ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2023-2024

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

- Καρτεσιανές Συντεταγμένες
- Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων
- Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων
- Βαθμωτό Γινόμενο Τριών Διανυσμάτων

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

- Διανυσματική Φύση της Δύναμης
- Σύνθεση Δυνάμεων

ΡΟΠΗ

- Η Έννοια της Ροπής
- Ροπή Πολλών Δυνάμεων
- Ζεύγος Δυνάμεων

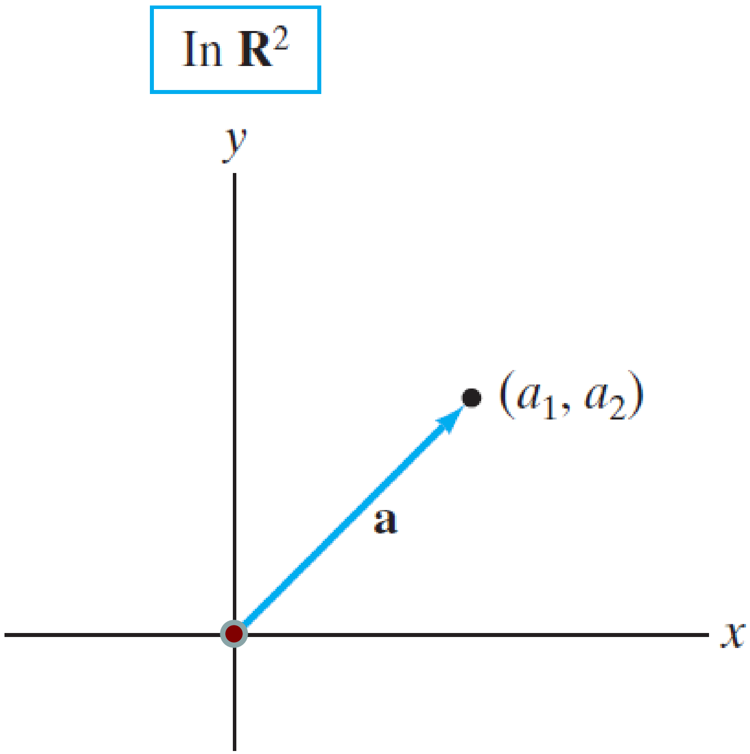
ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2023-2024

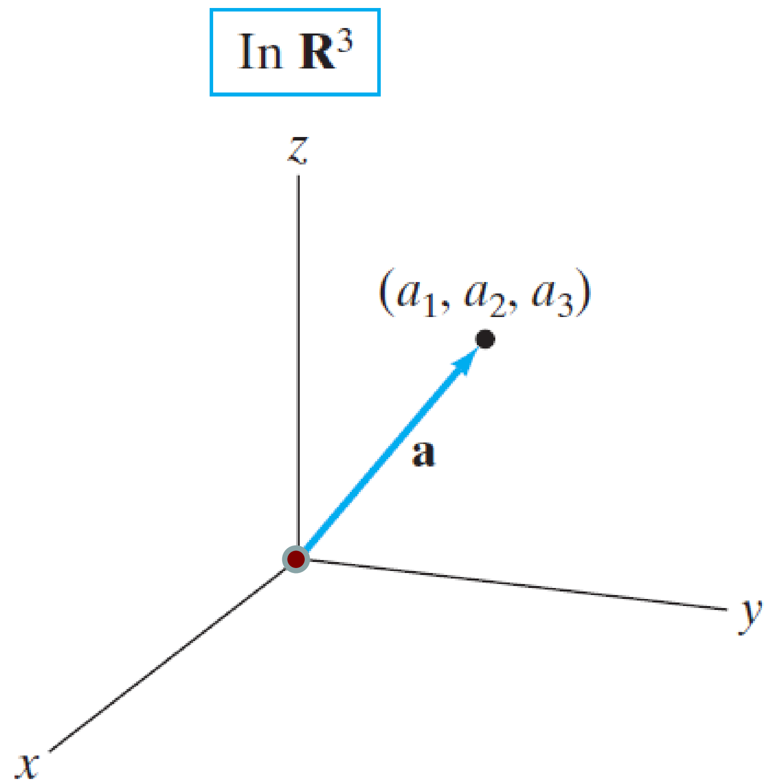
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ΦΑΡΑΚΟΣ	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ Εσωτερικό & Εξωτερικό Γινόμενο	1.1 – 1.3 1.5	3.1 – 3.5	3.1 – 3.8	1.7 – 1.10
ΔΥΝΑΜΕΙΣ Διανυσματική Φύση	2.1	4.1, 4.2	5.4	5.1
ΡΟΠΗ	7.1	10.1-10.4	10.8, 11.6	10.1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο (a_1, a_2) του επιπέδου και στο σημείο (a_1, a_2, a_3) του τρισδιάστατου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

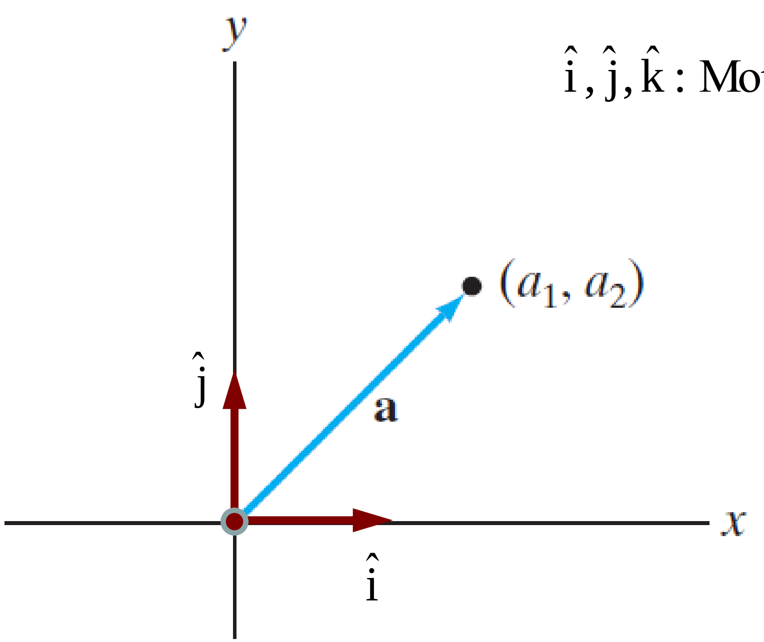




ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο **(a_1, a_2)** του επιπέδου και στο σημείο **(a_1, a_2, a_3)** του τρισδιάστατου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

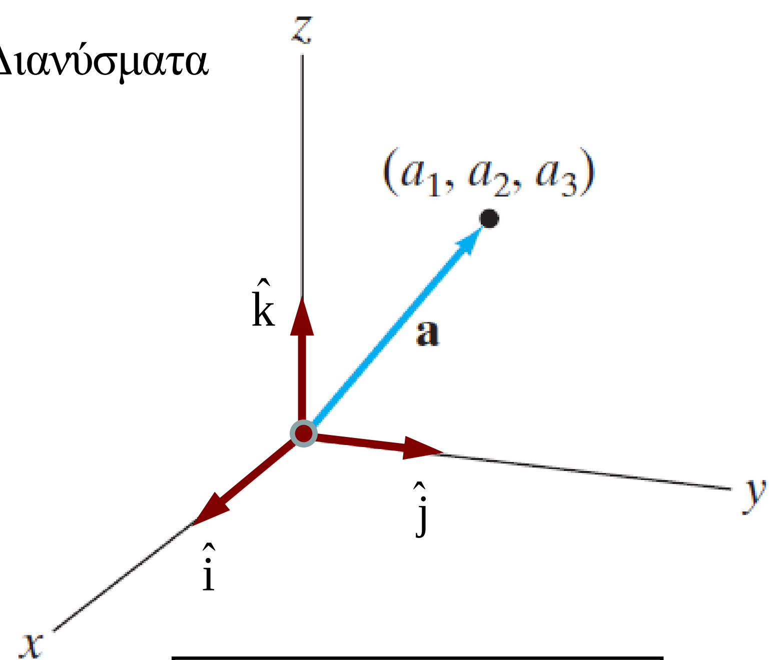
In $\mathbf{R}^2$



$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: Μοναδιαία Διανύσματα

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$$

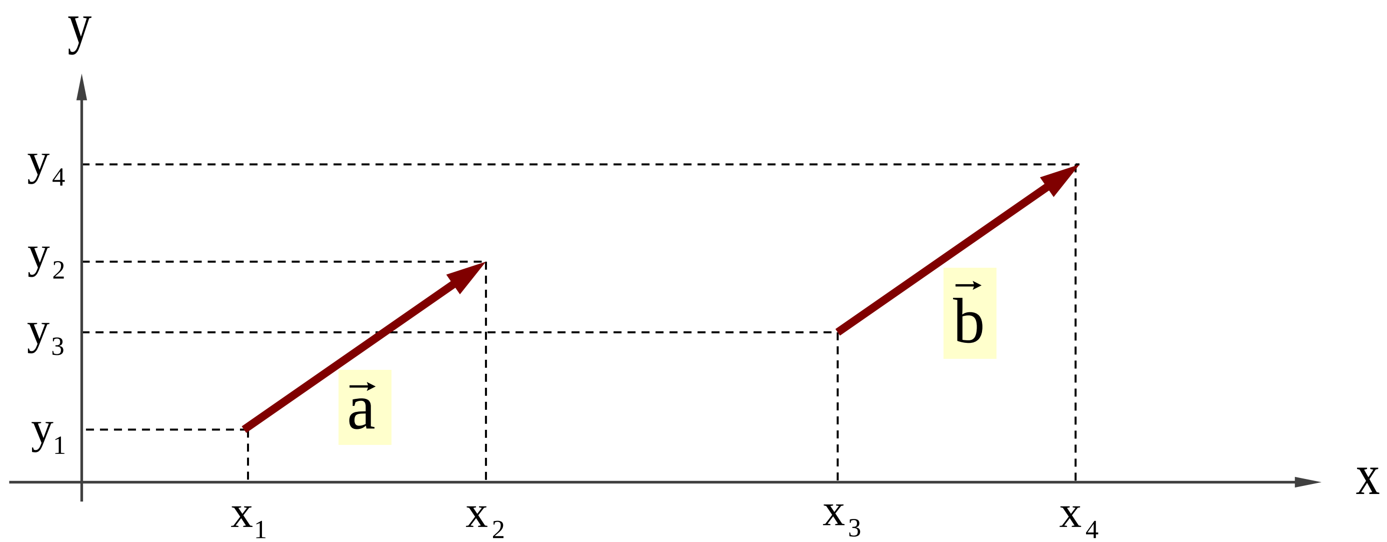
In $\mathbf{R}^3$



$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

Μερικές Βασικές Διαπιστώσεις

Παράλληλη μετατόπιση διανύσματος στο χώρο αφήνει τις συνιστώσες του αμετάβλητες.

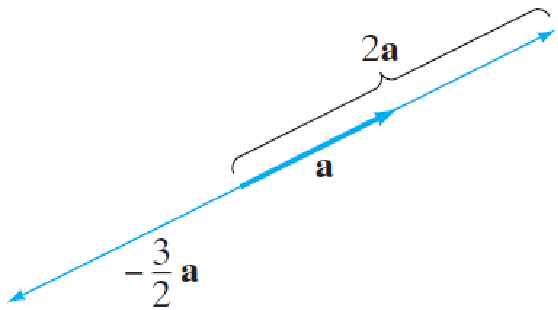


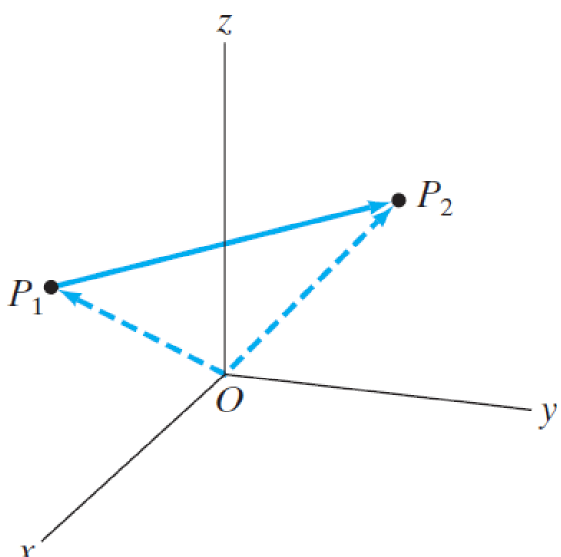
$$\left\{\begin{aligned}\vec{a} &= (x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j} \\ \vec{b} &= (x_4 - x_3)\,\hat{i} + (y_4 - y_3)\,\hat{j}\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \begin{aligned} x_2 - x_1 &= x_4 - x_3 \\ y_2 - y_1 &= y_4 - y_3 \end{aligned} \Longleftrightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{b}}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: Μοναδιαία Διανύσματα

Βασικές Πράξεις επί των Διανυσμάτων

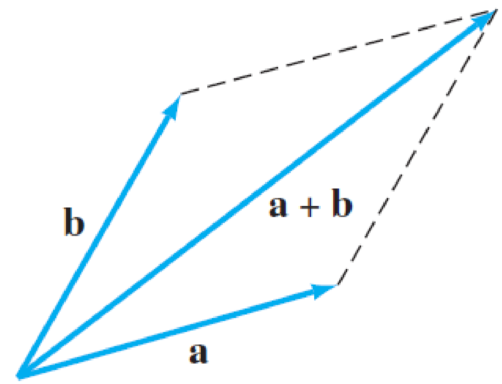
Αριθμητικά Πολλαπλάσια

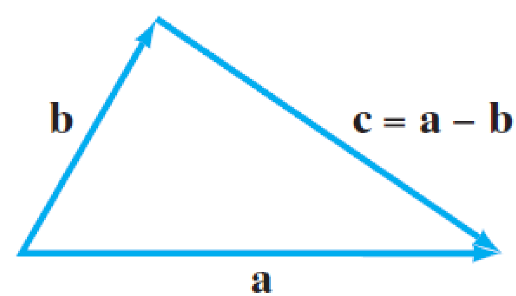




$$\vec{P}_{12} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

Άθροισμα Διανυσμάτων





Διαφορά Διανυσμάτων

Βασικές Πράξεις επί των Διανυσμάτων

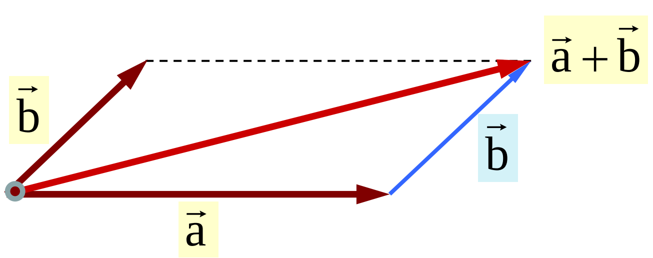
$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \qquad \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

Αριθμητικά Πολλαπλάσια

$$\lambda\vec{a} = \lambda(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) = \lambda a_1\hat{i} + \lambda a_2\hat{j} + \lambda a_3\hat{k}$$

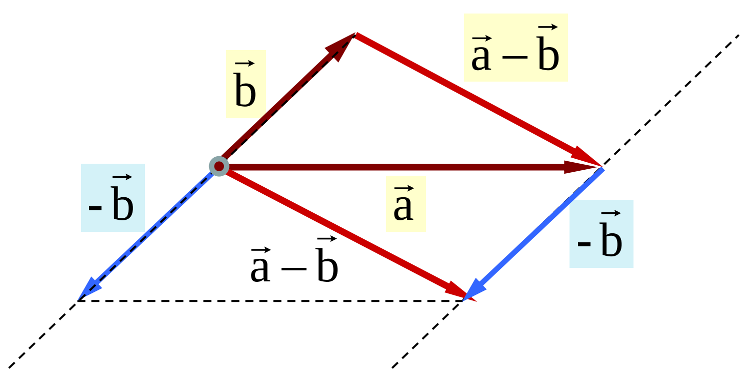
Άθροισμα Διανυσμάτων

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$



Διαφορά Διανυσμάτων

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$$



ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Για τα διανύσματα **a**=(a_1, a_2, a_3) και **b**=(b_1, b_2, b_3) του τρισδιάστατου χώρου το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως:

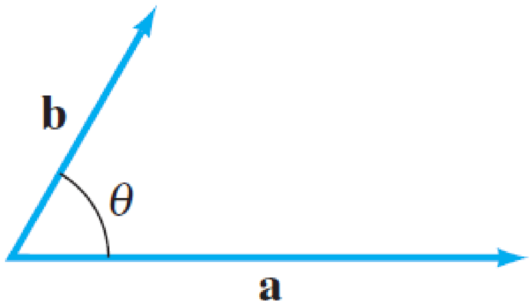
$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

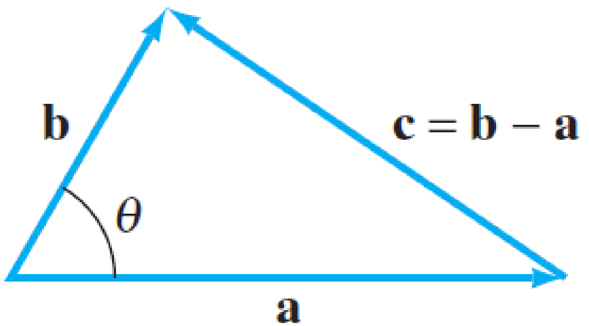
1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0$, and $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0$ if and only if $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;
3. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$;
4. $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b})$.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = \left|\vec{a}\right|^2 \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}}$$



$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Leftrightarrow (\vec{b}-\vec{a})(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{b}\vec{b}+\vec{a}\vec{a}-2\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

- Κάθετα διανύσματα ($\theta=90^o$) έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν.
- Παράλληλα διανύσματα ($\theta=0^o$) έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους.

Μοναδιαία Διανύσματα

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 90^0 = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{i}\cdot\hat{j}=0 \\ \hat{i}\cdot\hat{k}=0 \\ \hat{j}\cdot\hat{k}=0 \end{array}}$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 0^0 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$\Downarrow$$

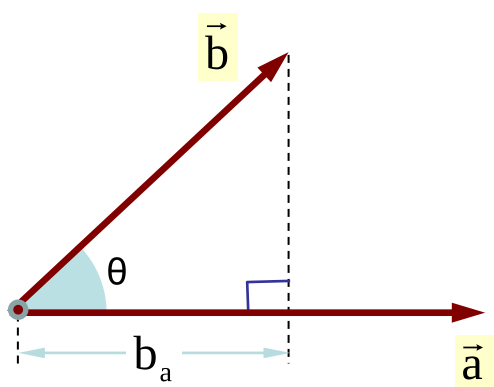
$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{i}\cdot\hat{i}=1 \\ \hat{j}\cdot\hat{j}=1 \\ \hat{k}\cdot\hat{k}=1 \end{array}}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

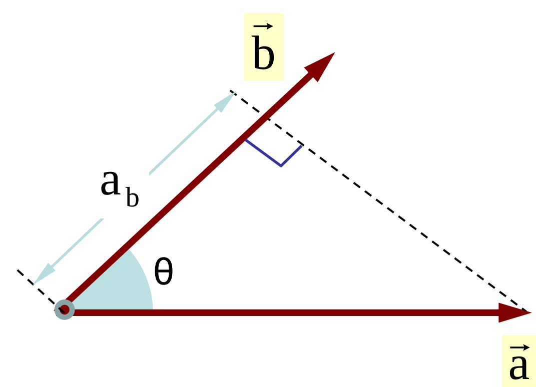
Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

Το εσωτερικό γινόμενο συσχετίζεται με το μέτρο της **προβολής**



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|\,b_a$$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}|\,a_b$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

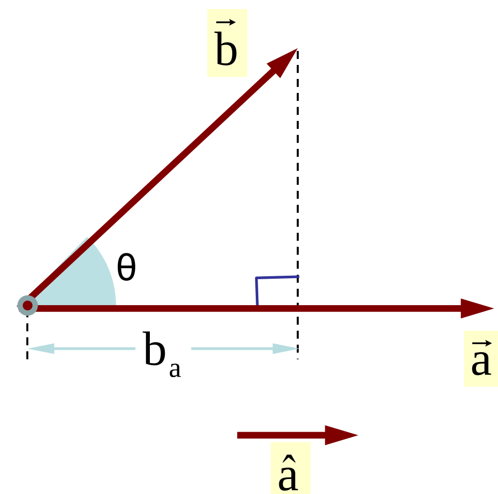
Επειδή το μοναδιαίο διάνυσμα οποιουδήποτε διανύσματος προκύπτει διαιρώντας το διάνυσμα με το μέτρο του, τότε:

Το εσωτερικό γινόμενο διανύσματος με μοναδιαίο διάνυσμα ισούται με το μέτρο της προβολής του διανύσματος αυτού στην κατεύθυνση του μοναδιαίου.

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{a}\cdot\vec{b} = |\hat{a}||\vec{b}|\cos\theta = 1|\vec{b}|\cos\theta = b_a$$



ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

Θεωρώντας την παραπάνω σχέση σαν τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, τότε προκύπτει:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\,\hat{i} + a_2\,\hat{j} + a_3\,\hat{k})\cdot(b_1\,\hat{i} + b_2\,\hat{j} + b_3\,\hat{k})$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} = {} & a_1b_1\,\hat{i}\cdot\hat{i} + \cancel{a_1b_2\,\hat{i}\cdot\hat{j}} + \cancel{a_1b_3\,\hat{i}\cdot\hat{k}} \\ & + \cancel{a_2b_1\,\hat{j}\cdot\hat{i}} + a_2b_2\,\hat{j}\cdot\hat{j} + \cancel{a_2b_3\,\hat{j}\cdot\hat{k}} \\ & + \cancel{a_3b_1\,\hat{k}\cdot\hat{i}} + \cancel{a_3b_2\,\hat{k}\cdot\hat{j}} + a_3b_3\,\hat{k}\cdot\hat{k}\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

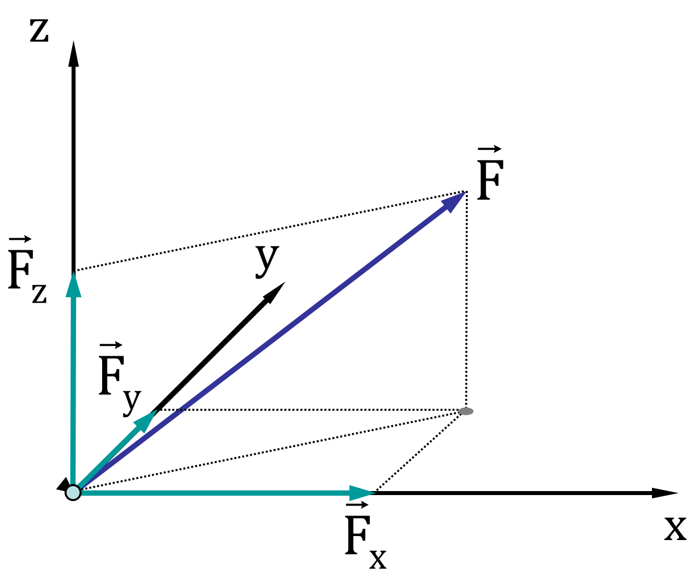
$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Δύναμη: Διανυσματικό μέγεθος – Για τον καθορισμό της χρειάζεται όχι μόνο το μέτρο της αλλά και η φορά της.

Ο ακριβής ορισμός της δύναμης θα δοθεί σε συνδυασμό με τη δυναμική της κίνησης (Νόμοι του Νεύτωνα).

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μια δύναμη F μπορεί να οριστεί πλήρως από τις τρεις συνιστώσες της F_x, F_y και F_z:



$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: Μοναδιαία Διανύσματα

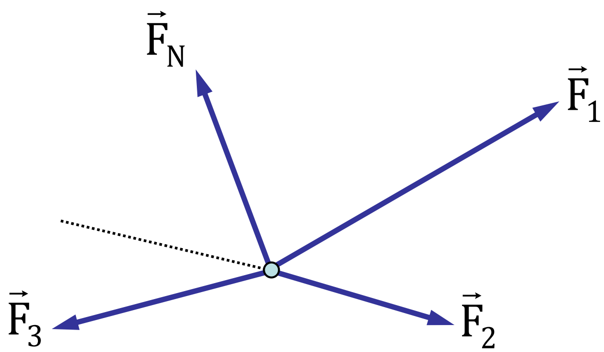
Μέτρο της Δύναμης: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

Μονάδα Μέτρησης (S.I.): **N** (Newton)

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Συντρέχουσες δυνάμεις: Οι δυνάμεις που εφαρμόζονται στο ίδιο υλικό σημείο

Συνισταμένη: Το διανυσματικό άθροισμα όλων των συντρεχουσών δυνάμεων



$$\boxed{\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots + F_{Nx} = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots + F_{Ny} = \sum_{i=1}^{N} F_{iy}$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \cdots + F_{Nz} = \sum_{i=1}^{N} F_{iz}$$

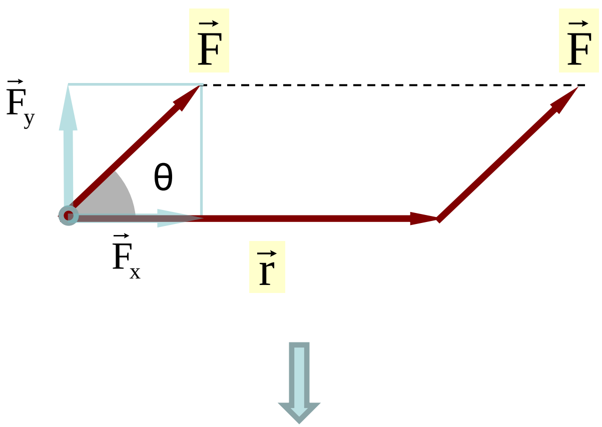
$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}$ με $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Φυσικά Μεγέθη που προκύπτουν από το Εσωτερικό Γινόμενο

Χαρακτηριστικό παράδειγμα βαθμωτού φυσικού μεγέθους που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο δύο άλλων διανυσματικών φυσικών μεγεθων είναι το έργο που παράγει η δύναμη **F** μετατοπιζόμενη κατά διάστημα **r** :

$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{r} = |\vec{F}||\vec{r}|\cos\theta}$$



$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{r} = |\vec{F}||\vec{r}|\cos\theta = F_x\, r}$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

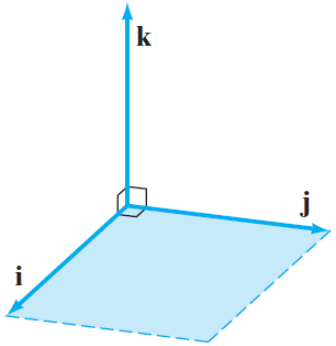
Για τα διανύσματα **a**=(a_1, a_2, a_3) και **b**=(b_1, b_2, b_3) του τρισδιάστατου χώρου το εξωτερικό γινόμενο δίνεται μέσω της ορίζουσας:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

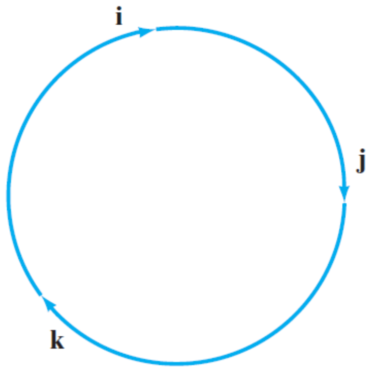
Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι διανυσματικό μέγεθος.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ (anticommutativity);
2. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (distributivity);
3. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ (distributivity);
4. $k(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (k\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(k\mathbf{b})$.



$$\boxed{\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\ ,\ \ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\ ,\ \ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}}$$



ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 3×3 ισοδυναμεί με το άθροισμα τριών οριζουσών 2×2:

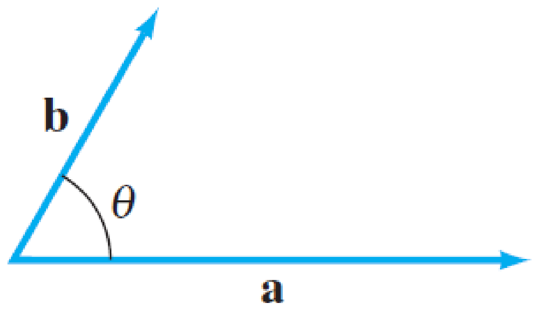
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\hat{k}$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας μπορεί να γίνει ως προς οποιαδήποτε σειρά ή στήλη με τον μνημονικό κανόνα των προσήμων:

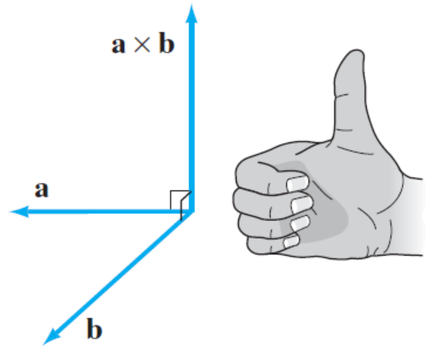
$$\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$$

Είναι προφανές πως ισχύει η γενίκευση, ότι μια ορίζουσα **n τάξεως** μπορεί να αντικατασταθεί με **n ορίζουσες τάξεως (n-1)**.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \cos^2\theta = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \sin^2\theta$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

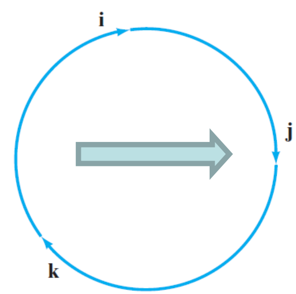
Αντίστροφα, θεωρώντας γνωστές τις σχέσεις των **εξωτερικών γινομένων** για τα **μοναδιαία** διανύσματα:

$$\boxed{\hat{i}\times\hat{i}=\vec{0} \quad \hat{j}\times\hat{j}=\vec{0} \quad \hat{k}\times\hat{k}=\vec{0} \quad \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \ \ldots}$$

τότε προκύπτει:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\,\hat{i}+a_2\,\hat{j}+a_3\,\hat{k})\times(b_1\,\hat{i}+b_2\,\hat{j}+b_3\,\hat{k})$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}=\ &\cancel{a_1b_1\,\hat{i}\times\hat{i}} + a_1b_2\,\hat{i}\times\hat{j} + a_1b_3\,\hat{i}\times\hat{k}\\ &+\ a_2b_1\,\hat{j}\times\hat{i} + \cancel{a_2b_2\,\hat{j}\times\hat{j}} + a_2b_3\,\hat{j}\times\hat{k}\\ &+\ a_3b_1\,\hat{k}\times\hat{i} + a_3b_2\,\hat{k}\times\hat{j} + \cancel{a_3b_3\,\hat{k}\times\hat{k}}\end{aligned}$$

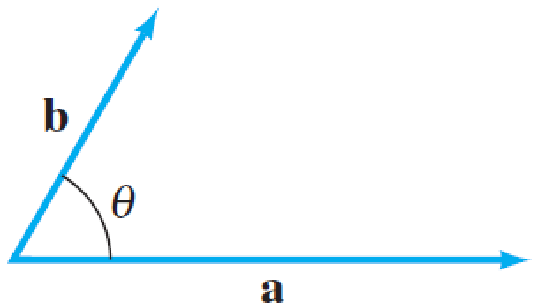


$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}=\ &a_1b_2\,\hat{k} - a_1b_3\,\hat{j}\\ &-\ a_2b_1\,\hat{k} + a_2b_3\,\hat{i}\\ &+\ a_3b_1\,\hat{j} - a_3b_2\,\hat{i}\end{aligned}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\hat{k}$$

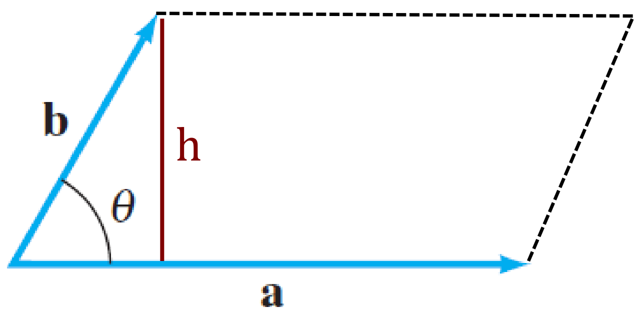
$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}}$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

Γεωμετρική σημασία του Εξωτερικού Γινομένου

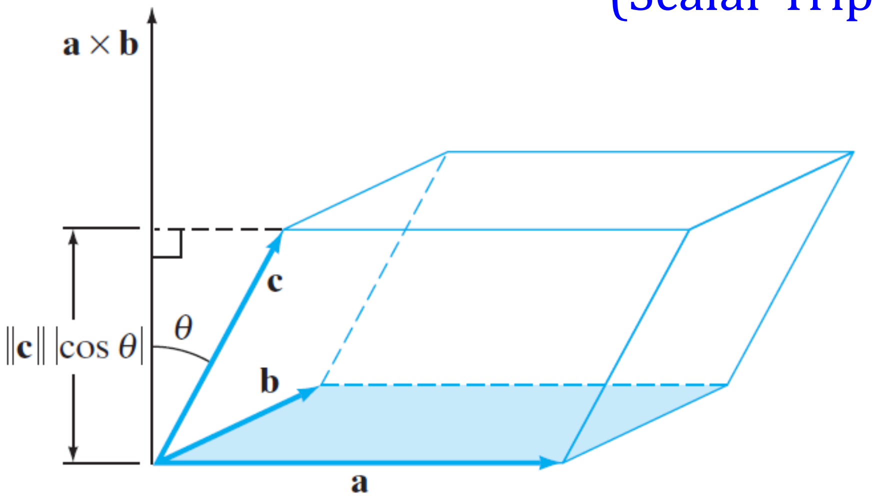


$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta = \left|\vec{a}\right|\left(\left|\vec{b}\right|\sin\theta\right) = \left|\vec{a}\right|h = E$$

Το **μέτρο του εξωτερικού γινομένου** δύο διανυσμάτων ισούται με το **εμβαδόν** του αντίστοιχου παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο αυτά διανύσματα.

ΒΑΘΜΩΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

(Scalar Triple Product)



Ορίζεται σαν το μεικτό γινόμενο:

$$\boxed{\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}$$

και είναι ένα **βαθμωτό** μέγεθος.

$$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=(c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k})\cdot\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

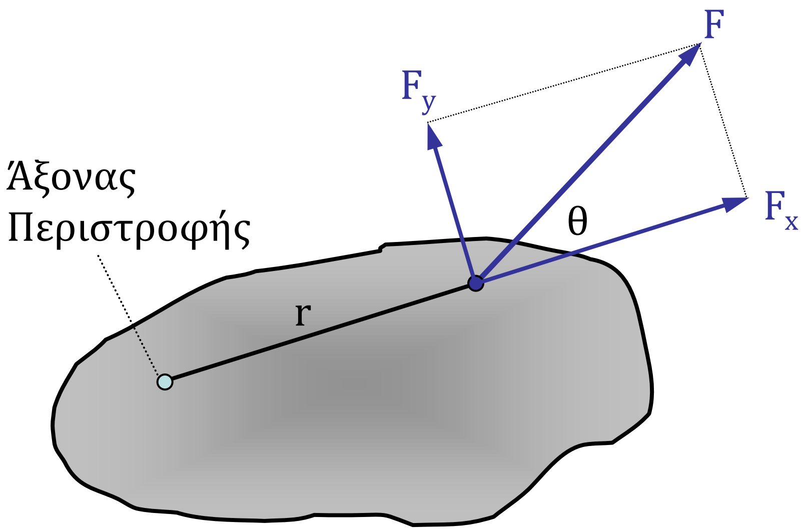
Γεωμετρική σημασία του Τριπλού Γινομένου

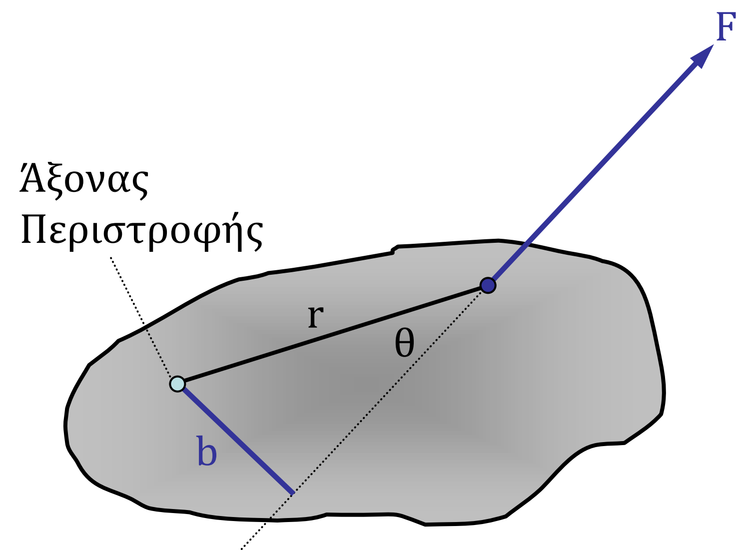
$$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left|\vec{c}\right|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cos\theta=\left(\left|\vec{c}\right|\cos\theta\right)\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left(\left|\vec{c}\right|\cos\theta\right)E=V$$

Το τριπλό γινόμενο διανυσμάτων ισούται με τον **όγκο** του αντίστοιχου παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα τρία διανύσματα.

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ροπή: Η ικανότητα μιας δύναμης F να θέτει σε περιστροφή ένα σώμα





F_y: Η κάθετη συνιστώσα της δύναμης στο διάστημα r

b: Η απόσταση του άξονα περιστροφής από το φορέα της δύναμης F (βραχίονας)

$$\tau = F_y\, r = [F \sin(\theta)]\, r$$

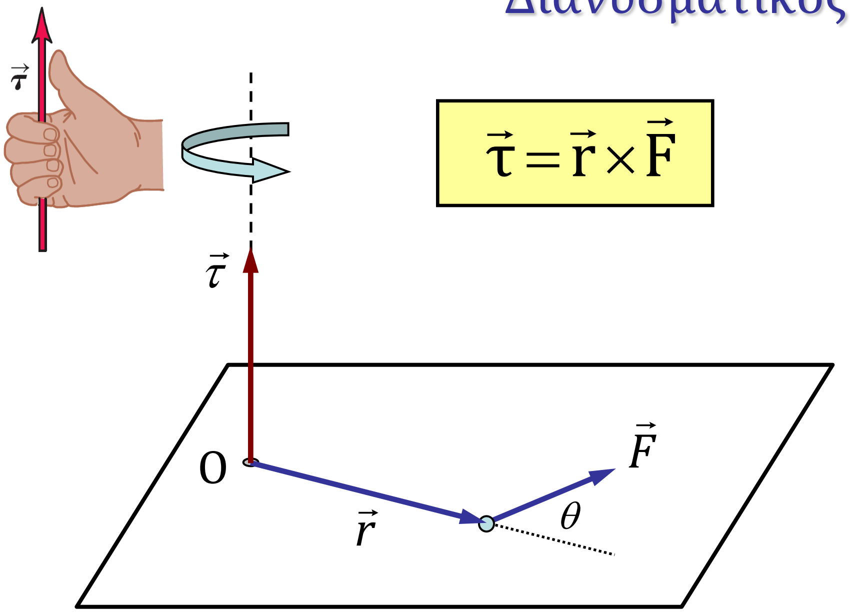
Μέτρο της ροπής τ

$$\tau = F\, b = F\,[r \sin(\theta)]$$

$$\boxed{\tau = r\, F \sin(\theta)}$$

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Διανυσματικός ορισμός της ροπής



$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Μέτρο: $\tau = r\,F\,\sin(\theta)$

Κατεύθυνση: Κάθετη στο επίπεδο επιβατικής ακτίνας - δύναμης (r-F)

Φορά: Καθοριζόμενη από τον κανόνα του αντίχειρα του δεξιού χεριού

Μονάδα μέτρησης: Nm (S.I.)

- *Η ροπή δύναμης ορίζεται πάντοτε ως προς κάποιο **συγκεκριμένο σημείο** αναφοράς.*
- *Μετατόπιση της δύναμης κατά μήκος του άξονα εφαρμογής αφήνει **αναλλοίωτη** την ροπή της.*
- *Αλλαγή του σημείου αναφοράς **αλλάζει** την ροπή της δύναμης.*

Διανυσματικός ορισμός της ροπής

$$\boxed{\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{F}=F_x\,\hat{i}+F_y\,\hat{j}+F_z\,\hat{k}\\ \vec{r}=x_0\,\hat{i}+y_0\,\hat{j}+z_0\,\hat{k}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}=(x_0\,\hat{i}+y_0\,\hat{j}+z_0\,\hat{k})\times(F_x\,\hat{i}+F_y\,\hat{j}+F_z\,\hat{k})$$

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= x_0F_x\,\hat{i}\times\hat{i}+x_0F_y\,\hat{i}\times\hat{j}+x_0F_z\,\hat{i}\times\hat{k}\\ &+y_0F_x\,\hat{j}\times\hat{i}+y_0F_y\,\hat{j}\times\hat{j}+y_0F_z\,\hat{j}\times\hat{k}\\ &+z_0F_x\,\hat{k}\times\hat{i}+z_0F_y\,\hat{k}\times\hat{j}+z_0F_z\,\hat{k}\times\hat{k}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}\hat{i}\times\hat{i}=0 & \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\\ \hat{j}\times\hat{j}=0 & \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\\ \hat{k}\times\hat{k}=0 & \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}\end{array}}$$

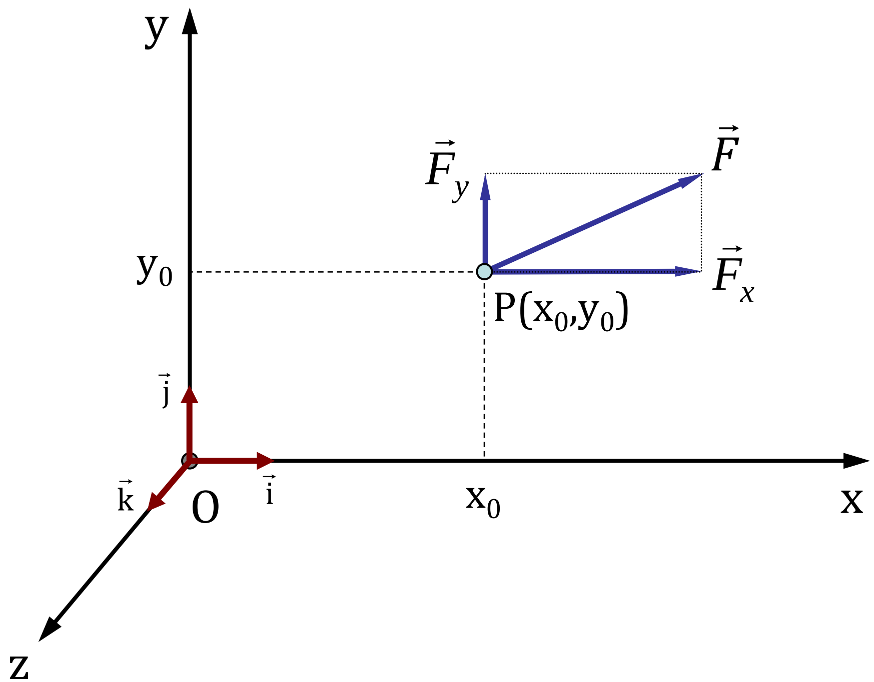
$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= (y_0F_z-z_0F_y)\,\hat{i}\\ &-(x_0F_z-z_0F_x)\,\hat{j}\\ &+(x_0F_y-y_0F_x)\,\hat{k}\end{aligned}$$

Γραφή σε μορφή ορίζουσας

$$\boxed{\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x_0 & y_0 & z_0\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}}$$

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ειδική Περίπτωση: Υπολογισμός ροπής δύναμης που βρίσκεται στο επίπεδο XY



Συνιστώσες της F: F_x, F_y

- Ροπή της F_y: $+x_0F_y$
- Ροπή της F_x: $-y_0F_x$

Συνολικό μέτρο ροπής:

$$\tau = x_0\,F_y - y_0\,F_x$$

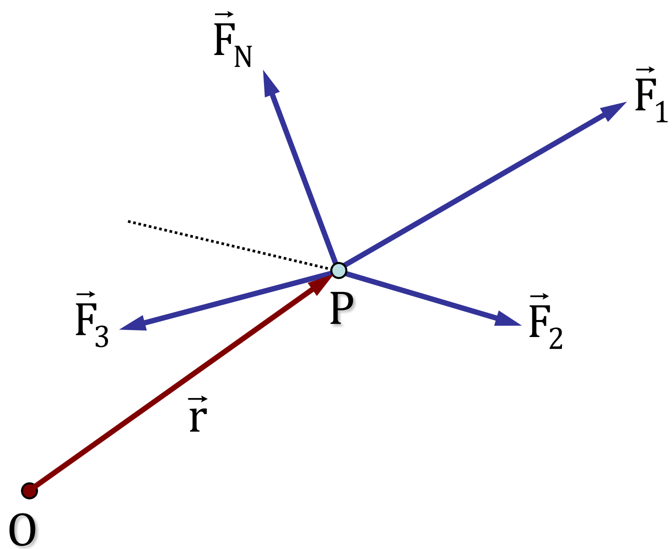
με κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα z.

Με βάση τον διανυσματικό ορισμό της ροπής

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_0 & y_0 & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (x_0F_y - y_0F_x)\,\hat{k}$$

ΡΟΠΗ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Υπολογισμός ροπής πολλών δυνάμεων ως προς το σημείο Ο, όταν αυτές έχουν κοινό σημείο εφαρμογής (συντρέχουσες)



$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots + \vec{\tau}_N}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots + \vec{\tau}_N \\
&= \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \vec{r}\times\vec{F}_3 + \cdots + \vec{r}\times\vec{F}_N \\
&= \vec{r}\times\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N\right) \\
&= \vec{r}\times\vec{R}
\end{aligned}$$

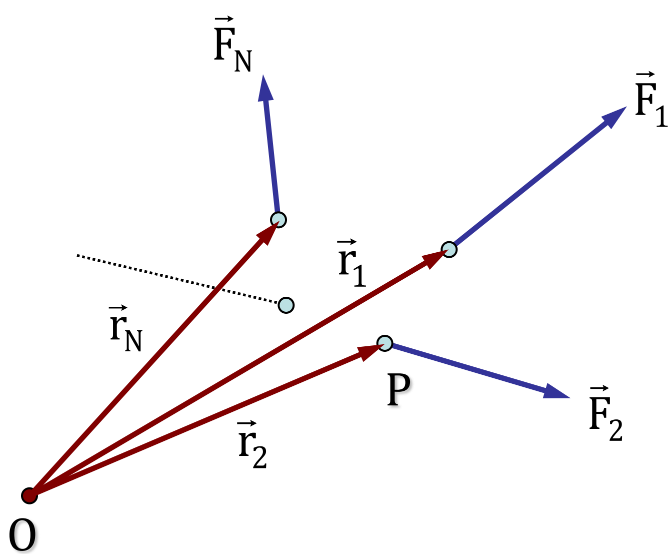
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{R}}$$

Η συνισταμένη δύναμη μπορεί να αντικαταστήσει ένα σύστημα συντρεχουσών δυνάμεων σε ένα σώμα: *Επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα αναφορικά με μετατοπίσεις και περιστροφές.*

$\vec{R}$: Συνισταμένη των συντρεχουσών

ΡΟΠΗ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Προσοχή! Εάν οι δυνάμεις δεν έχουν κοινό σημείο εφαρμογής (δεν είναι συντρέχουσες) τότε η συνισταμένη τους δεν επιφέρει ισοδύναμα αποτελέσματα.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots + \vec{\tau}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Rightarrow$ Μετατόπιση

$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i \Rightarrow$ Περιστροφή

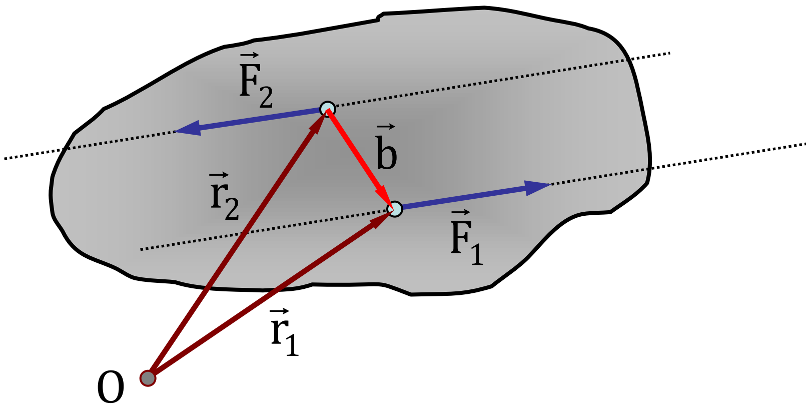
Επειδή κατά κανόνα τα διανύσματα $\vec{R}$ και $\vec{\tau}$ δεν είναι κάθετα μεταξύ τους, δεν διασφαλίζεται η ικανοποίηση της σχέσης

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R}}$$

για κάποιο ζητούμενο $\vec{r}$.

ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ζεύγος Δυνάμεων: Σύστημα δύο ίσων κατά μέτρο αλλά με αντίθετη φορά δυνάμεων με παράλληλες διευθύνσεις.



Συνισταμένη Δύναμη

$$\boxed{\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0}$$

Άρα, το ζεύγος δυνάμεων δεν προκαλεί μεταφορική κίνηση.

Ασκούμενη Ροπή

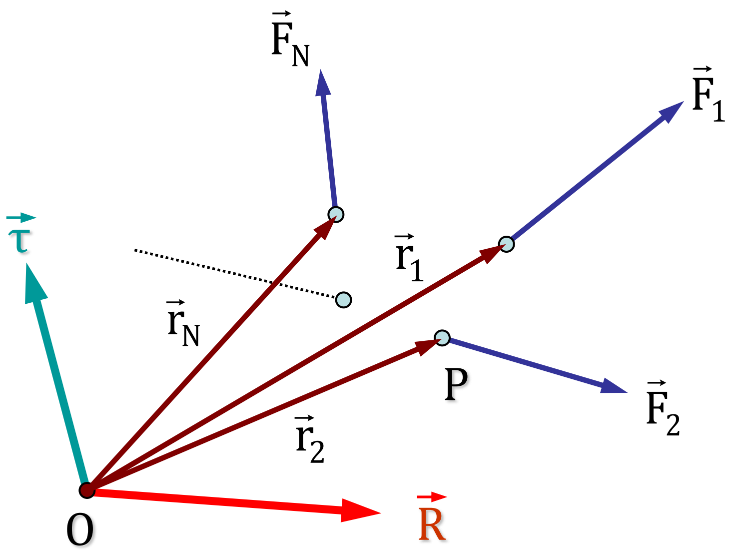
$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$
$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$
$$= \vec{b} \times \vec{F}_1$$

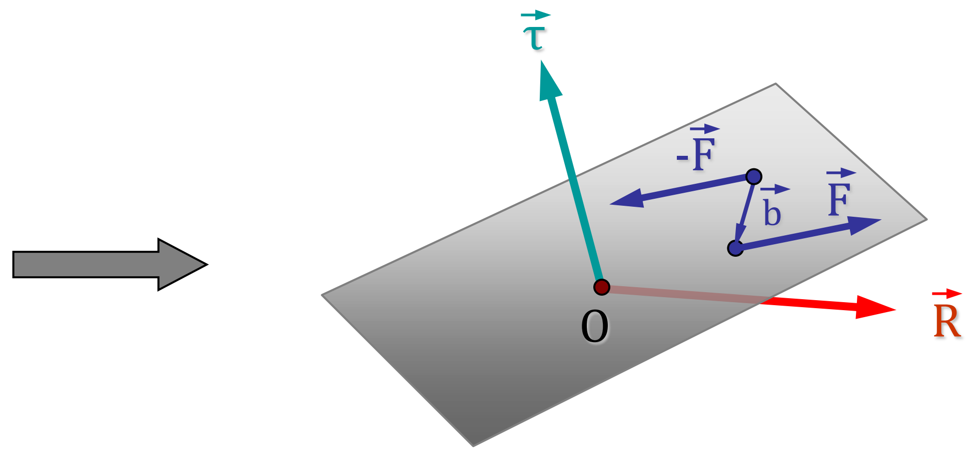
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{b} \times \vec{F}_1}$$

- *Η ροπή του ζεύγους είναι ανεξάρτητη από το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζεται η ροπή.*
- *Δεν μπορεί να βρεθεί μια δύναμη που να αντικαθιστά το ζεύγος δυνάμεων.*

ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ένα σύστημα πολλών δυνάμεων μπορεί πάντα να αντικατασταθεί με μια δύναμη και ένα ζεύγος δυνάμεων.





$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots + \vec{\tau}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{b} \times \vec{F}$$

- Η συνισταμένη δύναμη R διέρχεται από το σημείο υπολογισμού της ροπής Ο, ώστε να μην συνεισφέρει στην ροπή.

- Το ζεύγος δυνάμεων τοποθετείται σε επίπεδο κάθετο στην συνολική ροπή τ.