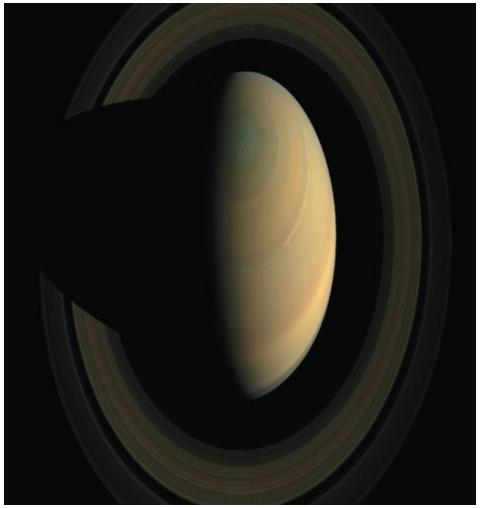
Βαρύτητα

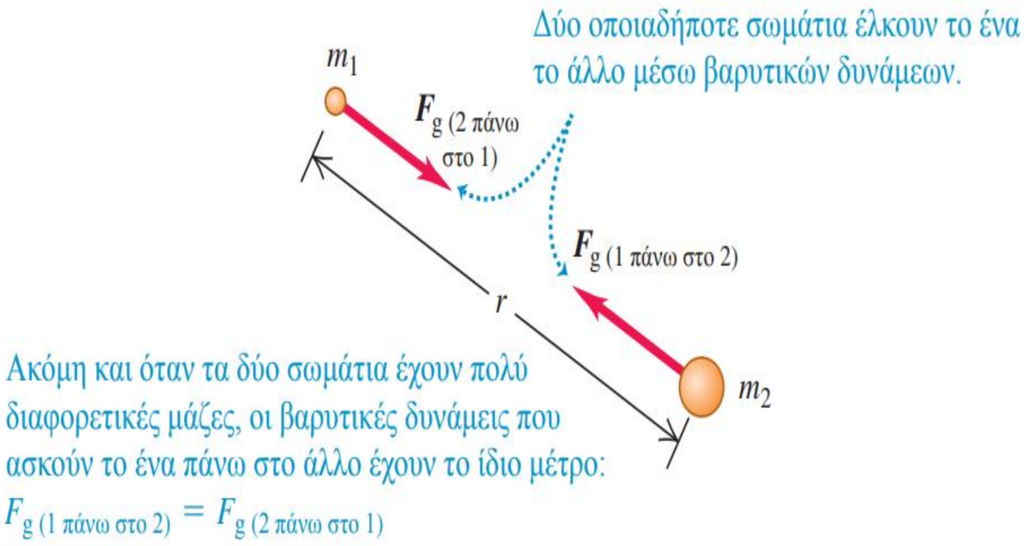
- Νόμος της Βαρύτητας
- Βαρύτητα στο Εσωτερικό και Πάνω από την Επιφάνεια της Γης
- Πλανήτες σε Ελλειπτικές Τροχιές – Νόμοι του Kepler
- Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια
- Τροχιές και Ενέργεια

Σχετικά ερωτήματα

- ✓ Γιατί το Φεγγάρι δεν πέφτει στη Γη;
- ✓ Γιατί οι πλανήτες μετατοπίζονται στον ουρανό;
- ✓ Γιατί η Γη δεν διαφεύγει στο διάστημα αλλά παραμένει σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο;



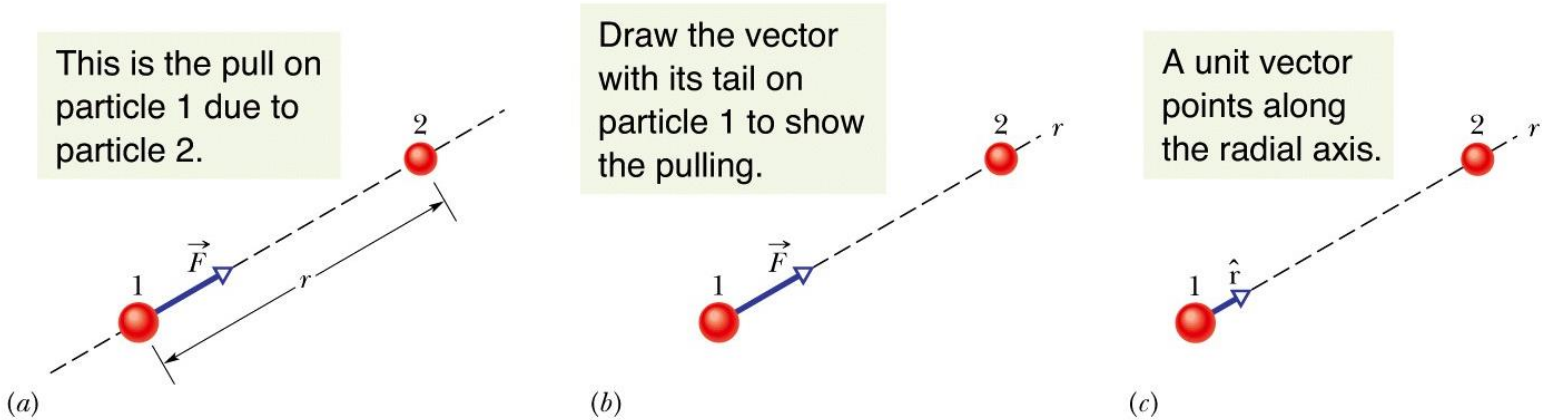
Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ ΓΙΑ ΤΗ ΒΑΡΥΤΗΤΑ



Οι βαρυτικές δυνάμεις

- δρουν πάντοτε κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο αλληλεπιδρώντα σωμάτια
- είναι ελκτικές
- αποτελούν ένα ζεύγος δράσης- αντίδρασης.
- οι δύο δυνάμεις αλληλεπίδρασης έχουν ίσα μέτρα, ακόμη και όταν οι μάζες των δύο σωματίων διαφέρουν
- Δεν μεταβάλλονται από άλλα σώματα που παρεμβαίνουν μεταξύ των δύο σωμάτων

Νόμος της Βαρύτητας σε διανυσματική μορφή



F_{12}=η δύναμη που ασκείται στο σώμα 1 από το σώμα 2

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}}$$

Η βαρυτική δύναμη F που ασκείται στο σώμα 1 από το σώμα 2 έχει διεύθυνση πάνω στην ευθεία που συνδέει τα δύο σώματα και πάντα φορά προς το σώμα 2

$$G = 6.67\times10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{Kg^2} = 6.67\times10^{-11}\ \frac{m^3}{Kg.s^2}$$

G=βαρυτική σταθερά=Θεμελιώδης σταθερά της φυσικής που εχει την ίδια τιμή για οποιαδήποτε δυο σωμάτια

Νόμος της Βαρύτητας σε διανυσματική μορφή

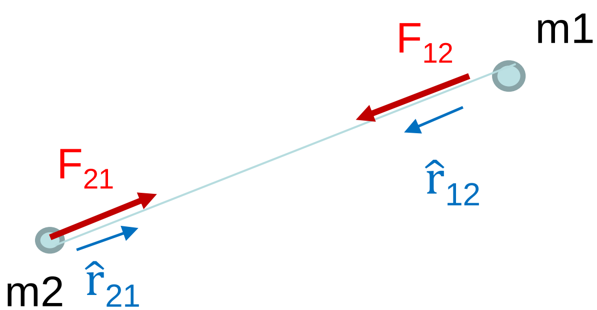
F_{12}=η δύναμη που ασκείται στο σώμα 1 από το σώμα 2

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

Η βαρυτική δύναμη μειώνεται όταν αυξάνεται η απόσταση μεταξύ των δύο σωματίων

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$$

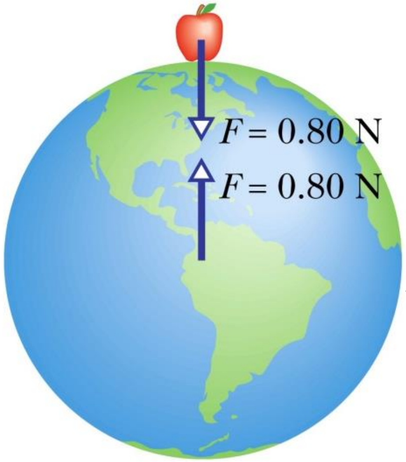
$\hat{r}_{12}$=- $\hat{r}_{21}$



Όταν πολλά σώματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, η συνολική βαρυτική δύναμη σε ένα σώμα ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που ασκεί το κάθε ένα από τα υπόλοιπα σωματίδια.

Η συνολική δύναμη στο σώμα 1 από n σώματα ισούται:

$F_1 = F_{12} + F_{13} + \ldots F_{1n} = \sum_{i=2}^{n} F_{1i}$



Μεταξύ των δύο σωμάτων ασκείται η ίδια δύναμη.
Η Γη ασκεί την ίδια βαρυτική δύναμη που ασκουμε εμείς στη γη.

Αυτό που διαφέρει είναι η επιτάχυνση που παράγεται: το μήλο έχει επιτάχυνση 9.8 m/s^2 και η Γη 10^{-25} m/s^2

$$\boxed{\vec{\mathrm{F}}g = \mathrm{G}\frac{\mathrm{M}m}{r^2}}$$

Προσοχή: μη μπερδευουμε το g με το G. Αντιπροσωπεύουν διαφορετικά μεγέθη. Το g είναι η επιτάχυνση λόγω βαρύτητας που συνδέει τη μάζα με το βάρος. Η τιμή του είναι διαφορετική σε διαφορετικό ύψος απο την επιφανεια της γης και στις επιφανειες διαφορετικών πλανητών. Το G συσχετίζει τη βαρυτική δύναμη μεταξύ δύο σωμάτων με τις μαζες τους και την μεταξύ τους απόσταση.Εχει την ίδια τιμή για οποιαδηποτε δυο σωματα ανεξάρτητα της θέσης τους στο χώρο.

Υπολογισμός του g στην επιφάνεια της γης-Σχέση g και G

Το βάρος ενός σώματος είναι η ολική βαρυτική δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα από όλα τα άλλα σώματα στο σύμπαν. Όταν το σώμα βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της Γης, μπορούμε να αγνοήσουμε όλες τις άλλες βαρυτικές δυνάμεις και να θεωρήσουμε ως βάρος του σώματος μόνο τη βαρυτική έλξη της Γης.

$$W = mg = Fg = G\frac{mM}{R_{\Gamma}^{2}} \Rightarrow \boxed{g = G\frac{M}{R_{\Gamma}^{2}}}$$

Το g ειναι ανεξάρτητο της μάζας του σωματος

Εκτίμηση της Επιτάχυνση Βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης-Περιορισμοί

$$\boxed{g = G\frac{M}{R_{\Gamma}^{2}}}$$

Το συμπέρασμα ότι το βάρος ενός σώματος ισούται με τη βαρυτική δύναμη που ασκεί η γη σε αυτό προϋποθέτει ότι:

- **η γη είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς**. Η γη όμως περιστρέφεται και υπάρχει κεντρομόλος επιτάχυνση. Οι επιπτώσεις όμως είναι σχετικά μικρές
- **Η γη είναι σφαιρική**. Η Γη όμως έχει σχήμα ελλειψοειδές συμπιεσμένο στους πόλους και εξογκωμένο στο ισημερινό με μεγαλύτερη ακτίνα στον ισημερινό. Συνεπώς ένα σημείο στους πόλους ειναι πλησιέσταρα στον πυρήνα της γης από όσο ενα σημείο στον ισημερινό. Για το λογο αυτό η επιτάχυνση βαρύτητας αυξάνεται απο τον ισημερινό προς τους πόλους
- **Η μάζα της γης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη**. Η πυκνότητα όμως της γης μεταβάλλεται ακτινικά και αυξάνει απο την επιφάνεια προς τον πυρήνα (όπως θα φανεί παρακάτω), ενώ ακόμα και στην επιφανεια της γης μεταβάλλεται

Παράδειγμα 1

Ο πλανήτης Κρόνος έχει μάζα 100 φορές μεγαλύτερη της μάζας της Γης και βρίσκεται 10 φορες πιο μακρυά απο τον Ηλιο σε σχέση με τη Γη. Συγκρίνετε την επιτάχυνση της γης που προκαλείται απο την βαρυτική έλξη του Ηλιου με αυτή του Κρόνου λόγω της βαρυτικής έλξης του Ήλιου

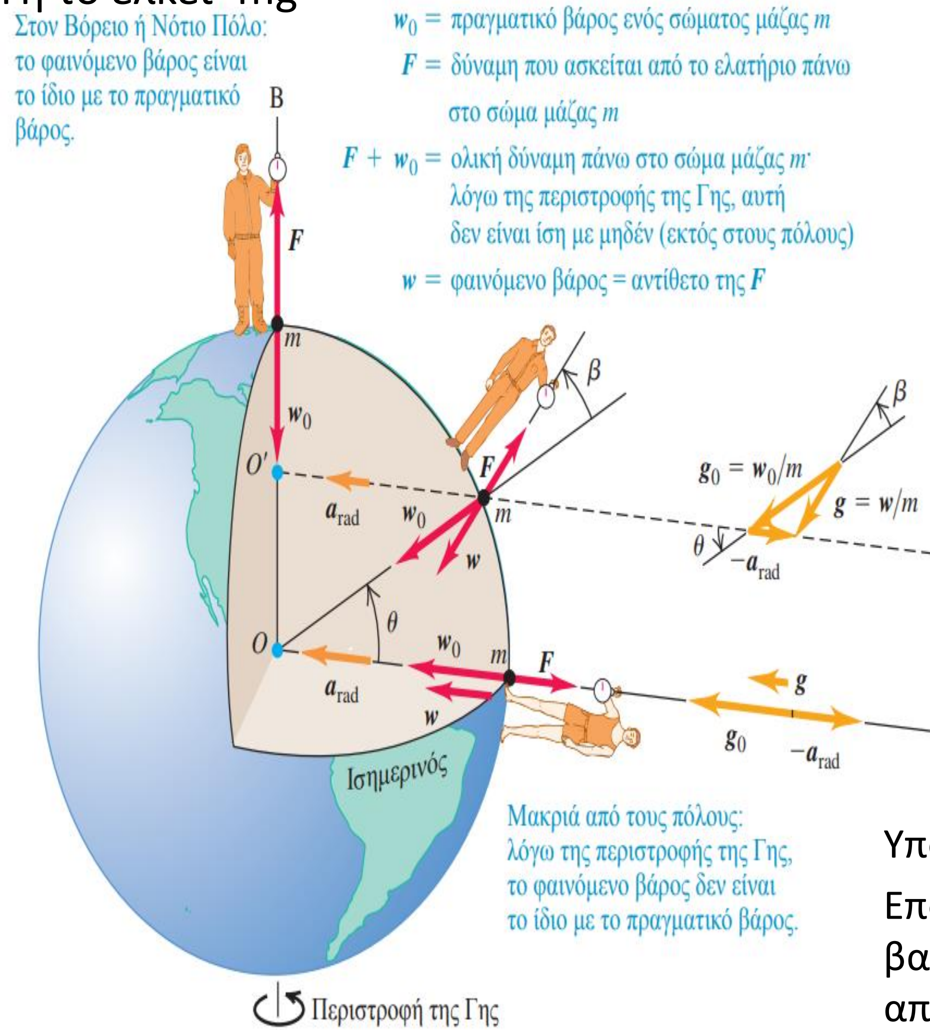
Παράδειγμα 2

Ενας πλανήτης έχει α) διπλάσια μάζα απο τη μάζα της Γης και διπλάσια ακτίνα απο την ακτίνα της Γης β)τετραπλάσια μάζα απο τη Γη και διπλάσια ακτίνα απο την ακτίνα της Γης. Βρείτε την επιτάχυνση βαρύτητας g στην επιφάνεια του πλανήτη σε σχέση με την επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια της γης.

Επίδραση της περιστροφής της γης

φαινόμενο βάρος w ενός σώματος στη Γη που μετριέται με το ζυγό σε ένα γεωγραφικό πλάτος=F

πραγματικό βάρος w_0 του σώματος είναι ακριβώς ίσο με τη βαρυτική δύναμη με την οποία η Γη το έλκει=mg



Για οποιοδήποτε γεωγραφικό πλάτος το w_0 και το w σχηματίζουν γωνία β, που είναι μικρότερη απο 0,1°

Στους πόλους mg- w=0 ……. w=w_0

στον ισημερινό πάνω σε έναν κύκλο ακτίνας R_E με ταχύτητα υ, και πρέπει να ασκείται πάνω του μια καθαρή δύναμη προς τα μέσα, ίση με τη μάζα του σώματος επί την κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$w_0 - F = \frac{m\upsilon^2}{R_E}$$

Έτσι, το φαινόμενο βάρος είναι:

$$w = w_0 - \frac{m\upsilon^2}{R_E} \qquad \text{(στον Ισημερινό)} \qquad (13.27)$$

η πραγματική επιτάχυνση

$$g = g_0 - \frac{\upsilon^2}{R_E} \qquad \text{(στον ισημερινό)}$$

Υπολογίζεται ότι ο όρος $\frac{v^2}{R_E} = \omega^2.R_E$==0,0339 m/$s^2$
Επομένως για μια σφαιρική γη η επιταχυνση βαρύτητας στον ισημερινό είναι κατα 0,003 μικρότερη απο αυτη στους πόλους

Αρχή της υπέρθεσης

Για n αλληλεπιδρώντα σωμάτια, η συνισταμένη των βαρυτικών δυνάμεων που ασκούνται στο σωμάτιο 1 είναι:

$$\vec{F}_{1,\mathrm{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \cdots + \vec{F}_{1n}.$$

$\mathbf{F}_{1,\mathrm{net}}$ είναι η συνισταμένη δύναμη στο σωμάτιο1 λόγω της βαρυτικής επίδρασης των υπολοιπων ενώ πχ $\mathbf{F}_{13}$ είναι η δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο 1 απο το 3. Αρα:,

$$\vec{F}_{1,\mathrm{net}} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i}.$$

Η βαρυτική δύναμη πάνω σε ένα σωμάτιο από ένα εκτεταμένο σώμα είναι :

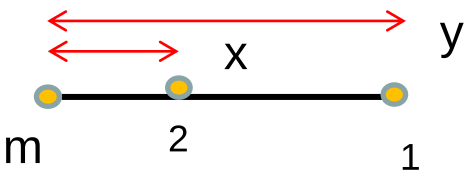
$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F},$$

Όπου το ολοκλήρωμα αναφέρεται σε όλο το εκτεταμένο σώμα .

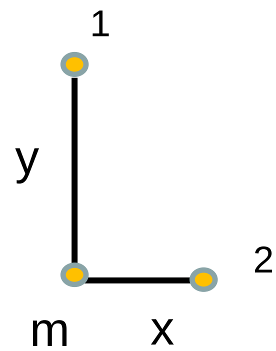
Προσοχή: δυο ίδιες μαζες δεν ασκούν αναγκαστικά την ίδια βαρυτική δυναμη σε μια τρίτη, καθως η δύναμη εξαρτάται και απο την απόσταση των δυο μαζών απο την τρίτη

Παράδειγμα 3

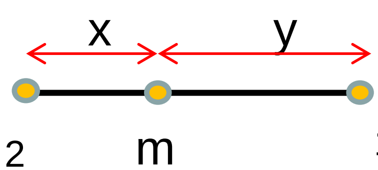
Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τη διάταξη τριών ίσων μαζών. Κατατάξετε τις διατάξεις αυτές με βάση τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο m απο τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη



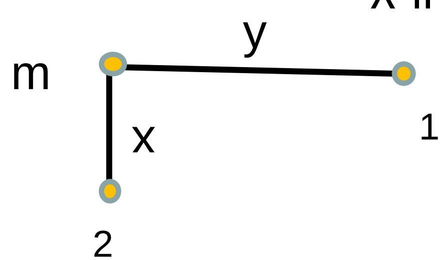
Σχήμα 1



Σχήμα 2



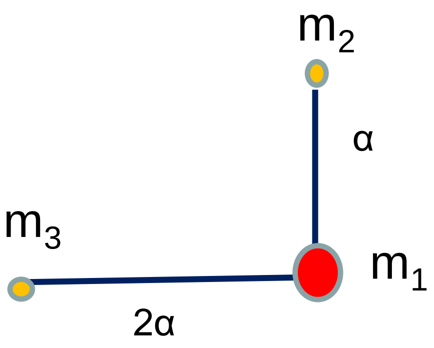
Σχήμα 3



Σχήμα 4

Παράδειγμα 4

Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τη συνισταμένη βαρυτική δύναμη στη μάζα m_1 απο τις αλλες 2 μάζες. Δίνεται m_1=6 kg, m_2=m_3=4 kg. Η απόσταση είναι α=2 cm



ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ (NEWTON)

Εκτίμηση της μάζας M της Γης

$$g = G\frac{M}{R_\Gamma^2} \Rightarrow M = g\frac{R_\Gamma^2}{G}$$

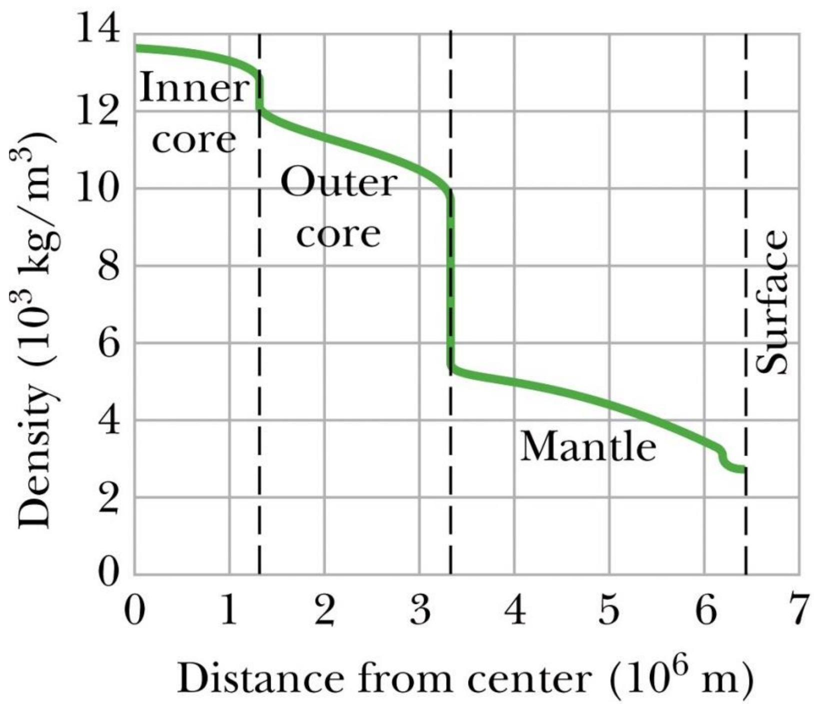
$$M \approx 10\cdot\frac{(6.4\times10^6)^2}{6.67\times10^{-11}}\,Kg \approx 6\cdot10^{24}\,Kg$$

Η Γη δεν είναι ομοιογενής. Αν θεωρήσουμε ότι είναι σφαιρική μπορουμε να εκτιμήσουμε τη μέση πυκνότητά της

Εκτίμηση της μέσης πυκνότητας ρ_Γ της Γης

$$\rho_\Gamma = \frac{M}{V} = \frac{g\frac{R_\Gamma^2}{G}}{\frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3} = \frac{3}{4\pi}\frac{g}{GR_\Gamma}$$

$$\rho_\Gamma \approx 5.5\cdot10^3\,Kg/m^3$$



Η πυκνότητα της γης αυξάνει απο την επιφάνεια προς το εσωτερικό της

Βαρύτητα στο εσωτερικό της Γης

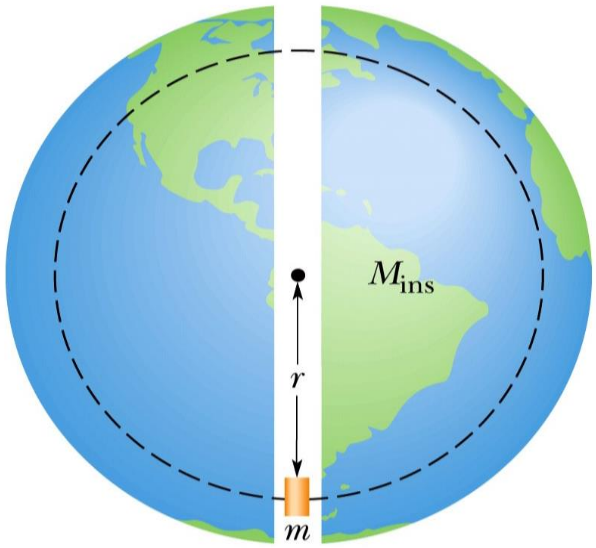
Ένα ομογενές σφαιρικό κέλυφος δεν ασκεί **συνισταμένη** βαρυτική δύναμη σε σωματίδιο τοποθετημένο στο εσωτερικό του.

$$F = G\cdot\frac{mM_{ins}}{r^2} \qquad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3} = \frac{M_{ins}}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$\Downarrow$$

$$F = G\cdot\frac{mM}{R_\Gamma^3}r$$

Απαλείφουμε το M_{ins}



Η δύναμη βαρύτητας ελαττώνεται γραμμικά προς το κέντρο της γης όπου πρακτικά μηδενίζεται

r=απόσταση της μάζας m από το κέντρο της γης

$$F = G\cdot\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)\cdot\frac{m}{r^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F = \frac{4\pi}{3}\cdot G\cdot m\cdot\rho\cdot r} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -k\vec{r}} \Rightarrow$$

Νόμος Hooke

F και r έχουν αντίθετη κατεύθυνση

Η μάζα m ταλαντώνεται σαν ένα σώμα στερεωμένο σε ελατήριο με το κέντρο ταλάντωσης το κέντρο της γης

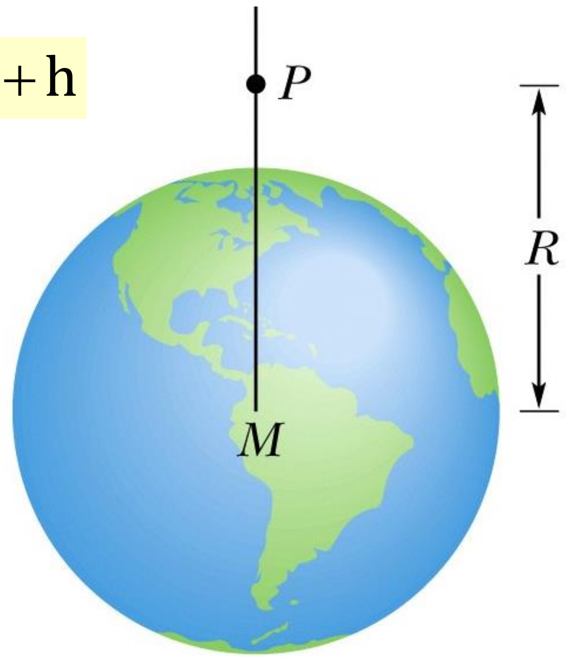
Βαρύτητα πάνω από την επιφάνεια της Γης

$$mg_h = G\frac{mM}{(R_\Gamma + h)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{g_h = G\frac{M}{(R_\Gamma + h)^2} < g}$$

$R = R_\Gamma + h$



Παρατηρήσεις

- Εάν η απόσταση από την επιφάνεια της Γης γίνει όσο και η ακτίνα της ($h=R_\Gamma$) τότε το g_h υποτετραπλασιάζεται.
- Το διαστημικό λεωφορείο για το οποίο το $h \approx 400$ km δέχεται βαρυτική επιτάχυνση $g_h \approx 8.70\ m/s^2$.

Βαρύτητα σε διαφορετικούς Πλανήτες

Σε δύο διαφορετικούς σφαιρικούς πλανήτες με ακτίνες R_A και R_B , των οποίων οι πυκνότητες είναι αντίστοιχα ρ_A και ρ_B, η βαρύτητα στην επιφάνεια καθενός είναι:

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} = \frac{4\pi}{3} G R \rho$$

ΠΛΑΝΗΤΗΣ Α

$$\boxed{g_A = \frac{4\pi}{3} G R_A \rho_A}$$

ΠΛΑΝΗΤΗΣ Β

$$\boxed{g_B = \frac{4\pi}{3} G R_B \rho_B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{g_A}{g_B} = \frac{R_A}{R_B} \cdot \frac{\rho_A}{\rho_B}}$$

Στην επιφάνεια της Σελήνης το g είναι περίπου το 1/6 (1.63m/s^2) της τιμής στην Γη. Δεδομένου ότι ο λόγος των ακτίνων των δύο αυτών ουρανίων σωμάτων είναι 0.27 συνάγεται πως η μέση πυκνότητα της Σελήνης είναι μικρότερη (0.62 φορές) της μέσης πυκνότητας της Γης.

Γιατί Είναι Σημαντικές οι Βαρυτικές Δυνάμεις?

- Δρουν εξ αποστάσεως, χωρίς την άμεση επαφή των σωμάτων (την ίδια ιδιότητα έχουν και οι ηλεκτρικές και οι μαγνητικές δυνάμεις, αλλά είναι λιγότερο σημαντικές σε αστρονομικές κλίμακες γιατί οι μεγάλες συσσωρεύσεις μάζας είναι ηλεκτρικά ουδέτερες)
- Είναι υπεύθυνες για τη συνοχή των αστέρων στον σπειροειδή γαλαξία που συμπεριλαμβάνει το ηλιακό μας σύστημα μαζί με 10^{11} άστρα
- Ασκούνται και στο χώρο ανάμεσα στους γαλαξίες που περιέχει και το δικό μας γαλαξία, δηλαδή τον γαλαξία της Ανδρομέδας και αρκετούς νάνους γαλαξίες (πχ το Μεγάλο Νέφος του Μαγγελάνου)

Γιατί Είναι Σημαντικές οι Βαρυτικές Δυνάμεις?

- ‘Εχουν ακόμα μεγαλύτερη εμβέλεια εφόσον προσπαθούν να συγκρατησουν όλο το σύμπαν το οποίο διαστέλλεται
- Ευθύνονται και για καποιες μυστηριώδεις δομές στο σύμπαν όπως **οι μαύρες τρύπες**. Σε ένα άστρο, με μάζα πολύ μεγαλύτερη απο αυτή του ήλιου, του οποίου τα αποθέματα ενέργειας έχουν εξαντληθεί, η βαρυτική δύναμη ανάμεσα σε όλα τα σωμάτιά του μπορεί να προκαλέσει κατάρρευση του άστρου και στη θέση του να δημιουργηθεί μια μαύρη τρύπα. Η βαρυτική δύναμη στην επιφάνεια του άστρου που έχει καταρρεύσει είναι τόσο μεγάλη ώστε κανένα σωμάτιο, ούτε το φως μπορει να ξεφύγει απο την επιφάνειά του

ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Για ένα σώμα που εκτοξεύεται σε ακτινική αποσταση R απο το κέντρο της γης, το έργο W για να πάει από το σημείο P (σε απόσταση R) μέχρι το ∞ είναι:

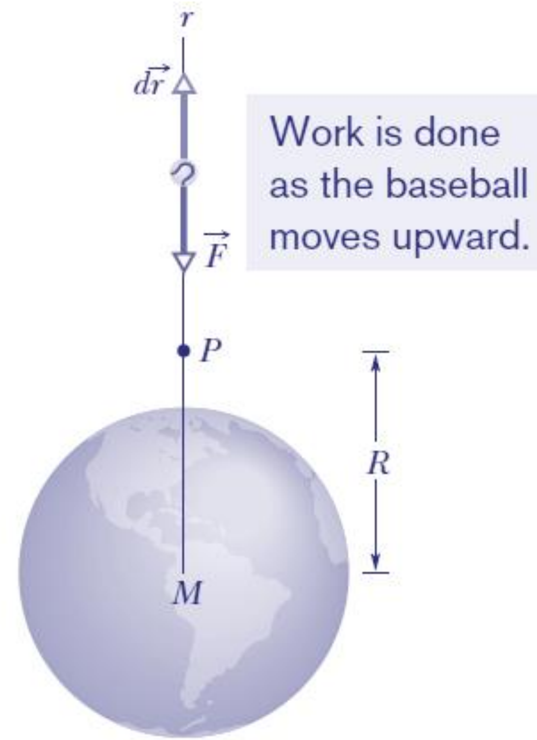
$$W = \int_R^\infty \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}.$$

$$\vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = F(r)\, dr \cos\phi = -\frac{GMm}{r^2}\, dr,$$

$$W = -GMm \int_R^\infty \frac{1}{r^2}\, dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_R^\infty$$

$$= 0 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R},$$

όπου φ=γωνία μεταξύ $\vec{F}$ και $d\vec{r}$ που στην περίπτωση μας είναι 180°



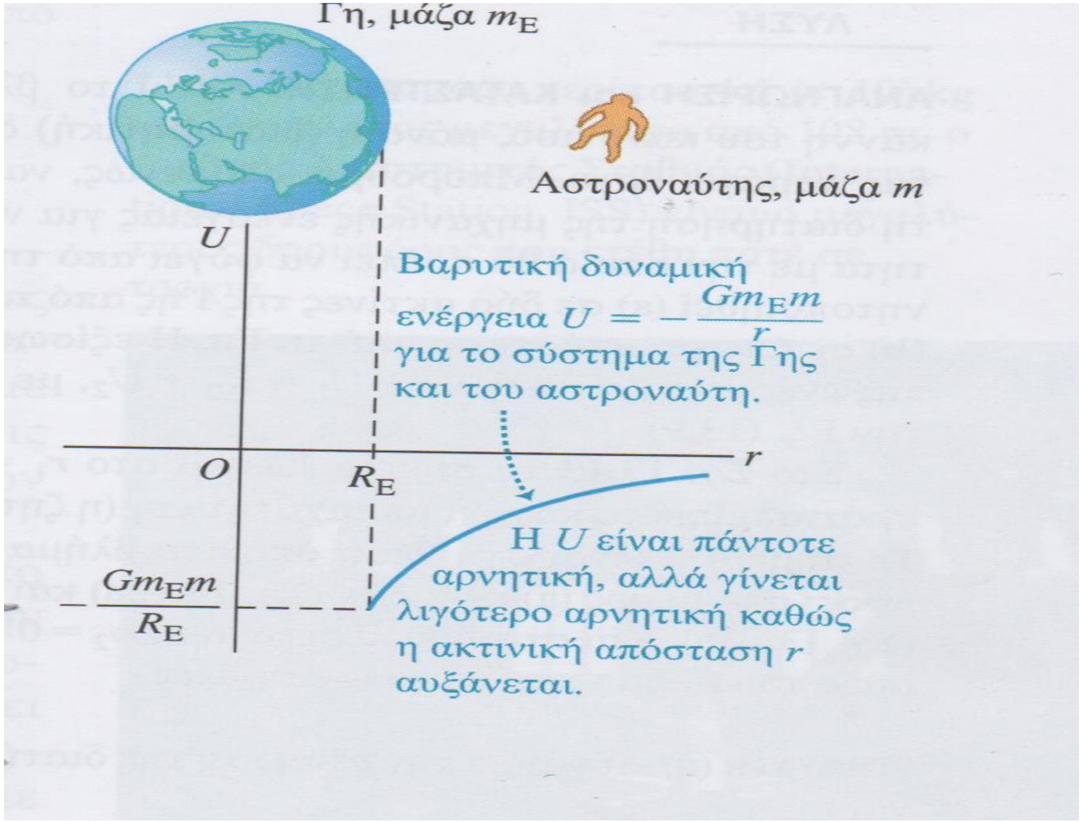
R=ακτινική απόσταση απο το κέντρο της γης
M=μάζα της γης
m=μάζα του σώματος

ΔU=-W

$$U_\infty - U = -W. \Longrightarrow U = W = -\frac{GMm}{R}.$$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια εξαρτάται απο την απόσταση R μεταξύ του σωματος και του κέντρου της γης (όχι απο το τετράγωνο της απόστασης όπως η F)

Οταν το σώμα απομακρύνεται απο τη γη, R αυξάνει, η βαρυτική δύναμη παράγει αρνητικό έργο και η U αυξάνει (γίνεται λιγότερο αρνητική). **Οταν το σώμα πλησιάζει τη γη**, το R μειώνεται, η βαρυτική δυναμη παράγει θετικό έργο και η δυναμική ενέργεια μειώνεται (γίνεται περισσότερο αρνητική)



Καθώς $r \to \infty$ η βαρυτική δυναμική ενέργεια τείνει στο 0

Βαρυτικό δυναμικό σε ένα σημείο του βαρυτικου πεδίου είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια στη μοναδα μάζας που τοποθετήθηκε στο πεδίο σε απόσταση r απο τη μάζα M

$$V = -G \cdot \frac{M}{r}$$

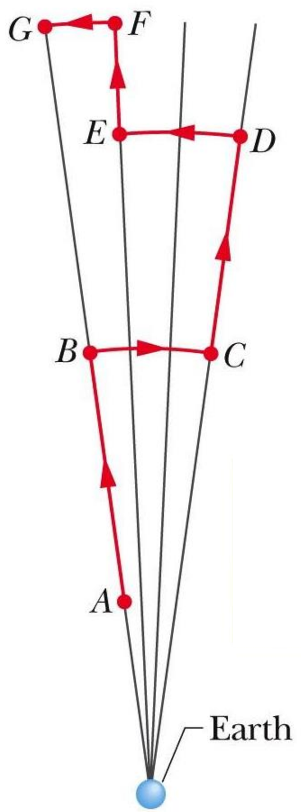
ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Το βαρυτικό πεδίο είναι συντηρητικό.

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

$$\vec{F} = -\text{grad}\,U = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r}$$

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$



Δηλαδή το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που επιλέγεται και εξαρτάται μόνο από τη διαφορά του δυναμικού στο αρχικό και τελικό σημείο:

$$W_{A\rightarrow G} = U_A - U_G$$

Είναι εύκολα κατανοητό ότι το έργο κατά μήκος των τόξων BC και DE είναι μηδενικό, δεδομένου ότι κατά μήκος των τόξων αυτών η βαρυτική δύναμη είναι κάθετη σε οποιαδήποτε στοιχειώδη μετατόπιση.

Επομένως, αν η βαρυτική δύναμη της Γης πάνω σε ένα σώμα είναι η μόνη δύναμη που παράγει έργο, τότε η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος της Γης και του σώματος είναι σταθερή ή **διατηρείται**.

Ταχύτητα διαφυγής

Η απαιτούμενη ελάχιστη αρχική ταχύτητα βλήματος για να μπορέσει να διαφύγει της επίδρασης του βαρυτικού πεδίου της Γης.

$$\boxed{E = K + U \xrightarrow{E_R = E_\infty} K_R + U_R = K_\infty + U_\infty = 0}$$

$K_\infty=0$ γιατί σταματά
$U_\infty=0$ ως διάταξη αναφοράς

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E = K_R + U_R = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} = 0 \Rightarrow v^2 = 2G\frac{M}{R}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11.2\,\mathrm{km/s}}$$

για τη Γη

Η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε ουράνιο σώμα. Για τον Ήλιο ($M=2\times10^{30}$ Kg, $R=7\times10^{8}$ m) η ταχύτητα διαφυγής είναι 618 km/s ενώ για αστέρα νετρονίων αυτή γίνεται 2×10^{5} km/s.

Παράδειγμα 5

Ενα βλήμα εκτοξεύεται απο τη γη. Α) βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα που απαιτείται για να εκτοξευτεί το βλήμα κατευθείαν πάνω από τη γη μέχρι ένα ύψος ίσο με την ακτίνα της γης R. Β) βρείτε την ταχύτητα διαφυγής του βλήματος. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα, την περιστροφή της γης και τη βαρυτική έλξη απο τη Σελήνη. Η ακτίνα της γης είναι $R=6{,}37 \times 10^6$ m και η μάζα της γης $M=5{,}94 \times 10^{24}$ kg

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ KEPLER

Οι νόμοι αυτοί είναι πρακτικοί και διατυπώθηκαν απο τον Γερμανό Keppler (1571-1630) με τη βοήθεια πολλών παρατηρήσεων και επιβεβαιώθηκαν απο τον Newton (1642-1727) με τους νόμους για την κίνηση και την βαρύτητα

Αν και εφαρμόζονται για τροχιές πλανητών γύρω από τον Ηλιο ισχύουν εξίσου και για δορυφόρους φυσικούς ή τεχνητούς που είναι σε τροχιά γύρω απο τη γη ή οποιοδήποτε άλλο σώμα μεγάλης μάζας.

Ο 1^{ος} και 3^{ος} νόμος του Kepler ισχύουν για δυνάμεις ανάλογες του $1/r^{2}$.
Ο 2^{ος} νόμος ισχύει για κάθε **κεντρική δύναμη**, δηλαδή δύναμη που ασκείται κατά μήκος της ευθείας που ενώνει το σώμα που την υφίσταται με ένα σταθερό σημείο

Η ιδέα ότι η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο είχε προταθεί για πρώτη φορά από τον Αρίσταρχο τον Σάμιο τον 3ο π.Χ. αιώνα.

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ KEPLER

Όταν ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης η στροφορμή του L είναι διατηρήσιμη ποσότητα.

Απόδειξη:
Μια κεντρική δύναμη (όπως είναι η βαρυτική δύναμη) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή:

$$\vec{F}(r)=F(r)\hat{r}=F\,(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Οπότε η ροπή της δύναμης αυτής **τ** ως προς την αρχή των αξόνων είναι:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\left(\frac{F(r)}{r}\vec{r}\right) = \frac{F(r)}{r}(\vec{r}\times\vec{r}) = 0$$

και δεδομένου ότι

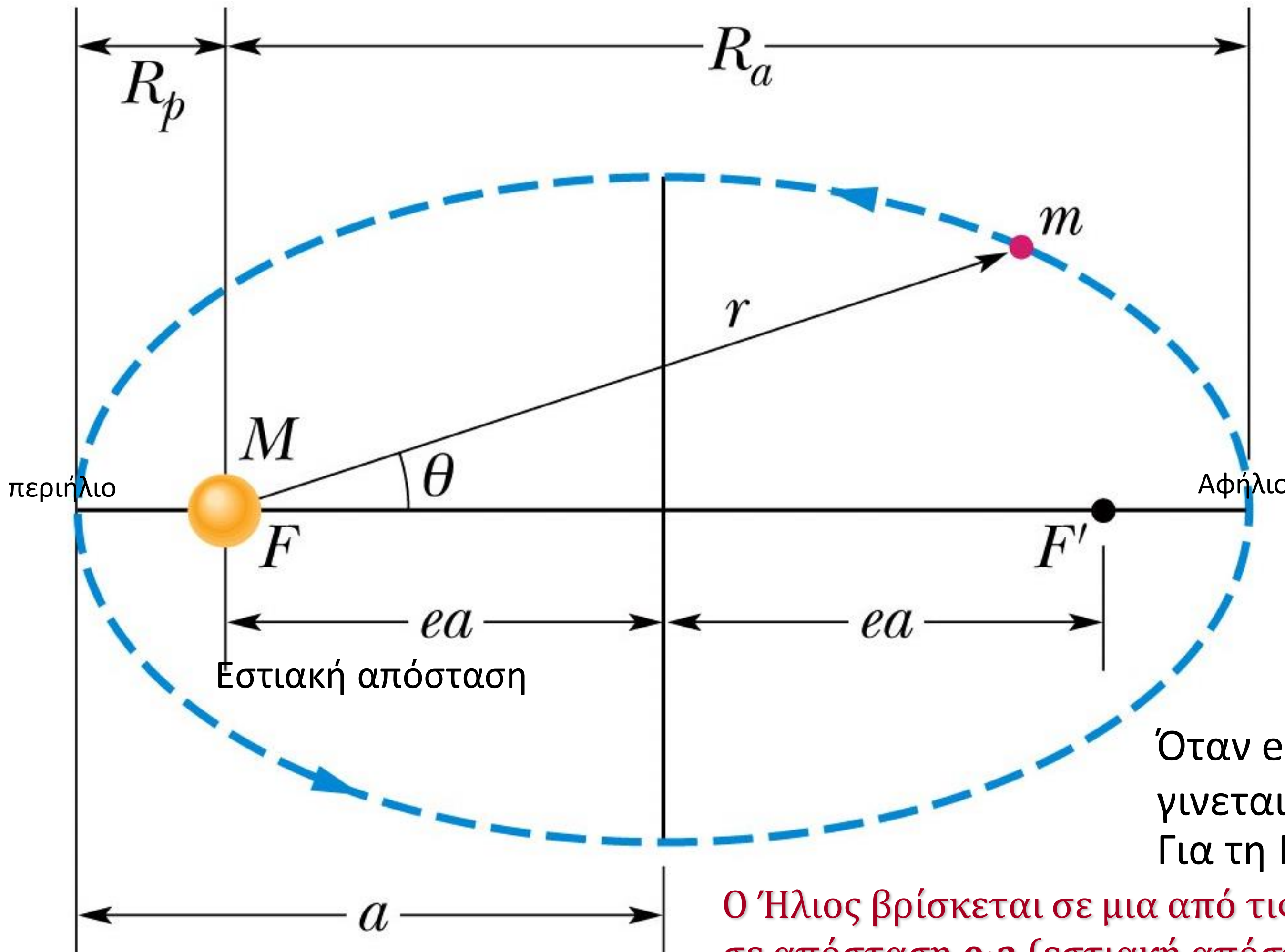
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Longrightarrow \boxed{L = mr^2\frac{d\theta}{dt} = \text{const}}$$

Η κίνηση ενός δορυφόρου γύρω από έναν πλανήτη αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα.

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ KEPLER

1ος Νόμος Kepler

Κίνηση Πλανητών σε Ελλειπτικές Τροχιές με τον ήλιο στη μια εστία



Μήκος μεγάλου ημιάξονα

0<e<1

Εκκεντρότητα

$R_{a=}$Απόσταση Αφηλίου
το σημείο της τροχιάς που βρισκεται πιο μακρυά απο τον Ηλιο

$R_{p=}$Απόσταση Περιηλίου:
το σημείο της τροχιάς που βρισκεται πιο κοντά στον Ηλιο

Ο Ηλιος με μάζα Μ βρίσκεται στο σημείο F και όχι στο κέντρο της ελλειψης

Όταν e=0 τοτε η τροχιά γινεται κυκλική
Για τη Γη e=0,017

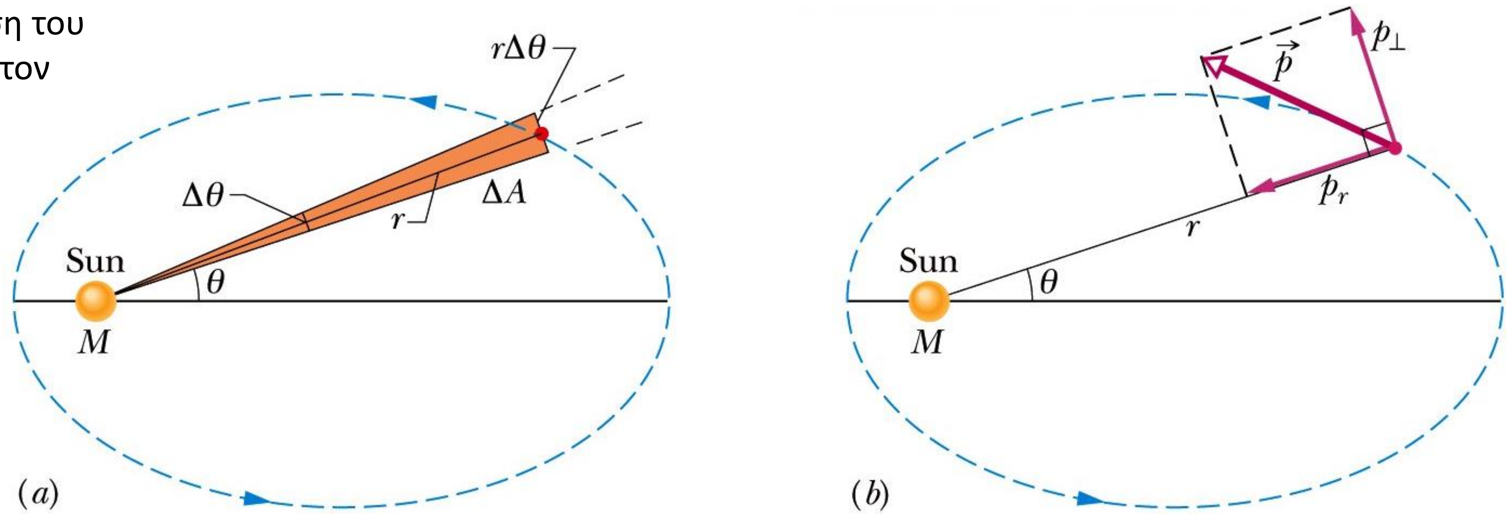
Ο Ήλιος βρίσκεται σε μια από τις εστίες της έλλειψης και σε απόσταση **e·a** (εστιακή απόσταση) από το κέντρο της.

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ KEPLER

2ος Νόμος Kepler

Η επιβατική ακτίνα (νοητή ευθεία από τον Ηλιο μέχρι τον πλανήτη) διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους

Επιβατική ακτίνα r=απόσταση του ήλιου απο τον πλανήτη

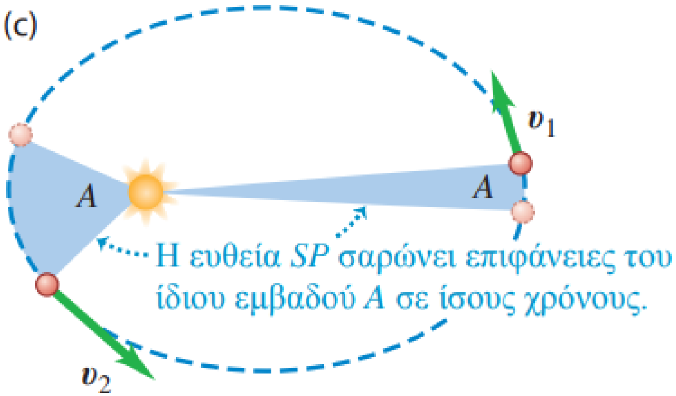


$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{rd\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

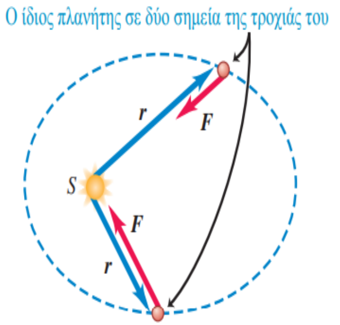
αλλά $L = rp_\perp = r(mv_\perp) = r(m\omega r) = mr^2\omega \Longrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const}}$$

$2^{ος}$ Νόμος Kepler



Η ταχύτητα του πλανήτη μεταβάλλεται με τέτοιον τρόπο ώστε η ευθεία *SP* να σαρώνει το ίδιο εμβαδόν *A* σε έναν δεδομένο χρόνο *t* ανεξαρτήτως της θέσης του πλανήτη
πάνω στην τροχιά του.



- Η βαρυτική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται πάνω στον πλανήτη έχει διαφορετικά μέτρα σε διαφορετικά σημεία αλλά είναι πάντα αντίθετη στο διάνυσμα $\vec{r}$ από τον Ήλιο *S* στον πλανήτη.
- Η δύναμη $\vec{F}$, επομένως, έχει μηδενική ροπή ως προς τον Ήλιο.

Οταν το r=μικρό (πλανήτης κοντά στον Ηλιο) τότε dθ/dt=ω =μεγαλο, οπότε και η ταχύτητα v είναι μεγάλη (πλανήτης κινείται γρήγορα)
Οταν το r=μεγάλο (πλανήτης μακρυά απο τον Ηλιο) τότε dθ/dt =μικρό (πλανήτης κινείται αργά)

Ο δευτερος νόμος είναι ισοδύναμος με την αρχή διατήρησης της στροφορμής

Η διατήρηση της στροφορμής εξηγεί γιατί η τροχιά βρίσκεται σε σταθερό επίπεδο

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ KEPLER

3ος Νόμος Kepler

Το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου ημιάξονα (ο λόγος των τετραγώνων των περιόδων δύο πλανητών που περιφέρονται γύρω από τον ήλιο είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των κυρίων ημιαξόνων τους)

$$\frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}}=\frac{\alpha_1^{\,3}}{\alpha_2^{\,3}} \quad \text{ή διαφορετικά} \quad \frac{T_1^{\,2}}{\alpha_1^{\,3}}=\frac{T_2^{\,2}}{\alpha_2^{\,3}}$$

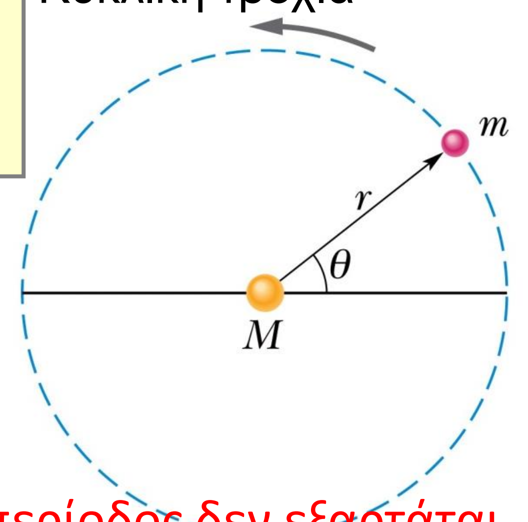
Όπου M η μάζα του ήλιου

Σε κυκλική τροχιά: Κεντρομόλος Δύναμη = Βαρυτική Δύναμη

$$\frac{mv^2}{r}=G\frac{mM}{r^2}=m\omega^2 r \Rightarrow \omega^2=G\frac{M}{r^3}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2}=G\frac{M}{r^3} \Rightarrow T^2=\left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)r^3$$

Κυκλική τροχιά



Ελλειπτική τροχιά

$$T^2=\left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)\alpha^3$$

Στην ελλειπτική κίνηση το r της σχέσης αυτής ταυτίζεται με τον μεγάλο ημιάξονα a της έλλειψης.

Η περίοδος δεν εξαρτάται από την εκκεντρότητα e

Παράδειγμα 6

Ο κομήτης του Χάλευ κινείται σε ελλειπτική τροχιά γυρω απο τον Ηλιο. Οι αποστασεις του απο τον Ηλιο στο περιήλιο και αφήλιο είναι $8{,}75\text{x}10^7$ km $5{,}26\text{x}10^9$ km αντίστοιχα. Βρείτε το μήκος του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς, την εκκεντρότητα και την περίοδο.

ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Κίνηση δορυφόρου σε κυκλική τροχιά γύρω από πλανήτη

Συνολική Ενέργεια: E = K + U

Για κυκλική τροχιά ισχύει:

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \& \quad K = \frac{mv^2}{2}$$

Συνεπώς:

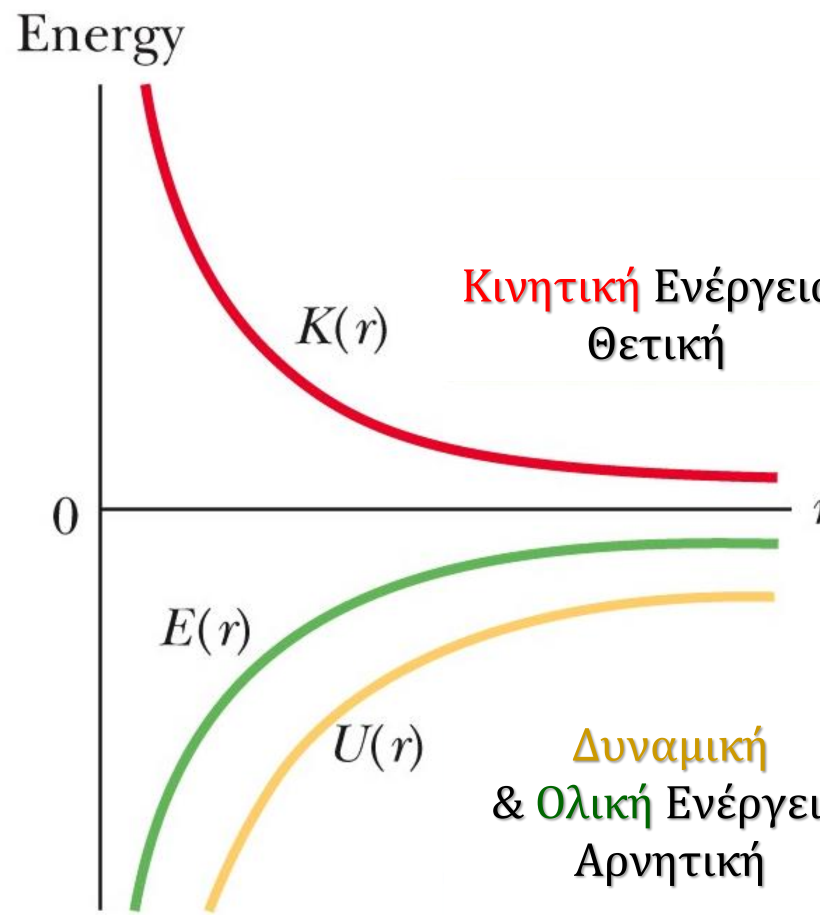
$$K = \frac{1}{2}\frac{GmM}{r} \Longrightarrow K = -\frac{U}{2}$$

$$\boxed{E = K + U = \frac{U}{2} = -K = -\frac{GMm}{2r}}$$

Αύξηση της r συνεπάγεται αύξηση της E (λιγότερο αρνητική)

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Ταχύτητα του δορυφόρου εξαρτάται απο την ακτίνα της τροχιάς και είναι ανεξαρτητη απο τη μαζα του



Κινητική Ενέργεια: Θετική

Δυναμική & Ολική Ενέργεια Αρνητική

ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

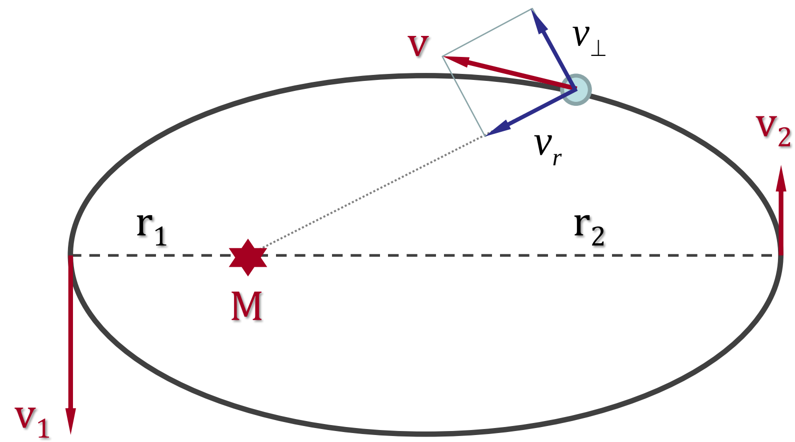
Υπολογισμός της συνολικής ενέργειας δορυφόρου κινούμενου σε ελλειπτική τροχιά γύρω από πλανήτη

m: Μάζα δορυφόρου
M: Μάζα πλανήτη
L: Στροφορμή δορυφόρου

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\perp^2) - G\frac{mM}{r}$$

όπου $v_r = \frac{dr}{dt}$, $v_\perp = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$ οπότε

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - G\frac{mM}{r}$$



Επειδή όμως η δύναμη είναι κεντρική, η στροφορμή L του συστήματος διατηρείται και ισχύει :

$$L = rp_\perp = r(mv_\perp) = r(m\omega r) = mr^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{mr^2} \Longrightarrow E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

Στις ακραίες θέσεις της έλλειψης ό δορυφόρος δεν έχει ακτινική ταχύτητα (v_r=0) και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Υπολογισμός της συνολικής ενέργειας δορυφόρου κινούμενου σε ελλειπτική τροχιά γύρω από πλανήτη

Σε ακραία θέση

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} \Rightarrow 2mEr^2 + 2Gm^2Mr - L^2 = 0$$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας αυτής εξίσωσης ταυτίζονται με τα r_1 και r_2, το άθροισμα των οποίων είναι ο άξονας της έλλειψης (=2a):

$$r_1 + r_2 = 2a \Rightarrow -\frac{2Gm^2M}{2mE} = 2a$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E = -G\frac{mM}{2a}}$$

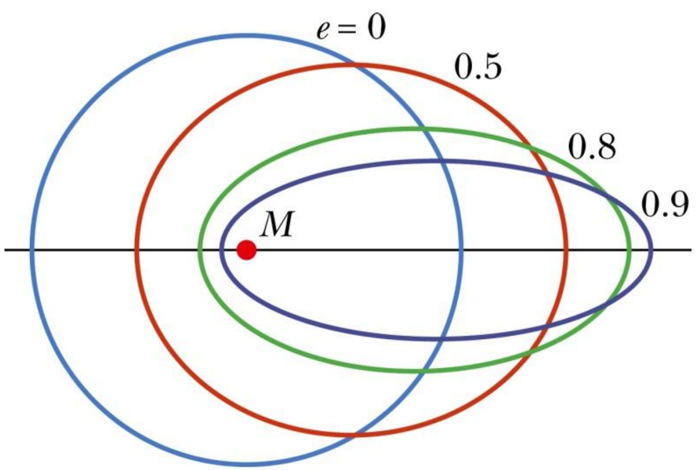
Το αποτέλεσμα αυτό είναι ταυτόσημο με την ενέργεια δορυφόρου κινούμενου σε κυκλική τροχιά, όπου ο ημιάξονας a ταυτίζεται με την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς r.

ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Για ελλειπτική τροχιά ισχύει:

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

Αρα η συνολική ενέργεια δορυφόρου σε τροχιά εξαρταται μόνο απο τον μεγάλο ημιάξονα α και όχι απο την εκκεντρότητα e



Στις τέσσερες ελλειπτικές τροχιές με τον ίδιο μεγάλο ημιάξονα που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, παρόλο που η εκκεντρότητα έχει διαφορετική τιμή, η συνολική ενέργεια είναι η ίδια.

Σε ποιο σημείο μια ελλειπτικής τροχιάς κινείται ένας πλανήτης πιο γρήγορα?

Η μηχανική ενέργεια του πλανήτη διατηρείται. Οταν η κινητική ενέργεια ειναι μέγιστη η δυναμική του είναι ελάχιστη. Η δυναμική ενέργεια είναι

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

Αρα η δυναμική ενέργεια ειναι ελάχιστη (δηλαδή πιο αρνητική) όταν το r είναι ελάχιστο, δηλαδή στο περιήλιο. Αρα στο περιήλιο η ταχύτητα μεγιστοποιείται. Αντιθετα στο αφήλιο είναι ελάχιστη η ταχύτητα.

Ερωτήσεις

Δύο πλανήτες ίσης μάζας, βρίσκονται σε κυκλική τροχιά γύρω από έναν αστέρα. Ο πλανήτης *A* έχει μικρότερη ακτίνα τροχιάς από τον πλανήτη *B*. Ποιος ισχυρισμός ισχύει;

A) Ο πλανήτης *A* έχει περισσότερη κινητική ενέργεια, λιγότερη δυναμική ενέργεια και λιγότερη μηχανική ενέργεια (δυναμική και κινητική) από τον πλανήτη *B*.

B) Ο πλανήτης *A* έχει περισσότερη κινητική ενέργεια, περισσότερη δυναμική ενέργεια και περισσότερη μηχανική ενέργεια (δυναμική και κινητική) από τον πλανήτη *B*.

Γ) Ο πλανήτης *A* έχει περισσότερη κινητική ενέργεια, λιγότερη δυναμική ενέργεια και περισσότερη μηχανική ενέργεια (δυναμική και κινητική) από τον πλανήτη *B*.

Δ) Ο πλανήτης *A* και ο πλανήτης *B* έχουν το ίδιο ποσό μηχανικής ενέργειας (δυναμική και κινητική).

$$\boxed{E = -\frac{GMm}{2r}}$$

$$\boxed{\mathbf{U(r) = -G\frac{mM}{r}}}$$

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}mv^{2} = \frac{1}{2}\frac{GmM}{r}$$

Ερωτήσεις

Το φεγγάρι βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τον πλανήτη Χ. Τι συμβαίνει με την κινητική ενέργεια Κ και την δυναμική ενέργεια βαρύτητας U?

a) $K < 0$ and $U < 0$
b) $K < 0$ and $U > 0$
c) $K > 0$ and $U < 0$
d) $K > 0$ and $U > 0$
e) $K < 0$ and $U = 0$

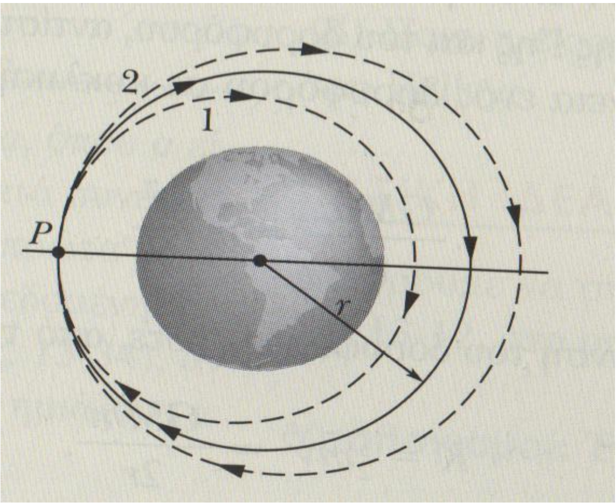
Αν η μάζα της Γης αυξηθεί 4 φορές, η νέα περίοδος της τροχιάς της γύρω από τον ήλιο σε σύγκριση με την αρχική θα :

Α) αυξηθεί 4 φορές
Β) αυξηθεί 2 φορές
Γ) ελαττωθεί 4 φορές
Δ) ελαττωθεί 2 φορές
Ε) Θα παραμείνει αμετάβλητη

Ένα διαστημικό λεωφορείο βρίσκεται αρχικά σε κυκλική τροχιά με ακτίνα r γύρω από τη Γη. Στο σημείο P ο πιλότος θέτει σε λειτουργία για σύντομο χρονικό διάστημα έναν προωθητήρα που εκτοξεύει καυσαέρια με κατεύθυνση προς τα μπρος ώστε να μειώσει την κινητική ενέργεια και την μηχανική ενέργεια του λεωφορείου

α) ποια από τις διακεκομμένες ελλειπτικές τροχιές 1 και 2 θα ακολουθήσει το λεωφορείο?

β) Η περίοδος της τροχιάς του λεωφορείου (δηλαδή ο χρόνος ώστε να επιστρέψει στο P) είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με αυτή της κυκλικής τροχιάς?



$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)\alpha^3$$

‘Ασκηση

Ενας γεωστατικός δορυφόρος περιφέρεται σε τροχιά γύρω από το γη σε σταθερό σημείο στον ισημερινό. Να προσδιορίσετε α) το ύψος πάνω από την επιφάνεια της γης στο οποίο πρέπει να κινείται ο γεωστατικός δορυφόρος β) την ταχύτητά του γ) να συγκρίνετε την ταχύτητα του γεωστατικού δορυφόρου με αυτήν ενός δορυφόρου που περιφέρεται σε ύψος 200 km από την επιφάνεια της γης.