ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2023-2024

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

- Γενική Αντιμετώπιση
- Διατήρηση της Ορμής σε Συστήματα Μεταβλητής Μάζας
- Κίνηση Πυραύλου
- Διάφορα Προβλήματα

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2023-2024

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ΦΑΡΑΚΟΣ	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ		9.10	9.7, 9.12	8.5-8.6
ΚΙΝΗΣΗ ΠΥΡΑΥΛΟΥ		9.10	9.12	8.6

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Χρονική μεταβολή της μάζας ενός συστήματος

m: σταθερή

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

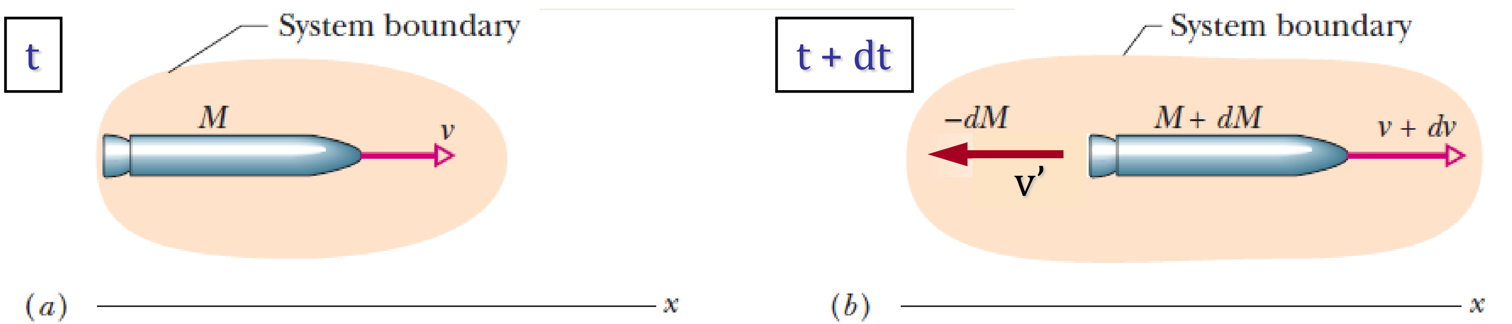
m: μεταβλητή

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}$$

$m\frac{d\vec{v}}{dt}$: Μεταβολή της ορμής εξαιτίας της επιτάχυνσης

$\vec{v}\frac{dm}{dt}$: Μεταβολή της ορμής εξαιτίας της χρονικής μεταβολής της μάζας

Κίνηση Πυραύλου



$$\vec{P}_i = M\vec{v} \qquad \vec{P}_f = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - dM\,\vec{v}'$$

Μεταβολή της Ορμής του Συστήματος

$$d\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \{(M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - dM\vec{v}'\} - M\vec{v}$$

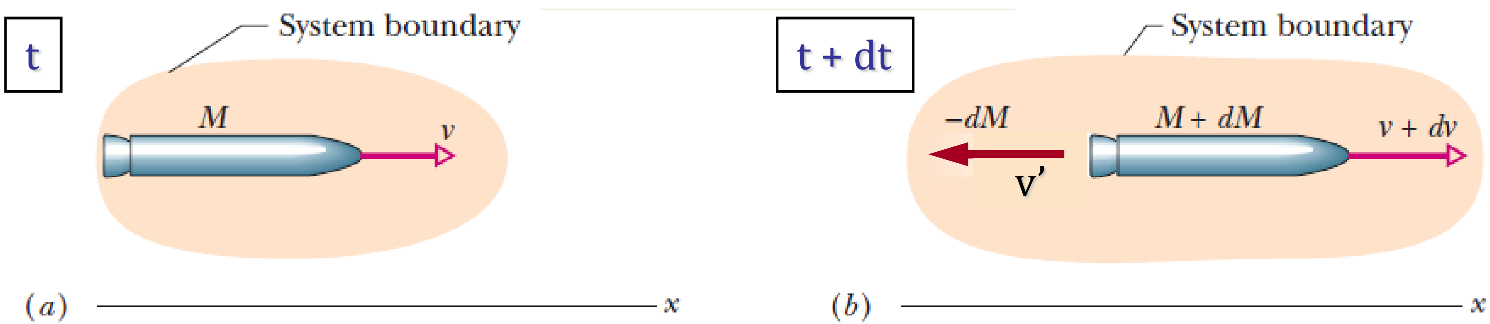
$$\Downarrow$$

$$d\vec{P} = Md\vec{v} + \vec{v}dM - \vec{v}'dM = Md\vec{v} - dM(\vec{v}' - \vec{v})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d\vec{P} = M\,d\vec{v} - \vec{v}_{rel}\,dM}$$

Κίνηση Πυραύλου



$$d\vec{P} = M\,d\vec{v} - \vec{v}_{rel}\,dM \quad \Rightarrow \quad dP = M\,dv + v_{rel}\,dM$$

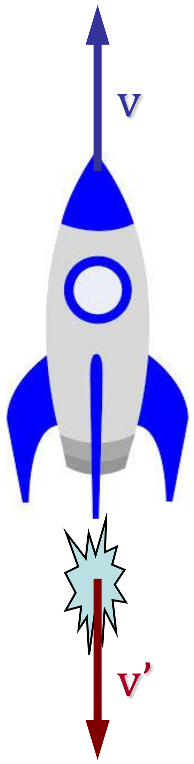
$$\frac{dP}{dt} = M\frac{dv}{dt} + v_{rel}\frac{dM}{dt}$$

Εάν dP/dt = 0 $\quad 0 = M\frac{dv}{dt} + v_{rel}\frac{dM}{dt} \Rightarrow M\frac{dv}{dt} = -v_{rel}\frac{dM}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{-v_{rel}\frac{dM}{dt}}$

Θετική ποσότητα (dM/dt<0)

Ωστική Δύναμη

Κατακόρυφη Κίνηση Πυραύλου σε Βαρυτικό Πεδίο



$$\boxed{\frac{dP}{dt} = M\frac{dv}{dt} + v_{rel}\frac{dM}{dt}}$$

$$-Mg = M\frac{dv}{dt} + v_{rel}\frac{dM}{dt} \Rightarrow -g\,dt = dv + \frac{v_{rel}}{M}dM$$

$$\Downarrow$$

$$-g\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} dv + v_{rel}\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}$$

$$-gt = v - v_0 + v_{rel}(\ln M - \ln M_0) \Rightarrow \boxed{v = v_0 + v_{rel}\ln\left(\frac{M_0}{M}\right) - gt}$$

Κατακόρυφη Κίνηση Πυραύλου σε Βαρυτικό Πεδίο

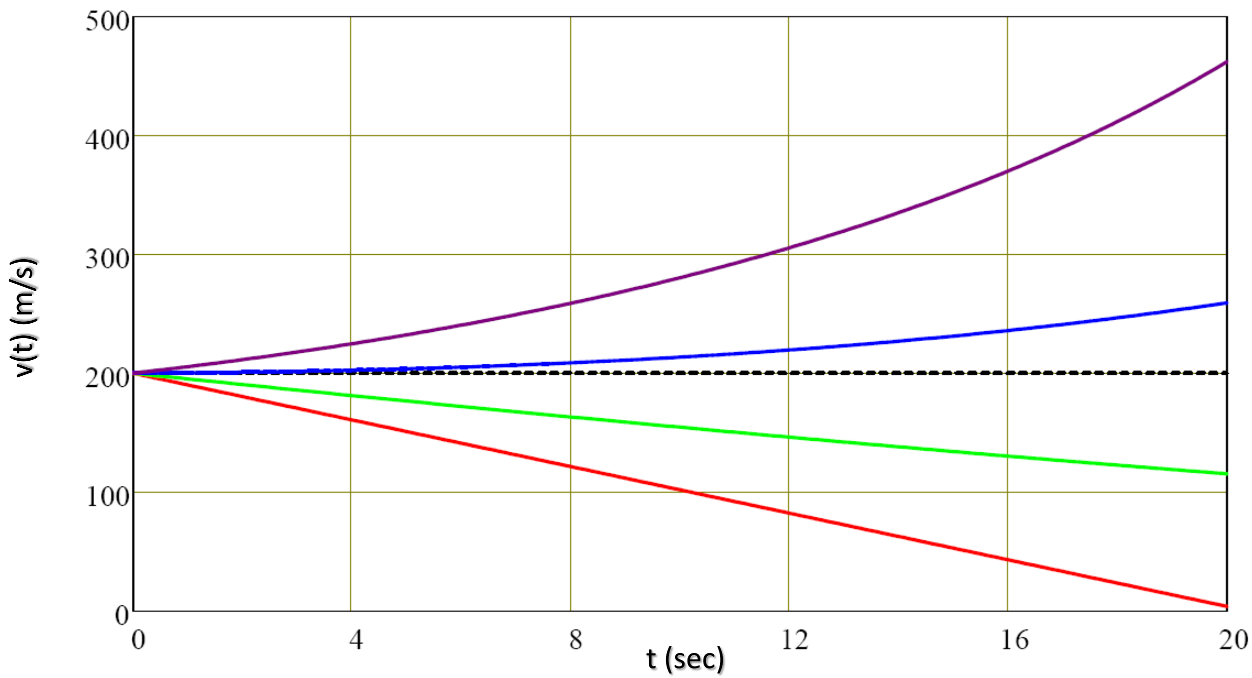
Υποθέτοντας σταθερή εκροή αερίων προώθησης ($\lambda>0$) η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$v = v_0 + v_{rel}\ln\left(\frac{M_0}{M}\right) - gt \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = -\lambda \Rightarrow M = M_0 - \lambda t \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + v_{rel}\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \lambda t}\right) - gt$$

Γραφική παράσταση του v(t) για διαφορετικές τιμές του λ

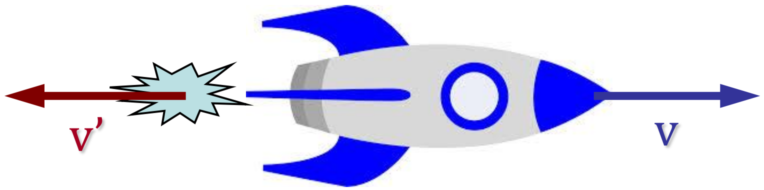
v_0 = 200 m/s
v_{rel} = 500 m/s
M_0 = 1000 Kg

λ= 0 Kg/s
λ=10 “
λ=20 “
λ=30 “



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κίνηση Πυραύλου εκτός Βαρυτικού Πεδίου



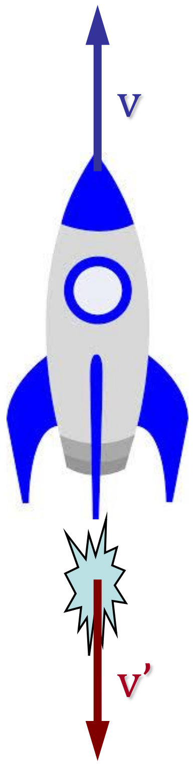
$$\boxed{\frac{dP}{dt} = M\frac{dv}{dt} + v_{rel}\frac{dM}{dt}}$$

$$0 = M\frac{dv}{dt} + v_{rel}\frac{dM}{dt} \Rightarrow 0 = dv + \frac{v_{rel}}{M}dM \Rightarrow 0 = \int_{v_0}^{v} dv + v_{rel}\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}$$

$$\Downarrow$$

$$0 = v - v_0 + v_{rel}(\ln M - \ln M_0) \Rightarrow \boxed{v = v_0 + v_{rel}\ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = v_0 + v_{rel}\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \lambda t}\right)}$$

όπου $\lambda=-dM/dt$ ($\lambda>0$) η σταθερή εκροή αερίων προώθησης όπως και προηγούμενα.



Εάν ο πύραυλος **παραμένει ακίνητος** στον αέρα ($v_0=0$) σε μικρό ύψος από την επιφάνεια της Γης (το g δεν αλλάζει), τότε συνεχίζει να ισχύει **dP/dt = -Mg** αλλά και **dv/dt = 0**, οπότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = M\frac{dv}{dt} + v_{rel}\frac{dM}{dt}}$$

$$0 + v_{rel}\frac{dM}{dt} = -Mg \Rightarrow \frac{dM}{M} = -\frac{g}{v_{rel}}dt$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} = -\frac{g}{v_{rel}}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{M}{M_0}\right) = -\frac{g}{v_{rel}}t \Rightarrow \boxed{M = M_0 e^{-\frac{g}{v_{rel}}t}}$$

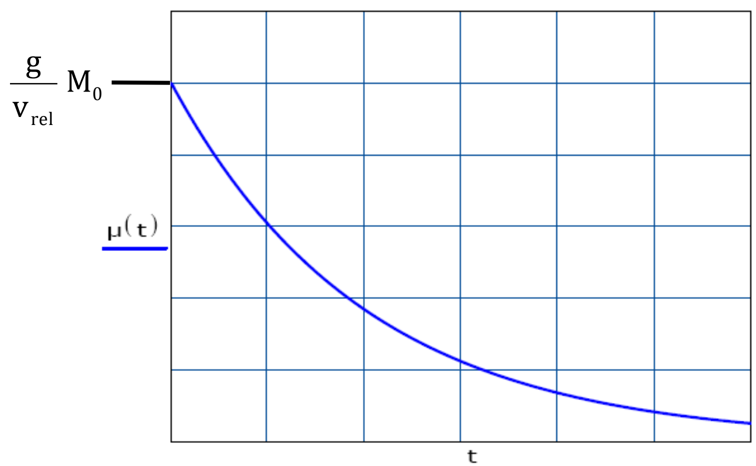
Η συνολική μάζα του πυραύλου βαίνει κατά συνέπεια εκθετικά ελαττούμενη.

Πόσος είναι ο ρυθμός εκτόξευσης των αερίων μ(t) στην περίπτωση αυτή;

Υπολογισμός του ρυθμού εκτόξευσης των αερίων στην περίπτωση που ο πύραυλος παραμένει ακίνητος

$$\mu(t) = -\frac{dM}{dt} = \frac{g}{v_{rel}} M \Rightarrow \boxed{\mu(t) = \frac{g}{v_{rel}} M_0 e^{-\frac{g}{v_{rel}}t}}$$

Όπως είναι προφανές, ο ρυθμός εκτόξευσης των αερίων μ(t) ελαττώνεται κι αυτός με τον ίδιο εκθετικό ρυθμό που ελαττώνεται και η μάζα του συστήματος.

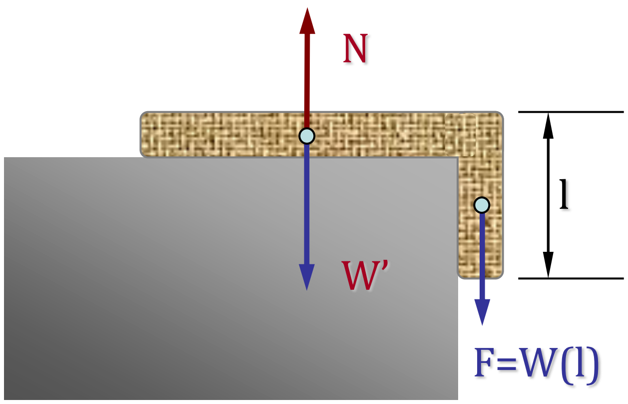


ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Χονδρό ομογενές σχοινί κυλίεται χωρίς τριβές υπό την επίδραση του βάρους του τμήματος που κρέμεται ελεύθερο.

M : Συνολική μάζα σχοινιού
L_0 : Αρχικό μήκος του σχοινιού που κρέμεται ελεύθερο
L : Συνολικό μήκος σχοινιού
V_F : Τελική ταχύτητα

Να υπολογιστεί η τελική του ταχύτητα, όταν απελευθερωθεί όλο το μήκος του.



$$\frac{dP}{dt}=F \Rightarrow \frac{dP}{dt}=W(l)=mg=M\frac{l}{L}g \Rightarrow M\frac{dv}{dt}=M\frac{l}{L}g$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{g}{L}l \Rightarrow \frac{dv}{dl}\frac{dl}{dt}=\frac{g}{L}l \Rightarrow v\frac{dv}{dl}=\frac{g}{L}l \Rightarrow vdv=\frac{g}{L}l\,dl$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{V_F} vdv=\frac{g}{L}\int_{L_0}^{L} l\,dl \Rightarrow \frac{V_F^2}{2}=\frac{g}{2L}\left(L^2-L_0^2\right) \Rightarrow \boxed{V_F=\sqrt{\frac{g}{L}\left(L^2-L_0^2\right)}}$$