T - N_1 \mu = m_1 a \\ Fcos\theta - T - N_2 \mu = m_2 a \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} T - m_1 g\mu = m_1 a & (1) \\ F cos\theta - T - (m_2 g + F sin\theta)\mu = m_2 a & (2) \end{array} \right\}$$

Απαλείφοντας την τάση T του νήματος, προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις, καταλήγουμε στην:

$$F cos\theta - (m_2 g + F sin\theta)\mu - m_1 g\mu = (m_1 + m_2)a$$

$$\Longrightarrow F(cos\theta - \mu sin\theta) - (m_1 + m_2)\mu g = (m_1 + m_2)a$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{F}{m_1 + m_2}(cos\theta - \mu sin\theta) - \mu g}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην (1) προκύπτει το μέτρο της τάσης T του νήματος:

$$T = m_1 a + m_1 \mu g = m_1 \frac{F}{m_1 + m_2}(cos\theta - \mu sin\theta) - m_1 \mu g + m_1 \mu g$$

$$\Longrightarrow \boxed{T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F(cos\theta - \mu sin\theta)}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Απαιτώντας η τάση του νήματος να είναι θετική, ώστε το σώμα 2 να μπορεί να σύρει το σώμα 1, καταλήγουμε στην σχέση:

$$T > 0 \Longrightarrow cos\theta - \mu sin\theta > 0 \Longrightarrow \boxed{tan\theta < \frac{1}{\mu}}$$

2. Η προηγούμενη απαίτηση διασφαλίζει τεντωμένο νήμα. Για να υπάρξει όμως και κίνηση χρειάζεται η επιτάχυνση να είναι θετική, ή οριακά μηδέν, οπότε:

$$a \geq 0 \Longrightarrow \frac{F}{m_1 + m_2}(cos\theta - \mu sin\theta) - \mu g \geq 0$$

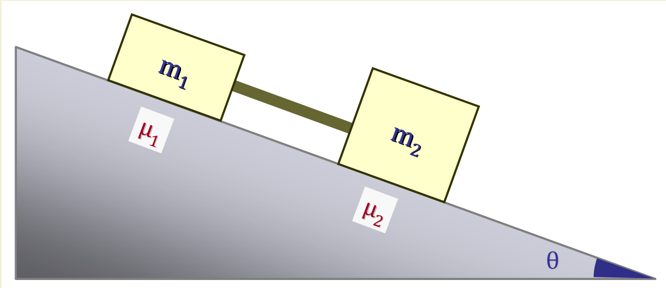
$$\Longrightarrow F(cos\theta - \mu sin\theta) \geq \mu(m_1 + m_2)g \Longrightarrow \boxed{F \geq \frac{\mu(m_1 + m_2)g}{cos\theta - \mu sin\theta}}$$

<u>Αριθμητικό Παράδειγμα</u>

Για $\mu = 0.20$ η οριακή γωνία εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}$ είναι $tan\theta < \frac{1}{0.20} = 5$, δηλαδή $\theta < 78.7^o$. Παραδείγματος χάριν, για $\theta = 30^o$ και $m_1 = m_2 = m$ βρίσκουμε οριακή δύναμη $F \approx 0.52mg$ και οριακή τάση νήματος $T = \mu m_1 g = 0.20mg$.

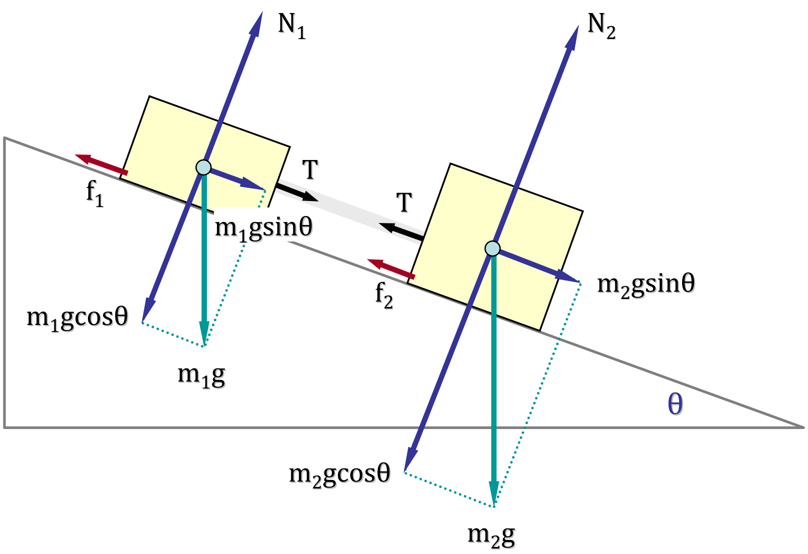
ΑΣΚΗΣΗ 3.3

Δύο σώματα 1 και 2 μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα είναι συνδεδεμένα με αβαρή ράβδο και ολισθαίνουν κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ μόνο υπό την επίδραση των βαρών τους. Εάν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του επιπέδου είναι αντίστοιχα μ_1 και μ_2, να υπολογισθεί η επιτάχυνση $\vec{a}$ του συστήματος των δύο σωμάτων καθώς και η τάση $\vec{T}$ της ράβδου.



Λύση

Η σύζευξη των δύο σωμάτων με την αβαρή ράβδο επιτρέπει το σύστημα να κινηθεί ενιαία με επιτάχυνση a. Η ράβδος, σε αντίθεση με το νήμα, επιτρέπει την άσκηση δύναμης T και προς τις δύο κατευθύνσεις. Ανάλογα δηλαδή με τις τιμές που έχουν οι συντελεστές τριβής μ_1 και μ_2, θα μπορούσε το σώμα 1 να ασκεί μέσω της ράβδου επιπρόσθετη δύναμη στο σώμα 2, εάν η επιτάχυνση του σώματος 1 ήταν μεγαλύτερη αυτής του 2 στην περίπτωση που τα θεωρούσαμε ασύνδετα. Μια τέτοια άσκηση δύναμης δεν είναι δυνατή με νήμα.



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι ασκούμενες δυνάμεις σε κάθε σώμα. Εδώ έχουμε θεωρήσει για την τάση T τέτοια φορά, ωσάν το σώμα 2 να έλκει το 1. Αρνητικό αποτέλεσμα στην τιμή της T πρέπει να αναστρέψει τη φορά της

Οι αντιδράσεις του επιπέδου N_1 και N_2 στα σώματα 1 και 2 είναι αντίστοιχα $N_1 = m_1 g cos\theta$ και $N_2 = m_2 g cos\theta$. Θεωρώντας επιταχυνόμενη κίνηση μέτρου a κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και εξετάζοντας τη κίνηση κάθε σώματος χωριστά σχηματίζουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_1 g sin\theta + T - f_1 = m_1 a & (1) \\ m_2 g sin\theta - T - f_2 = m_2 a & (2) \end{array} \right\}$$

Διαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων (1) και (2) απαλείφει την επιτάχυνση a και δίνει:

$$m_2(m_1 g sin\theta + T - f_1) = m_1(m_2 g sin\theta - T - f_2) \Longrightarrow m_2 T - m_2 f_1 = -m_1 T - m_1 f_2$$

$$\Longrightarrow T = \frac{m_2 f_1 - m_1 f_2}{m_1 + m_2} \Longrightarrow T = \frac{m_2 \mu_1 N_1 - m_1 \mu_2 N_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Longrightarrow T = \frac{m_2 \mu_1 m_1 g cos\theta - m_1 \mu_2 m_2 g cos\theta}{m_1 + m_2} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mu_1 - \mu_2) g cos\theta}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της τάσης T στην (1) υπολογίζεται η επιτάχυνση a:

$$a = g sin\theta + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mu_1 - \mu_2) g cos\theta - \mu_1 g cos\theta$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \left[sin\theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} cos\theta \right] g}$$

Παρατηρήσεις

1. Το αποτέλεσμα της τάσης T δείχνει πως η φορά της είναι αυτή του σχεδίου εφόσον $\mu_1 > \mu_2$. Σε αντίθετη περίπτωση το σώμα 1 (έχοντας μικρότερη τριβή και άρα μεγαλύτερη επιτάχυνση του 2 εάν ήταν ασύζευκτα) ωθεί το σώμα 2 με δυνάμεις T αντίθετες των σχεδιασμένων.

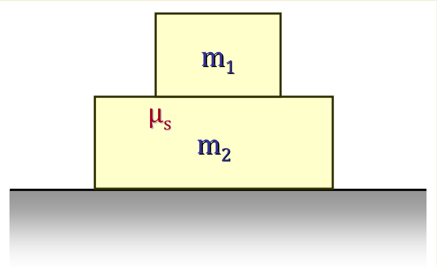
2. Εάν απαιτήσουμε το σύστημα να κινείται οριακά με ομαλή ταχύτητα, δηλαδή $a = 0$, πρέπει:

$$sin\theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} cos\theta = 0 \Longrightarrow \boxed{tan\theta = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}}$$

3. Στην περίπτωση που $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ η τάση μηδενίζεται ($T = 0$) ενώ η επιτάχυνση απλοποιείται στην μορφή $a = (sin\theta - \mu cos\theta) g$, ικανοποιώντας την γνωστή σχέση $\mu = tan\theta$ στην οριακή περίπτωση της ομαλής κίνησης.

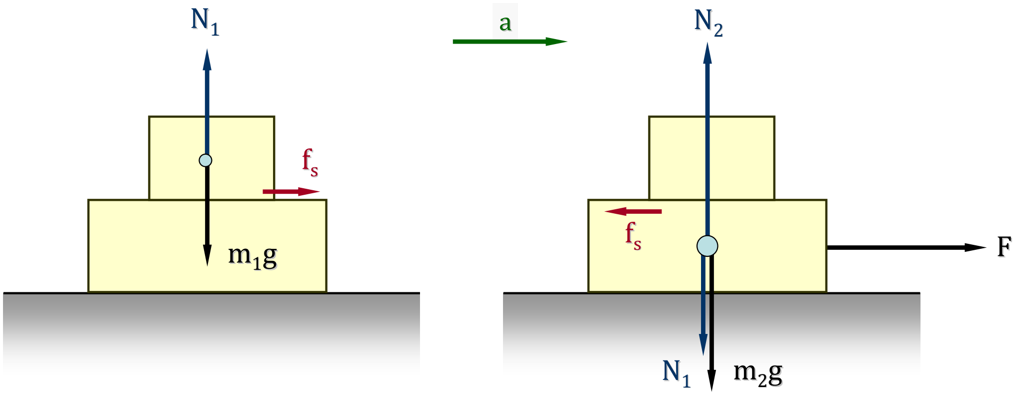
ΑΣΚΗΣΗ 3.4

Κιβώτιο 1 μάζας m_1 βρίσκεται πάνω σε κιβώτιο 2 μάζας m_2, το οποίο μπορεί να κινηθεί χωρίς τριβές σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο κιβωτίων είναι μ_s, να βρεθεί η μέγιστη δύναμη που μπορεί να ασκηθεί στο κιβώτιο 2 ώστε να αποφευχθεί η ολίσθηση του 1 και το σύστημα των δύο σωμάτων να κινηθεί ενιαία.



Λύση

Εάν το σώμα 2 κινείται προς τα δεξιά, τότε το σώμα 1 τείνει λόγω αδράνειας να κινηθεί προς τα αριστερά σχετικά με το 2, οπότε η δύναμη τριβής που ασκείται σ΄ αυτό έχει την ίδια κατεύθυνση με την επιτάχυνση. Οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα ξεχωριστά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Δεδομένου ότι στο σώμα 1 το βάρος του $m_1 g$ εξουδετερώνεται από την αντίδραση N_1 που του ασκεί το σώμα 2, η μοναδική δύναμη που δρα για να το επιταχύνει είναι η δύναμη τριβής f_s:

$$f_s = m_1 a \Longrightarrow f_s^{max} = m_1 a^{max} = m_1 g \mu_s \Longrightarrow \boxed{a^{max} = \mu_s g}$$

Η κίνηση του συστήματος και των δύο σωμάτων $(m_1 + m_2)$ γίνεται υπό την επίδραση της δύναμης F, οπότε ισχύει:

$$F = (m_1 + m_2) a \Longrightarrow F^{max} = (m_1 + m_2) a^{max} \Longrightarrow \boxed{F^{max} = (m_1 + m_2) \mu_s g}$$

Σημείωση Η εξίσωση κίνησης μόνο του σώματος 2 αναπαράγει τη κίνηση της συστοιχίας και των δύο σωμάτων:

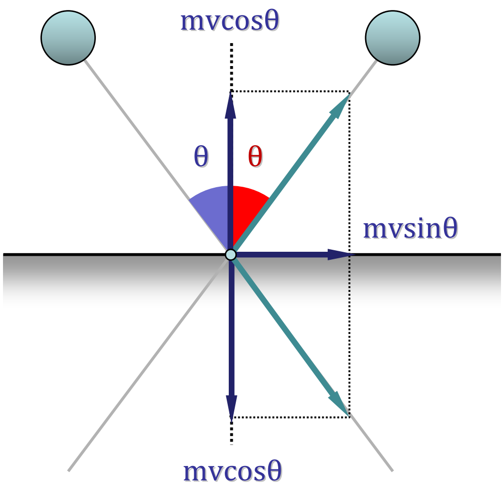
$$F - f_s = m_2 a \Longrightarrow F - m_1 a = m_2 a \Longrightarrow F = (m_1 + m_2)a$$

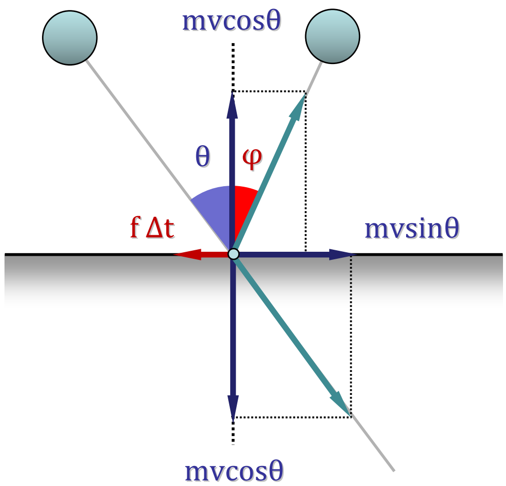
ΑΣΚΗΣΗ 3.5

Μικρή μπάλα αμελητέου βάρους κτυπά το οριζόντιο επίπεδο υπό γωνία θ σε σχέση με την κατακόρυφο. Εάν ο συντελεστής τριβής μεταξύ της μπάλας και του επιπέδου είναι μ, να υπολογιστεί η γωνία ανάκλασης της μπάλας ϕ.

Λύση

Έστω ότι η μπάλα έχει ορμή $\vec{p}$ το μέτρο της οποίας είναι $p = mv$. Αυτή αναλύεται σε δύο συνιστώσες $p_x = mvsin\theta$ και $p_y = mvcos\theta$. Κατά τη διάρκεια μιας ελαστικής κρούσης χωρίς τριβές, η οριζόντια συνιστώσα p_x μένει αμετάβλητη, ενώ η κατακόρυφη αλλάζει φορά διατηρώντας το μέτρο της p_y σταθερό. Κατά τον τρόπο αυτό η γωνία ανάκλασης ισούται με την γωνία πρόσπτωσης θ, όπως φαίνεται στο αριστερό σχήμα παρακάτω.





Η ύπαρξη τριβής εναντιώνεται στην κίνηση του σώματος και άρα επιφέρει αλλαγή του μέτρου της οριζόντιας συνιστώσας της ορμής p_x. Για τον υπολογισμό της υποθέτουμε ότι η διάρκεια της κρούσης είναι Δt, οπότε η ελάττωση της ορμής θα δίνεται από το γινόμενο $f\Delta t$, όπου f η δύναμη τριβής. Κατά συνέπεια, η οριζόντια συνιστώσα της ορμής μετά την κρούση θα έχει μέτρο:

$$p'_x = mvsin\theta - f\Delta t = mvsin\theta - \mu\frac{\Delta p_y}{\Delta t}\Delta t = mvsin\theta - \mu\Delta p_y$$

Αλλά $\Delta p_y = mvcos\theta - (-mvcos\theta) = 2mvcos\theta$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$p'_x = mvsin\theta - 2\mu mvcos\theta$$

Συνεπώς, η ζητούμενη γωνία ϕ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$tan\phi = \frac{p'_x}{p'_y} = \frac{mvsin\theta - 2\mu mvcos\theta}{mvcos\theta} \Longrightarrow \boxed{tan\phi = tan\theta - 2\mu}$$

3.2 Οπισθέλκουσα Δύναμη

ΑΣΚΗΣΗ 3.6

Στερεό σώμα μάζας m ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα και πέφτει προς τα κάτω υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου της Γης. Εάν η αντίσταση του αέρα δίνεται από τη σχέση $F = -kv$, όπου v η ταχύτητά του και k σταθερά, να βρεθεί η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας του σώματος αυτού.

Λύση

Θεωρώντας θετική φορά των διανυσμάτων προς τα κάτω θα ισχύει η σχέση:

$$mg - kv = ma \Longrightarrow mg - kv = m\frac{dv}{dt} \Longrightarrow g - \frac{k}{m}v = \frac{dv}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = dt \Longrightarrow \int_0^v \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = \int_0^t dt \Longrightarrow \int_0^v \frac{d\left(g - \frac{k}{m}v\right)}{g - \frac{k}{m}v} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

$$\Longrightarrow ln\left(g - \frac{k}{m}v\right) - ln(g) = -\frac{k}{m}t \Longrightarrow ln\left(1 - \frac{k}{mg}v\right) = -\frac{k}{m}t$$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{k}{mg}v = e^{-\frac{k}{m}t} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)}$$

Η σχέση αυτή δείχνει την εκθετική αύξηση της ταχύτητας προς την οριακή τιμή

$$\boxed{v_0 = \lim_{t\to\infty} v = \frac{mg}{k}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.7

Σώμα ρίπτεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0. Εάν η αντίσταση του αέρα δίνεται από τη σχέση $F = -kv$, όπου v η ταχύτητά του σώματος και k γνωστή θετική σταθερά, να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο το σώμα αυτό θα σταματήσει.

Λύση

Θεωρώντας θετική φορά των διανυσμάτων προς τα πάνω θα ισχύει η σχέση:

$$ma = -mg - kv \Longrightarrow m\frac{dv}{dt} = -mg - kv \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}v$$

$$\Longrightarrow -\frac{dv}{g + \frac{k}{m}v} = dt \Longrightarrow -\int_{v_0}^{0} \frac{dv}{g + \frac{k}{m}v} = \int_0^t dt \Longrightarrow -\int_{v_0}^{0} \frac{d\left(g + \frac{k}{m}v\right)}{g + \frac{k}{m}v} = \frac{k}{m}\int_0^t dt$$

$$\Longrightarrow ln\left(g + \frac{k}{m}v_0\right) - ln(g) = \frac{k}{m}t \Longrightarrow ln\left(1 + \frac{k}{mg}v_0\right) = \frac{k}{m}t$$

$$\Longrightarrow \boxed{t = \frac{m}{k}ln\left(1 + \frac{k}{mg}v_0\right)}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Ο χρόνος ανόδου όταν δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα ($k = 0$) πρέπει να γίνεται ίσος με $t = v_0/g$. Επειδή η ευρεθείσα παραπάνω έκφραση για τον χρόνο ανόδου και για $k = 0$ οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή, εξετάζουμε το όριο:

$$\lim_{k\to 0} t = \lim_{k\to 0} \frac{m}{k}ln\left(1 + \frac{k}{mg}v_0\right) = m\lim_{k\to 0}\frac{ln'\left(1 + \frac{k}{mg}v_0\right)}{k'} = m\lim_{k\to 0}\frac{\frac{v_0}{mg}}{1 + \frac{k}{mg}v_0}$$

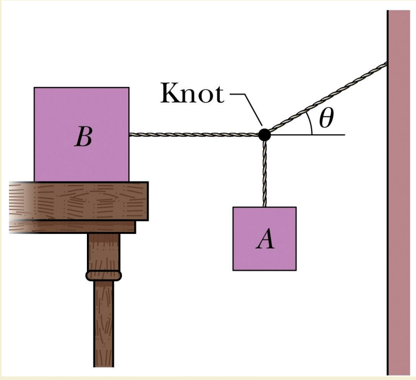
$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{k\to 0} t = \frac{v_0}{g}}$$

το οποίο ταυτίζεται με την αναμενόμενη τιμή.

3.3 Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 3.8

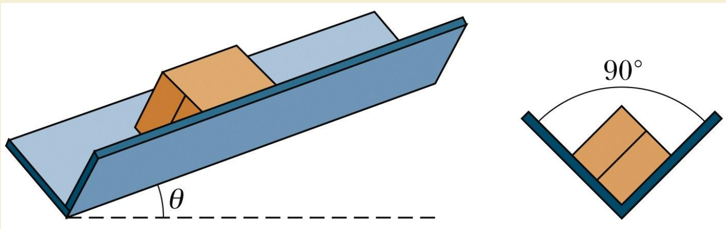
Ο κύβος Β του σχήματος ζυγίζει 711 Ν. Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στον κύβο και το τραπέζι είναι 0.25. Η γωνία θ είναι 30^o. Υποθέστε ότι το σχοινί μεταξύ του Β και του κόμπου είναι οριζόντιο. Βρείτε το μέγιστο βάρος του κύβου Α για το οποίο το σύστημα θα είναι ακίνητο.



Απάντηση: $W_A = 103N$ *(Άσκηση 6.23 Halliday-Resnick)*

ΑΣΚΗΣΗ 3.9

Κιβώτιο ολισθαίνει προς τα κάτω σε ορθογώνιο αυλάκι, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο κιβώτιο και το αυλάκι είναι μ_k. Πόση είναι η επιτάχυνση του κιβωτίου συναρτήσει των μ_k, θ και g;



Απάντηση: $a = g\left(sin\theta - \sqrt{2}\mu_k cos\theta\right)$ *(Άσκηση 6.69 Halliday-Resnick)*

ΑΣΚΗΣΗ 3.10

Πλοιάριο μάζας m ταξιδεύει με ταχύτητα $\vec{v}$ όταν η μηχανή του σταματά. Η δύναμη τριβής ανάμεσα στο πλοίο και το νερό δίνεται από τη σχέση $\vec{f_k} = -\lambda\vec{v}$, όπου λ θετική σταθερά. Να υπολογιστεί ο χρόνος που διέρχεται μέχρι το πλοιάρια να επιβραδυνθεί στο μισό της αρχικής του ταχύτητας $\frac{\vec{v}}{2}$.

Απάντηση: $t = \frac{ln2}{\lambda}m$

Κεφάλαιο 4

ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

- Σχετικη Κινηση {Ομαλή Σχετική Μεταφορική Κίνηση, Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου}
- Ειδικη Θεωρια Σχετικοτητας {Μετασχηματισμοί Lorentz, Αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, Ταυτόχρονα Γεγονότα, Διαστολή Χρόνου & Συστολή Μήκους, Μετασχηματισμός Ταχυτήτων, Ορμή και Ενέργεια}

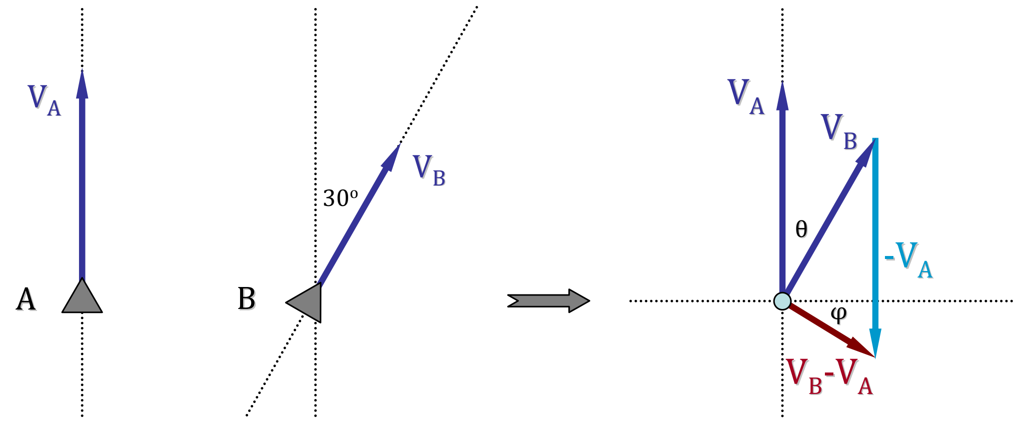
Με την βοήθεια των διανυσμάτων θέσης, ορίζονται η σχετική θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση δύο σωμάτων. Εισάγεται η έννοια του Αδρανειακού Συστήματος και μελετάται ο μετασχηματισμός των κινηματικών μεγεθών ενός Αδρανειακού Συστήματος σε άλλο κινούμενο με ομαλή μεταφορική κίνηση, μέσω των μετασχηματισμών του Γαλιλαίου. Συζητείται το πρόβλημα των Γαλιλαϊκών Μετασχηματισμών στην Ηλεκτροδυναμική και η ανάγκη εισαγωγής νέων μετασχηματισμών. Με βάση το αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός σε δύο αδρανειακά συστήματα, αποδεικνύονται οι μετασχηματισμοί Lorentz.

Διατυπώνονται τα αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας και εξετάζονται οι άμεσες συνέπειες της Θεωρίας: Το πρόβλημα ορισμού του Ταυτόχρονου, η Διαστολή του Χρόνου και η Συστολή του Μήκους. Αποδεικνύονται οι μετασχηματισμοί των ταχυτήτων και συζητούνται τα όρια $v/c \to 0$ και $v \to c$. Τέλος, γίνεται μια σύντομη μελέτη των δυναμικών χαρακτηριστικών σώματος, όπως της ορμής και της ενέργειας, σε σχετικιστικές ταχύτητες.

4.1 Σχετική Κίνηση

ΑΣΚΗΣΗ 4.1

Αεροπλάνο Α κινείται με ταχύτητα 400 km/h σε σχέση με το έδαφος με βόρεια κατεύθυνση. Ένα άλλο αεροπλάνο Β κινείται με ταχύτητα 300 km/h με κατεύθυνση 30^o ανατολικότερα του πρώτου επίσης ως προς το έδαφος. Ποια είναι η σχετική ταχύτητα του αεροπλάνου Β ως προς το Α;



Λύση

Η ζητούμενη σχετική ταχύτητα $\vec{V}_{BA}$ δίνεται από τη διαφορά των δύο διανυσμάτων των ταχυτήτων:

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = [V_B sin\theta\ \vec{i} + V_B cos\theta\ \vec{j}] - [0\ \vec{i} + V_A\ \vec{j}] \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{V}_{BA} = V_B sin\theta\ \vec{i} + (V_B cos\theta - V_A)\vec{j}}$$

$$\vec{V}_{BA} = 300 sin30^o\ \vec{i} + (300 cos30^o - 400)\vec{j} \Longrightarrow \boxed{\vec{V}_{BA} = (150\ \vec{i} - 140.2\ \vec{j})\ km/h}$$

Το μέτρο της σχετικής ταχύτητας V_{BA} και η γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα x δίνονται από τις σχέσεις:

$$V_{BA} = \sqrt{(V_B sin\theta)^2 + (V_B cos\theta - V_A)^2} = \sqrt{V_A^2 + V_B^2 - 2V_A V_B cos\theta}$$

$$V_{BA} = \sqrt{400^2 + 300^2 - 2 \cdot 400 \cdot 300 \cdot cos30^o} \Longrightarrow \boxed{V_{BA} = 205.3\ km/h}$$

$$tan\phi = \frac{V_{BA}^y}{V_{BA}^x} = \frac{V_B cos\theta - V_A}{V_B sin\theta} = \frac{-140.2}{150} = -0.935 \Longrightarrow \boxed{\phi = -43.1^o}$$

Ο πιλότος του αεροπλάνου Α βλέπει δηλαδή να κινείται το αεροπλάνου Β σε Νοτιο-Ανατολική (ΝΑ) κατεύθυνση.

ΑΣΚΗΣΗ 4.2

Η επίπεδη κίνηση σωματιδίου στο σύστημα συντεταγμένων Ο περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + 3t\vec{j}$ σε μονάδες S.I. Σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων Ο′, το ίδιο σωματίδιο περιγράφεται από το διάνυσμα $\vec{r'}(t) = (t^2 - 3t)\vec{i}$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του συστήματος αναφοράς Ο′ σε σχέση με το Ο.

Λύση

Εάν το διάνυσμα $\vec{R} = \vec{OO'}$ περιγράφει τη θέση της αρχής του συστήματος Ο′ από το την αρχή του Ο, τότε ισχύει:

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{R} \Longrightarrow \vec{R} = \vec{r} - \vec{r'} \Longrightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d(\vec{r} - \vec{r'})}{dt} = \frac{d\,[t^2\vec{i} + 3t\vec{j} - (t^2 - 3t)\vec{i}]}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\,[3t\vec{i} + 3t\vec{j}]}{dt} \Longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{R}}{dt} = 3\vec{i} + 3\vec{j}}$$

Παρατηρούμε πως η ταχύτητα του Ο′ ως προς το Ο είναι σταθερή με μέτρο $3\sqrt{2}$ και διεύθυνση που συμπίπτει με τη διαγώνιο του συστήματος Ο με φορά προς τα θετικά.

4.2 Ειδική Θεωρία Σχετικότητας

Μετασχηματισμοι Χρονου-Μηκουσ

ΑΣΚΗΣΗ 4.3

Ένα ρολόι κινείται κατά μήκος του άξονα x με μια ταχύτητα $v = 0.60c$ και δείχνει $t = 0$ όταν περνά από την αρχή των αξόνων. (α) Να υπολογισθεί ο συντελεστής Lorentz του ρολογιού (β) Η ένδειξή του καθώς το ρολόι περνά από την συντεταγμένη $x = 180\ m$.

(Άσκηση 37.21 Halliday-Resnick)

Λύση

(α) Ο συντελεστής Lorentz για το κινούμενο ρολόι είναι:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.60^2}} = \frac{1}{0.80} \Longrightarrow \boxed{\gamma = 1.25}$$

(β) Για τον ακίνητο παρατηρητή, το ρολόι κινείται με ταχύτητα $v = 0.60c$ κατά μήκος του άξονα x. Συνεπώς ο χρόνος που μετράει ο παρατηρητής όταν το ρολόι βρίσκεται στο x είναι:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{180\ m}{0.60 \times 3 \cdot 10^8\ m/s} = 10^{-6} s$$

Ο χρόνος αυτός συνδέεται με τον ιδιόχρονο Δt_0 που θα μετράει το ρολόι με τη γνωστή σχέση:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \Longrightarrow \Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{10^{-6}\ s}{1.25} \Longrightarrow \boxed{\Delta t_0 = 0.800\ \mu s}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.4

Ασταθές υψηλοενεργειακό σωματίδιο εισέρχεται σε ανιχνευτή και αφήνει ίχνος μήκους $1.05\ mm$ πριν διασπαστεί. Η ταχύτητά του ως προς τον ανιχνευτή ήταν $0.992\ c$. Πόσος είναι ο ιδιόχρονός του; Δηλαδή για πόσο χρόνο θα υπήρχε το σωματίδιο πριν διασπαστεί μέσα στον ανιχνευτή αν το σωματίδιο ήταν ακίνητο ως προς τον ανιχνευτή;

(Άσκηση 37.3 Halliday-Resnick)

Λύση

Στο σύστημα του ανιχνευτή ο χρόνος ζωής του σωματιδίου δίνεται από την σχέση:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{1.05 \times 10^{-3}\ m}{0.992 \times 3 \cdot 10^8\ m/s} = 0.353 \cdot 10^{-11}\ s = 3.53 \cdot 10^{-12}\ s = 3.53\ ps$$

Ο συντελεστής Lorentz για τη συγκεκριμένη ταχύτητα είναι:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.992^2}} = 7.92$$

Ο ιδιόχρονος είναι ο χρόνος που καταγράφεται στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου, εκεί δηλαδή που οι χωρικές του συντεταγμένες παραμένουν σταθερές. Στο σύστημα του εργαστηρίου ο χρόνος αυτός μετράται διεσταλμένος κατά τον παράγοντα Lorentz:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \Longrightarrow \Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{3.53\ ps}{7.92} \Longrightarrow \boxed{\Delta t_0 = 0.446\ ps}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.5

Ένα μιόνιο της κοσμικής ακτινοβολίας πέφτει κατακόρυφα στο κέντρο της Αθήνας και διασπάται ακριβώς μόλις φτάσει στο έδαφος. Γήινος παρατηρητής μετρά το χρόνο πτήσης αυτού του μιονίου από τη στιγμή της δημιουργίας και τον βρίσκει ίσο με το εικοσαπλάσιο του χρόνου ζωής του (σε ηρεμία) που είναι $2.2\ \mu s$. (α) Πόσο είναι το ύψος του ξενοδοχείου Hilton που βλέπει παρατηρητής κινούμενος στο σύστημα του μιονίου, εάν για τον γήινο παρατηρητή το κτίριο αυτό έχει ύψος $45m$; (β) Σε ποιο ύψος της ατμόσφαιρας δημιουργήθηκε το εν λόγω μιόνιο;

Λύση

(α) Ο χρόνος ζωής του μιονίου είναι και ο ιδιόχρονος $\Delta t_0 = 2.2\ \mu s$, ο οποίος φαίνεται διεσταλμένος για τον γήινο παρατηρητή κατά τον παράγοντα γ. Ο παρατηρητής επί της Γης βλέπει το μιόνιο να υπάρχει συνολικά για χρόνο Δt:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \Longrightarrow \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 20$$

Αντίθετα, το ύψος του κτιρίου του ξενοδοχείου Hilton αποτελεί για τον γήινο παρατηρητή το ιδιομήκος $\Delta x_0 = 45\ m$, το οποίο φαίνεται συνεσταλμένο κατά τον παράγοντα γ από το σύστημα του μιονίου. Άρα το ζητούμενο ύψος του κτιρίου είναι:

$$\Delta x = \frac{\Delta x_0}{\gamma} = \frac{45\ m}{20} \Longrightarrow \boxed{\Delta x = 2.25\ m}$$

(β) Ο γήινος παρατηρητής βλέπει το μιόνιο να κινείται με ταχύτητα v, τέτοια ώστε ο λόγος $\beta = v/c$ να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Longrightarrow \beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \Longrightarrow v = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}\ c$$

Το συνολικό διάστημα που διανύει για τον γήινο παρατηρητή είναι λοιπόν:

$$\Delta s = v \Delta t = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}\ c\ \gamma \Delta t_0 = \sqrt{\gamma^2 - 1}\ c\ \Delta t_0$$

$$\Longrightarrow \Delta s = \sqrt{20^2 - 1} \times 3 \cdot 10^8 \ m/s \times 2.2 \cdot 10^{-6} \ s \Longrightarrow \boxed{\Delta s = 13184 \ m}$$

Το εν λόγω μιόνιο δημιουργήθηκε λοιπόν σε ύψος $\Delta s = 13184 \ m$ από το έδαφος στην ατμόσφαιρα.

ΑΣΚΗΣΗ 4.6

Θέλετε να πραγματοποιήσετε ένα ταξίδι μετ΄ επιστροφής στη Γη, ταξιδεύοντας σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα για ακριβώς έξι μήνες (χρονικό διάστημα όπως το μετράτε εσείς) και στη συνέχεια να επιστρέψετε στη Γη με την ίδια σταθερή ταχύτητα. Επίσης κατά την επιστροφή σας θέλετε να βρείτε τη Γη όπως θα είναι 1000 χρόνια μετά την αναχώρησή σας. Να υπολογίσετε με οκτώ σημαντικά ψηφία, πόση θα πρέπει να είναι η παράμετρος ταχύτητας β κατά τη διάρκεια του ταξιδιού σας.

(Άσκηση 37.7 Halliday-Resnick)

Λύση

Ο χρόνος του ταξιδιού όπως μετράται από τον ταξιδιώτη είναι $\Delta t_0 = 6 + 6 = 12$ μήνες, ενώ για έναν γήινο παρατηρητή ο χρόνος αυτός θα είναι $\Delta t = 1000$ χρόνια. Άρα η παράμετρος Lorentz (γ) είναι:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \Longrightarrow \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1000 \times 12 \ month}{12 \ month} = 1000$$

Κατά συνέπεια, η παράμετρος ταχύτητας β υπολογίζεται:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Longrightarrow 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Longrightarrow \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \frac{\sqrt{1000^2 - 1}}{1000}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\beta = 0.999\ 999\ 50}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.7

Ασταθές σωματίδιο αφήνει το ίχνος του σε ανιχνευτή τροχιάς. Ο χρόνος που διέρχεται από τη δημιουργία του μέχρι τη διάσπασή του στον ανιχνευτή είναι τριπλάσιος του μέσου χρόνου ζωής του σωματιδίου αυτού, όταν αυτό βρίσκεται σε ηρεμία. Εάν είναι γνωστός ο πραγματικός μέσος χρόνος ζωής του που είναι $2ns$, να υπολογισθεί το μήκος της τροχιάς του, υποθέτοντας πως η κίνηση γίνεται με σταθερή ταχύτητα.

Λύση

Ο μέσος χρόνος ζωής είναι και ο ιδιόχρονος του σωματιδίου $\Delta t_0 = 2ns$ στο σύστημα ηρεμίας. Στο σύστημα του ανιχνευτή, το σωματίδιο κινούμενο με ταχύτητα v επιβιώνει για τριπλάσιο χρόνο $\Delta t = 6ns$. Ως γνωστόν, η διαστολή αυτή του χρόνου συνδέεται με το παράγοντα Lorentz γ μέσω της σχέσης:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \Longrightarrow \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 3$$

απ΄ όπου μπορεί να υπολογισθεί η παράμετρος της ταχύτητας $\beta = v/c$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Longrightarrow \gamma^2(1-\beta^2) = 1 \Longrightarrow \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}$$

Το ζητούμενο μήκος τροχιάς Δs στο σύστημα του ανιχνευτή είναι λοιπόν:

$$\Delta s = v\Delta t = (\beta c)(\gamma \Delta t_0) = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}\, c\, \gamma \Delta t_0 \Longrightarrow \boxed{\Delta s = \sqrt{\gamma^2-1}\; c\; \Delta t_0}$$

απ΄ όπου, μετά την αντικατάσταση των τιμών, υπολογίζεται:

$$\Delta s = \sqrt{8} \times 3 \cdot 10^8\ m/s \times 2 \cdot 10^{-9}\ s \Longrightarrow \boxed{\Delta s = 1.70\ m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.8

Χρονος Αποστολης-Αφιξης Σηματος

Διαστημικός επιβάτης ξεκινά από τη Γη το χρόνο $t = 0$ και ταξιδεύει στο διάστημα με ταχύτητα v. Μετά χρόνο Δt_0 με βάση το δικό του ρολόι στέλνει ηλεκτρομαγνητικό σήμα σε ελεγκτή επί της Γης, ο οποίος λαμβάνει το σήμα μετά συνολικό χρόνο Δt_F από την αναχώρηση και με βάση το δικό του ρολόι. Να βρείτε πώς συνδέονται οι χρόνοι Δt_0 και Δt_F.

Λύση

Τη στιγμή που ο διαστημικός επιβάτης στέλνει το σήμα στη Γη το ρολόι του δείχνει να έχει περάσει χρόνος Δt_0, ενώ ο ελεγκτής επί της Γης έχει καταγράψει πως το διαστημόπλοιο βρίσκεται σε απόσταση x και ο χρόνος από την εκκίνηση είναι Δt, όπου προφανώς $\Delta t = \gamma \Delta t_0$. Ο συνολικός χρόνος Δt_F είναι το άθροισμα του χρόνου Δt και

του χρόνου που χρειάζεται το σήμα να φτάσει στη Γη από την απόσταση x:

$$\Delta t_F = \Delta t + \frac{x}{c} = \Delta t + \frac{v\Delta t}{c} = \Delta t\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \gamma \Delta t_0 \left(1 + \beta\right) = \Delta t_0 \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta t_F = \Delta t_0 \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Εάν η ταχύτητα του διαστημικού επιβάτη είναι $v = 0.8c$ και θέλει το σήμα του να φτάσει στη Γη $\Delta t_F = 1h$ μετά την αναχώρησή του, τότε με βάση το ρολόι του πρέπει να στείλει το σήμα-ειδοποίηση μετά από χρόνο:

$$\Delta t_0 = \Delta t_F \sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)} = 60min\ \sqrt{(1-0.8)/(1+0.8)} = 60min\ \sqrt{1/9}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta t_0 = 20min}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.9

Χρονικη Αντιστροφη Γεγονοτων

Να αποδειχθεί πως η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας δεν επιτρέπει την χρονική αντιστροφή εξαρτημένων γεγονότων (αιτίου-αιτιατού) σε κανένα αδρανειακό σύστημα.

Λύση

Εάν υποθέσουμε ότι δύο γεγονότα 1 και 2 συμβαίνουν σε ένα αδρανειακό σύστημα με συντεταγμένες χώρου-χρόνου (x_1, t_1) και (x_2, t_2) αντίστοιχα, όπου το γεγονός 1 (αιτία) προηγείται του αιτιατού (αποτελέσματος) 2, δηλαδή ισχύει $t_1 < t_2$. Σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα που κινείται με ταχύτητα v σε σχέση με το πρώτο, τα γεγονότα αυτά μετασχηματίζονται στα (x'_1, t'_1) και (x'_2, t'_2) αντίστοιχα, για τα οποία ισχύουν:

$$t'_1 = \gamma\ \left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right) \quad , \quad t'_2 = \gamma\ \left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right)$$

απ΄ όπου συνάγεται

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\ \left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right] = \gamma\ (t_2 - t_1)\left[1 - \frac{v}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right]$$

Η ποσότητα όμως $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ αντιπροσωπεύει την ταχύτητα μετάδοσης της αιτίας u, και επειδή $u < c$ καθώς και $v < c$, ισχύει πάντα:

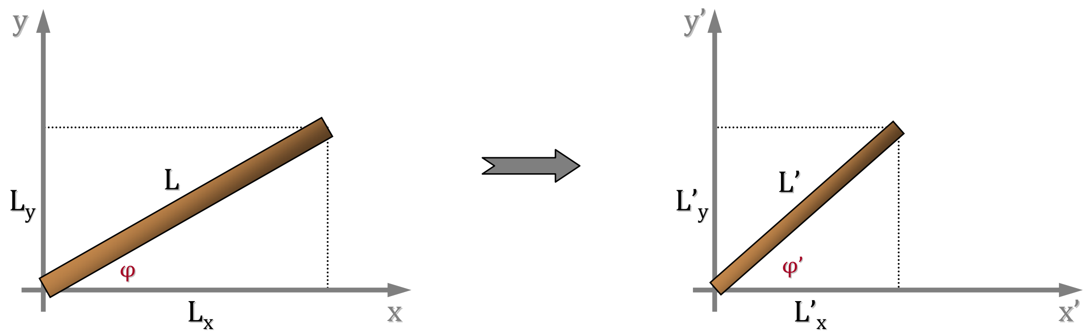
$$t'_2 - t'_1 = \gamma\ (t_2 - t_1)\left[1 - \frac{v}{c}\frac{u}{c}\right] > 0 \Longrightarrow \boxed{t'_2 > t'_1}$$

δηλαδή η χρονική αλληλουχία των γεγονότων παραμένει η ίδια.

ΑΣΚΗΣΗ 4.10

Κινουμενη Ραβδος

Να μελετηθεί το φαινόμενο μήκος επίπεδης ράβδου σε κινούμενο κατά τον άξονα-x σύστημα αναφοράς, όταν το μήκος της σε ακίνητο σύστημα αναφοράς είναι L και η γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα του συστήματος αυτού είναι φ.



Λύση

Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς, το μήκος L της ράβδου είναι και το ιδιομήκος, το οποίο θα φαίνεται συνεσταλμένο από οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα κινούμενο ως προς αυτό. Έστω, λοιπόν, ότι το μήκος της L προβάλλεται στις αντίστοιχες συνιστώσες L_x και L_y, οι οποίες για το κινούμενο αδρανειακό σύστημα στην κατεύθυνση του άξονα-

x με βάση τους μετασχηματισμούς Lorentz γίνονται:

$$\left\{\begin{array}{l} L'_x = L_x/\gamma \\ L'_y = L_y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} L'_x = Lcos\phi/\gamma \\ L'_y = Lsin\phi \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} L' = \sqrt{L'^2_x + L'^2_y} \\ \tan\phi' = L'_y/L'_x \end{array}\right\}$$

Συνεχίζοντας τους υπολογισμούς παίρνουμε:

$$L' = \sqrt{L'^2_x + L'^2_y} = \sqrt{L^2cos^2\phi/\gamma^2 + L^2sin^2\phi} = \sqrt{(1-\beta^2)\ L^2cos^2\phi + L^2sin^2\phi}$$

$$\Longrightarrow L' = \sqrt{L^2 - \beta^2L^2cos^2\phi} \Longrightarrow \boxed{L' = L\sqrt{1-\beta^2cos^2\phi}}$$

ενώ για τη γωνία φ′ ισχύει

$$tan\phi' = Lsin\phi/(Lcos\phi/\gamma) \Longrightarrow \boxed{tan\phi' = \gamma\ tan\phi}$$

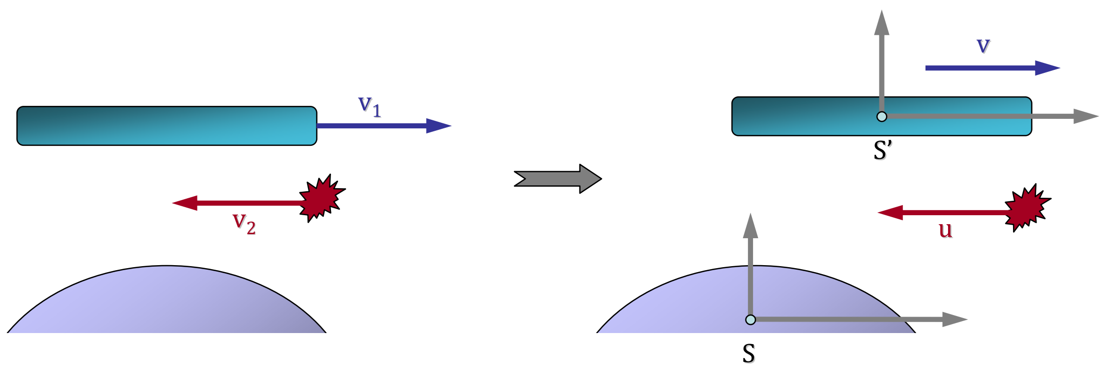
Από τα παραπάνω αποτελέσματα συμπεραίνουμε πως $L' < L$ και $\phi' > \phi$.

Μετασχηματισμοι Ταχυτητων

ΑΣΚΗΣΗ 4.11

Διαστημοπλοιο - Μετεωριτης

Διαστημόπλοιο του οποίου το μήκος ηρεμίας είναι 350 m κινείται με ταχύτητα $0.82c$ ως προς ορισμένο σύστημα αναφοράς. Μετεωρίτης, με αντίθετη ταχύτητα σ′ αυτό το σύστημα αναφοράς, προσπερνάει το διαστημόπλοιο. Πόσο χρόνο χρειάζεται ο μετεωρίτης για να προσπεράσει το σκάφος, όπως αυτός προσμετράται στο σύστημα αναφοράς του σκάφους; *(Άσκηση 37.33 Halliday-Resnick)*



Λύση

Στο δοσμένο σύστημα αναφοράς (για παράδειγμα ο πλανήτης της εικόνας), τα δύο σώματα, διαστημόπλοιο και μετεωρίτης, έχουν αντίστοιχα ταχύτητες v_1 και v_2. Για την επίλυση της άσκησης κάνουμε τις παρακάτω αντιστοιχίσεις:

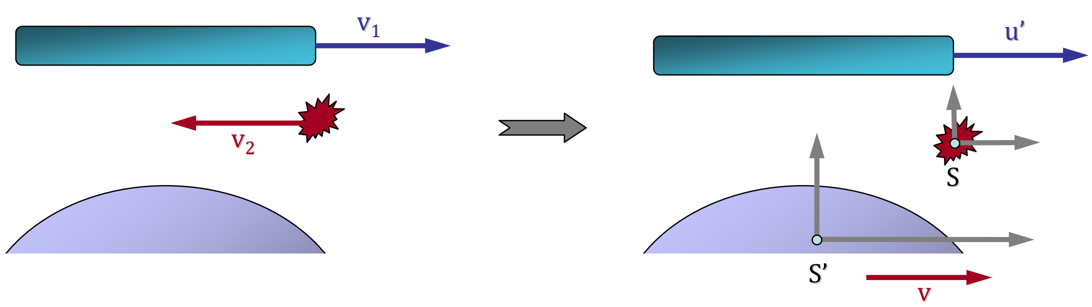
- Θεωρούμε το διαστημόπλοιο ακίνητο στο σύστημα αναφοράς S'.
- Αναγκαστικά τότε, το σύστημα συντεταγμένων S' κινείται σε σχέση με το S (το οποίο αντιστοιχεί στο αρχικά δοσμένο σύστημα αναφοράς) με ταχύτητα $v = v_1 = 0.82c$.
- Ο μετεωρίτης έχει ταχύτητα $u = v_2 = -0.82c$ στο σύστημα αναφοράς S.
- Το διαστημόπλοιο 'βλέπει' τον μετεωρίτη να κινείται με ταχύτητα u', η οποία όμως είναι ο μετασχηματισμός της u από το S στο κινούμενο αδρανειακό σύστημα S'. Αυτή λοιπόν υπολογίζεται από το γνωστό μετασχηματισμό ταχυτήτων:

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \Longrightarrow u' = \frac{-0.82c - 0.82c}{1 - (-0.82) \times 0.82} \Longrightarrow \boxed{u' = -0.981\ c}$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει, όπως είναι άλλωστε αναμενόμενο, κίνηση προς τα αριστερά. Ο ζητούμενος χρόνος διέλευσης του μετεωρίτη (στο σύστημα του διαστημοπλοίου, όπου είναι γνωστό και το μήκος του) είναι λοιπόν:

$$\Delta t' = \frac{L_0}{u'} = \frac{350\ m}{0.981 \times 3 \cdot 10^8\ m/s} = 119 \cdot 10^{-8}\ s \Longrightarrow \boxed{\Delta t' = 1.19\ \mu s}$$

Εναλλακτική Λύση



Εναλλακτικά, θα μπορούσε να θεωρηθεί ο μετεωρίτης ακίνητος στο σύστημα αναφοράς S. Τότε αναγκαστικά το σύστημα αναφοράς S' (ο πλανήτης για παράδειγμα, όπου αναφέρονταν αρχικά οι ταχύτητες των δύο σωμάτων) θα πρέπει να κινείται με ταχύτητα $v = -v_2 = 0.82c$. Στο σύστημα S' το διαστημόπλοιο συνεχίζει να κινείται με ταχύτητα

$u' = v_1 = 0.82c$. Ο μετασχηματισμός της ταχύτητας αυτής του διαστημοπλοίου στο σύστημα S είναι:

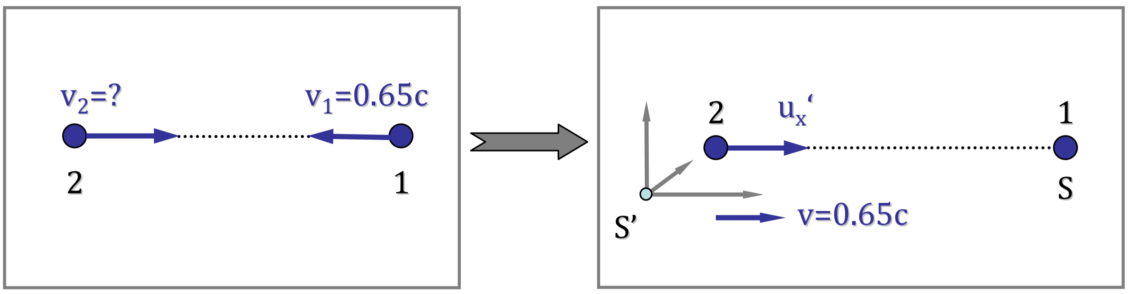
$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \Longrightarrow u = \frac{0.82c + 0.82c}{1 + 0.82 \times 0.82} \Longrightarrow \boxed{u = 0.981\ c}$$

Το αποτέλεσμα αυτό συμπίπτει με αυτό της προηγουμένης θεώρησης. Η ταχύτητα αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν η σχετική ταχύτητα διαστημοπλοίου-μετεωρίτη και να υπολογισθεί ο ζητούμενος χρόνος διέλευσης.

ΑΣΚΗΣΗ 4.12

Δύο σωματίδια κινούνται αντίθετα σε επιταχυντή υψηλών ενεργειών. Η ταχύτητα ενός των σωματιδίων όπως μετριέται στο σύστημα του εργαστηρίου είναι $0.65c$, ενώ η σχετική ταχύτητα μεταξύ των δύο αυτών σωματιδίων είναι $0.95c$. Πόση είναι η ταχύτητα του δεύτερου σωματιδίου σε σχέση με το σύστημα του εργαστηρίου;

(Άσκηση 37.19 Young-Freedman)



Λύση

Στο σύστημα συντεταγμένων του επιταχυντή η κίνηση των σωματιδίων περιγράφεται από την αριστερή εικόνα του σχήματος. Για την έκφραση της σχετικής ταχύτητας των δύο σωματιδίων κάνουμε τις παρακάτω μετατροπές:

- Θεωρούμε το σωματίδιο 1 ακίνητο (Σύστημα Συντεταγμένων S).
- Αναγκαστικά τότε, το σύστημα συντεταγμένων του επιταχυντή (S') θα κινείται σε σχέση με το σωματίδιο 1 (S) με ταχύτητα $v = 0.65c$.
- Το σωματίδιο 2 στο σύστημα του επιταχυντή (S') θα έχει την ζητούμενη ταχύτητα, έστω u'_x (είναι προφανές πως $u'_x = v_2$).

- Το σωματίδιο 1 *'βλέπει'* το σωματίδιο 2 να κινείται με ταχύτητα $u_x = 0.95c$, η οποία όμως είναι ο μετασχηματισμός της u_x' από το κινούμενο αδρανειακό σύστημα S' στο S και δίνεται από το γνωστό μετασχηματισμό ταχυτήτων:

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + u_x' v/c^2} \Longrightarrow u_x + \frac{u_x v}{c^2} u_x' = u_x' + v \Longrightarrow u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}$$

Κατά συνέπεια, η ζητούμενη ταχύτητα u_x' είναι:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} = \frac{0.95 - 0.65}{1 - 0.95 \cdot 0.65}\, c \Longrightarrow \boxed{u_x' = 0.784c = v_2}$$

Σχετικιστικη Ορμη και Ενεργεια

ΑΣΚΗΣΗ 4.13

Εάν η συνολική ενέργεια ενός σωματιδίου με μάζα ηρεμίας m είναι $E = \gamma mc^2$ και η ορμή του σωματιδίου είναι $p = \gamma mv$, να αποδειχθεί η ισχύς της σχέσης:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

Λύση

Με διαδοχικές πράξεις έχουμε:

$$E^2 - (pc)^2 = \left(\gamma mc^2\right)^2 - (\gamma mvc)^2 = m^2 c^2 \gamma^2 \left(c^2 - v^2\right) = m^2 c^2 \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left(c^2 - v^2\right) \Longrightarrow$$

$$E^2 - (pc)^2 = m^2 c^2 \frac{c^2}{c^2 - v^2} \left(c^2 - v^2\right) = m^2 c^2 c^2 = \left(mc^2\right)^2 \Longrightarrow \boxed{E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.14

Να υπολογιστεί η παράμετρος $\beta = v/c$ για ένα σωματίδιο όταν γνωρίζουμε: (α) Ότι η συνολική ενέργεια του σωματιδίου είναι n φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του (β) Ότι η κινητική του ενέργεια είναι m φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του.

Λύση

(α) Επειδή γνωρίζουμε πως $E = \gamma mc^2 = \gamma E_0$, όπου $E_0 = mc^2$ η ενέργεια (μάζα) ηρεμίας του σωματιδίου, έπεται ότι:

$$\gamma = n \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = n \Longrightarrow \frac{1}{1-\beta^2} = n^2 \Longrightarrow \boxed{\beta = \sqrt{n^2-1}/n}$$

Παράδειγμα: Για $n = 3$, δηλαδή $E = 3E_0$, η ταχύτητα του σωματιδίου πρέπει να γίνει $\sqrt{8}/3 = 2\sqrt{2}/3 \approx 0.942$ της ταχύτητας του φωτός.

(β) Ομοίως ισχύει $E = K + E_0 = \gamma E_0$, απ᾽ όπου έπεται $K = (\gamma - 1)E_0$, άρα:

$$\gamma - 1 = m \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = m+1 \Longrightarrow \frac{1}{1-\beta^2} = (m+1)^2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\beta = \sqrt{(m+1)^2-1}/(m+1)}$$

Παράδειγμα: Για $m = 3$, δηλαδή $K = 3E_0$ οπότε $\gamma = 4$, η ταχύτητα του σωματιδίου πρέπει να γίνει $\sqrt{15}/4 \approx 0.968$ της ταχύτητας του φωτός.

ΑΣΚΗΣΗ 4.15

Πόση πρέπει να είναι η ορμή ενός σωματιδίου με μάζα m ώστε η ολική ενέργειά του να είναι ακριβώς 3.00 φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του;

(Άσκηση 37.45 Halliday-Resnick)

Λύση

Γνωρίζουμε πως $E = \gamma mc^2 = \gamma E_0$ και $p = \gamma mv$, οπότε έχοντας προσδιορίσει το γ από την πρώτη σχέση παίρνουμε:

$$p = \gamma mv = \gamma m\beta c = \gamma m\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}c \Longrightarrow \boxed{p = \sqrt{\gamma^2-1}\ mc}$$

Για την περίπτωσή μας όπου $\gamma = 3$ η παραπάνω σχέση δίνει:

$$p = \sqrt{8}\ mc = 2\sqrt{2}\ mc \approx 2.83\ mc$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.16

Σωματίδιο μάζας m έχει ορμή mc. Πόσο είναι ο συντελεστής Lorentz γ και ποια η ταχύτητά του;

Λύση

Η ορμή σωματιδίου δίνεται από τη σχέση $p = \gamma m v$. Κατά συνέπεια:

$$p = \gamma m v \Longrightarrow mc = \gamma m v \Longrightarrow \gamma v/c = 1 \Longrightarrow \gamma\beta = 1 \Longrightarrow \gamma \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = 1$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\gamma^2 - 1} = 1 \Longrightarrow \boxed{\gamma = \sqrt{2}}$$

Το σωματίδιο έχει λοιπόν $\gamma = \sqrt{2} \approx 1.41$, η δε ταχύτητά του είναι

$$v = \beta c = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}\, c = \frac{1}{\sqrt{2}}\, c = \frac{\sqrt{2}}{2}\, c \Longrightarrow \boxed{v = 0.707\ c}$$

4.3 Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 4.17

Χιόνι πέφτει κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα $8m/s$. Με ποια γωνία σε σχέση με την κατακόρυφο φαίνονται να πέφτουν οι νιφάδες του χιονιού, όπως τις βλέπει οδηγός αυτοκινήτου που ταξιδεύει σε ευθύ δρόμο με ταχύτητα $50km/h$;
Απάντηση: 60^o

ΑΣΚΗΣΗ 4.18

Διαστημόπλοιο απομακρύνεται από τη Γη με ταχύτητα $0.90c$ και εκτοξεύει προς τα εμπρός ένα ρομποτικό μηχανισμό κατά την ίδια κατεύθυνση της κίνησής του με ταχύτητα $0.70c$ σε σχέση με το διαστημόπλοιο. (α) Πόσο είναι η ταχύτητα του ρομποτικού μηχανισμού για έναν γήινο παρατηρητή; (β) Παράλληλα, ένα σκάφος ξεκινά από τη Γη για να συναντήσει το διαστημόπλοιο, ταξιδεύοντας με ταχύτητα $0.95c$ ως προς τη Γη. Ποια είναι η ταχύτητα του σκάφους σε σχέση με το διαστημόπλοιο;
Απάντηση: $0.982c$, $0.345c$ *(Παράδειγμα 37.8 Young-Freedman)*

ΑΣΚΗΣΗ 4.19

Αεροπλάνο μήκους ηρεμίας $40.0m$ κινείται ως προς τη Γη με σταθερή ταχύτητα $630m/s$. (α) Κατά πόσο ποσοστό μικρότερο από το μήκος ηρεμίας του το παρατηρεί ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς της Γης; (β) Πόσος χρόνος θα περάσει σύμφωνα με τα γήινα ρολόγια για να μείνει πίσω κατά $1\mu s$ το ρολόι του αεροπλάνου;
Απάντηση: $2.21 \cdot 10^{-12}$, 5.25 ημέρες *(Άσκηση 4.76 Halliday-Resnick)*

ΑΣΚΗΣΗ 4.20

Η ενέργεια ηρεμίας ενός ηλεκτρονίου είναι $0.511\ MeV$ και του πρωτονίου $938\ MeV$. Σε ποια ταχύτητα το καθένα αποκτά κινητική ενέργεια $10MeV$;
Απάντηση: $0.9988c$, $0.145c$

Κεφάλαιο 5

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

- Νομος του Newton για μεταβλητη μαζα {Εξίσωση κίνησης, Εξωτερική Δύναμη, Απλά Συστήματα Μεταβαλλόμενης Μάζας}
- Κινηση Πυραυλου {Κίνηση Πυραύλου εκτός και εντός Βαρυτικού Πεδίου}
- Ρυθμος Μεταβολης Μαζας {Διαφορική Εξίσωση Κίνησης και Επίλυση με Ολοκλήρωση}

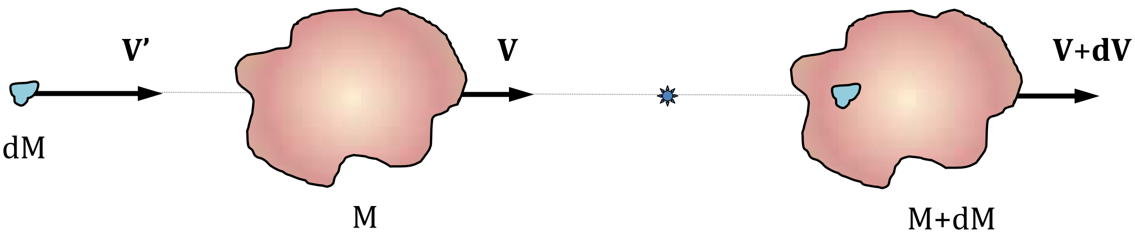
Η διατύπωση του Δεύτερου Νόμου του Newton στη μορφή $\vec{F} = d(m\vec{V})/dt$ στην περίπτωση που η μάζα του συστήματος δεν αποτελεί σταθερή ποσότητα εισάγει, πέραν του όρου της επιτάχυνσης $d\vec{V}/dt$, έναν επιπλέον όρο που αναφέρεται στην χρονική μεταβολή της μάζας dm/dt. Βασικός στόχος του Κεφαλαίου αυτού είναι η εξαγωγή μιας γενικευμένης εξίσωσης για συστήματα μεταβλητής μάζας και η μελέτη της αρχής διατήρησης της ορμής στην περίπτωση απουσίας εξωτερικής δύναμης.

Η προώθηση ενός πυραύλου εκτός βαρυτικού πεδίου αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα κίνησης ενός τέτοιου συστήματος. Η μελέτη επεκτείνεται και στην περίπτωση εξωτερικής δύναμης (βαρυτικό πεδίο) και γενικεύεται στην διατύπωση μιας διαφορικής εξίσωσης η οποία εμπεριέχει τον ρυθμό μεταβολής της μάζας. Επιδεικνύεται ο τρόπος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων σε ειδικές περιπτώσεις, όπου ο ρυθμός αυτός είναι σταθερός, με την βοήθεια ολοκλήρωσης της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης κίνησης.

5.1 Νόμος του Newton για Μεταβλητή Μάζα

ΑΣΚΗΣΗ 5.1

Στοιχειώδης μάζα dM κινούμενη με ταχύτητα $\vec{V}'$ συσσωματώνεται με μάζα M κινούμενη με ταχύτητα $\vec{V}$. Να διατυπωθεί η εξίσωση που περιγράφει τη χρονική μεταβολή της ορμής $d\vec{p}/dt$ του συστήματος (Θεώρηση Giancoli).



Λύση

Παρατίθεται ο συλλογισμός για τον υπολογισμό της μεταβολής της ορμής $d\vec{p}$ του συστήματος:

- Αρχική Ορμή Συστήματος: $\vec{V}'dM + M\vec{V}$
- Τελική Ορμή Συστήματος: $(M + dM)(\vec{V} + d\vec{V}) = M\vec{V} + \vec{V}dM + Md\vec{V}$

Ο όρος $dMd\vec{V}$ (γινόμενο δύο διαφορικών) παραλείπεται ως αμελητέος. Κατά συνέπεια, η συνολική μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι:

$$d\vec{p} = \{M\vec{V} + \vec{V}dM + Md\vec{V}\} - \{\vec{V}'dM + M\vec{V}\} = Md\vec{V} + (\vec{V} - \vec{V}')dM$$

$$\Longrightarrow d\vec{p} = Md\vec{V} - (\vec{V}' - \vec{V})dM = Md\vec{V} - \vec{V}_{rel}dM$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt}$$

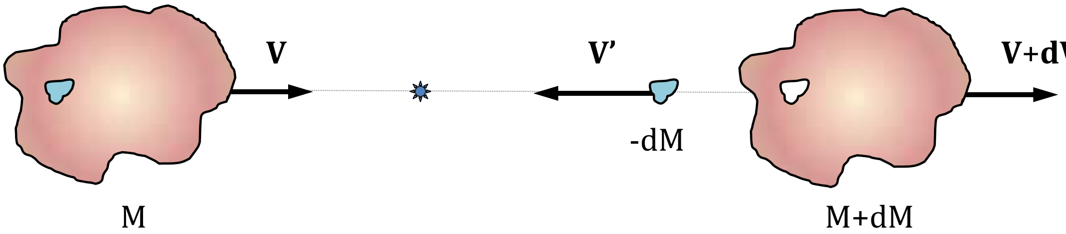
όπου $\vec{V}_{rel}$ είναι η σχετική ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας dM ως προς τη μάζα M.

Λαμβάνοντας δε υπόψη ότι ο λόγος $d\vec{p}/dt$ εκφράζει στην γενική περίπτωση την εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{ext}$ που επιδρά στο σύστημα, τότε η παραπάνω εξίσωση κίνησης λαμβάνει την τελική μορφή:

$$\boxed{\vec{F}_{ext} + \vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.2

Μάζα Μ κινούμενη με ταχύτητα $\vec{V}$ εκτινάσσει στοιχειώδη μάζα dM με ταχύτητα $\vec{V}'$ μεταβάλλοντας την ταχύτητά της. Να διατυπωθεί η εξίσωση που περιγράφει τη χρονική μεταβολή της ορμής $d\vec{p}/dt$ του συστήματος (Θεώρηση Halliday-Resnick).



Λύση

Θεωρώντας ότι η εκτινασσόμενη μάζα dM είναι μια αρνητική ποσότητα και ακολουθώντας τον προηγούμενο συλλογισμό για τον υπολογισμό της μεταβολής της ορμής $d\vec{p}$ του συστήματος, έχουμε:

- Αρχική Ορμή Συστήματος: $M\vec{V}$
- Τελική Ορμή Συστήματος: $(M + dM)(\vec{V} + d\vec{V}) + \vec{V}'(-dM)$

Παραλείποντας τον όρο $dMd\vec{V}$ ως αμελητέο όπως προηγούμενα, η παραπάνω σχέση γίνεται:

- Τελική Ορμή Συστήματος: $M\vec{V} + \vec{V}dM + Md\vec{V} - \vec{V}'dM$

και κατά συνέπεια, η συνολική μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι:

$$d\vec{p} = \{M\vec{V} + \vec{V}dM + Md\vec{V} - \vec{V}'dM\} - M\vec{V} = Md\vec{V} + (\vec{V} - \vec{V}')dM$$

$$\Longrightarrow d\vec{p} = Md\vec{V} - (\vec{V}' - \vec{V})dM = Md\vec{V} - \vec{V}_{rel}dM$$

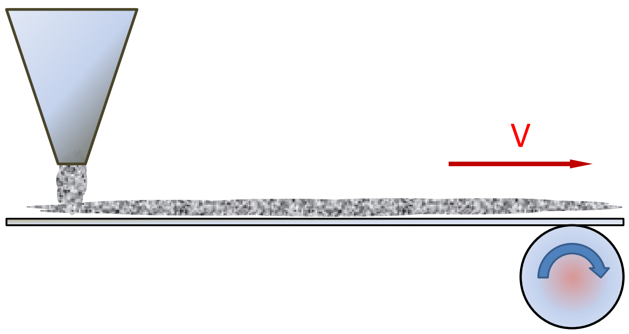
$$\Longrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt} \Longrightarrow \boxed{\vec{F}_{ext} + \vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt}}$$

με $\vec{V}_{rel}$ τη σχετική ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας dM ως προς τη μάζα Μ.

Η έκφραση αυτή δείχνει πως η επιτάχυνση της μάζας M οφείλεται σε δύο παράγοντες: Την επίδραση της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}_{ext}$ και την προώθηση την οποία δέχεται από την εκτινασσόμενη ροή της μάζας dM/dt. Η προωθητική αυτή δύναμη είναι επίσης ανάλογη της (σχετικής) ταχύτητας εκροής $\vec{V}_{rel}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.3

Κινούμενος ιμάντας μεταφέρει άμμο η οποία ρίπτεται κατακόρυφα από τροφοδότη με ρυθμό dM/dt. Να υπολογισθεί η απαιτούμενη δύναμη που πρέπει να δράσει στον ιμάντα ώστε να διατηρηθεί σταθερή η ταχύτητα λόγω του πρόσθετου φορτίου.



Λύση

Προφανώς στην περίπτωση αυτή είναι $\frac{dM}{dt} > 0$ και $\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$ δεδομένου ότι ο ιμάντας κρατάει σταθερή την ταχύτητά του. Εφαρμόζοντας την εξίσωση:

$$\vec{F}_{ext} + \vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt}$$

και υποθέτοντας θετική φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

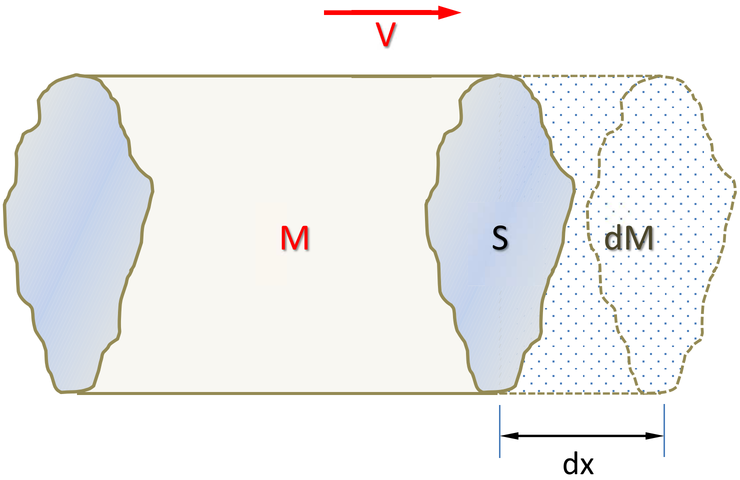
$$F + (0 - V)\frac{dM}{dt} = 0 \Longrightarrow \boxed{F = V\frac{dM}{dt}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.4

Μετεωρίτης ορθού σχήματος και μάζας M κινείται στο διάστημα, ελεύθερος βαρυτικού πεδίου. Διαστρική σκόνη συσσωρεύεται στην πρόσθια επιφάνειά του καθώς αυτός κινείται. Αφού πρώτα αποδειχθεί πως η συσσώρευση μάζας dM/dt είναι ανάλογη της ταχύτητας, να υπολογισθεί η ταχύτητα V του μετεωρίτη μετά από χρόνο t, εάν αυτός κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει ταχύτητα V_0.

Λύση

Σε χρόνο dt ο μετεωρίτης κινείται κατά διάστημα dx, καλύπτοντας με την πρόσθια επιφάνειά του S έναν όγκο dV διαστρικής σκόνης πυκνότητας ρ. Θεωρώντας πως η



αντίστοιχη μάζα της διαστρικής σκόνης που συσσωρεύεται είναι dM, ισχύει:

$$\frac{dM}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} = \rho S\frac{dx}{dt} = \rho SV \Longrightarrow \frac{dM}{dt} = \lambda V$$

όπου $\lambda = \rho S$ θετική σταθερά. Εφαρμόζοντας και πάλι την εξίσωση

$$\vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt}$$

για κινούμενο σώμα εκτός βαρυτικού πεδίου και υποθέτοντας θετική φορά προς τα δεξιά, δεχόμενοι πως η διαστρική σκόνη είναι ακίνητη ($V' = 0$), τότε:

$$0 = M\frac{dV}{dt} - (0 - V)\frac{dM}{dt} \Longrightarrow 0 = M\frac{dV}{dt} + V\frac{dM}{dt} \Longrightarrow M\frac{dV}{dt} = -\lambda V^2$$

Στην παραπάνω εξίσωση η μάζα M είναι μια χρονικά μεταβαλλόμενη ποσότητα. Από την διατήρηση όμως της ορμής του σώματος, μπορούμε να την εκφράσουμε συναρτήσει της ταχύτητας:

$$M_0V_0 = MV \Longrightarrow M = \frac{M_0V_0}{V}$$

οπότε η προηγούμενη διαφορική εξίσωση κίνησης του μετεωρίτη καταλήγει να έχει ως μόνη μεταβαλλόμενη ποσότητα την ταχύτητα:

$$M\frac{dV}{dt} = -\lambda V^2 \Longrightarrow \frac{M_0V_0}{V}\frac{dV}{dt} = -\lambda V^2 \Longrightarrow \frac{dV}{V^3} = -\frac{\lambda}{M_0V_0}dt$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε:

$$\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V^3} = -\int_0^t \frac{\lambda}{M_0V_0}dt \Longrightarrow -\frac{1}{2V^2} + \frac{1}{2V_0^2} = -\frac{\lambda}{M_0V_0}\,t \Longrightarrow \frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_0^2} + \frac{2\lambda}{M_0V_0}\,t$$

Η τελική λύση είναι λοιπόν:

$$\boxed{V^2 = \frac{V_0^2}{1+2\lambda\frac{V_0}{M_0}\ t}}$$

η οποία, όπως είναι αναμενόμενο, υποδεικνύει ελάττωση της ταχύτητας με το χρόνο.

Κεφάλαιο 6

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

- Εννοια του Εργου {Έργο και Κινητική Ενέργεια, Έργο Μεταβλητής Δύναμης, Ισχύς}
- Συντηρητικες Δυναμεις {Ανεξαρτησία του Έργου από τη Διαδρομή, Έννοια του Δυναμικού, Δυναμικό και Πεδίο Συντηρητικών Δυνάμεων}
- Μηχανικη Ενεργεια {Αρχή Διατήρησης της Δυναμικής Ενέργειας, Διαγράμματα Δυναμικού}

Η έννοια του έργου θεμελιώνεται με την αλλαγή της κινητικής κατάστασης που επιφέρει μια δύναμη σε υλικό σημείο. Καθίσταται σαφές πως το έργο ορίζεται σαν το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης με την μετατόπιση και εξετάζονται παραδείγματα υπολογισμού έργου σταθερής και μεταβλητής δύναμης σε μονοδιάστατα προβλήματα. Η έννοια του έργου γενικεύεται στις τρεις διαστάσεις με την μορφή των ολοκληρωμάτων $W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$ που προκύπτουν από το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων της δύναμης και της μετατόπισης και δίνονται παραδείγματα υπολογισμού έργου κατά μήκος μιας δοσμένης καμπύλης διαδρομής.

Εξετάζονται οι ειδικές περιπτώσεις όπου το έργο δύναμης είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εισάγεται η έννοια των συντηρητικών δυνάμεων και της συνάρτησης του δυναμικού. Αναδεικνύεται η σχέση $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ που συνδέει το συντηρητικό πεδίο δυνάμεων με την συνάρτηση του δυναμικού και καθίσταται σαφής η αναγκαιότητα του μηδενικού στροβιλισμού $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ για την συντηρητικότητα των δυνάμεων. Στην περίπτωση αυτή, εξετάζονται προβλήματα όπου αναζητείται το δυναμικό U μέσω τεχνικών ολοκλήρωσης για δοσμένο αστρόβιλο πεδίο δυνάμεων.

Τέλος διατυπώνεται η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και δίνονται παραδείγματα με διαγράμματα της συνάρτησης U του δυναμικού, όπου εξετάζονται έννοιες ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας καθώς και ακρότατα των δυνάμεων μέσω της παραγώγου του δυναμικού.

6.1 Έργο Μεταβλητής Δύναμης

ΑΣΚΗΣΗ 6.1

Δίνεται η δύναμη $\vec{F}$ στο επίπεδο (XY) που περιγράφεται από την εξίσωση $\vec{F}(x,y) = (2x+y)\hat{i} + (2y+x)\hat{j}$. Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται από τη δύναμη αυτή από το σημείο $A(0,0)$ στο σημείο $B(2,8)$ μέσω των δύο παρακάτω διαδρομών:
(α) $y = 4x$ και (β) $y = x^3$.

Λύση

(α) Διαδρομή $y = 4x$

$$W_\alpha = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy = \int_{x=0}^{x=2} (2x+y)\,dx + \int_{y=0}^{y=8} (2y+x)\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} (2x+4x)\,dx + \int_{y=0}^{y=8} \left(2y + \frac{y}{4}\right) dy = \int_0^2 6x dx + \int_0^8 \frac{9y}{4} dy$$

$$= \left[3x^2\right]_0^2 + \left[\frac{9y^2}{8}\right]_0^8 = 12 + 72 = 84$$

(β) Διαδρομή $y = x^3$

$$W_\beta = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy = \int_{x=0}^{x=2} (2x+y)\,dx + \int_{y=0}^{y=8} (2y+x)\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(2x + x^3\right) dx + \int_{y=0}^{y=8} \left(2y + y^{1/3}\right) dy = \left[x^2 + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 + \left[y^2 + \frac{3y^{4/3}}{4}\right]_0^8 = 4+4+64+12 = 84$$

ή εναλλακτικά

$$W_\beta = \int_{x=0}^{x=2} (2x+y)\,dx + \int_{y=0}^{y=8} (2y+x)\,dy = \int_{x=0}^{x=2} \left(2x + x^3\right) dx + \int_{x=0}^{x=2} \left(2x^3 + x\right)\left(3x^2 dx\right)$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(2x + x^3 + 6x^5 + 3x^3\right) dx = \left[x^2 + \frac{x^4}{4} + x^6 + \frac{3x^4}{4}\right]_0^2 = 4 + 4 + 64 + 12 = 84$$

Παρατηρούμε πως το παραγόμενο έργο και στις δύο διαδρομές είναι το ίδιο. Επειδή δε:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x+y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(2y+x) = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

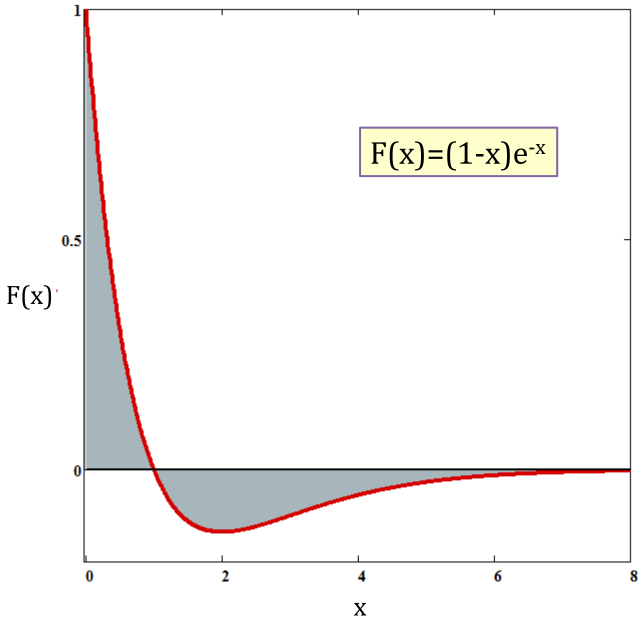
συμπεραίνουμε πως η δύναμη αυτή είναι συντηρητική.

ΑΣΚΗΣΗ 6.2

Υλικό σημείο κινείται επάνω στον x-άξονα υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F}(x) = (1-x)e^{-x}\ \hat{i}$. Να αποδειχθεί ότι το παραγόμενο από τη δύναμη αυτή έργο από το σημείο $x=0$ στο $x=1$ καταναλώνεται στο υπόλοιπο της διαδρομής μέχρι το άπειρο, δηλαδή $W_{0\to1} = -W_{1\to\infty}$.

Λύση

Η γραφική παράσταση της δύναμης $\vec{F}(x)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Είναι ευκόλως κατανοητό πως για τιμές $x<1$ η δύναμη έχει θετική φορά (προς τα δεξιά) ενώ για $x>1$ η φορά της αντιστρέφεται.



Γενικά, ο υπολογισμός του έργου από το σημείο α στο σημείο β δίνεται από τη σχέση:

$$W_{\alpha\to\beta} = \int_\alpha^\beta F(x)dx$$

και για την συγκεκριμένη δύναμη:

$$W_{\alpha\to\beta} = \int_\alpha^\beta (1-x)e^{-x}dx = \int_\alpha^\beta (x-1)\left[e^{-x}\right]'dx = \left[(x-1)e^{-x}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (x-1)'e^{-x}dx$$

$$= \left[(x-1)e^{-x}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta e^{-x}dx = \left[(x-1)e^{-x} + e^{-x}\right]_\alpha^\beta = \left[xe^{-x}\right]_\alpha^\beta \Longrightarrow \boxed{W_{\alpha\to\beta} = \left[xe^{-x}\right]_\alpha^\beta}$$

Για τα όρια του παρόντος προβλήματος ισχύουν:

$$W_{0\to1} = \left[xe^{-x}\right]_0^1 = 1e^{-1} - 0e^0 = e^{-1} \quad \& \quad W_{1\to\infty} = \left[xe^{-x}\right]_1^\infty = 0 - e^{-1} = -e^{-1}$$

Στην περίπτωση υπολογισμού του παραπάνω ορίου στο άπειρο γίνεται χρήση του κανόνα του L'Hospital. Άρα $W_{0\to1} = -W_{1\to\infty}$ (ίσες επιφάνειες στο σχήμα) ή ισοδύναμα $W_{0\to1} + W_{1\to\infty} = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 6.3

Μεταβλητή δύναμη F που κινεί σώμα στο επίπεδο (x, y) περιγράφεται από την διανυσματική εξίσωση $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\ \hat{i} + axy\ \hat{j}$, όπου a σταθερά.
(α) Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη αυτή από το σημείο (0,0) στο σημείο (1,1) του επιπέδου, όταν αυτή κινείται κατά μήκος της καμπύλης (i) $y = x$ και (ii) $y = \sqrt{x}$.
(β) Να ευρεθεί η τιμή της σταθεράς a ώστε η παραπάνω δύναμη να είναι συντηρητική, δηλαδή το παραγόμενο έργο να είναι ανεξάρτητο της διαδρομής

Λύση

(α) Υπολογισμός του έργου για τις δύο διαδρομές δίνει αντίστοιχα:
Διαδρομή (i) $y = x$

$$W = \int_0^1 (x^2 + y^2)dx + \int_0^1 axydy = \int_0^1 (x^2 + x^2)dx + \int_0^1 ayydy$$

$$= \int_0^1 2x^2dx + \int_0^1 ay^2dy = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{a}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{2+a}{3}$$

Διαδρομή (ii) $y = \sqrt{x}$

$$W = \int_0^1 (x^2 + y^2)dx + \int_0^1 axydy = \int_0^1 (x^2 + x)dx + \int_0^1 ay^2ydy$$

$$= \int_0^1 (x^2 + x)dx + \int_0^1 ay^3dy = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{a}{4}y^4\right]_0^1 == \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{a}{4} = \frac{10+3a}{12}$$

(β) Εξισώνοντας τα αποτελέσματα του έργου από τις δύο διαφορετικές διαδρομές (i) και (ii) προκύπτει:

$$\frac{2+a}{3} = \frac{10+3a}{12} \Longrightarrow 8 + 4a = 10 + 3a \Longrightarrow \boxed{a = 2}$$

Σημείωση: Για να είναι η δύναμη $\vec{F}$ συντηρητική πρέπει να ισχύει

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(axy)}{\partial x} \Longrightarrow 2y = ay \Longrightarrow \boxed{a = 2}$$

το οποίο ταυτίζεται με το παραπάνω αποτέλεσμα.

6.2 Συντηρητικές Δυνάμεις και Συνάρτηση Δυναμικού

ΑΣΚΗΣΗ 6.4

Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω δυνάμεις είναι συντηρητικές:
(α) $\vec{F}(x,y) = C_1\ \hat{\imath} + C_2\ \hat{\jmath}$, όπου C_1, C_2 σταθερές
(β) $\vec{F}(x,y) = xy\ \hat{\imath} + (x+y)\ \hat{\jmath}$

Λύση

(α) Η δύναμη $\vec{F}$ είναι **συντηρητική** διότι:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial C_1}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial C_2}{\partial x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

(β) Για τη δύναμη αυτή ισχύουν:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial (xy)}{\partial y} = x \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial (x+y)}{\partial x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

δηλαδή η δύναμη αυτή είναι **μη συντηρητική**.

ΑΣΚΗΣΗ 6.5

Να εξεταστεί εάν η δύναμη $\vec{F}(x,y) = 2x^2\ \hat{\imath} + 3y^2\ \hat{\jmath}$ είναι συντηρητική. Στην περίπτωση που είναι συντηρητική, να ευρεθεί η συνάρτηση δυναμικού που την παράγει.

Λύση

Η δύναμη $\vec{F}$ είναι **συντηρητική** διότι:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial (2x^2)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial (3y^2)}{\partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Άρα υπάρχει κάποια συνάρτηση $U(x,y)$ για την οποία ισχύει:

$$\vec{F} = F_x\ \hat{\imath} + F_y\ \hat{\jmath} = -\vec{\nabla}U(x,y) = -\frac{\partial U}{\partial x}\ \hat{\imath} - \frac{\partial U}{\partial y}\ \hat{\jmath}$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = F_x = 2x^2 \Longrightarrow U = -\frac{2x^3}{3} + g(y)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = F_y = 3y^2 \Longrightarrow -\frac{\partial}{\partial y}\Big[-\frac{2x^3}{3} + g(y)\Big] = 3y^2 \Longrightarrow 0 - g'(y) = 3y^2$$
$$\Longrightarrow g(y) = -y^3 + C$$

Η ζητούμενη λοιπόν συνάρτηση του δυναμικού είναι:

$$\boxed{U(x,y) = -\tfrac{2x^3}{3} - y^3 + C}$$

Επαλήθευση

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = 2x^2 = F_x$$
$$-\frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 = F_y$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.6

Δίνεται η δύναμη $\vec{F}(x,y) = 2xy\ \hat{i} + x^2\ \hat{j}$. Να αποδειχθεί ότι αυτή είναι συντηρητική και να ευρεθεί το έργο που αυτή παράγει από το σημείο $A(0,0)$ στο σημείο $B(1,2)$ του επιπέδου.

Λύση

Για να είναι η δύναμη $\vec{F}$ συντηρητική θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial(2x^2)}{\partial y}$$

Στην περίπτωσή μας ισχύει:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$$

άρα η δύναμη αυτή είναι συντηρητική. Για τον υπολογισμό του ζητούμενου έργου χρειάζεται να βρεθεί πρώτα η συνάρτηση δυναμικού $U(x,y)$ από την οποία παράγεται η δύναμη αυτή. Όταν η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή, τότε το έργο υπολογίζεται από τη γνωστή σχέση: $W_{A\to B} = U_A - U_B$. Η συνάρτηση δυναμικού $U(x,y)$ υπολογίζεται από τις συνιστώσες της δύναμης έχοντας κατά νου πως

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \Longrightarrow F_x \ \hat{i} + F_y \ \hat{j} = -\frac{\partial U}{\partial x} \ \hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \ \hat{j}$$

Κατά συνέπεια:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = F_x = 2xy \Longrightarrow U = -x^2 y + g(y)$$

Θέτοντας το παραπάνω αποτέλεσμα στην δεύτερη εξίσωση (συνθήκη) παίρνουμε:

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = F_y \Longrightarrow -\frac{\partial}{\partial y}\Big[- x^2 y + g(y)\Big] = x^2 \Longrightarrow x^2 - g'(y) = x^2$$

$$\Longrightarrow g'(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = C$$

Η ζητούμενη λοιπόν συνάρτηση του δυναμικού είναι:

$$\boxed{U(x, y) = -x^2 y + C}$$

<u>Επαλήθευση</u>

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy = F_x$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 = F_y$$

Το ζητούμενο έργο υπολογίζεται τώρα εύκολα:

$$W_{A\to B} = U(A) - U(B) = \Big[- x^2 y + C\Big]_{(0,0)} - \Big[- x^2 y + C\Big]_{(1,2)} = 0 + 2 = 2$$

<u>Πρακτική διαπίστωση</u>

Εφόσον η παραπάνω δύναμη απεδείχθη πως είναι συντηρητική, τότε το παραγόμενο έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής. Αν επιλέξουμε για παράδειγμα την καμπύλη $y = 2x$ η οποία διέρχεται από τα δοσμένα σημεία $A(0, 0)$ και $B(1, 2)$:

$$W_{A\to B} = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy = \int_0^1 2xydx + \int_0^2 x^2 dy = \int_0^1 2x2xdx + \int_0^2 (y/2)^2 dy$$

$$\Longrightarrow W_{A\to B} = \int_0^1 4x^2 dx + \int_0^2 \frac{y^2}{4} dy = \Big[\frac{4x^3}{3}\Big]_0^1 + \Big[\frac{y^3}{12}\Big]_0^2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Καταλήγουμε δηλαδή στο ίδιο αποτέλεσμα, όποια συνάρτηση διαδρομής και να χρησιμοποιήσουμε.

ΑΣΚΗΣΗ 6.7

Να αποδειχθεί ότι, εάν μια δύναμη είναι συντηρητική, δηλαδή εάν υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $U(x,y,z)$ από την οποία παράγεται η δύναμη μέσω της σχέσης $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(x,y,z)$, τότε ισχύουν οι εξισώσεις Euler:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Λύση

Στην περίπτωση αυτή εάν εξετάσουμε τον στροβιλισμό της δύναμης, δηλαδή $\vec{\nabla} \times \vec{F}$, θα διαπιστώσουμε πως αυτός μηδενίζεται, διότι:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial U}{\partial x} & -\frac{\partial U}{\partial y} & -\frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} & -\frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} & -\frac{\partial U}{\partial x} \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial x} & -\frac{\partial U}{\partial y} \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}\right)\hat{i} + \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)\hat{j} + \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)\hat{k}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0}$$

καθόσον οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης δεν εξαρτώνται από τη σειρά παραγώγισης των ανεξαρτήτων μεταβλητών. Κατά συνέπεια:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ F_z & F_x \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \hat{k} = 0$$

Άρα κάθε ορίζουσα είναι μηδενική, αποτέλεσμα το οποίο οδηγεί στις εξισώσεις Euler

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

6.3 Γραφική Παράσταση Δυναμικού

ΑΣΚΗΣΗ 6.8

Για την δύναμη $\vec{F}(x) = (1-x)e^{-x}\ \hat{i}$ που δρα επάνω στον θετικό ημιάξονα Ox να ευρεθεί η συνάρτηση δυναμικού που την παράγει και να σχολιαστεί το γράφημά της.

Λύση

Για το μονοδιάστατο πρόβλημα της συγκεκριμένης περίπτωσης ισχύει:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

και κατά συνέπεια

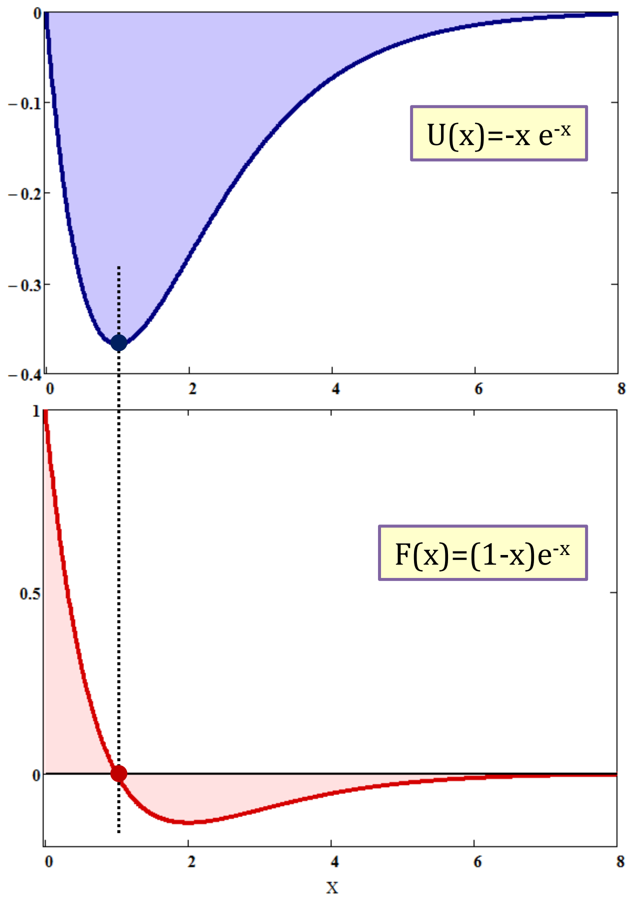
$$U(x) = -\int F(x)dx$$

Άρα:

$$U(x) = -\int F(x)dx =$$

$$\Longrightarrow U(x) = -\int (1-x)e^{-x}dx$$

$$\Longrightarrow \boxed{U(x) = -xe^{-x}}$$



Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος αυτού γίνεται με τη μέθοδο κατά παράγοντες (όπως στην προηγούμενη Άσκηση 6.2). Οι γραφικές παραστάσεις του δυναμικού $U(x)$ και της δύναμης $F(x)$ απεικονίζονται στο παραπάνω σχήμα. Το ακρότατο (ελάχιστο) της συνάρτησης του δυναμικού βρίσκεται στο σημείο $x = 1$, εκεί δηλαδή όπου η δύναμη μηδενίζεται. Ισχύουν τα παρακάτω:

$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$	$x \to \infty$
$U(0) = 0$	$\frac{dU}{dx} < 0$	$U(1) = -e^{-}1$	$\frac{dU}{dx} > 0$	$U(x) \to 0$
$F(0) = 1$	$F(x) > 0$	$F(1) = 0$	$F(x) < 0$	$F(x) \to 0$

ΑΣΚΗΣΗ 6.9

Για την περιγραφή των ασκούμενων δυνάμεων σε ένα διατομικό μόριο χρησιμοποιείται το δυναμικό Lennard-Jones το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} \,,$$

όπου x η απόσταση των ατόμων στο μόριο και a και b θετικές σταθερές. Λόγω των εκθετών το δυναμικό αυτό συχνά αναφέρεται στην βιβλιογραφία και σαν δυναμικό 12-6. Να παρασταθεί γραφικά το δυναμικό αυτό καθώς και η ασκούμενη δύναμη και να βρεθεί η θέση ισορροπίας των ατόμων του μορίου.

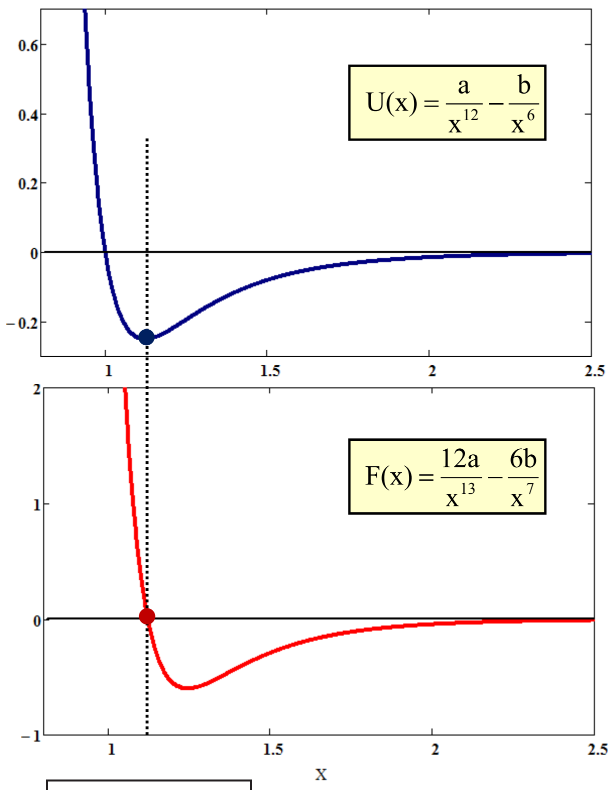
Λύση

Η ασκούμενη δύναμη από τη συνάρτηση δυναμικού Lennard-Jones υπολογίζεται:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

$$\Longrightarrow F(x) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}\right]$$

$$\Longrightarrow F(x) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}$$



Οι γραφικές παραστάσεις αμφοτέρων των συναρτήσεων $U(x)$ και $F(x)$ φαίνονται στο διπλανό σχήμα για τιμές των παραμέτρων $a = 1$ και $b = 1$.
Η ζητούμενη θέση ισορροπίας βρίσκεται από τον μηδενισμό της δύναμης:

$$F(x) = 0 \Longrightarrow \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7} = 0 \Longrightarrow x^6 = \frac{2a}{b} \Longrightarrow \boxed{x_0 = \sqrt[6]{2a/b}}$$

Αντίστοιχα η θέση μηδενισμού του δυναμικού είναι:

$$U(x) = 0 \Longrightarrow \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} = 0 \Longrightarrow x^6 = \frac{a}{b} \Longrightarrow x = \sqrt[6]{a/b}$$

6.4 Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 6.10

Εάν η δύναμη ελατηρίου περιγράφεται από την εξίσωση $F(x) = kx + ax^3 + bx^4$, όπου k, a, b σταθερές, να υπολογισθεί το έργο που απαιτείται για να συμπιεσθεί κατά μήκος L.

Απάντηση: $W = \frac{1}{2}kL^2 + \frac{1}{4}aL^4 + \frac{1}{5}bL^5$

ΑΣΚΗΣΗ 6.11

Να αποδειχθεί ότι το πεδίο δυνάμεων $\vec{F} = (2x + y)\hat{\imath} + (2y + x)\hat{\jmath}$ είναι συντηρητικό και να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού που το παράγει.

Απάντηση: $U(x, y) \ = \ -(x^2 + xy + y^2) \ + \ C$

Κεφάλαιο 7

ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ

- Ροπη Αδρανειας {Υπολογισμός Ροπής Αδράνειας με τη Μέθοδο της Ολοκλήρωσης}
- Στροφορμη – Δυναμικη Στερεου Σωματος {Στροφική και Μεταφορική Κίνηση Στερεού Σώματος, Αρχή Διατήρησης Στροφορμής}
- Ταλαντωση Στερεου Σωματος {Διαφορική Εξίσωση Κίνησης, Υπολογισμός Περιόδου}

Εισάγεται η έννοια της Ροπής Αδράνειας για το στερεό σώμα και μεθοδεύεται ο τρόπος υπολογισμού αυτής για απλά γεωμετρικά στερεά με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης $\left(I = \int_M r^2 dm\right)$. Γίνεται εφαρμογή του Νόμου του Steiner $I = I_{CM} + Mh^2$ στον υπολογισμό της ροπής αδράνειας για παράλληλο άξονα περιστροφής.

Διατυπώνεται ο διανυσματικός ορισμός της Στροφορμής $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{V}$ και μαζί με τον βασικό ορισμό της Ροπής Δύναμης $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ και τη σχέση γραμμικής γωνιακής ταχύτητας $V = \omega r$ χρησιμοποιούνται στη δυναμική μελέτη του στερεού σώματος. Αποδεικνύεται η σχέση της Στροφορμής με την γωνιακή ταχύτητα $L = I\omega$ και ο Δεύτερος Νόμος του Newton $\vec{\tau} = I\vec{a}_\Gamma$ στην περιστροφική κίνηση. Τέλος συσχετίζεται η χρονική μεταβολή της Στροφορμής με την επενέργεια εξωτερικών ροπών στο στερεό σώμα $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ και διατυπώνεται η αρχή της διατήρησης της Στροφορμής σε απομονωμένο σύστημα.

Η έννοια της ταλάντωσης του στερεού σώματος εισάγεται με την μορφή διαφορικής εξίσωσης και εξετάζονται οι προϋποθέσεις για την επίτευξη απλής αρμονικής ταλάντωσης. Η προκύπτουσα μορφή της δευτεροβάθμιας διαφορικής εξίσωσης ως προς τον χρόνο

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\tau_0}{I}\theta = 0$$

επιτρέπει τον προσδιορισμό της περιόδου της ταλάντωσης

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\tau_0}}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ & ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΕΣ

Μεταφορική Κίνηση		Περιστροφική Κίνηση	
Διάστημα:	$s = \theta R$	Γωνία:	θ
Ταχύτητα:	$V = \omega R$	Γωνιακή Ταχύτητα:	ω
Επιτάχυνση:	$a = a_\Gamma R$	Γωνιακή Επιτάχυνση:	a_Γ
Μάζα:	m	Ροπή Αδράνειας:	I
Κινητική Ενέργεια:	$E_k = \frac{1}{2}mV^2$	Κινητική Ενέργεια:	$E_\pi = \frac{1}{2}I\omega^2$
Δύναμη:	F	Ροπή Δύναμης:	τ
2ος Νόμος Newton:	$F = ma$	2ος Νόμος Newton:	$\tau = Ia_\Gamma$
Ορμή:	$p = mV$	Στροφορμή:	$L = I\omega$
2ος Νόμος Newton:	$F = dp/dt$	2ος Νόμος Newton:	$\tau = dL/dt$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΜΕΓΕΘΩΝ

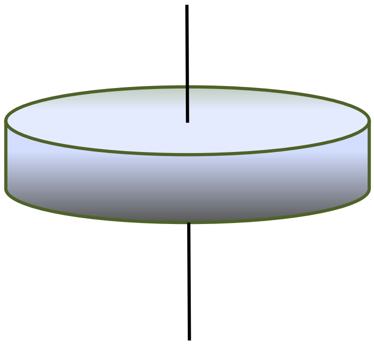
$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \\ &\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{V} \end{aligned}}$$

7.1 Υπολογισμός Ροπής Αδράνειας

ΑΣΚΗΣΗ 7.1

Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας πλήρους ομογενούς δίσκου (ισοδύναμα κυλίνδρου) μάζας M και ακτίνας R ως προς τον γεωμετρικό του άξονα.

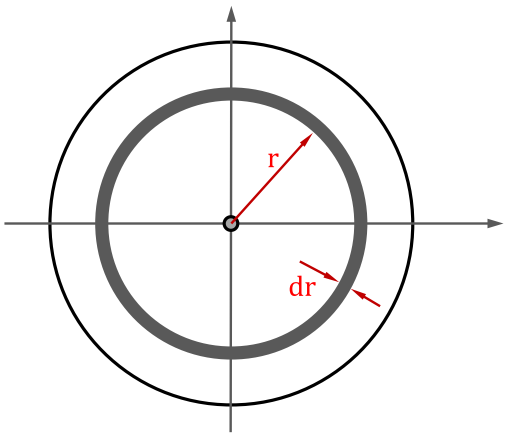
Λύση



Επιλέγουμε μια κυκλική τομή του δίσκου πάχους h και θεωρούμε σ' αυτόν στοιχειώδη κυκλικό δακτύλιο πάχους dr σε απόσταση r από το κέντρο. Με βάση τον ορισμό της ροπής αδράνειας και εάν με ρ συμβολίσουμε την πυκνότητα του υλικού έχουμε:

$$dI = r^2 dm = r^2 \rho \; dV = r^2 \rho \; 2\pi r h \; dr$$

$$\Longrightarrow dI = 2\pi\rho \; h r^3 \; dr$$



Η συνολική ροπή αδράνειας του σώματος αυτού υπολογίζεται από το μονοδιάστατο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^R 2\pi\rho \; h r^3 \; dr = 2\pi\rho \; h \frac{R^4}{4}$$

Ανασχηματίζοντας το αποτέλεσμα έτσι ώστε να προκύψει ο όγκος του γεωμετρικού σχήματος και κατά συνέπεια η συνολική του μάζα, καταλήγουμε:

$$I = 2\pi\rho \; h\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\left(\pi R^2 h \rho\right) R^2 = \frac{1}{2}\left(V\rho\right) R^2 = \frac{1}{2} M R^2 \Longrightarrow \boxed{I = \tfrac{1}{2} M R^2}$$

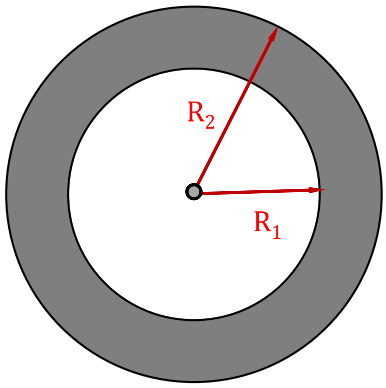
Σημείωση:
Ως *ακτίνα αδράνειας* ορίζεται η ποσότητα K για την οποία ισχύει $I = MK^2$. Είναι προφανές ότι για ομογενή στερεά σώματα η ακτίνα αδράνειας αποτελεί μια συντόμευση για την απόδοση της ροπής αδράνειας. Έτσι, στην άσκηση αυτή το αποτέλεσμα ισοδυναμεί με την έκφραση $K^2 = R^2/2$.

ΑΣΚΗΣΗ 7.2

Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας ομογενούς δακτυλίου συνολικής μάζας M με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2 (σφονδύλου) ως προς τον γεωμετρικό του άξονα.

Λύση

Η άσκηση αυτή διαφέρει ως προς την προηγούμενη μόνο ως προς τα όρια ολοκλήρωσης: Το κάτω όριο δεν είναι τώρα μηδέν αλλά R_1. Επιλέγουμε λοιπόν και πάλι μια κυκλική τομή του δακτυλίου πάχους h και θεωρούμε σ' αυτόν στοιχειώδη κυκλικό δακτύλιο πάχους dr σε απόσταση r από το κέντρο. Εάν συμβολίσουμε με ρ την πυκνότητα του υλικού, τότε η στοιχειώδης ροπή αδράνειας είναι:



$$dI = r^2 dm = r^2 \rho\, dV = r^2 \rho\, 2\pi r h\, dr$$

Η συνολική ροπή αδράνειας προκύπτει από την ολοκλήρωση:

$$I = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho\, 2\pi r h\, dr = 2\pi\rho\, h \left[\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right] = \frac{1}{2}\pi\rho\, h \left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

Η πρώτη παρένθεση του αποτελέσματος (διαφορά τετραγώνων των ακτίνων) μας δίνει με το π την επιφάνεια της διατομής και κατά συνέπεια ανακατασκευάζει την μάζα του σώματος και δίνει τελικό αποτέλεσμα:

$$I = \frac{1}{2}\rho\, h \left(\pi R_2^2 - \pi R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right) = \frac{1}{2}\rho\, hV \left(R_2^2 + R_1^2\right) = \frac{1}{2}M\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{I = \tfrac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right)}$$

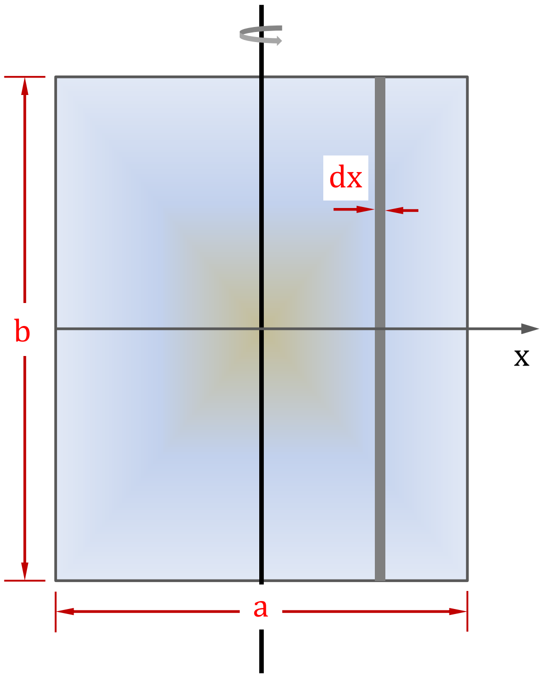
Σημειώσεις:

- Η ακτίνα αδράνειας στην περίπτωση αυτή είναι $K^2 = \frac{1}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$
- Είναι προφανές εκ του αποτελέσματος ότι για $R_1 \to 0$ προκύπτει $I = \frac{1}{2}MR_2^2$, δηλαδή η ροπή αδράνειας πλήρους δίσκου, ενώ για $R_1 \to R_2$ προκύπτει $I = MR_2^2$, το οποίο εκφράζει τη ροπή αδράνειας δακτυλίου πολύ μικρής διάστασης (η μάζα του βρίσκεται συγκεντρωμένη σε συγκεκριμένη ακτίνα από το κέντρο περιστροφής).

ΑΣΚΗΣΗ 7.3

Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας ομογενούς παραλληλεπίπεδης πλάκας διαστάσεων a και b και συνολικής μάζας M ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο της πλάκας και παράλληλο σε μια πλευρά του.

Λύση



Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι ο άξονας περιστροφή είναι παράλληλος στην πλευρά b, ενώ κατά μήκος της πλευράς a και από το κέντρο της πλάκας διέρχεται ο άξονας x ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων.
Επιλέγοντας μια στοιχειώδη παράλληλη στον άξονα περιστροφής ζώνη διάστασης dx, η οποία έστω ότι έχει πάχος (βάθος) h και προφανώς πλάτος b, και δεχόμενοι πυκνότητα υλικού ρ, τότε η στοιχειώδης ροπή αδράνειας είναι:

$$dI = x^2 dm = x^2 \rho \; dV = x^2 \rho \; hb \; dx$$

Κατά συνέπεια:

$$I = \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 \rho \; dV = \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 \rho \; hb \; dx = \rho \; hb \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 dx = \rho \; hb \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-a/2}^{+a/2}$$

$$\Longrightarrow = \rho \; hb \frac{a^3}{12} = \frac{1}{12} \rho \, (hab) \, a^2 = \frac{1}{12} \rho \; V a^2 \Longrightarrow \boxed{I = \tfrac{1}{12} M a^2}$$

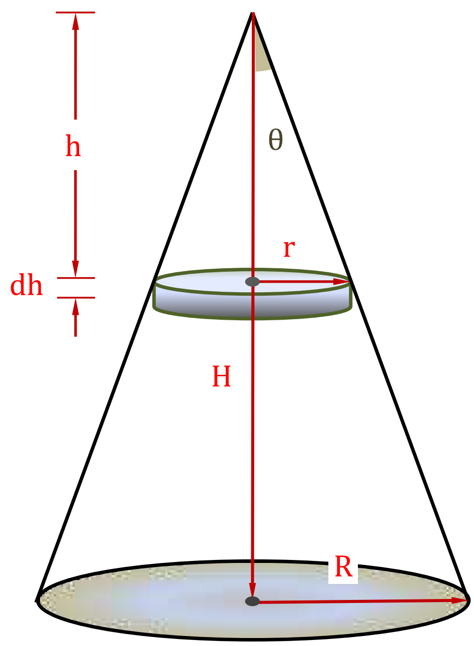
Σημειώσεις:

- Η ακτίνα αδράνειας στην περίπτωση αυτή είναι $K^2 = \frac{1}{12} a^2$
- Το αποτέλεσμα δείχνει ότι η ροπή αδράνειας, εφόσον η παραλληλεπίπεδη πλάκα είναι ομογενής, δεν εξαρτάται από την παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής διάσταση της πλάκας. Προφανώς η διάσταση αυτή συνεισφέρει μόνο στην συνολική μάζα M του σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ 7.4

Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας ομογενούς κανονικού κώνου ύψους H, ακτίνας βάσεως R και συνολικής μάζας M ως προς άξονα διερχόμενο από τον άξονά του.

Λύση



Αν θεωρήσουμε δίσκο στοιχειώδους πάχους dh ο οποίος ευρίσκεται σε απόσταση h από την κορυφή του κώνου και έχει μάζα dm, τότε ο δίσκος αυτός έχει στοιχειώδη ροπή αδράνειας (βλέπε και Άσκηση 7.1) ίση με:

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm$$

όπου r η ακτίνα του δίσκου αυτού.
Για την εύρεση της συνολικής ροπής αδράνειας θα πρέπει να ολοκληρώσουμε κατά μήκος όλου του ύψους H λαμβάνοντας υπόψη και την μεταβολή της ακτίνας r από το τυχαίο ύψος h. Δηλαδή:

$$I = \int_M dI = \int_M \frac{1}{2} r^2 dm = \int_0^H \frac{1}{2} r^2 \left(\pi r^2 \rho\right) dh$$

Δεδομένου όμως ότι για δοσμένο κώνο η γωνία της κορυφής ϑ είναι σταθερή και καθορισμένη από τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά, ισχύει:

$$tan\theta = \frac{r}{h} \Longrightarrow h = \frac{r}{tan\theta} \Longrightarrow dh = \frac{1}{tan\theta} dr \Longrightarrow dh = \frac{1}{R/H} dr \Longrightarrow dh = \frac{H}{R} dr$$

οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int_0^R \frac{1}{2} r^2 \left(\pi r^2 \rho\right) \frac{H}{R} dr == \frac{1}{2} \pi \rho \frac{H}{R} \frac{R^5}{5} = \frac{1}{10} \pi R^4 H \rho = \frac{3}{10} \left(\frac{1}{3} \pi R^2 H \rho\right) R^2$$

$$\Longrightarrow I = \frac{3}{10} (V\rho) R^2 = \frac{3}{10} M R^2 \Longrightarrow \boxed{I = \frac{3}{10} M R^2}$$

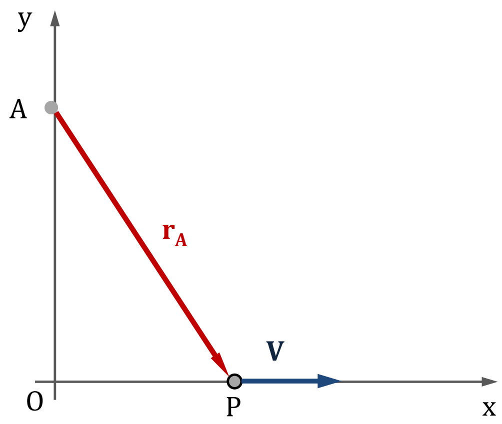
7.2 Στροφορμή - Δυναμική Στερεού Σώματος

ΑΣΚΗΣΗ 7.5

Σωμάτιο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x με σταθερή γραμμική ταχύτητα V. Να βρεθούν:
(α) Η στροφορμή του L_0 ως προς την αρχή των αξόνων
(β) Η στροφορμή του L_A ως προς το σημείο Α(0,α,0) του χώρου.

Λύση

Με βάση τον ορισμό της στροφορμής $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ υπολογίζονται τα παρακάτω:



Περίπτωση (α)

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{OP} \times m\vec{V} = |OP|\hat{i} \times mV\hat{i}$$

Αλλά το μήκος $|OP|$ εξαιτίας της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης της μάζας m δίνεται από τη σχέση $|OP| = Vt$, οπότε η ζητούμενη στροφορμή γίνεται:

$$\vec{L}_0 = Vt\hat{i} \times mV\hat{i} = mV^2t\left(\hat{i} \times \hat{i}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{\vec{L}_0 = 0}$$

Περίπτωση (β)

$$\vec{L}_A = \vec{r}_A \times \vec{p} = \left(\vec{AO} + \vec{OP}\right) \times m\vec{V} = \left(-\alpha\hat{j} + Vt\hat{i}\right) \times mV\hat{i} =$$

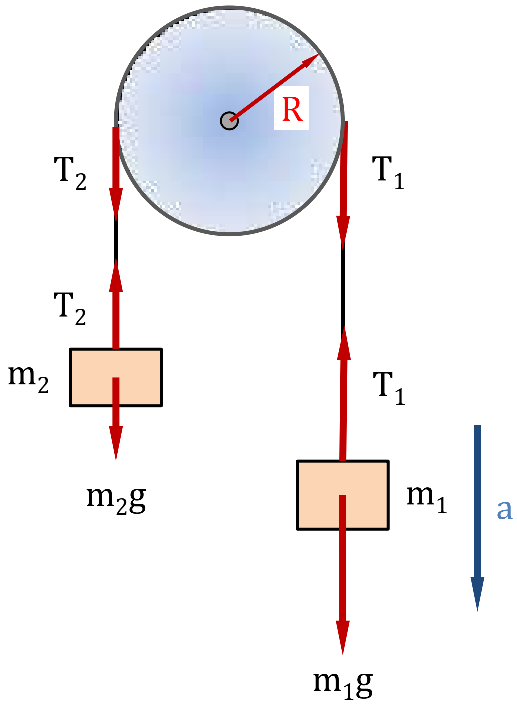
$$= mV^2t\left(\hat{i} \times \hat{i}\right) - \alpha mV\left(\hat{j} \times \hat{i}\right) = 0 + \alpha mV\hat{k} \Longrightarrow \boxed{\vec{L}_A = \alpha mV\hat{k}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.6

Να μελετηθεί η Μηχανή του Atwood, δηλαδή σύστημα δύο μαζών m_1 και m_2 που κρέμονται με αβαρές και μη εκτατό νήμα από δισκοειδή τροχαλία μάζας M και ακτίνας R. Υποθέτοντας πως $m_1 > m_2$ να υπολογισθεί η επιτάχυνση a του συστήματος.

Λύση

Με βάση τις δυνάμεις που δρουν στα δύο σώματα και την τροχαλία όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, περιγράφεται η γραμμική κίνηση των δύο σωμάτων και η περιστροφική κίνηση της τροχαλίας με τις παρακάτω εξισώσεις:



$$
\begin{aligned}
m_1 g - T_1 &= +a m_1 && (1)\\
m_2 g - T_2 &= -a m_2 && (2)\\
(T_1 - T_2)R &= I a_\Gamma = I\frac{a}{R} && (3)
\end{aligned}
$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$$a(m_1+m_2) = (m_1-m_2)g-(T_1-T_2)$$

και αντικαθιστώντας τον όρο $(T_1 - T_2)$ από την εξίσωση (3) παίρνουμε τελικά:

$$a(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2)g - I\frac{a}{R^2} \Longrightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2}g$$

Λαμβάνοντας δε υπόψη την ροπή αδράνειας της δισκοειδούς τροχαλίας $I = 1/2MR^2$, το αποτέλεσμα διαμορφώνεται στο:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + (1/2MR^2)/R^2}g \Longrightarrow \boxed{a = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+M/2}g}$$

Συγκρινόμενο το αποτέλεσμα αυτό με την προκύπτουσα επιτάχυνση για τροχαλία αμελητέας μάζας

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

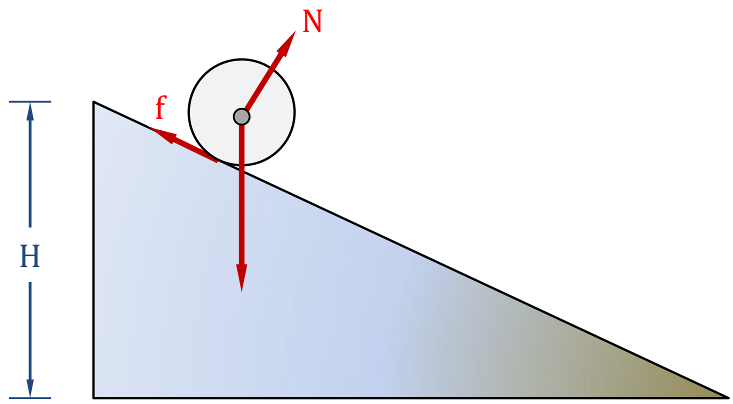
παρατηρούμε πως η μάζα της τροχαλίας συμμετέχει κατά το ήμισυ στην συνολική αδράνεια του συστήματος $(m_1+m_2+M/2)$ ενώ η κινούσα δύναμη $(m_1-m_2)g$ παραμένει η ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 7.7

Σφαίρα και κύλινδρος ίσης μάζας M και ακτίνας R αφήνονται χωρίς αρχική ταχύτητα να κυλήσουν από το ίδιο αρχικό ύψος H σε κεκλιμένο επίπεδο. Εάν τα σώματα αυτά δεν ολισθαίνουν κατά τη κίνησή τους, να βρεθεί ποιο από τα δύο θα φτάσει πρώτο στο τέλος του κεκλιμένου επιπέδου. Δίνονται οι ροπές αδράνειες, της μεν σφαίρας $I_S = \frac{2}{5}MR^2$, του δε κυλίνδρου $I_C = \frac{1}{2}MR^2$.

Λύση

Κάνοντας χρήση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για κάθε ένα των σωμάτων θα έχουμε τελικά μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης. Θα ισχύει λοιπόν:



$$MgH = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\frac{V^2}{R^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{V^2 = \frac{2MgH}{M+I/R^2}}$$

Παρατηρούμε πως το σώμα με την μικρότερη ροπή αδράνειας έχει μεγαλύτερη τελική γραμμική ταχύτητα, άρα φτάνει πρώτο. Κατά συνέπεια η σφαίρα είναι αυτή που θα φτάσει πρώτη στο τέλος του κεκλιμένου επιπέδου. Ειδικότερα δε, οι τελικές ταχύτητες θα είναι:

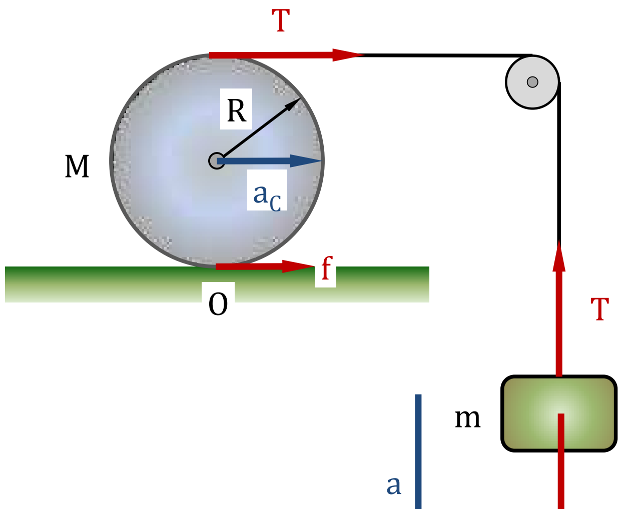
$$V_S^2 = \frac{2MgH}{M + (2/5MR^2)/R^2} \Longrightarrow \boxed{V_S^2 = \frac{10}{7}gH}$$

$$V_C^2 = \frac{2MgH}{M + (1/2MR^2)/R^2} \Longrightarrow \boxed{V_C^2 = \frac{4}{3}gH}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.8

Κύλινδρος μάζας M κυλίεται με τριβές χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση δύναμης την οποία ασκεί εφαπτομενικά στον κύλινδρο μέσω τροχαλίας σώμα μάζας m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογισθεί η γραμμική επιτάχυνση του κέντρου του κυλίνδρου a_C.

Λύση



Σχεδιάζοντας τις δυνάμεις που ενεργούν σε κάθε σώμα όπως φαίνονται στο σχήμα και λαμβάνοντας υπόψη τις παρακάτω κινήσεις

1. Μεταφορική κυλίνδρου (a_C)

2. Περιστροφική κυλίνδρου (a_C/R)

3. Μεταφορική μάζας (a)

καταλήγουμε στις τρεις παρακάτω εξισώσεις κίνησης, όπου υπεισέρχονται οι τρεις άγνωστες ποσότητες: Η δύναμη τριβής του κυλίνδρου f, η τάση του νήματος T και τέλος η ζητούμενη γραμμική επιτάχυνση του κέντρου a_C του κυλίνδρου.

$$\left\{\begin{array}{rcl} T+F &=& Ma_C \\ (T-F)R &=& I\frac{a_C}{R} \\ mg-T &=& ma \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} T+F &=& Ma_C & (1) \\ T-F &=& I\frac{a_C}{R^2} & (2) \\ mg-T &=& 2ma_C & (3) \end{array}\right\}$$

Στην εξίσωση (3) ελήφθη υπόψη πως η μετατόπιση του κέντρου του κυλίνδρου είναι πάντα το μισό της μετατόπισης του νήματος. Από τις (1) και (2) με πρόσθεση καταλήγουμε στη σχέση:

$$2T = \left(M + \frac{I}{R^2}\right) a_C \Longrightarrow T = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right) a_C$$

η οποία όταν αντικατασταθεί στην (3) δίνει το τελικό αποτέλεσμα:

$$mg - \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right) a_C = 2ma_C \Longrightarrow a_c = \frac{2m}{4m + M + I/R^2} g$$

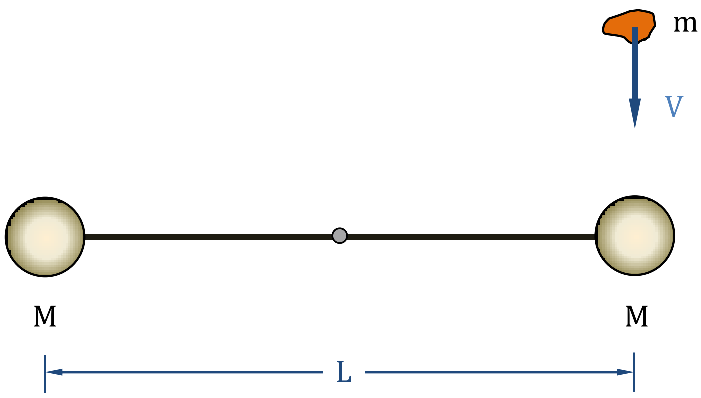
Εάν δε αντικατασταθεί και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = 1/2MR^2$, τότε:

$$a_c = \frac{2m}{4m + M + (1/2MR^2)/R^2} g \Longrightarrow \boxed{a_c = \frac{m}{2m + 3/4M} g}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.9

Στόκος μάζας m κινούμενος με ταχύτητα V προσκολλάται σε μία από τις μπάλες ενός αλτήρα, ο οποίος δύναται να περιστρέφεται χωρίς τριβές κατακόρυφα, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσον της αβαρούς ράβδου που συνδέει τις δύο μπάλες. Εάν η μάζα κάθε μπάλας είναι M το δε μήκος της ράβδου L να υπολογισθούν:
(α) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω αμέσως μετά την προσκόλληση του στόκου στην μπάλα.
(β) Τον λόγο των κινητικών ενεργειών πριν και μετά την πρόσκρουση.
(γ) Την συνολική γωνία περιστροφής του αλτήρα μετά την προσκόλληση.

Λύση



Ερώτημα (α)

Είναι προφανές ότι ο αλτήρας πριν την πρόσκρουση του στόκου βρίσκεται σε ισορροπία οριζοντιωμένος. Με βάση την αρχή διατήρησης της στροφορμής του συστήματος έχουμε:

$$mV\frac{L}{2} = \left[m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 2M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\omega$$

απ' όπου μπορεί να υπολογιστεί το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω:

$$\omega = \frac{mV}{(2M+m)(L/2)} \Longrightarrow \boxed{\omega = \frac{2mV}{(2M+m)L}}$$

Ερώτημα (β)

Ο λόγος των κινητικών ενεργειών, μετά και πριν την πρόσκρουση, είναι:

$$\frac{k_f}{k_i} = \frac{1/2I\omega^2}{1/2mV^2} = \frac{I}{m}\left(\frac{\omega}{V}\right)^2 = \frac{(2M+m)(L/2)^2}{m}\left(\frac{\omega}{V}\right)^2 = \left(\frac{2M}{m}+1\right)\left(\frac{L\omega}{2V}\right)^2$$

και κάνοντας χρήση του προηγούμενου αποτελέσματος

$$\frac{k_f}{k_i} = \left(\frac{2M}{m}+1\right)\left(\frac{m}{2M+m}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{\eta = \frac{k_f}{k_i} = \frac{m}{2M+m}}$$

Ερώτημα (γ)

Αμέσως μετά την προσκόλληση, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν τριβές, θα έχουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Δηλαδή θα ισχύει:

$$E_i = E_f \Longrightarrow k_i + U_i = k_f + U_f \Longrightarrow k_i = U_f$$

$$\Longrightarrow \eta\frac{1}{2}mV^2 = \Big[Mg - (M+m)g\Big]\frac{L}{2}sin\theta \Longrightarrow sin\theta = -\eta\frac{V^2}{gL}$$

$$\boxed{sin\theta = -\frac{m}{2M+m}\frac{V^2}{gL}}$$

Είναι προφανές πως το σύστημα θα ισορροπήσει αφού διαγράψει πρώτα τόξο 180^o όπως φαίνεται από το αρνητικό πρόσημο του αποτελέσματος.

7.3 Ταλάντωση Στερεού Σώματος

ΑΣΚΗΣΗ 7.10

Δίδεται ομογενής λεπτή ράβδος, η οποία έχει μάζα M και μήκος L.
(α) Να υπολογίσετε αναλυτικά τη ροπή αδράνειας της ράβδου I_0 ως προς άξονα κάθετο σ΄ αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου.
(β) Στο κάτω άκρο της ράβδου στερεώνεται μικρή σημειακή μάζα $M/3$. Το προκύπτον στερεό σώμα αναρτάται από σημείο που απέχει το $1/4$ του μήκους της ράβδου από το πάνω άκρο της, έχοντας τη δυνατότητα να περιστραφεί ελεύθερα και χωρίς τριβές γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο αυτό. Πόσο είναι η ροπή αδράνειας I του σώματος ως προς τον άξονα αυτό· Ποια είναι η διαφορική εξίσωση της κίνησης·
(γ) Με βάση τη διαφορική εξίσωση της κίνησης του προηγουμένου ερωτήματος, ποια είναι η αναμενόμενη περίοδος της ταλάντωσης του σώματος γύρω από τον άξονα αυτόν·

Λύση

Ερώτημα (α)

$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ (Βλέπε διαφάνειες μαθήματος).

Ερώτημα (β)

Πρέπει να εφαρμοστεί το θεώρημα Steiner για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας της ράβδου ως προς τον καινούργιο άξονα και να προστεθεί η συνεισφορά της σημειακής επιπρόσθετης μάζας. Υπολογισμοί δίνουν:

$$I = I_{CM} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \frac{M}{3}\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{9}{48}\right)ML^2$$

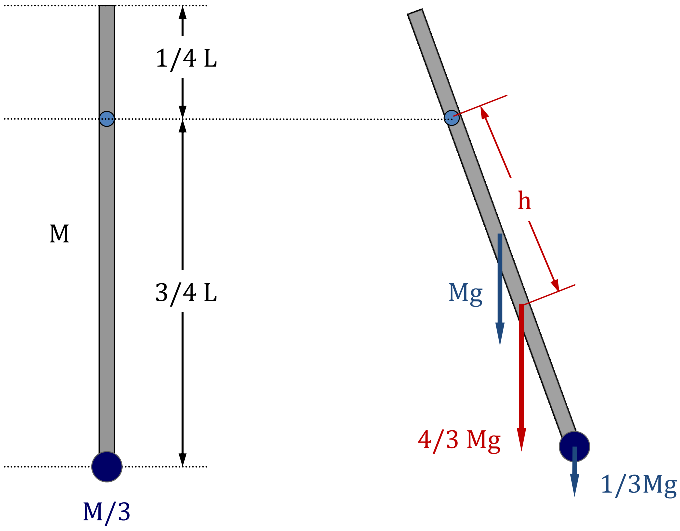
$$\boxed{I = \tfrac{1}{3}ML^2}$$

Όταν το σύστημα περιστραφεί κατά μικρή γωνία ϑ, τότε:

$$\sum \tau = I a_\Gamma$$

$$-mghsin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

όπου m η συνολική μάζα του συστήματος και h η απόσταση του κέντρου μάζας όλου του συστήματος από το κέντρο περιστροφής. Για μικρές γωνίες ϑ ισχύει:



$$-mgh\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\theta = 0$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την αρμονική κίνηση του στερεού σώματος.

Ερώτημα (γ)

Με βάση την παραπάνω διαφορική εξίσωση συνάγεται πως

$$\omega^2 = \frac{mgh}{I}\theta \quad , \quad m = M + \frac{M}{3} = \frac{4M}{3}$$

Η απόσταση h του κέντρου μάζας από τον άξονα περιστροφής υπολογίζεται ως εξής:

$$h = \frac{L}{4} + X_{CM} \quad , \quad MgX_{CM} = \frac{M}{3}g\left(\frac{L}{2} - X_{CM}\right) \Longrightarrow X_{CM} = \frac{1}{8}L \quad h = \frac{L}{4}+\frac{L}{8} = \frac{3L}{8}$$

Οπότε:

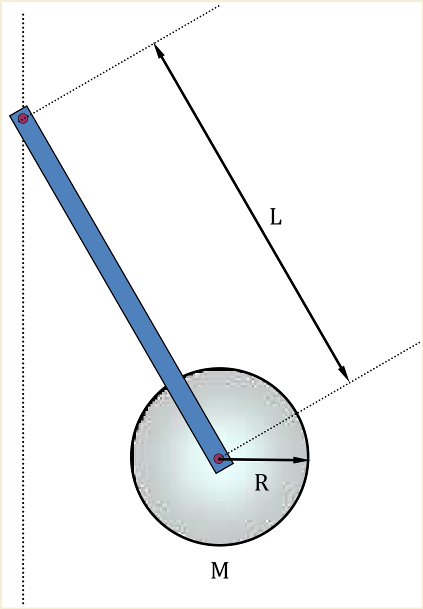
$$\omega^2 = \frac{(4/3M)g(3/8L)}{1/3ML^2} = \frac{3g}{2L} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}}$$

7.4 Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 7.11

Το φυσικό εκκρεμές ενός ρολογιού αποτελείται από αβαρή ράβδο μήκους L στην άκρη της οποίας είναι στερεωμένος ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R. Το σύστημα δύναται να περιστρέφεται κατακόρυφα χωρίς τριβές από το ανώτατο άκρο της ράβδου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Για μια μικρή εκτροπή από τη θέση ισορροπίας να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις που επενεργούν στο σύστημα και να υπολογιστεί η συνολική των ροπή. Να γραφεί η εξίσωση κίνησης του συστήματος και να υπολογιστεί η περίοδός του.

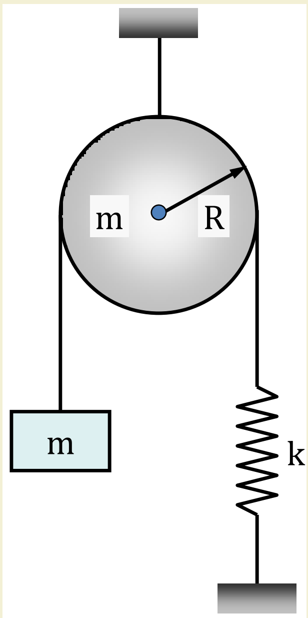
Δίδεται η ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2}MR^2$



ΑΣΚΗΣΗ 7.12

Αβαρές και μη εκτατό νήμα που περνά από κυλινδρική τροχαλία μάζας m και ακτίνας R, στο ένα άκρο είναι συνδεδεμένο με μάζα m, ενώ στο άλλο με ελατήριο σταθεράς k, το οποίο είναι πακτωμένο στο έδαφος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί. Τραβάμε λίγο προς τα κάτω τη μάζα m, εκτρέποντάς την από τη θέση ισορροπίας. Να υπολογιστεί η περίοδος T των μικρών ταλαντώσεων. Θεωρούμε ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της κυλινδρικής



τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Κεφάλαιο 8

ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

- Νομος της Βαρυτητας {Διανυσματική Έκφραση, Βαρύτητα στη Γη και σε Πλανήτες}
- Νομοι του Kepler {Πεδίο Κεντρικών Δυνάμεων, Αρχή Διατήρησης Στροφορμής, Κίνηση Πλανητών και Νόμοι του Kepler }
- Βαρυτικη Δυναμικη Ενεργεια {Έκφραση του Βαρυτικού Δυναμικού, Ταχύτητα Διαφυγής, Τροχιές και Ενέργεια Δορυφόρου}

Ο γνωστός Νόμος της Βαρύτητας του Newton εκφράζεται σε διανυσματική μορφή με την βοήθεια του διανύσματος θέσης και συζητούνται απλά θέματα, όπως η βαρύτητα στην επιφάνεια της Γης αλλά και άλλων πλανητών. Αποδεικνύεται πως το βαρυτικό πεδίο σαν κεντρικό πεδίο δυνάμεων διατηρεί την στροφορμή. Γίνεται αναφορά στους Νόμους του Kepler και στην απόδειξή των.

Υπολογίζεται το έργο που απαιτείται για να μετακινηθεί ένα σώμα μέσα σε βαρυτικό πεδίο από συγκεκριμένο σημείο στο άπειρο και εισάγεται η έννοια του Βαρυτικού Δυναμικού και της ταχύτητας διαφυγής. Αναδεικνύεται η σύνδεση της δύναμης και του δυναμικού μέσω της της σχέσης $\vec{F} = -\partial U/\partial r\ \hat{r}$ για το συντηρητικό πεδίο των κεντρικών δυνάμεων.

Τέλος μελετάται η δυναμική των τροχιών δορυφόρου σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα πλανήτη και υπολογίζεται η συνολική ενέργεια δορυφόρου σε ελλειπτική τροχιά, απ΄ όπου συνάγεται η ισοδυναμία του μεγάλου ημιάξονα της έλλειψης με την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

8.1 Νόμος της Βαρύτητας

ΑΣΚΗΣΗ 8.1

Ένας πλανήτης μπορεί να θεωρηθεί σαν ομογενής συμπαγής σφαίρα ακτίνας R, ο οποίος προκαλεί επιτάχυνση της βαρύτητας a_g στην επιφάνειά του. Σε πόση απόσταση από το κέντρο του η επιτάχυνση αυτή της βαρύτητας μειώνεται στο μισό της $a_g/2$;

Λύση

Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια ενός πλανήτη δίνεται από τη σχέση:

$$a_g = G\frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

όπου M η μάζα του πλανήτη, R η ακτίνα του και G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας. Ισοδύναμα, η σχέση αυτή εκφράζεται και μέσω της πυκνότητας από την:

$$a_g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{4/3\pi R^3\rho}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G R\rho \qquad (2)$$

Άρα, υπάρχουν δύο τρόποι για να μειωθεί η επιτάχυνση της βαρύτητας που προκαλεί ο σφαιρικός αυτός πλανήτης: Είτε μεγαλώνοντας την απόσταση από την επιφάνειά του [Σχέση (1)] κινούμενοι **εκτός** του πλανήτη, ή μειώνοντας την ενεργό μάζα που συμμετέχει στο βαρυτικό πεδίο εισερχόμενοι **εντός** του πλανήτη [Σχέση (2)]. Εάν R_x είναι η ζητούμενη απόσταση, τότε αυτή στην πρώτη περίπτωση (εκτός του πλανήτη) είναι:

$$\left\{\begin{array}{l} a_g = G\frac{M}{R^2} \\ a_g/2 = G\frac{M}{R_x^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{R_x^2}{R^2} = 2 \Longrightarrow \boxed{R_x = \sqrt{2}R}$$

ενώ για την δεύτερη περίπτωση (εντός του πλανήτη) αυτή γίνεται:

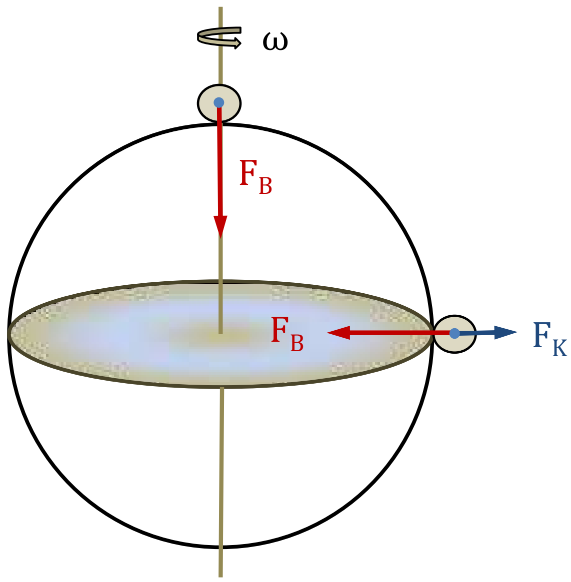
$$\left\{\begin{array}{l} a_g = \frac{4}{3}\pi G R\rho \\ a_g/2 = \frac{4}{3}\pi G R_x\rho \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{R}{R_x} = 2 \Longrightarrow \boxed{R_x = \frac{1}{2}R}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8.2

Σε υποθετικό σφαιρικό πλανήτη, όταν ένα σώμα μεταφερθεί από τον πόλο στον ισημερινό χάνει το μισό του βάρος. Να υπολογίσετε τη διάρκεια της μέρας (μιας πλήρους περιστροφής) στον πλανήτη αυτόν, εάν είναι γνωστή η μέση πυκνότητά του ρ.

Λύση

Λόγω της περιστροφικής κίνησης του πλανήτη, στα αντικείμενα εκτός του πόλου επιδρά επιπλέον μία φυγόκεντρος δύναμη η οποία μειώνει την ένταση της βαρυτικής δύναμης και δημιουργεί το **φαινόμενο βάρος** του σώματος. Προφανώς, η φυγόκεντρη αυτή δράση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στον ισημερινό. Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:



$$\{\text{ Φαινόμενο Βάρος στον Ισημερινό}\} = 1/2\ \{\text{Φαινόμενο Βάρος στον Πόλο}\}$$

$$G\frac{mM}{R^2} - m\omega^2 R = \frac{1}{2}G\frac{mM}{R^2} \quad\Longrightarrow\quad m\omega^2 R = \frac{1}{2}G\frac{mM}{R^2} \quad\Longrightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{2R^3}}$$

Εκφράζοντας τη μάζα του σφαιρικού πλανήτη συναρτήσει της δοσμένης πυκνότητάς του ρ:

$$\omega = \sqrt{\frac{G(4/3\pi R^3\rho)}{2R^3}} \quad\Longrightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{2}{3}\pi G\rho}$$

Η περίοδος της περιστροφής του πλανήτη είναι κατά συνέπεια:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2\pi G\rho}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{T = \sqrt{\frac{6\pi}{G\rho}}}$$

<u>Σημείωση</u>

Εάν δεχθούμε μια μέση πυκνότητα ίση με αυτήν της Γης $\rho = 5.5\times 10^3\ Kg/m^3$ τότε η περίοδος είναι ίση με:

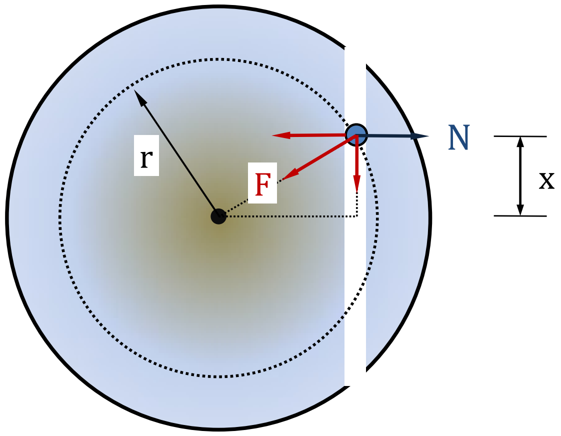
$$T = \sqrt{\frac{6\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{6\pi}{6.67\times 10^{-11}\cdot 5.5\times 10^3}} = 0.72\times 10^4 s$$

δηλαδή περίπου δύο ώρες!

ΑΣΚΗΣΗ 8.3

Κατά μήκος μιας χορδής στη Γη ανοίγεται ένα τούνελ και αφήνεται να πέσει σώμα, το οποίο κινείται χωρίς τριβές. Αγνοώντας όλες τις άλλες αλληλεπιδράσεις, να αποδειχθεί ότι το σώμα αυτό υπό την επίδραση της βαρύτητας εκτελεί αρμονική ταλάντωση, της οποίας ζητείται η περίοδος.

Λύση



Σε κάποια τυχαία θέση μέσα στο τούνελ στο σώμα ασκείται η βαρυτική δύναμη F, η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δύο κάθετες συνιστώσες: Σε μία κατά μήκος του τούνελ και σε μία κάθετη στα τοιχώματα του τούνελ. Η δεύτερη εξουδετερώνεται από την αντίσταση των τοιχωμάτων N, ενώ η πρώτη είναι αυτή που κινεί το σώμα. Είναι προφανές πως στον υπολογισμό της βαρυτικής δύναμης F συμμετέχει μόνο η μάζα της Γης που ορίζεται από την εκάστοτε θέση του σώματος (ακτίνα r).
Ορίζοντας την απόσταση x από την κάθετη στο τούνελ διάμετρο της γήινης σφαίρας, η κινούσα δύναμη είναι:

$$F_x = Fsin\theta = F\frac{x}{r} = G\frac{mM}{r^2}\frac{x}{r} = G\frac{mM}{r^3}\,x$$

όπου M η μάζα της Γης που ορίζεται από την ακτίνα r. Άρα:

$$F_x = G\frac{mM}{r^3}x = G\frac{m(4/3\pi r^3\rho)}{r^3}\,x \quad \Longrightarrow \quad F_x = \frac{4}{3}\pi Gm\rho\, x$$

και επειδή η δύναμη είναι της μορφής $F = -kx$ με $k = 4/3\pi Gm\rho$, το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η περίοδος της ταλάντωσης αυτής δίνεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4/3\pi Gm\rho}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}}$$

Όπως και προηγούμενα, για μέση πυκνότητα Γης $\rho = 5.5 \times 10^3\ Kg/m^3$ η ζητούμενη περίοδος είναι ίση με:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{6.67\times10^{-11}\cdot 5.5\times10^3}} \approx 5070s \approx 84.4min$$

8.2 Κυκλική Τροχιά Δορυφόρου

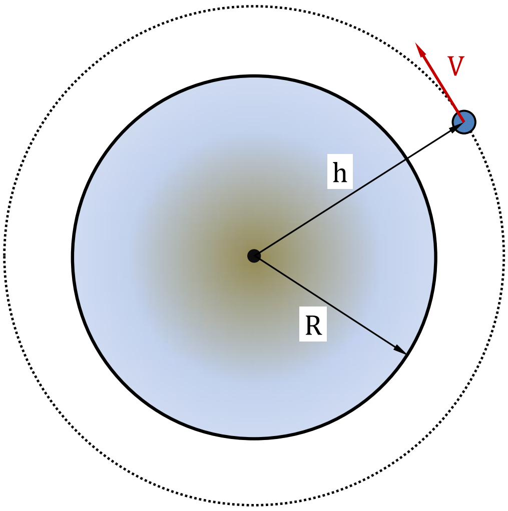
ΑΣΚΗΣΗ 8.4

Δορυφόρος μάζας m κινείται σε σταθερή κυκλική τροχιά ακτίνας h γύρω από σφαιρικό πλανήτη μάζας M και ακτίνας R. Να εξαχθούν οι βασικές εξισώσεις της κίνησής του.

Λύση

Η βασική σχέση που διέπει τη κίνηση δορυφόρου γύρω από πλανήτη είναι πως η βαρυτική δύναμη δρα ως κεντρομόλος δύναμη της κυκλικής κίνησης. Δηλαδή:

$$\boxed{F_k = F_B}$$



Από τη σχέση αυτή εξάγονται όλες οι βασικές σχέσεις που διέπουν την κίνηση του δορυφόρου.

Γραμμική Ταχύτητα V

$$F_k = F_B \implies \frac{mV^2}{h} = G\frac{mM}{h^2} \implies \boxed{V^2 = G\frac{M}{h}}$$

Γωνιακή Ταχύτητα ω

$$F_k = F_B \implies m\omega^2 h = G\frac{mM}{h^2} \implies \boxed{\omega^2 = G\frac{M}{h^3}}$$

Περίοδος Περιστροφής Τ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \implies \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{h^3}{GM}}}$$

Όλα τα παραπάνω φυσικά μεγέθη εξαρτώνται **μόνο από το ύψος h**! Διατηρήσιμες ποσότητες του δορυφόρου είναι η συνολική ενέργεια E και η στροφορμή L:

$$\boxed{E = K + U = \frac{1}{2}mV^2 - G\frac{mM}{h}}$$

$$\boxed{L = mVh = m\omega h^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8.5

Δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον Ισημερινό της Γης. Ποια είναι η απόστασή του από την επιφάνεια της Γης έτσι ώστε να παραμένει συνεχώς πάνω από το ίδιο σημείο;

Για να παραμένει συνεχώς ακίνητος πάνω από το ίδιο σημείο της Γης πρέπει η περίοδος περιφοράς του δορυφόρου όσο και της Γης, δηλαδή $T = 24\ h$. Αν λοιπόν αυτός βρίσκεται σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης, τότε:

$$m\omega^2(R+h) = G\frac{mM}{(R+h)^2} \implies m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(R+h) = G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

και κατά συνέπεια

$$(R+h)^3 = G\frac{M\ T^2}{4\pi^2} \implies R+h = \sqrt[3]{G\frac{M\ T^2}{4\pi^2}}$$

και τελικά

$$\boxed{h = \sqrt[3]{G\frac{M\ T^2}{4\pi^2}} - R}$$

Αντικαθιστώντας τη μάζα της Γης με $M \approx 6\times10^{24}\ Kg$ και έχοντας $T = 24\times3600\ s$ καταλήγουμε στο:

$$h = (42300 - 8600)\ km = 33700\ km \approx 4R$$

δηλαδή ο δορυφόρος αυτός πρέπει να τεθεί σε απόσταση 5 περίπου γήινων ακτίνων από το κέντρο της Γης.

8.3 Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 8.6

Αστέρας νετρονίων έχει ακτίνα 20 km και περιστρέφεται με συχνότητα 1 Hz. Πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη μάζα του ώστε το υλικό στην επιφάνειά του να παραμένει στη θέση του παρά την γρήγορη περιστροφή του αστέρα;
Απάντηση: $4.7 \times 10^{24}\ Kg$

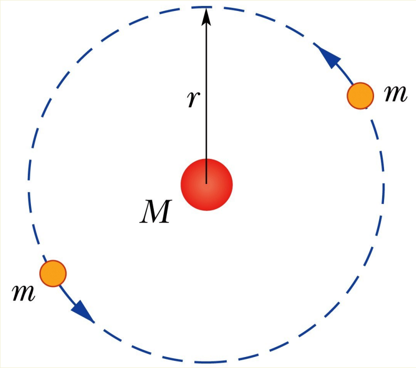
ΑΣΚΗΣΗ 8.7

Να αποδείξετε πως εάν ένας δορυφόρος περιστρέφεται πολύ κοντά στην επιφάνεια ενός πλανήτη με περίοδο T, η πυκνότητα ρ του πλανήτη δίνεται από τη σχέση:

$$\rho \ = \ \frac{3\pi}{GT^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8.8

Ένα τριπλό αστρικό σύστημα αποτελείται από δύο αστέρες, καθένας μάζας m, που περιφέρονται στην ίδια κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από έναν κεντρικό αστέρα μάζας M. Οι δύο περιστρεφόμενοι αστέρες βρίσκονται πάντοτε σε αντιδιαμετρικές θέσεις της τροχιάς. Να βρεθεί έκφραση για την περίοδο περιστροφής των αστέρων.



Απάντηση: $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G(M+m/4)}}$ *(Άσκηση 13.93 Halliday-Resnick)*

Κεφάλαιο 9

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

- Ρευστα σε Ηρεμια {Υδροστατική Πίεση, Μέτρηση της Πίεσης, Αρχή του Pascal}
- Ανωση {Άνωση, Αρχή του Αρχιμήδη}
- Ιδανικα Ρευστα σε Κινηση {Εξίσωση της Συνέχειας, Εξίσωση του Bernoulli}

Αφού ορισθεί η πίεση ως βαθμωτό μέγεθος και συζητηθούν οι διάφορες φυσικές μονάδες μέτρησης, η έννοια αυτή μεταφέρεται στα ρευστά και ορίζεται αντίστοιχα η υδροστατική πίεση νοητής στήλης ρευστού $P = \rho\, gh$. Συζητούνται τα διάφορα όργανα μέτρησης της πίεσης (μανόμεντρα). Στηριζόμενοι στο ασυμπίεστο των ιδανικών ρευστών εισάγεται η έννοια της μηχανής του Pascal. Για εμβαπτισμένα σώματα σε ρευστά εισάγεται η έννοια της άνωσης και αποδεικνύεται η Αρχή του Αρχιμήδη για απλά γεωμετρικά στερεά.

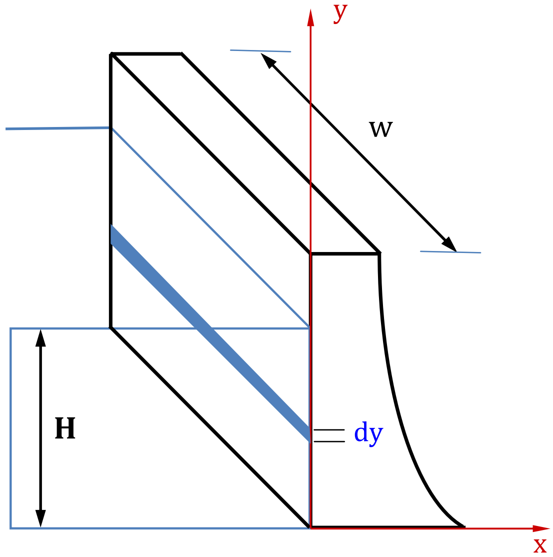
Για τα ιδανικά ρευστά σε κίνηση εισάγεται η έννοια της ροής (παροχής) και αποδεικνύεται ή εξίσωση της συνέχειας $V_1 A_1 = V_2 A_2$ σαν άμεση συνέπεια της διατήρησης της ροής. Στηριζόμενοι τέλος στην αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας εξάγεται η εξίσωση του Bernoulli.

9.1 Ρευστά σε Ηρεμία

ΑΣΚΗΣΗ 9.1

Υδάτινο φράγμα έχει πλάτος w και φράσσει όγκο νερού συνολικού ύψους H και γνωστής πυκνότητας ρ.
(α) Υπολογίστε την υδροστατική πίεση που ασκείται στο φράγμα σε ύψος y από τον πυθμένα του νερού. (β) Πόσο είναι η συνολικά ασκούμενη δύναμη F στο φράγμα από όλον τον υδάτινο όγκο;

Λύση



Ερώτηση (α)
Σε ύψος y από τον πυθμένα η υδροστατική πίεση είναι:

$$P = \rho\, gh = \rho\, g(H-y)$$

όπου $H-y$ το ύψος του υπερκείμενου νερού.
Ερώτηση (β)
Για μια ζώνη πλάτους w και ύψους dy η ασκούμενη στο τοίχωμα δύναμη είναι:

$$dF = PdA = \rho\, g(H-y)w\, dh$$

οπότε

$$F = \int F = \int_0^H \rho\, g(H-y)w\, dh = \rho\, gw \int_0^H (H-y)dh = \rho\, gw \int_H^0 (H-y)d(H-y)$$

$$F = \rho\, gw \left[\frac{(H-y)^2}{2}\right]_H^0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F \;=\; \tfrac{1}{2}\rho g w H^2}$$

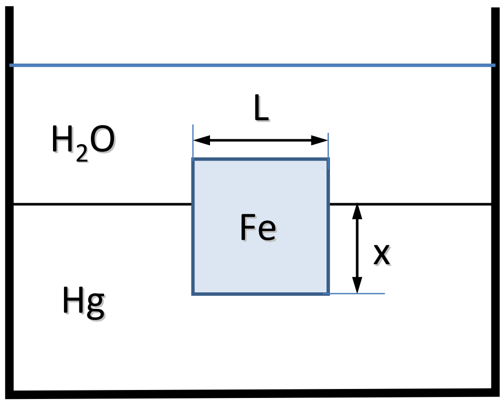
Σημείωση
Η συνολική δύναμη έχει τετραγωνική εξάρτηση από το ύψος H του νερού. Η μέση πίεση που ασκείται στο φράγμα προκύπτει εάν το παραπάνω αποτέλεσμα διαιρεθεί με την συνολική επιφάνεια wH του υδάτινου όγκου στο φράγμα. Προκύπτει:

$$\boxed{\tilde{P} \;=\; \tfrac{1}{2}\rho g H}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9.2

Δοχείο περιλαμβάνει νερό (H_2O) και υδράργυρο (Hg) σε αρκετή ποσότητα. Ένας κύβος από σίδηρο (Fe) με μήκος πλευράς $L = 0.06\ m$ ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα.
(α) Να υπολογισθεί πόσο μέρος του σιδήρου είναι βυθισμένο στον υδράργυρο και στο νερό αντίστοιχα.
(β) Να δώσετε, στην γενική περίπτωση, τη γραφική παράσταση της συναρτησιακής εξάρτησης που έχει το ξ με την πυκνότητα του υπερκείμενου ρευστού (H_2O). Τι θα συμβεί εάν το ρευστό αυτό αντικατασταθεί με άλλο μεγαλύτερης πυκνότητας, η οποία τείνει στην πυκνότητα του σώματος (Fe);
Δίνονται οι πυκνότητες: $\rho_{H_20} = 1.0 \times 10^3\ kg/m^3$, $\rho_{Fe} = 7.7 \times 10^3\ kg/m^3$, $\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3\ kg/m^3$

Λύση



Ερώτηση (α)

Εάν η μάζα του σώματος είναι m_{Fe} και οι εκτοπιζόμενες μάζες των δύο ρευστών m_{H_2O} και m_{Hg} αντίστοιχα, τότε ισχύει:

$$m_{Fe}\ g = m_{H_2O}\ g + m_{Hg}\ g$$

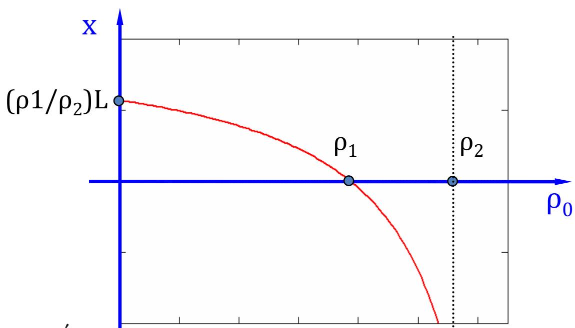
απ΄ όπου συνάγεται:

$$\rho_{Fe}\ L = \rho_{H_2O}\ (L - x) + \rho_{Hg}\ x$$

$$\rho_{Fe}\ L - \rho_{H_2O}\ L = x\ \ (\rho_{Hg} - \rho_{H_2O})$$

$$\boxed{x\ =\ L\ \frac{\rho_{Fe}-\rho_{H_2O}}{\rho_{Hg}-\rho_{H_2O}}}$$

και άρα $x\ =\ \frac{7.7-1.0}{13.6-1.0}\ L \approx 0.53\ L$



Ερώτηση (β)

Γράφοντας το παραπάνω αποτέλεσμα στη μορφή:

$$x\ =\ L\ \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_2 - \rho_0},$$

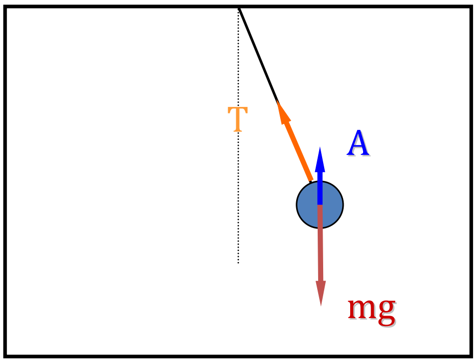
το γράφημα της συνάρτησης $x(\rho_0)$ φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Είναι προφανές πως για $\rho_0 \to \rho_1$ έχουμε $x \to 0$, δηλαδή το σώμα ανεβαίνει προς το υπερκείμενο ρευστό.

ΑΣΚΗΣΗ 9.3

Μικρή σφαίρα πυκνότητας ρ_0 κρέμεται από αβαρές νήμα μέσα σε ρευστό πυκνότητας ρ_1 και δύναται να εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις περιόδου T_1. Αντικαθιστώντας το ρευστό με άλλο πυκνότητας ρ_2 η περίοδος μεταβάλλεται σε T_2.
Δεχόμενοι ότι οι αντιστάσεις των ρευστών είναι αμελητέες και ότι $\rho_0 > \rho_1$ και $\rho_0 > \rho_2$ να υπολογισθεί η πυκνότητα του σώματος ρ_0 μόνο από τις πυκνότητες ρ_1, ρ_2 και τις περιόδους T_1, T_2.

Λύση

Στη σφαίρα επενεργούν τρεις δυνάμεις: Το βάρος της mg, η άνωση A και η τάση του νήματος T. Δεδομένου ότι το βάρος και η άνωση είναι κατακόρυφες, για μικρή εκτροπή της σφαίρας κατά γωνία ϑ θα ισχύει:



$$F = (mg - A) sin\theta$$
$$T = (mg - A) cos\theta$$

Εάν η γραμμική εκτροπή του εκκρεμούς είναι x τότε η κινούσα δύναμη F γράφεται:

$$F = (mg - A)\frac{x}{L} = \frac{mg - A}{L}\, x = kx$$

δηλαδή το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με σταθερά k. Οπότε η περίοδος της κίνησης δίνεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{mg - A}} = 2\pi\sqrt{\frac{V\rho_0\ L}{V\rho_0\ g - V\rho_i\ g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_i}\ \frac{L}{g}}$$

Κατά συνέπεια, για τα ρευστά του προβλήματος θα ισχύει:

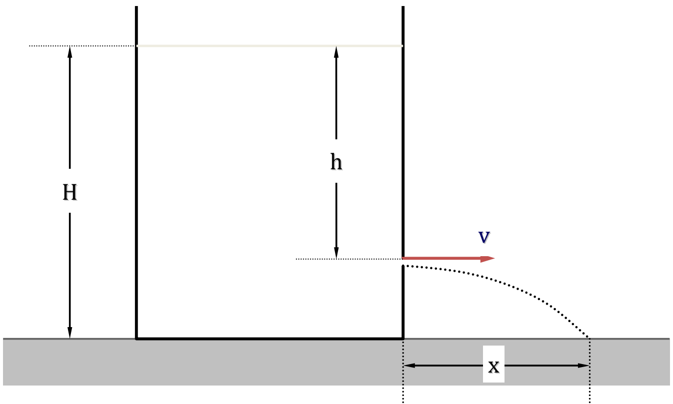
$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_1}\ \frac{\rho_0 - \rho_2}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\rho_0 - \rho_2}{\rho_0 - \rho_1}} \implies \rho_0 = \frac{\rho_1 T_1^2 - \rho_2 T_2^2}{T_1^2 - T_2^2}$$

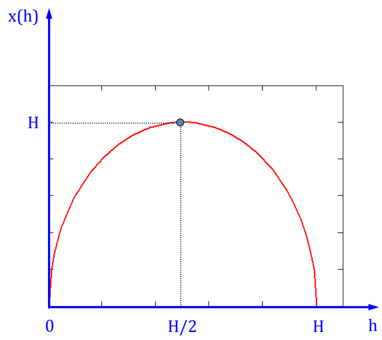
9.2 Ρευστά σε Κίνηση

ΑΣΚΗΣΗ 9.4

Ανοιχτό δοχείο μεγάλης διαμέτρου και ύψους H γεμάτο με νερό βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Σε απόσταση h από την επιφάνεια του νερού ανοίγουμε μια μικρή οπή, απ' όπου το νερό εκτοξεύεται αρχικά οριζόντια.
(α) Υπολογίστε την οριζόντια απόσταση x όπου το νερό συναντά το δάπεδο.
(β) Πώς εξαρτάται η εμβέλεια x από το υπερκείμενο ύψος του νερού h; Αποδώσατε γραφικά τη συνάρτηση $x = x(h)$ για $0 < h < H$.
(γ) Να διερευνηθεί η δυνατότητα να ανοιχθεί η οπή σε άλλο ύψος h' έτσι ώστε το εκτοξευόμενο νερό να διαγράφει το ίδιο βεληνεκές x. Πόσο είναι η απόσταση αυτή h';

Λύση





Ερώτηση (α)
Αν το νερό εκτοξεύεται με ταχύτητα V, τότε βάσει της εξίσωσης του Bernoulli η ταχύτητα αυτή υπολογίζεται (βλέπε διαφάνειες μαθήματος): $V = \sqrt{2gh}$. Κατά συνέπεια το ζητούμενο βεληνεκές είναι $x = Vt$, όπου t ο χρόνος που κινείται το νερό κατά την κατακόρυφη ελεύθερη πτώση:

$$H - h = \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow t = \sqrt{2\frac{H-h}{g}}$$

Κατά συνέπεια:

$$x = Vt = \sqrt{2gh}\sqrt{2\frac{H-h}{g}} \Longrightarrow \boxed{x \ = \ 2\sqrt{h(H-h)}}$$

Ερώτηση (β)

Η συνάρτηση $x = x(h)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρουσιάζει μέγιστο για $h = H/2$ και είναι $x(H/2) = H$.

Ερώτηση (γ)

Υποθέτουμε πως υπάρχουν δύο αποστάσεις h_1 και h_2 που δίνουν το ίδιο βεληνεκές. Άρα:

$$x(h_1) = x(h_2) \implies 2\sqrt{h(H-h_1)} \;=\; 2\sqrt{h(H-h_2)}$$

$$\implies h_1(H-h_1) \;=\; h_2(H-h_2) \implies h_1H - h_1^2 \;=\; h_2H - h_2^2$$

$$\implies h_2^2 - h_1^2 \;=\; (h_2 - h_1)H$$

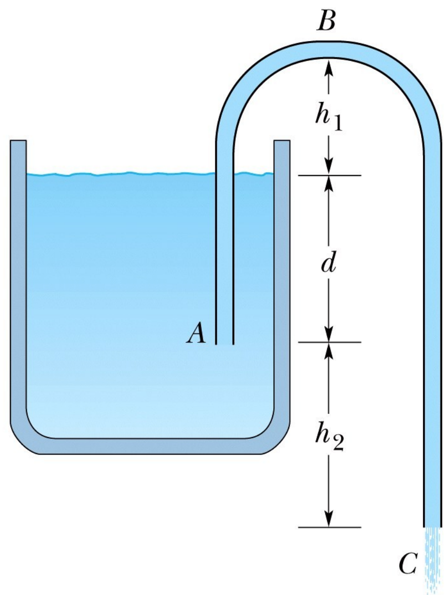
$$\implies \boxed{H = h_1 + h_2}$$

Δηλαδή οι δύο οπές πρέπει να ισαπέχουν από το μέσον του δοχείου, όπως εξ άλλου φαίνεται και από το συμμετρικό γράφημα της συνάρτησης $x(h)$.

ΑΣΚΗΣΗ 9.5

Στο σχήμα φαίνεται η αρχή του σιφωνίου, με το οποίο μπορούμε να απομακρύνουμε υγρό από το δοχείο. Αρχικά ο σωλήνας ABC πρέπει να είναι γεμάτος με το υγρό και όταν αυτό επιτευχθεί το υγρό ρέει λόγω διαφοράς πίεσης. Να υπολογισθεί η ταχύτητα εκροής και η πίεση στο ανώτατο σημείο του σωλήνα.

Λύση



Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli σε σημείο της επιφάνειας του υγρού του δοχείου καί στην έξοδο C του σωλήνα, λαμβάνοντας ως αναφορά του δυναμικού το επίπεδο της εισόδου του σιφωνίου (A):

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 + \rho g d \;=\; P_C + \frac{1}{2}\rho V_C^2 + \rho g(-h_2)$$

Αλλά $P_0 = P_C$ ίση με την ατμοσφαιρική πίεση και $V_0 \approx 0$ λόγω της μεγάλης επιφανείας του δοχείου, οπότε:

$$\frac{1}{2}\rho V_C^2 \;=\; \rho g d \;+\; \rho g h_2 \;\Longrightarrow\; \boxed{V_C = \sqrt{2g(d+h_2)}}$$

Αντίστοιχα για τα σημεία B και C η εξίσωση Bernoulli δίνει:

$$P_B \;+\; \frac{1}{2}\rho V_B^2 \;+\; \rho g(d+h_1) \;=\; P_C \;+\; \frac{1}{2}\rho V_C^2 \;+\; \rho g(-h_2)$$

και επειδή $V_B = V_C$ λόγω διατήρησης της ροής στην ίδια διατομή σωλήνα, καταλήγουμε στην:

$$P_B \;+\; \rho g(d+h_1) \;=\; P_C \;+\; \rho g(-h_2)$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_B \;=\; P_C \;-\; \rho g(h_1+d+h_2)}$$

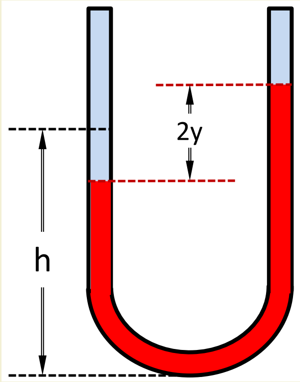
Από το παραπάνω αποτέλεσμα και δεδομένου πως $P_C = P_{atm}$, γίνεται κατανοητό πως, για να λειτουργήσει το σιφώνιο, πρέπει να ισχύει:

$$\boxed{\rho g(h_1+d+h_2) \;<\; P_{atm}}$$

9.3 Προτεινόμενες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 9.6

Κατακόρυφος υοειδής σωλήνας σταθεράς διαμέτρου περιέχει υγρό πυκνότητας ρ μέχρι του ύψους h. Δείξτε ότι αν το υγρό στη μια πλευρά πιεσθεί και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερο, τότε η κίνηση του πάνω και κάτω στις δύο πλευρές του σωλήνα: (α) Εκτελεί απλή αρμονική κίνηση (β) Βρείτε τη περίοδο Τ (γ) Χαράξτε και εξηγείστε τη γραφική παράσταση του Τ=Τ(ρ).



ΑΣΚΗΣΗ 9.7

Το νερό που ρέει διαμέσου σωλήνα εσωτερικής διαμέτρου 1.9 cm συνεχίζει σε τρεις σωλήνες έκαστος διαμέτρου 1.3 cm. (α) Να βρεθεί η παροχή του αρχικού σωλήνα εάν οι παροχές στους τρεις σωλήνες είναι αντίστοιχα 26, 19 και 11 L/min. (β) Πόσος είναι ο λόγος της ταχύτητας στον αρχικό σωλήνα προς τον σωλήνα παροχής 26 L/min;
Απάντηση: (α) 56 L/min (β) 0.992 *(Άσκηση 14.54 Halliday-Resnick)*

ΑΣΚΗΣΗ 9.8

Κυλινδρικό δοχείο περιέχει υγρό πυκνότητας ρ και περιστρέφεται ως προς τον άξονα συμμετρίας του που έχει κατακόρυφη κατεύθυνση. Εάν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι σταθερή και ίση με ω, να αποδειχθεί ότι η πίεση του υγρού σε απόσταση r από τον άξονα περιστροφής είναι:

$$P = P_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2,$$

όπου P_0 η πίεση του υγρού για $r = 0$.

Βιβλιογραφία

[1] Alonso Finn: *Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική, Τόμος Ι, Μηχανική και Θερμοδυναμική*, Μετάφραση και Επιμέλεια Λ.Κ. Ρεσβάνης και Τ.Α. Φίλιππας, Addison-Wesley Publishing (1980), ISBN: 0-201-00161-6

[2] Feynman, Leighton, Sands: The Feynman Lectures on Physics
The New Millenium Edition, Volume I, Basic Books (2011),
ISBN: 978-0201021165 and online https://www.feynmanlectures.caltech.edu/

[3] Giancoli: *Φυσική για Επιστήμονες & Μηχανικούς, Τόμος Α΄, 4η Έκδοση*, Μετάφραση Μπόντζος Γιώργος,
Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ (2013), ISBN: 978-960-418-342-5

[4] Halliday-Resnick-Walker: *ΦΥΣΙΚΗ* – Βασικες Αρχες, *ΤΟΜΟΣ Α΄, Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική, 11η Έκδοση*, Γενική Επιμέλεια Ε.Γ. Στυλιάρης, Εκδόσεις GUTENBERG (2021), ISBN: 978-960-01-2234-3

[5] R. Shankar: Fundamentals of Physics, Mechanics, Relativity and Thermodynamics, Open Yale Courses,
Yale University Press (2014), ISBN: 978-0-300-19220-9

[6] L. Susskind and G. Hrabovsky: Classical Mechanics – The Theoretical Minimum, Penguin Science Books (2013), ISBN: 978-0-141-97622-8

[7] L. Susskind and A. Friedman: Relativity and Calssical Field Theoty – The Theoretical Minimum, Basic Books (2017), ISBN: 978-0-465-09334-2

[8] Hugh D. Young and Roger A. Freedman: *Πανεπιστημιακή Φυσική, Τόμος Α΄, 4η Έκδοση*, Μετάφραση και Επιμέλεια από Ομάδα Πανεπιστημιακών,
Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ (2022), ISBN: 978-960-02-3824-2

[9] Κωνσταντίνος Ν. Φαράκος: *Εισαγωγή στη Νευτώνεια Μηχανική, 3η Έκδοση*, Εκδόσεις ΤΣΟΤΡΑΣ (2021) ISBN: 978-618-5495-50-3

Περιεχόμενα