ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2023-2024

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ
- Μέση και Στιγμιαία Ταχύτητα - Επιτάχυνση
- Διαφορικές & Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Κίνησης
- Σταθερή Επιτάχυνση
- Κατακόρυφη Ρίψη

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ
- Διάνυσμα Θέσης - Μετατόπιση
- Διανυσματικός Ορισμός Ταχύτητας – Επιτάχυνσης
- Καμπυλόγραμμη Κίνηση
- Εφαπτομενική και Κάθετη Συνιστώσα της Επιτάχυνσης

ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
- Κυκλική Κίνηση
- Κίνηση Βλημάτων
- Παραμετρικές Εξισώσεις - Εξισώσεις Τροχιάς

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

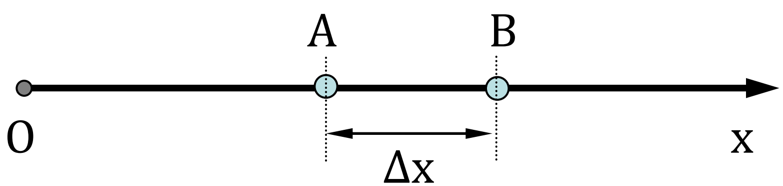
Ακαδημαϊκό Έτος 2023-2024

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ΦΑΡΑΚΟΣ	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ	1.6, 1.7	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6
ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ	1.6, 1.7	3.5, 3.6	4.1, 4.2, 4.3, 4.4	3.1, 3.2
ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	1.8	5.2, 5.5	4.7	3.4
ΚΙΝΗΣΗ ΒΛΗΜΑΤΩΝ	2.3	3.7, 3.8	4.5, 4.6	3.3

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Μέση Ταχύτητα: Μετατόπιση (Δx) σε δοσμένο χρονικό διάστημα (Δt)



$$\boxed{v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Στιγμιαία Ταχύτητα: Το όριο της μέσης ταχύτητας v_{av} για $\Delta t \rightarrow 0$

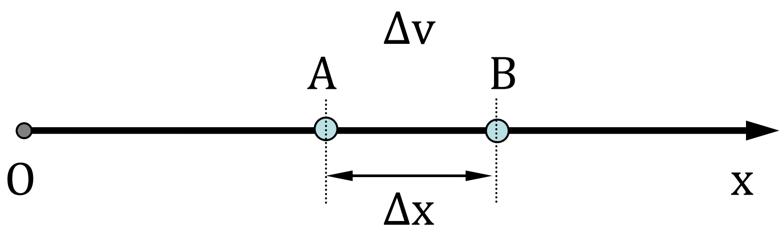
$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v = \frac{dx}{dt}}$$

Υπολογισμός της μετατόπισης από την συναρτησιακή εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt \;\Leftrightarrow\; x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt \;\Leftrightarrow\; x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt}$$

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Μέση Επιτάχυνση: Μέση αλλαγή της ταχύτητας (Δv) σε δοσμένο χρονικό διάστημα (Δt)



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Στιγμιαία Επιτάχυνση: Το όριο της μέσης επιτάχυνσης a_{av} για $\Delta t \rightarrow 0$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας από τη χρονική εξάρτηση της επιτάχυνσης

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \Leftrightarrow v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\,dt \Leftrightarrow v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Στιγμιαία Επιτάχυνση: Δεύτερη παράγωγος της θέσης ως προς τον χρόνο

$$\boxed{a=\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \Leftrightarrow a=\frac{d^2x}{dt^2}}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας από τη χωρική εξάρτηση της επιτάχυνσης

$$\boxed{dv=a\,dt \Leftrightarrow v\,dv=a\,dt\left(\frac{dx}{dt}\right) \Leftrightarrow v\,dv=a\,dx}$$

$$\boxed{\int_{v_0}^{v} v\,dv=\int_{x_0}^{x} a\,dx \Leftrightarrow \frac{v^2-v_0^2}{2}=\int_{x_0}^{x} a\,dx}$$

Όταν δίνεται οποιαδήποτε κινηματική σχέση (απόστασης – ταχύτητας – επιτάχυνσης) συναρτήσει του χρόνου, τότε είναι δυνατή η εύρεση των υπολοίπων είτε με παραγώγιση είτε με ολοκλήρωση, σύμφωνα με το σχήμα:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$x = x(t) \qquad v = v(t) \qquad a = a(t)$$

$$x = \int v(t)dt \qquad v = \int a(t)dt$$

Παράδειγμα I

Αν δίνεται η θέση x συναρτήσει του χρόνου x=x(t), τότε

$$x = x(t) = 4t^3 + 2t^2 + t + 6$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 12t^2 + 4t + 1$$

$$\Downarrow$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 24t + 4$$

Παράδειγμα II

Αν δίνεται η ταχύτητα v συναρτήσει του χρόνου v=v(t), τότε

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (12t^2 + 4t + 1)dt = 4t^3 + 2t^2 + t + \boldsymbol{C}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{v(t) = 12t^2 + 4t + 1}$$

$$\Downarrow$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 24t + 4$$

Προσοχή: Η σταθερά C που προκύπτει από την ολοκλήρωση καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Παράδειγμα ΙΙ - Επεξεργασία αρχικών συνθηκών

Αν δίνονται οι αρχικές συνθήκες $\{t_0=0,\ x_0=6\}$, τότε από το προηγούμενο πρόβλημα προκύπτει:

$$x(t) = \int v(t)dt = \int (12t^2 + 4t + 1)dt = 4t^3 + 2t^2 + t + \boldsymbol{C}$$

$$\mathrm{x}(\mathrm{t} = 0) = 6 \rightarrow \boldsymbol{C = 6}$$

Σημείωση: Χρησιμοποιώντας ορισμένα ολοκληρώματα το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να εξαχθεί και ως εξής:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt = \int_{t_0}^{t} (12t^2 + 4t + 1)dt \Rightarrow$$

$$x - x_0 = (4t^3 + 2t^2 + t) - (4{t_0}^3 + 2{t_0}^2 + t_0)$$

$$\xRightarrow{t_0=0\,,\,x_0=6} x - 6 = 4t^3 + 2t^2 + t - 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 4t^3 + 2t^2 + t + 6}$$

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Όταν δίνεται η ταχύτητα v συναρτήσει της θέσης v=v(x), τότε οι εξισώσεις κίνησης βρίσκονται με το παρακάτω σκεπτικό:

$$v = v(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{dx}{dt} = v(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{v(x)} = dt \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dx}{v(x)} = \int dt = t$$

Παράδειγμα: $v = 2\sqrt{x}$ με αρχικές συνθήκες {t=0, x=4}

$$v = v(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{dx}{dt} = v(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{v(x)} = dt \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int dt = t$$

$$\sqrt{x} + C = t \;\xrightarrow{\text{Α.Σ.}}\; \sqrt{4} + C = 0 \;\Rightarrow\; C = -2$$

$$x = (t+2)^2$$

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Ομοίως, όταν δίνεται η επιτάχυνση a συναρτήσει της θέσης a=a(x), τότε οι εξισώσεις κίνησης βρίσκονται με το παρακάτω σκεπτικό:

$$a = a(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{dv}{dt} = a(x) \Leftrightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = a(x) \Leftrightarrow \frac{dv}{dx}v = a(x) \;\Leftrightarrow\; vdv = a(x)dx$$

$$\int vdv = \int a(x)dx$$

Παράδειγμα: $a = 6\sqrt[3]{x}$ με αρχικές συνθήκες {t=0, x=0, v=0}

$$vdv = a(x)dx \;\Leftrightarrow\; \int vdv = \int 6\sqrt[3]{x}dx \Leftrightarrow \int vdv = \int 6x^{1/3}dx \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{v^2}{2} + C = 6x^{4/3}\frac{3}{4} \;\Leftrightarrow\; \frac{v^2}{2} + C = \frac{9}{2}x^{4/3} \xRightarrow{\text{Α.Σ.}} 0 + C = 0 \;\Rightarrow\; C = 0$$

$$v^2 = 9x^{4/3} \;\;\Leftrightarrow\;\; v = 3x^{2/3}$$

Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα από την παραπάνω σχέση εξάγεται και η εξίσωση της θέσης $\mathrm{x} = t^3$.

ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στην ομαλά επιταχυνόμενη ευθύγραμμη κίνηση ισχύει a = σταθερά

$$\boxed{v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt \Leftrightarrow v = v_0 + a(t - t_0)}$$

$$\boxed{x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt \Leftrightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + a(t - t_0)\right]dt = x_0 + v_0\int_{t_0}^{t} dt + a\int_{t_0}^{t} (t - t_0)dt}$$

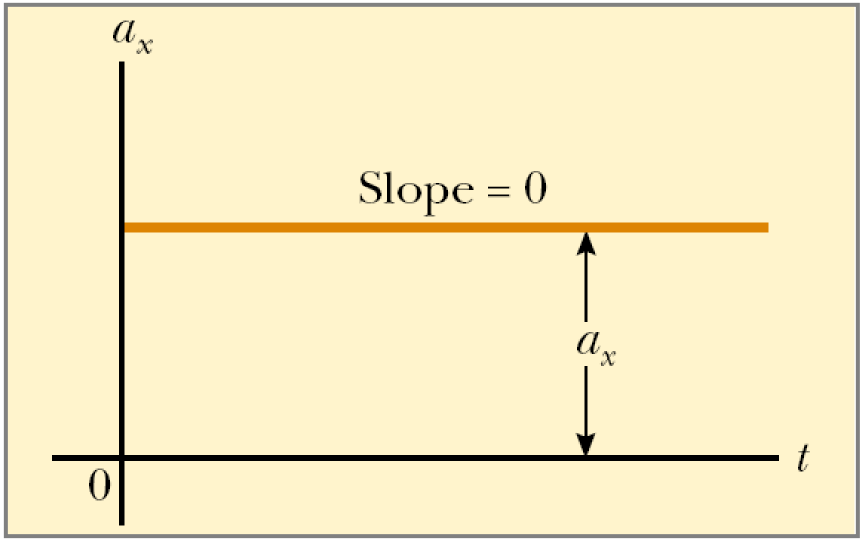
$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

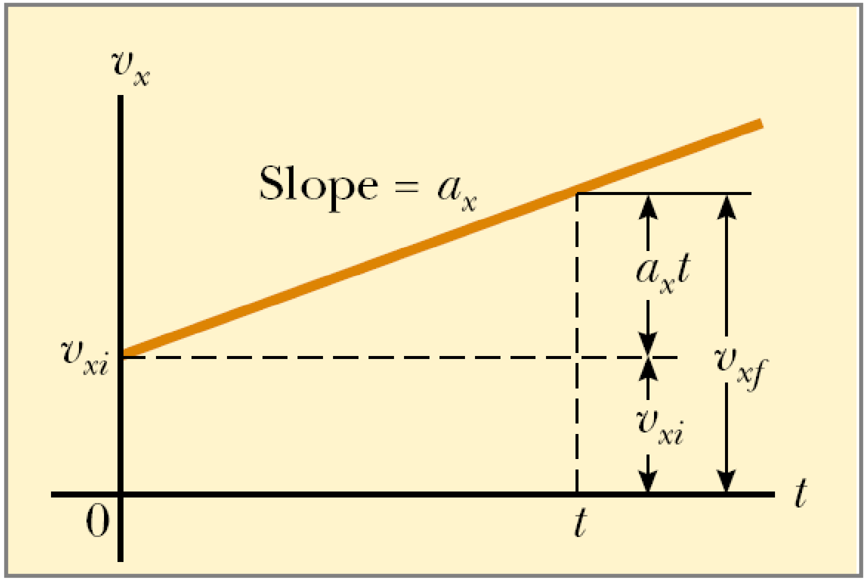
ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

a = ct

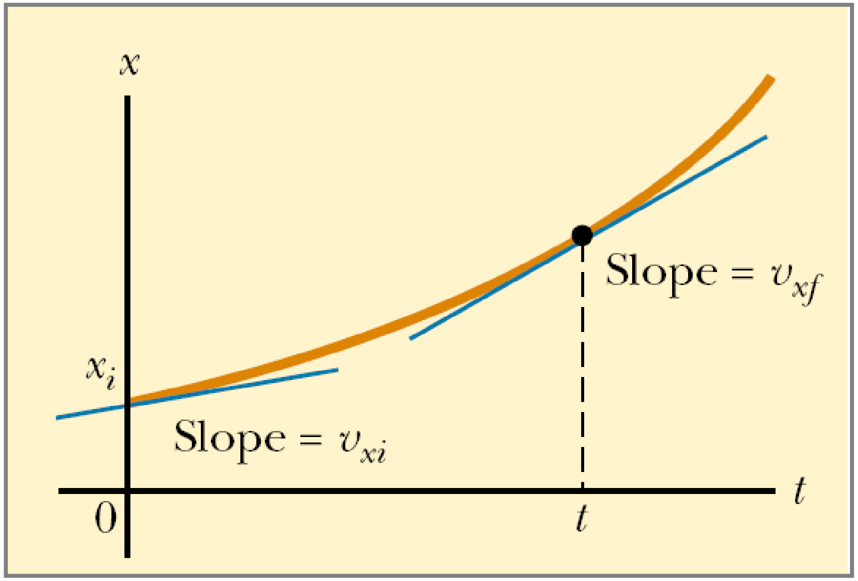
$$a = \text{const}$$
$$v = v_0 + a\,t$$
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$



v=v(t)



x=x(t)



ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$a = \text{constant}$$
$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

Απαλοιφή του χρόνου

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow 2(x - x_0)a = 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2$$

$$\Rightarrow 2(x - x_0)a = v^2 - v_0^2$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2(x - x_0)a}$$

Στη σχέση αυτή καταλήγουμε και με την ολοκλήρωση:

$$vdv = adx \Rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} a\,dx \;\Rightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = a(x - x_0) \;\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$a = \text{constant}$$
$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

Απαλοιφή της επιτάχυνσης

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\,\frac{v - v_0}{t}\,t^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)\,t$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2}\,t$$

$$\boxed{x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2}\,t}$$

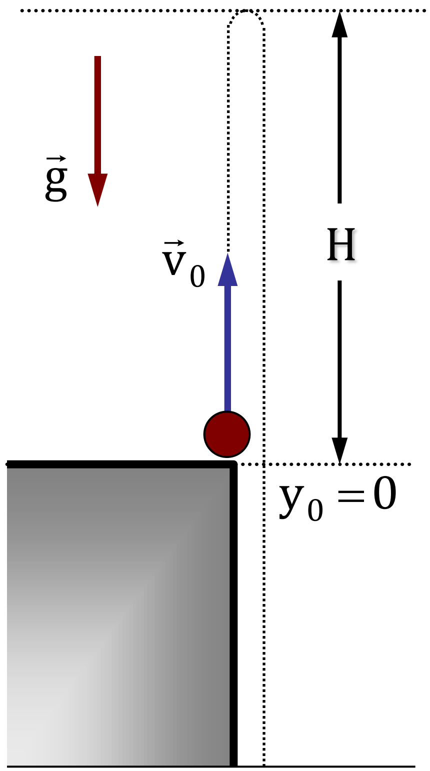
Στη σχέση αυτή καταλήγουμε και με την παρακάτω ολοκλήρωση, κάνοντας χρήση του εμβαδού του τραπεζίου στο διάγραμμα v(t):

$$dx = v\,dt \;\Rightarrow\; \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v\,dt \;\Rightarrow\; x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2}\,t$$

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ

Οι εξισώσεις της κίνησης για σταθερή επιτάχυνση μπορούν να εφαρμοστούν στην περίπτωση της ελεύθερης πτώσης (επιτάχυνση g = -9.8 ms^{-2}).

Κατακόρυφη βολή



$$\boxed{\begin{aligned} a &= -g \\ v &= v_0 - g t \\ y &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}}$$

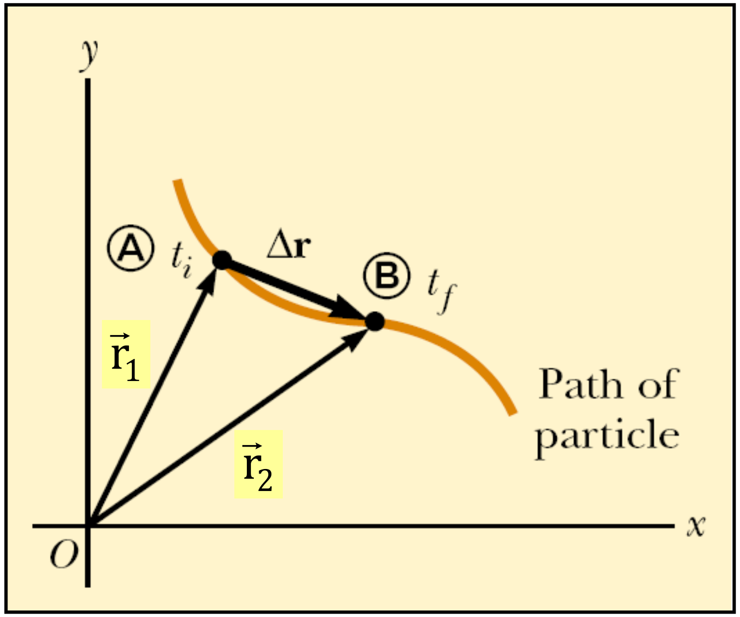
Υπολογισμός μεγίστου ύψους H

$$v = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}$$

$$y_{max} = H = y(t = v_0 / g) \Rightarrow H = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\boxed{H = \frac{v_0^2}{2g}}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ



Διάνυσμα Θέσης

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Μετατόπιση

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}\right) - \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\right)$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$$

Μέση Ταχύτητα

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Μέση Επιτάχυνση

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

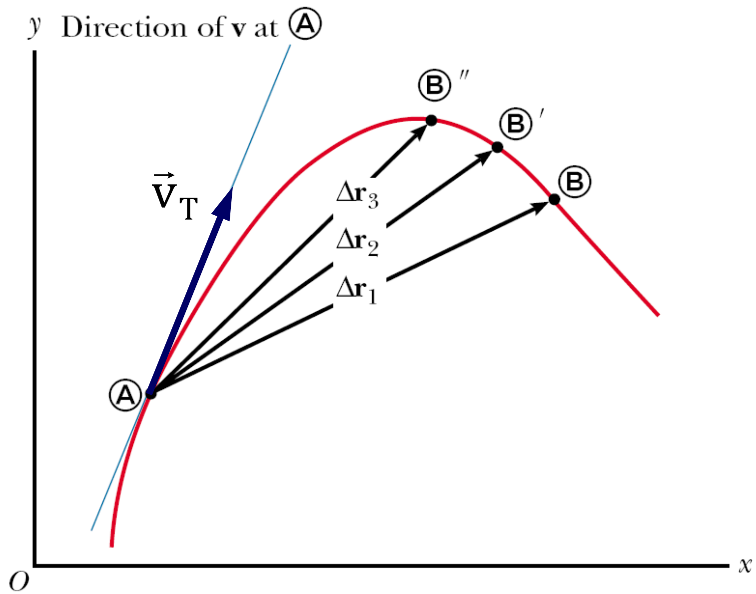
Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ



Κατά τη κίνηση του σώματος από το Α στο Β η μετατόπιση Δs πάνω στην καμπύλη δίνεται από το τόξο ΑΒ.

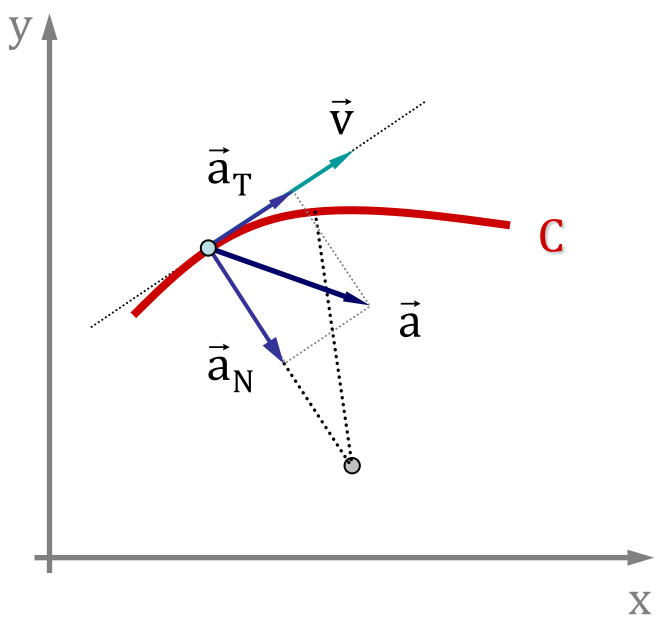
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

Στο όριο αυτό το Δs γίνεται ίσο με το μέτρο Δr, οπότε ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει ένα μοναδιαίο διάνυσμα, εφαπτόμενο στη διαδρομή (καμπύλη) που περιγράφει την κίνηση του σώματος.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} &= \frac{d\vec{r}}{dr} = \hat{u}_T \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{ds}{dt} = v \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \hat{u}_T \frac{ds}{dt} = \hat{u}_T v}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ



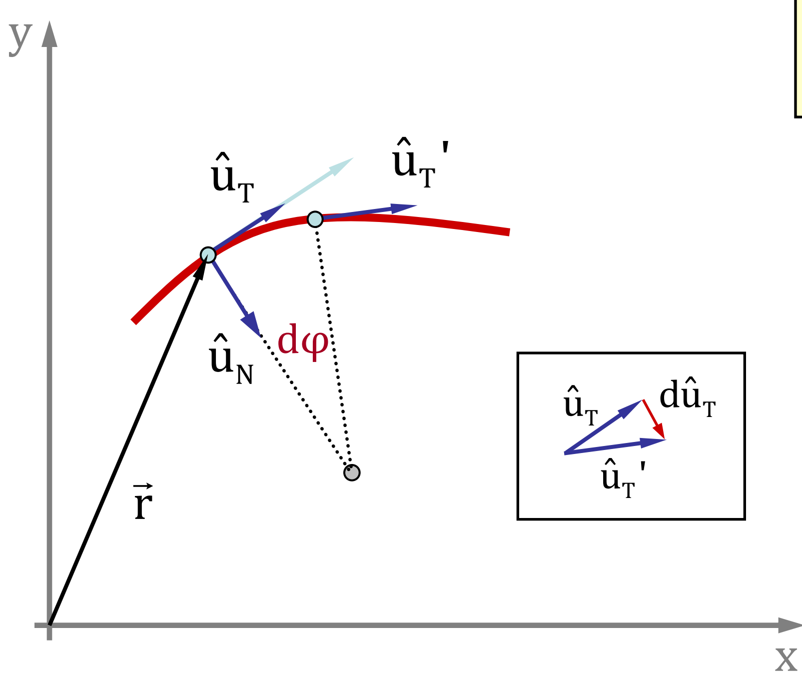
Σώμα κινείται στην τροχιά C και τη χρονική στιγμή t έχει ταχύτητα **v** και επιτάχυνση **a**. Η επιτάχυνση a έχει πάντα κατεύθυνση προς τα κοίλα της τροχιάς.

Μπορούμε να αναλύσουμε την επιτάχυνση σε δύο κάθετες συνιστώσες: Σε μια εφαπτομενική στην τροχιά και σε μια κάθετη συνιστώσα.

$\boxed{\vec{a}_T}$ Εφαπτομενική Επιτάχυνση: Αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας

$\boxed{\vec{a}_N}$ Κάθετη Επιτάχυνση: Αλλαγή στη διεύθυνση της ταχύτητας

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\hat{u}_T v) = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{u}_T}{dt} v$$

Όταν η τροχιά δεν είναι ευθύγραμμη, τότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u_T}$ αλλάζει κατεύθυνση και η παράγωγός του ως προς τον χρόνο υπολογίζεται ως εξής:

$$d\hat{u}_T = |\hat{u}_T| d\varphi\, \hat{u}_N = 1 \cdot d\varphi\, \hat{u}_N = \hat{u}_N\, d\varphi$$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u_N}$, το οποίο εισάγεται για να καθορίσει την κατεύθυνση της μεταβολής $\mathbf{du_T}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{u_T}$, δηλαδή κάθετο στην εφαπτομενική διεύθυνση της τροχιάς. Έτσι:

$$d\hat{u}_T = \hat{u}_N\, d\varphi \Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \hat{u}_N \frac{d\varphi}{dt} = \hat{u}_N \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{u}_N\, v \frac{d\varphi}{ds} = \hat{u}_N\, v \frac{d\varphi}{\rho\, d\varphi} = \hat{u}_N \frac{v}{\rho}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\hat{u}_T v) = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{u}_T}{dt} v$$

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v}{\rho} v = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Εφαπτομενική (επιτρόχια) επιτάχυνση $\mathbf{a_T}$: Ρυθμός αλλαγής του μέτρου της ταχύτητας. Σε περίπτωση ομαλής καμπυλόγραμμης κίνησης (μέτρο ταχύτητας v σταθερό), η εφαπτομενική επιτάχυνση a_T εξαφανίζεται.

Κάθετη (κεντρομόλος) επιτάχυνση $\mathbf{a_N}$: Αλλάζει την κατεύθυνση της ταχύτητας. Σε ευθύγραμμη κίνηση η ακτίνα καμπυλότητας ρ απειρίζεται, οπότε η κάθετη επιτάχυνση μηδενίζεται.

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

Όπως αποδείχτηκε στα προηγούμενα, η επιτάχυνση στην γενικευμένη καμπυλόγραμμη κίνηση εκφράζεται με τις δύο συνιστώσες $\mathbf{a_T}$ (**επιτρόχια**) και $\mathbf{a_N}$ (**κεντρομόλο**):

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Αν δοθεί το διάνυσμα θέσης **r**(t) ως συνάρτηση του χρόνου, τότε είναι εύκολη η παραγώγισή του και η εύρεση και των υπολοίπων κινηματικών μεγεθών, της ταχύτητας **v**(t) και της επιτάχυνσης **a**(t):

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k} = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{k} = a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j} + a_z(t)\,\hat{k}$$

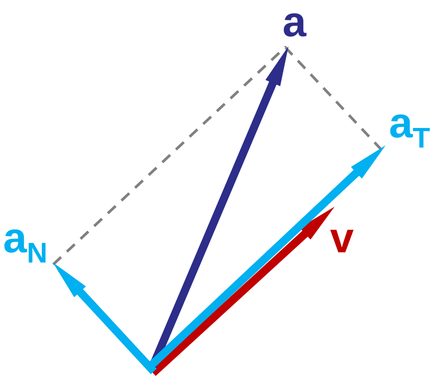
Στα επόμενα παρουσιάζεται η μεθοδολογία για την εύρεση της **ακτίνας καμπυλότητας ρ** από τα διανύσματα της ταχύτητας και της ταχύτητας **v**(t) και της επιτάχυνσης **a**(t).

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

1η Μέθοδος

Για τον υπολογισμό της **ακτίνας καμπυλότητας ρ** απαιτείται η γνώση του μέτρου της ταχύτητας και της κεντρομόλου συνιστώσας:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N}$$



Γνωρίζοντας πως η επιτρόχια συνιστώσα $\mathbf{a_T}$ της επιτάχυνσης είναι συνευθειακή με την ταχύτητα **v**, τότε:

$$a_T = \vec{a}\cdot\hat{u}_T = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v}$$

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \;\Rightarrow\; a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, η ακτίνα καμπυλότητας ρ υπολογίζεται:

$$\rho = \frac{v^2}{a_N}$$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

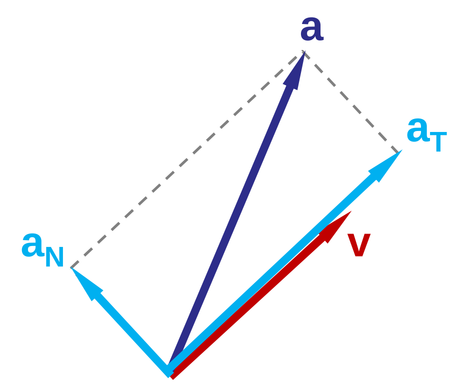
2η Μέθοδος

Εξετάζουμε το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων **v** και **a**. Ισχύουν:

$$\vec{v}\times\vec{a} = \vec{v}\times\left(\vec{a}_N + \vec{a}_T\right) = \vec{v}\times\vec{a}_N + \cancel{\vec{v}\times\vec{a}_T} = \vec{v}\times\vec{a}_N$$

$$\left|\vec{v}\times\vec{a}\right| = \left|\vec{v}\times\vec{a}_N\right| = \left|\vec{v}\right|\left|\vec{a}_N\right|\sin 90^o = v\,a_N$$

$$\boxed{a_N = \frac{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}{v}}$$



Αντικαθιστώντας στην σχέση της ακτίνας καμπυλότητας, έχουμε:

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|/v}$$

$$\boxed{\rho = \frac{v^3}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}}$$

Παράδειγμα

Το διάνυσμα θέσης κινητού στο επίπεδο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\boxed{\vec{r}(t) = 2t\,\hat{i} + 4t^2\,\hat{j}}$$

Να υπολογισθεί η **ακτίνα καμπυλότητας ρ** σαν συνάρτηση του χρόνου.

1η Μέθοδος

Υπολογίζουμε την ταχύτητα **v** και την επιτάχυνση **a** του κινητού:

$$\vec{v}(t) = 2\,\hat{i} + 8t\,\hat{j}$$
$$\vec{a}(t) = 0\,\hat{i} + 8\,\hat{j}$$

Βρίσκουμε το μέτρο της a_T (προβολή της επιτάχυνσης στην κατεύθυνση της ταχύτητας):

$$a_T = \vec{a}\cdot\hat{u}_T = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{(8\hat{j})\cdot(2\hat{i}+8t\,\hat{j})}{\sqrt{4+64t^2}} = \frac{64t}{\sqrt{4+64t^2}}$$

Υπολογίζουμε τη συνιστώσα a_N :

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{64 - \frac{64t^2}{4+64t^2}} = \frac{16}{\sqrt{4+64t^2}}$$

και τελικά:

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{4+64t^2}{16/\sqrt{4+64t^2}} = \frac{\left(4+64t^2\right)^{3/2}}{16} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{\left(1+16t^2\right)^{3/2}}{2}}$$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

2η Μέθοδος

Υπολογίζουμε την ταχύτητα **v** και την επιτάχυνση **a** του κινητού:

$$\vec{v}(t) = 2\,\hat{i} + 8t\,\hat{j}$$
$$\vec{a}(t) = 0\,\hat{i} + 8\,\hat{j}$$

Βρίσκουμε το μέτρο του εξωτερικού γινομένου |**v** x **a**| :

$$\vec{v}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 8t & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 16\hat{k} \;\Rightarrow\; \left|\vec{v}\times\vec{a}\right| = 16$$

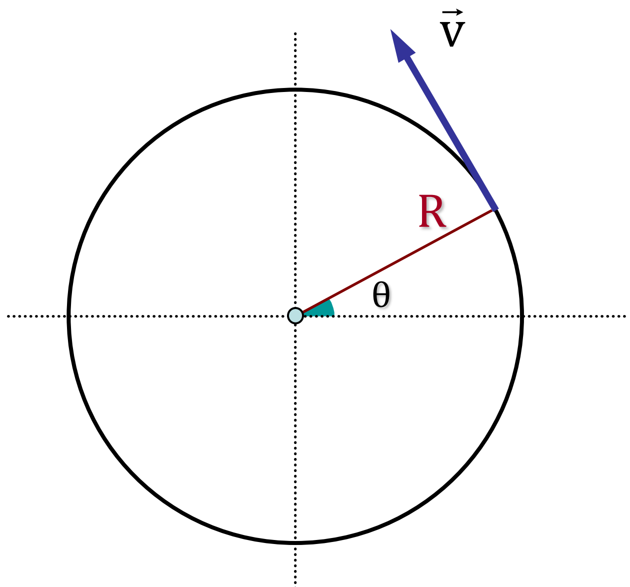
Υπολογίζουμε την ακτίνα καμπυλότητας με βάση τη σχέση:

$$\rho = \frac{v^3}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}$$

$$\rho = \frac{v^3}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|} = \frac{\left(4+64t^2\right)^{3/2}}{16}$$

$$\rho = \frac{\left(1+16t^2\right)^{3/2}}{2}$$

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Κυκλική Κίνηση: Η τροχιά είναι κύκλος σταθερής ακτίνας R, οπότε η ταχύτητα είναι πάντα εφαπτομένη της κυκλικής τροχιάς και κάθετη στην επιβατική ακτίνα.

Το μέτρο της ταχύτητας θα δίνεται από:

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cdot \boldsymbol{\theta}) = R\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$$

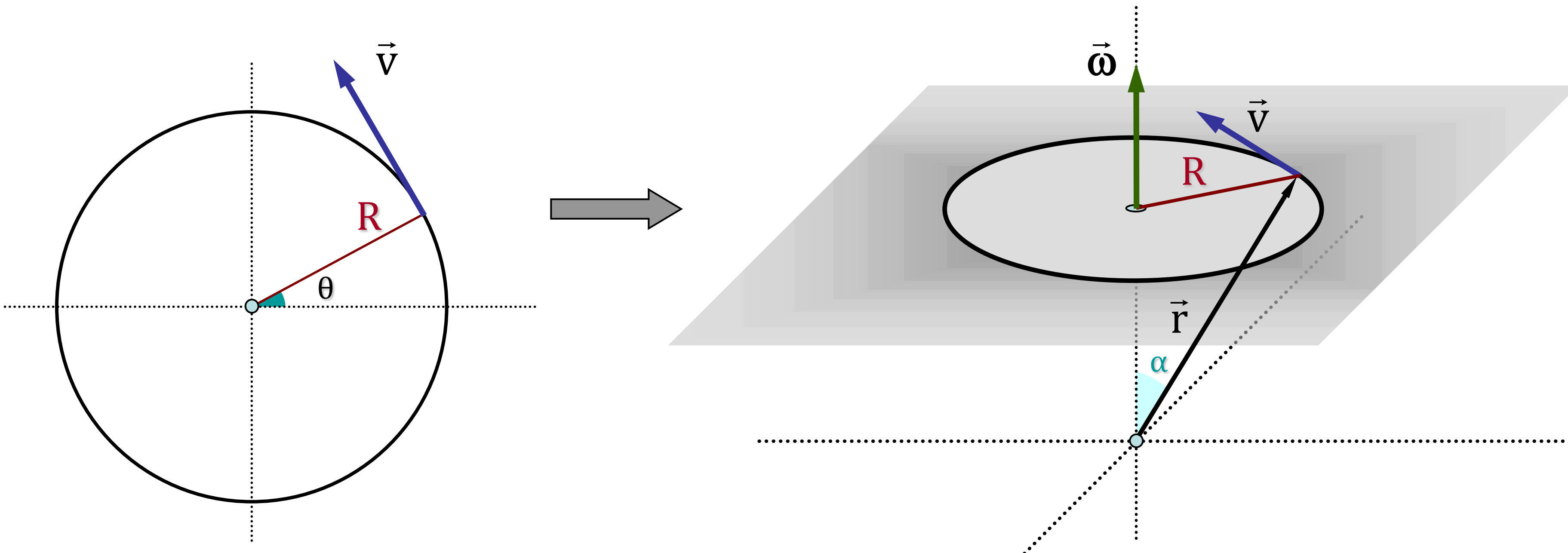
Η ποσότητα dθ/dt ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα ω

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}}$$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος με μέτρο ω, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο κίνησης και φορά καθοριζόμενη από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Μονάδα γωνιακής ταχύτητας: rad/s = s^{-1}

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

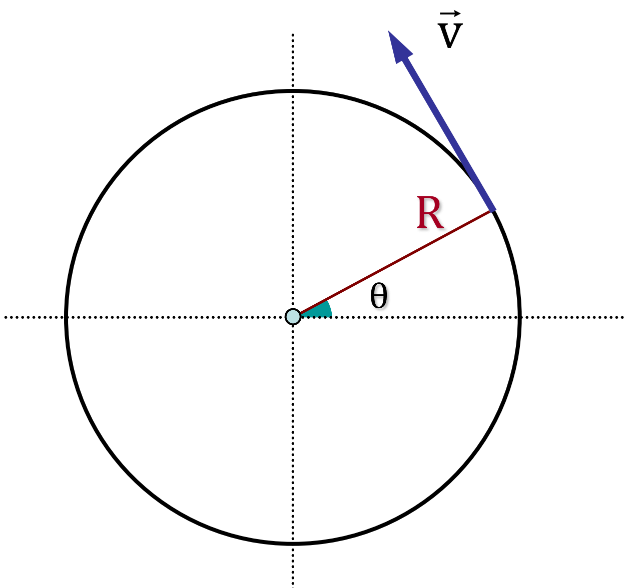


Η κυκλική κίνηση στο χώρο μπορεί να περιγραφεί από το διάνυσμα θέσης **r** . Όπως είναι προφανές από το παραπάνω σχήμα ισχύει γενικά:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha = \omega(r\sin a) = \omega R = R\frac{d\theta}{dt}$$

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Ομαλή κυκλική κίνηση: Η γωνιακή ταχύτητα ω παραμένει χρονικά σταθερή

$$\omega = d\theta/dt = \text{const}$$

Περίοδος T : Ο απαιτούμενος χρόνος για μια πλήρη περιστροφή

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

Συχνότητα f : Αριθμός περιστροφών στη μονάδα του χρόνου

$$f = 1/T$$

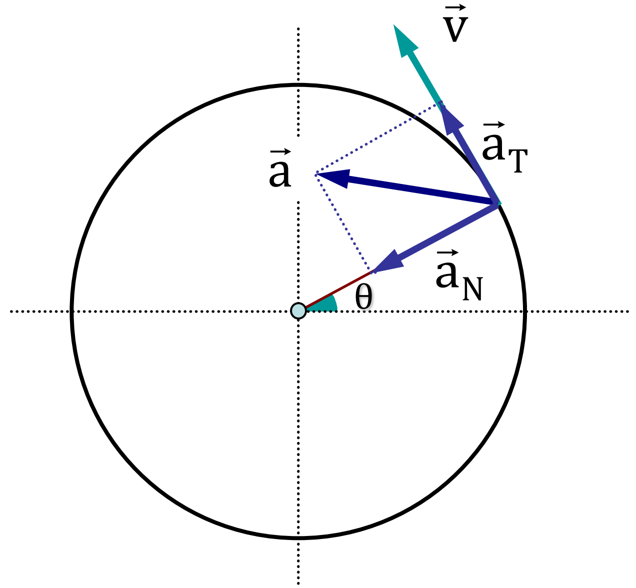
Για σταθερή γωνιακή ταχύτητα ισχύει:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega t \Rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega t}$$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΤΗΝ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στη γενική περίπτωση της καμπυλόγραμμης κίνησης είδαμε ότι ισχύει:

$$\boxed{\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = \vec{a}_T + \vec{a}_N}$$



Τα $\mathbf{u_T}$ και $\mathbf{u_N}$ είναι μοναδιαία διανύσματα, εφαπτόμενο στην τροχιά και κάθετο αντίστοιχα.

Στην περίπτωση κυκλικής κίνησης:

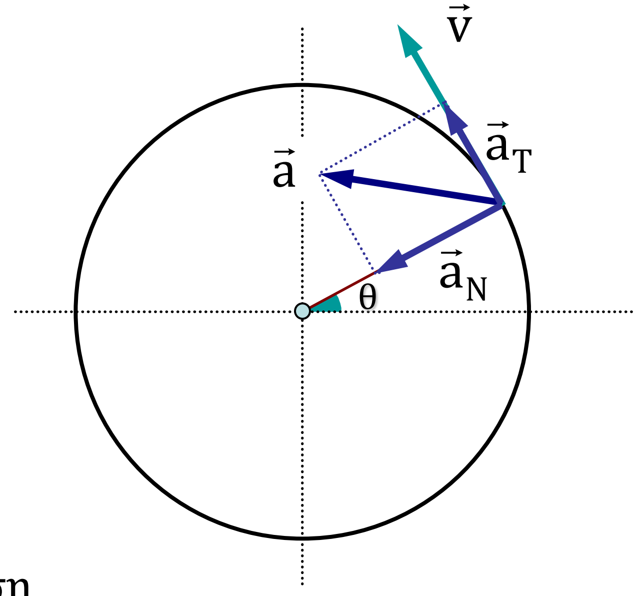
- Η ακτίνα καμπυλότητας ρ παραμένει σταθερή και ταυτίζεται με την ακτίνα του κύκλου R
- Η γραμμική ταχύτητα v εκφράζεται μέσω της γωνιακής $v = \omega R$
- Η γραμμική επιτάχυνση dv/dt ομοίως εκφράζεται από την γωνιακή $dv/dt = R\, d\omega/dt$

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T + \frac{\omega^2 R^2}{R}\hat{u}_N \Rightarrow \boxed{\vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T + \omega^2 R\,\hat{u}_N}$$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΤΗΝ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Η επιτάχυνση στην κυκλική κίνηση έχει δύο συνιστώσες **a_T** και **a_N**, εφαπτομενική και κάθετη στην τροχιά αντίστοιχα.

$$\boxed{\vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T + \omega^2 R\,\hat{u}_N}$$



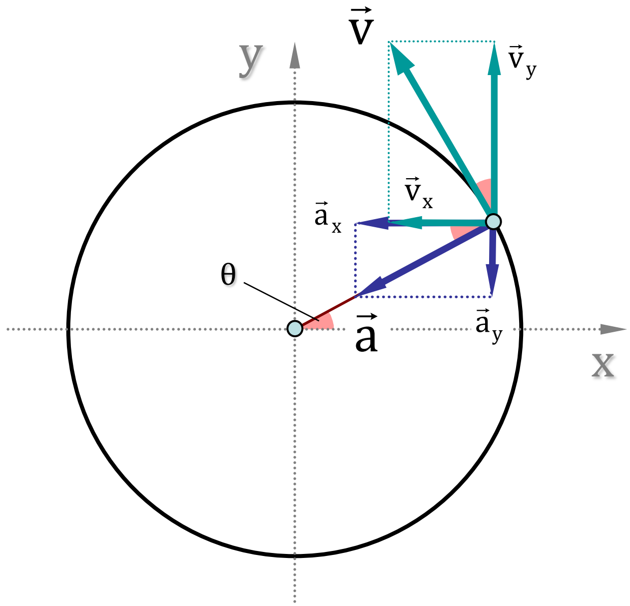
• Η εφαπτομενική συνιστώσα **a_T** είναι υπεύθυνη για την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας **v**

• Η συνιστώσα **a_N** αντιστοιχεί στην κεντρομόλο επιτάχυνση

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στην ειδική περίπτωση της ομαλής κυκλικής κίνησης, η ποσότητα dω/dt μηδενίζεται με αποτέλεσμα να παραμένει μόνο η κεντρομόλος επιτάχυνση $\omega^2 R$, η οποία είναι ως προς το μέτρο σταθερή.

$$\boxed{\vec{a} = R\cancel{\frac{d\omega}{dt}}\hat{u}_T + \omega^2 R\,\hat{u}_N = \omega^2 R\,\hat{u}_N}$$



Διανυσματικός Υπολογισμός Επιτάχυνσης

Παρουσιάζεται εδώ μια εναλλακτική προσέγγιση υπολογισμού της επιτάχυνσης στην ομαλή κυκλική κίνηση.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = \frac{d}{dt}(-v\sin\theta)\vec{i} + \frac{d}{dt}(v\cos\theta)\vec{j}$$

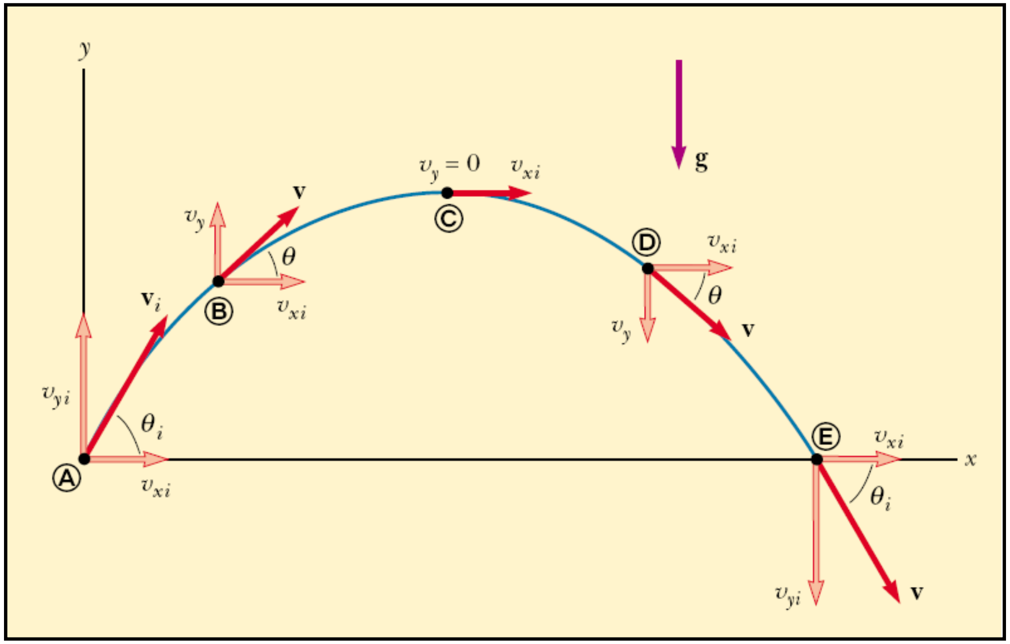
Το μέτρο της ταχύτητας v στην ομαλή κίνηση παραμένει σταθερό:

$$\vec{a} = -v\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{i} - v\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{j} = -v\omega\cos\theta\vec{i} - v\omega\sin\theta\vec{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos\theta\vec{i} - \omega^2 R\sin\theta\vec{j} \Rightarrow |\vec{a}| = \omega^2 R\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \omega^2 R$$

ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ



Κίνηση σωματιδίου (χωρίς αντιστάσεις) σε κατακόρυφο επίπεδο όπου επιδρά μόνο η σταθερή επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης g.

Το σώμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα $\mathbf{v_0}=\mathbf{v_i}$ υπό γωνία $\theta_0=\theta_i$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{i} + v_{0y}\,\hat{j} = v_0\cos\theta_0\,\hat{i} + v_0\sin\theta_0\,\hat{j}$$

Κατά τη διάρκεια της κίνησης το διάνυσμα θέσης **r** καθώς και το διάνυσμα της ταχύτητας **v** μεταβάλλονται συνεχώς, ενώ το διάνυσμα της επιτάχυνσης **a** παραμένει σταθερό (**a=-g**).

Το βλήμα δεν έχει οριζόντια επιτάχυνση!

*Στην πλάγια βολή η οριζόντια και η κατακόρυφη κίνηση είναι **ανεξάρτητες** η μια από την άλλη.*

Εξισώσεις της Κίνησης

Οριζόντια Κίνηση

$$\boxed{x - x_0 = v_{0x} t \;\Rightarrow\; x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0) t}$$

Κατακόρυφη Κίνηση

$$\boxed{y - y_0 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \;\Rightarrow\; y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\boxed{v_y = v_0 \sin\theta_0 - g t}$$

$$\frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2} = (y - y_0) a \;\Rightarrow\; \boxed{v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0)}$$

Εξίσωση της Τροχιάς

Η εξίσωση της κίνησης που προκύπτει εάν συμπλέξουμε την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της απόστασης, απαλείφοντας τον χρόνο από τις εξισώσεις αυτές.

$$\boxed{x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0)t} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}$$

$$\boxed{y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2}$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2$$

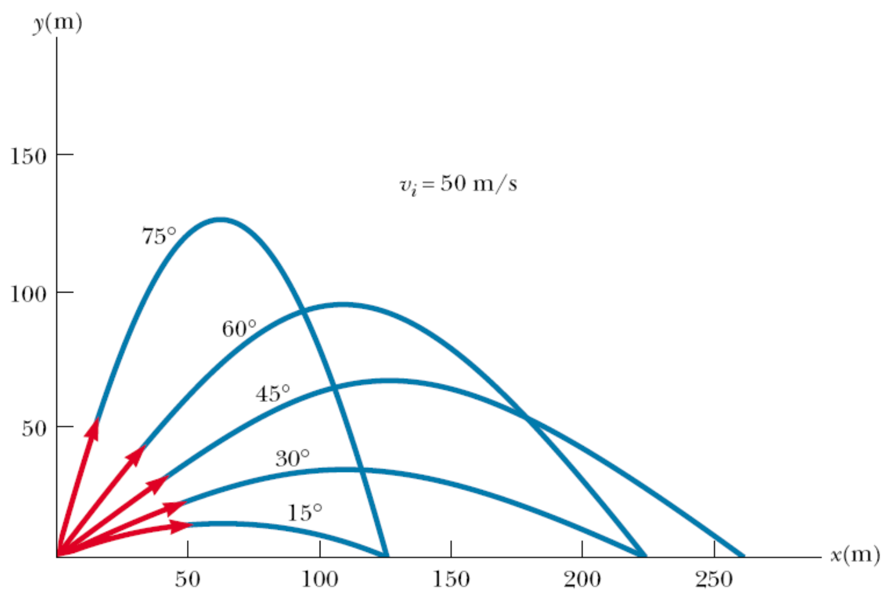
$$\boxed{x_0 = y_0 = 0}$$

$$\boxed{y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}}$$

ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ

Βεληνεκές

Η οριζόντια απόσταση R που διανύει το βλήμα όταν επιστρέψει στο αρχικό ύψος εκτόξευσης.



$$R = x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t$$

Ο χρόνος πτήσης υπολογίζεται από την κατακόρυφη κίνηση, έτσι ώστε $y-y_0=0$:

$$0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Απαλείφοντας τον χρόνο από τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στην σχέση:

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0}$$

Το μέγιστο βεληνεκές επιτυγχάνεται για βολή με $\theta_0 = 45^o$