Αρμονική Ταλάντωση στερεού σώματος

Ταλάντωση

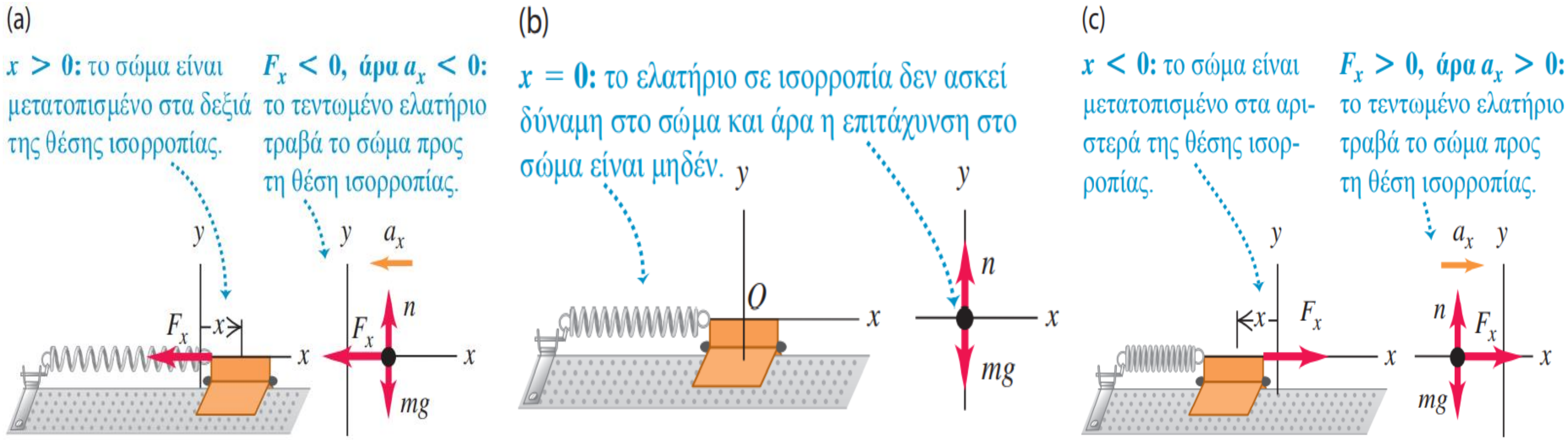
‘Ενα σώμα εκτελεί ταλάντωση ή περιοδική κίνηση όταν κινείται περιοδικά γύρω απο ένα σημείο ισορροπίας

Το φαινόμενο παρατηρείται και σε μεγάλη κλίμακα (πχ γέφυρες, κτίρια) και μικρή κλίμακα (ατομικές ταλαντώσεις)

Η αρμονική ταλάντωση είναι η απλούστερη ταλάντωση που μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά αλλά και συνιστά καλή περιγραφή πολλών ταλαντώσεων στη φύση

Περιγραφή της ταλάντωσης

Η μάζα του ελατηρίου
είναι αμελητέα



επιμήκυνση Σημείο ισορροπίας συμπίεση

Όταν το σώμα μετατοπιστεί από τη θέση ισορροπίας όπου $x = 0$, το ελατήριο ασκεί **δύναμη επαναφοράς** προς τη θέση ισορροπίας

$F=-kx$ Νόμος του Hooke

k=σταθερά του ελατηρίου

***Πάντοτε* προκύπτει ταλάντωση** εάν υπάρχει **δύναμη επαναφοράς**, η οποία τείνει να επαναφέρει το σύστημα στην ισορροπία. Η F είναι αντίθετη προς τη μετατόπιση x

Περιγραφή της ταλάντωσης

Η δύναμη F δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με τη θέση. →

Η επιτάχυνση α δεν είναι σταθερή → δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις της σταθερά μεταβαλλόμενης κίνησης

Αν δεν υπάρχει τριβή ή αλλη δύναμη για να αφαιρέσει μηχανική ενέργεια απο το σύστημα, η ταλάντωση συνεχίζεται για πάντα

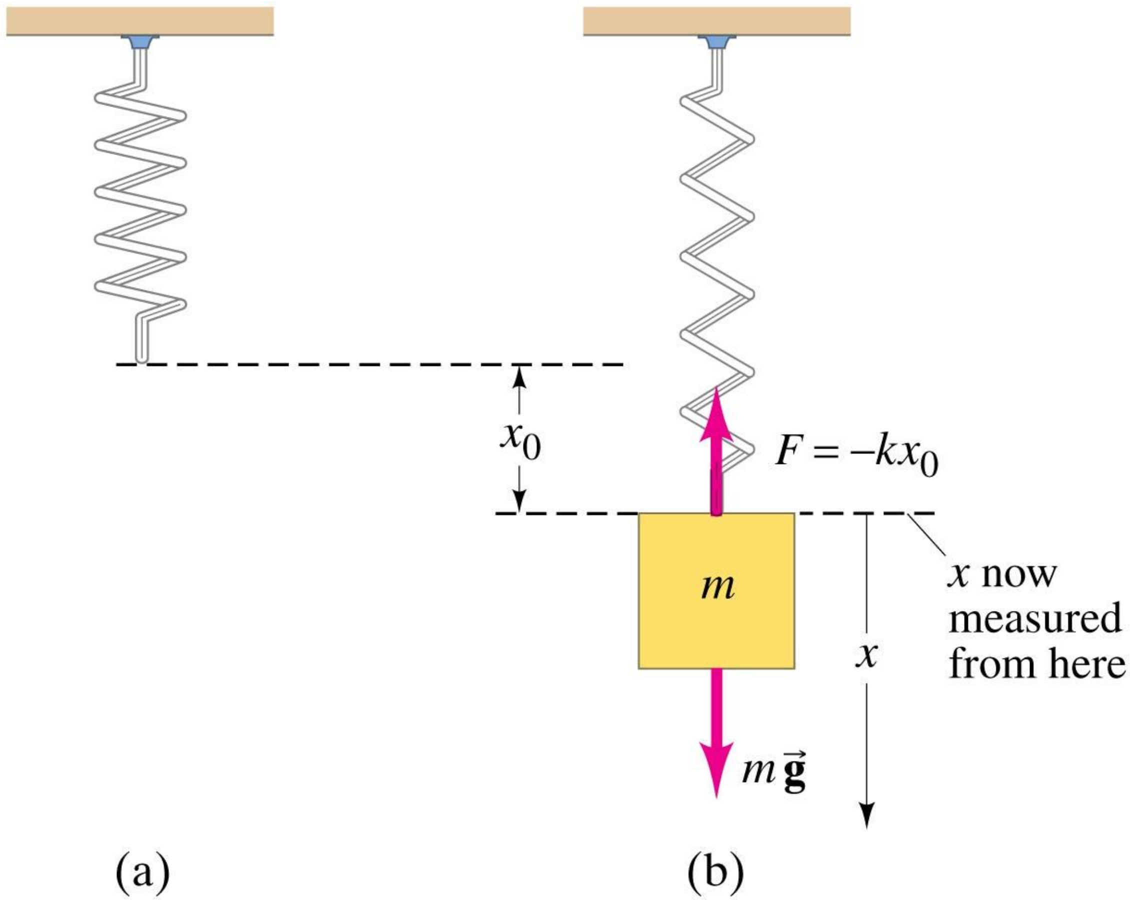
Θέση ισορροπίας: η θέση όπου δεν ασκείται καμμία δύναμη στη μάζα m

x=μετατόπιση

A=μέγιστη μετατόπιση=πλάτος της ταλάντωσης
Κύκλος=πλήρη κίνηση μπρος πίσω από την αρχική θέση και πάλι πίσω σε αυτήν

T=περίοδος=ο χρόνος για έναν πλήρη κύκλο

Ταλάντωση στην κατακόρυφη διεύθυνση



Ελεύθερο ελατήριο αναρτημένο κατακόρυφα

Η ταλάντωση της μάζας m. Ισορροπία στο σημείο όπου ΣF=0 οπότε F=mg

Περιγραφή της ταλάντωσης

πλάτος	***A***	το μέγιστο μέτρο της μετατόπισης $\|x\|$ από τη θέση ισορροπίας	Είναι πάντοτε θετικό	Μέτρο(**m**)
περίοδος	***T***	είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί ένας πλήρης κύκλος	Είναι πάντοτε θετική	Δευτερόλεπτο (**s**), (ή «δευτερόλεπτα ανά κύκλο»).
συχνότητα	***f***	ο αριθμός των κύκλων ανά μονάδα χρόνου.	Είναι πάντοτε θετική	hertz (1 hertz = 1 **Hz** = 1 κύκλος/s = 1 s^{-1}
γωνιακή συχνότητα	***ω***	είναι το γινόμενο του 2π επί τη συχνότητα: ***ω*** = 2π***f*** Εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής ενός γωνιακού μεγέθους (που δεν σχετίζεται κατ' ανάγκη με περιστροφική κίνηση)	Είναι πάντοτε θετική.	rad/s *προσοχή: τα rad (ακτίνια) είναι αδιάστατες ποσότητες*

Αρμονική ταλάντωση

Το πιο απλό είδος ταλάντωσης συμβαίνει όταν η συνισταμένη **δύναμη επαναφοράς** F_x είναι ανάλογη της αρνητικής μετατόπισης x από τη **θέση ισορροπίας**.

Η μετατόπιση x είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου

x(t)=A sin(ωt+φ) ή x(t)=Acos(ωt+φ)

Α=πλάτος (αφού sin ή cos μεταβάλλονται μεταξύ -1 και 1,
Η απομάκρυνση x θα μεταβαλλεται μεταξύ –A και A

ωt+φ=φάση της ταλάντωσης
φ=γωνία φάσης ή σταθερά φάσης
ω=γωνιακή συχνότητα

Περίοδος

Στην περιοδική κίνηση η συχνότητα είναι αντίστροφη της περιόδου.

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f} \tag{14.1}$$

Συχνότητα

Περιγράφει τη χρονική αφετηρία της καμπύλης μετατόπισης-χρόνου στην ταλάντωση:

Ταλάντωση με περίοδο Τ=2π/ω

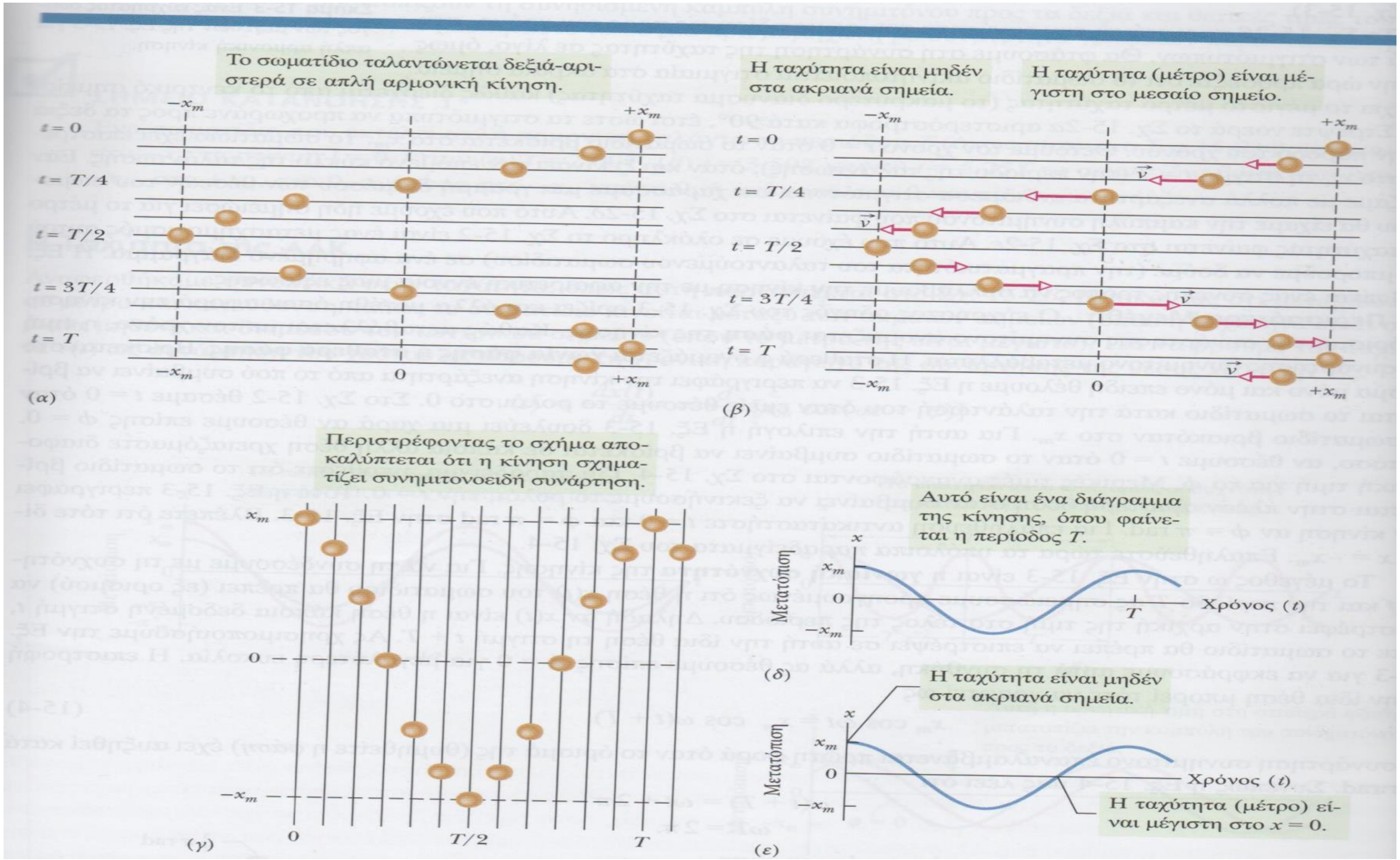
Η **γωνιακή συχνότητα** σχετίζεται με τη συχνότητα και την περίοδο.

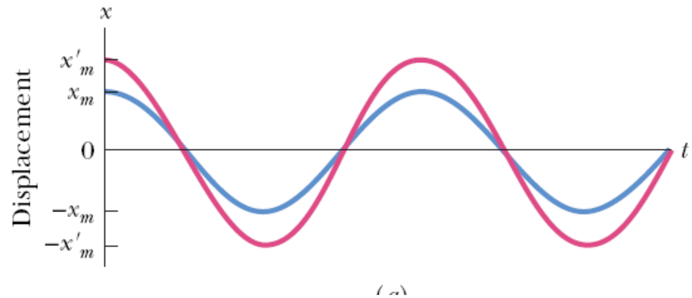
Συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{14.2}$$

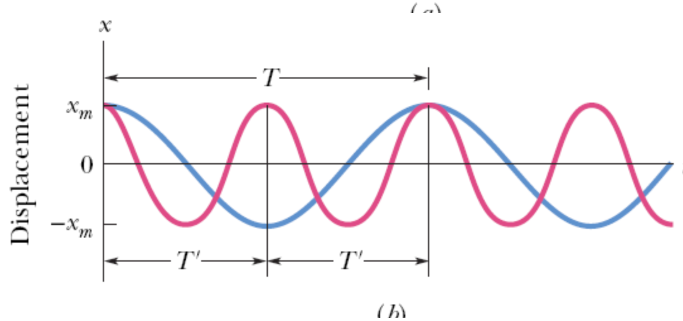
Περίοδος

Ακολουθία στιγμιοτύπων που δείχνουν τη θέση ενός σημείου που ταλαντώνεται γύρω από τον άξονα x σε ίσα χρονικά διαστήματα

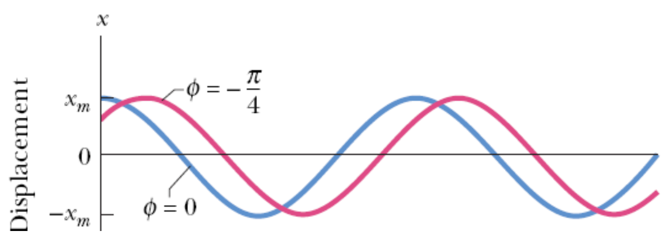




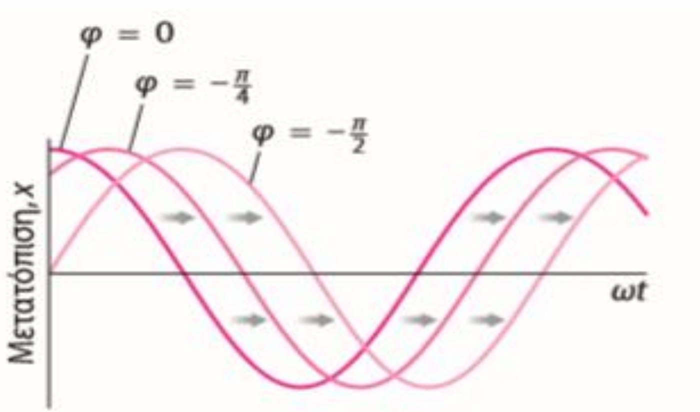
Διαφορετικά πλάτη, ίδια περίοδος



‘Ιδιο πλάτος, διαφορετική περίοδος και συχνότητα



‘Ιδιο πλάτος, ίδια περίοδος, διαφορετική γωνία φάσης



Οι θετικές τιμές φ μετατοπίζουν την συνημιτοειδή καμπύλη προς τα αριστερα και οι αρνητικές προς τα δεξιά

Ερώτηση: Σε μια ταλάντωση ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς για κάποια στιγμή στη διάρκεια της κίνησης **ταυτόχρονα**

Α) Το σώμα έχει V=0 και α$\neq 0$

Β) V=0 και α=0

Γ) V≠0 και α=0

Δ) V≠0 και α≠0

Ερώτηση: Πότε έχουμε αρμονική ταλάντωση?

F=-5x

F=-400x^2

F=10x

F= 3x^2

Ερώτηση: Σε ποια θέση η επιτάχυνση είναι μηδενική?

Α) x=-A

Β) x=0

Γ) x=A

Δ) x=-A και x=A

Ε) πουθενά

Πότε η ταλάντωση είναι αρμονική?

Η απομάκρυνση x(t) υλικού σημείου που εκτελεί αρμονική ταλάντωση ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Η ασκούμενη δύναμη ελατηρίου σε σημειακή μάζα m δίνεται από τη σχέση (Νόμος του Hooke):

$$\mathrm{F} = -\mathrm{kx} \Rightarrow ma = -kx \Rightarrow \mathrm{m}\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{kx} \Rightarrow \mathrm{m}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{kx} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

όπου:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

και

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Η συνάρτηση x(t)= A sin(ωt) ή x(t)= A cos(ωt) αποτελεί μια απλή λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{d^2}{dt^2}\left[A\sin(\omega t)\right] + \omega^2\left[A\sin(\omega t)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[A\,\omega\cos(\omega t)\right] + \omega^2\left[A\sin(\omega t)\right] =$$

$$= -A\omega^2\sin(\omega t) + \omega^2 A\sin(\omega t) = 0$$

Ποσότητες στην απλή αρμονική κίνηση

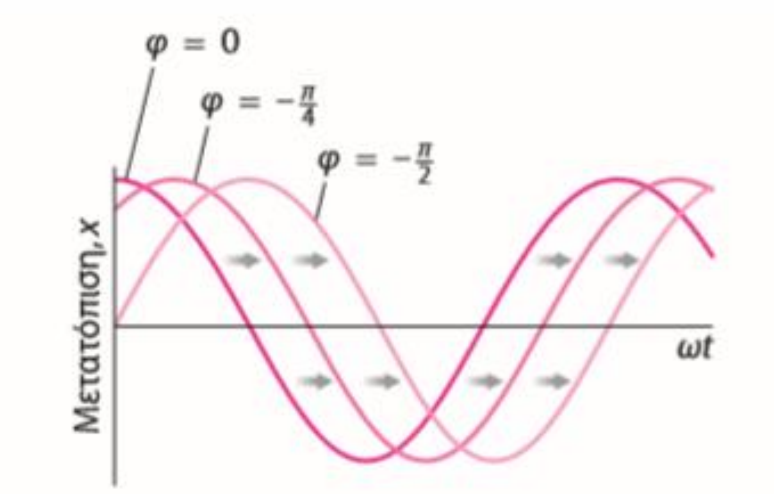
- Γωνιακή συχνότητα, συχνότητα, περίοδος:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Φάση

  Περιγράφει τη χρονική αφετηρία της καμπύλης μετατόπισης-χρόνου στην ταλάντωση:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$



Απλή αρμονική ταλάντωση

Αυτό συμβαίνει όταν το ελατήριο είναι ένα ιδανικό ελατήριο που υπακούει στο νόμο του **Hooke**

Συνιστώσα x της δύναμης

Δύναμη επαναφοράς που ασκείται από **ιδανικό ελατήριο**

$$F_x = -kx \qquad (14.3)$$

Μετατόπιση

Σταθερά ελατηρίου

Η σταθερά του ελατηρίου (ή σταθερά της δύναμης επαναφοράς ή σταθερά της δύναμης) k είναι πάντοτε θετική και οι μονάδες της είναι **N/m (kg/s²)**.

Η επιτάχυνση ενός σώματος στην απλή αρμονική κίνηση είναι.

Συνιστώσα x της επιτάχυνσης

Σταθερά δύναμης επαναφοράς

Εξίσωση για την απλή αρμονική κίνηση

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (14.4)$$

Μετατόπιση

Δεύτερη παράγωγος της μετατόπισης

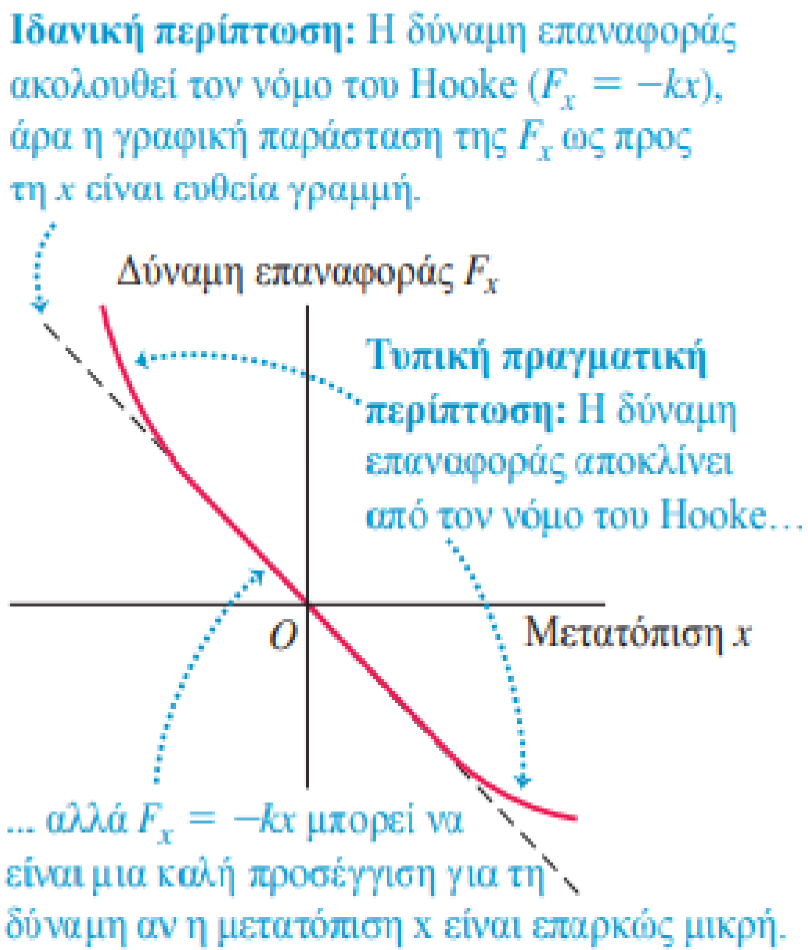
Μάζα του σώματος

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι στην απλή αρμονική κίνηση η επιτάχυνση και η μετατόπιση έχουν πάντοτε αντίθετα πρόσημα.

Η επιτάχυνση **ΔΕΝ** είναι σταθερή.

Ένα σώμα που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση ονομάζεται **αρμονικός ταλαντωτής**.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Δεν είναι όλες οι περιοδικές κινήσεις απλές αρμονικές.

Σε πολλά συστήματα η δύναμη επαναφοράς είναι κατά προσέγγιση ανάλογη της μετατόπισης, εάν η μετατόπιση είναι αρκετά μικρή.
Για μεγαλύτερες μετατοπίσεις η δύναμη F αποκλίνει από τον νόμο του Hooke.

Ταχύτητα και επιτάχυνση στην απλή αρμονική ταλάντωση

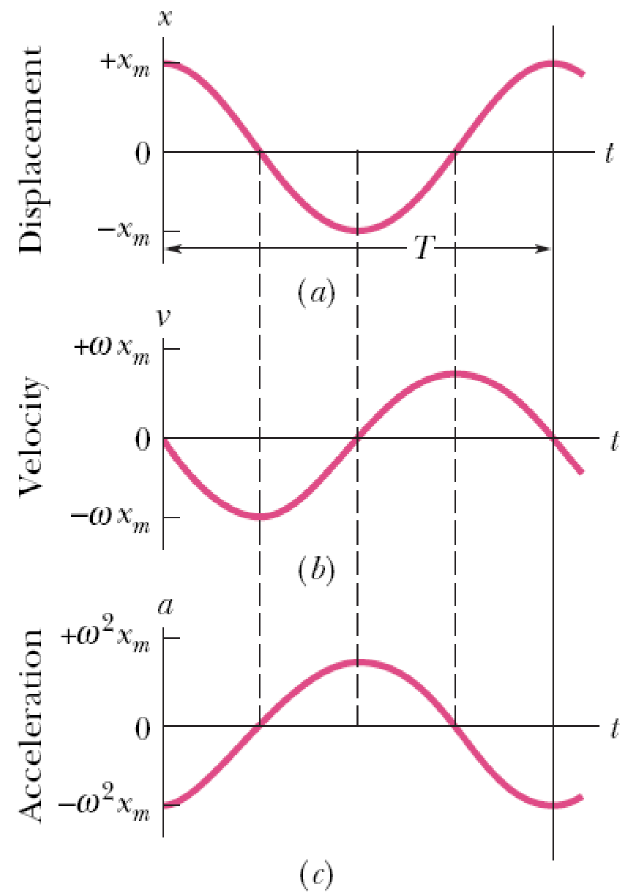
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x_m \cos(\omega t + \varphi)]$$
$$\rightarrow \boldsymbol{v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)}$$

Ημιτονοειδής συνάρτηση

Μέγιστη ταχύτητα= ωA=πλάτος της ταχύτητας όταν x=0

Μηδενική ταχύτητα=όταν x=A ή -A

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega A \sin(\omega t + \varphi)]$$
$$\rightarrow a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$
$$\rightarrow \boldsymbol{a(t) = -\omega^2 x(t)}$$



φ=0

Μέγιστη επιτάχυνση= ω^2A =πλάτος της επιτάχυνσης

Όταν x=±A

Μηδενική επιτάχυνση όταν x=0

Άρα η επιτάχυνση είναι ανάλογη της μετατόπισης με αντίθετο πρόσημο (όπως και η δύναμη)

Η συνάρτηση $x(t)= A\cos(\omega t+\varphi)$ αποτελεί γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης της αρμονικής ταλάντωσης και περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές Α και ω που προκύπτουν από τις δυο διαδοχικές ολοκληρώσεις

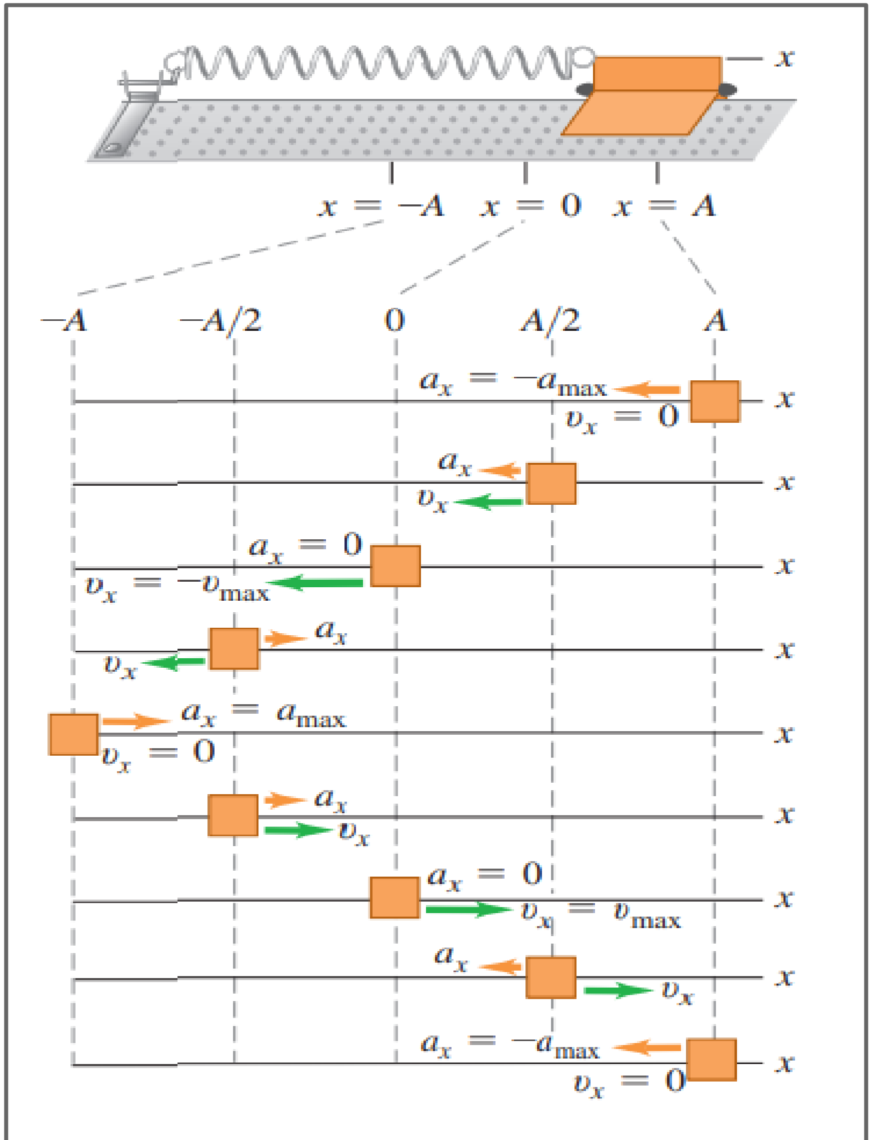
Είναι αυθαίρετες από μαθηματική άποψη αλλά στη φυσική προσδιορίζονται από τις **αρχικές συνθήκες**

Παράδειγμα:
Αν για t=0 η μάζα βρίσκεται στο σημείο x=0 και της δίνεται μια αρχική ταχύτητα προς τα θετικά του x, δηλαδή V>0.

$x=A\cos(\omega t+\varphi) \rightarrow 0=A\cos\varphi \rightarrow \varphi=\pm\pi/2$

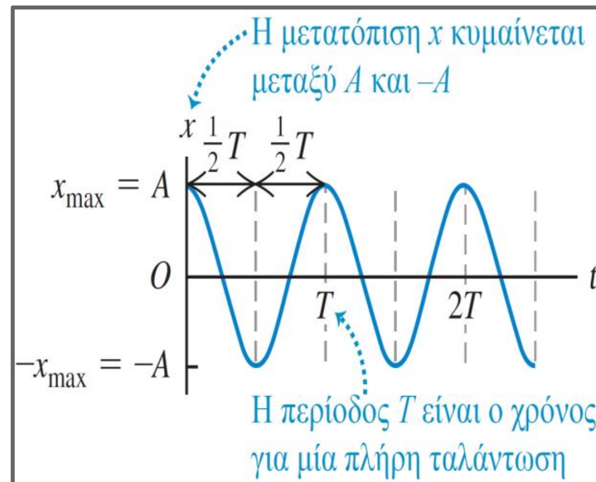
Επειδή V>0 θα ισχύει $V=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)>0$ μόνον όταν $\varphi=-\pi/2$
αφού $\sin(-\pi/2)=-1$

Αρα λύση στην περίπτωση αυτή είναι: $x(t)= A\cos(\omega t-\pi/2)=A\sin\omega t$



Πώς μεταβάλλεται η συνιστώσα x της **ταχύτητας,** $\boldsymbol{v_x}$, και η συνιστώσα x της **επιτάχυνσης,** $\boldsymbol{a_x}$, κατά τη διάρκεια ενός κύκλου της απλής αρμονικής κίνησης.

Όταν φ = 0.



Σταθερά ελατηρίου και συχνότητα ταλάντωσης

$$F = ma = -(m\omega^2)x = -kx$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Φυσική ερμηνεία:

Μεγάλο Κ (σκληρό ελατήριο) δημιουργεί μεγαλο ω (ταχεία ταλάντωση) και με μικρή περίοδο Τ

Μεγάλη μάζα δημιουργεί μικρό ω και μεγάλο Τ

Ερώτηση: κατά πόσο πρέπει να μεταβληθεί η μάζα m στο άκρο ελατηρίου ώστε η συχνότητα ταλάντωσης να υποδιπλασιαστεί: α) να μείνει αμετάβλητη β) να διπλασιαστεί γ) να τετραπλασιαστεί δ) να να υποδιπλασιατεί ε) να υποτετραπλασιαστεί

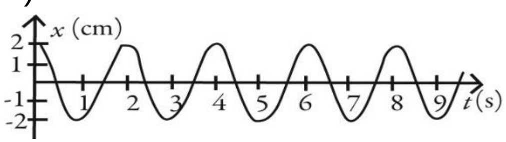
Ερωτήσεις

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση. Τι ισχύει για την επιτάχυνση αυτού του σώματος; (Μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία σωστές επιλογές.)

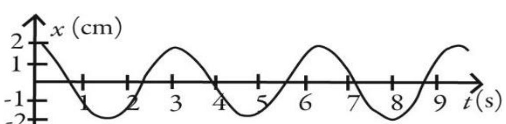
Α) Η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν η μετατόπιση του σώματος είναι μέγιστη.
Β) Η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη.
Γ) Η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν η μετατόπιση του σώματος είναι ίση με το μηδέν.
Δ) Η επιτάχυνση είναι ίση με το μηδέν όταν η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη.
Ε) Η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν το σώματος βρίσκεται στιγμιαία σε ηρεμία.

Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις περιγράφουν μια απλή περιοδική κίνηση με πλάτος 2 cm και γωνιακή συχνότητα 2 rad/s;

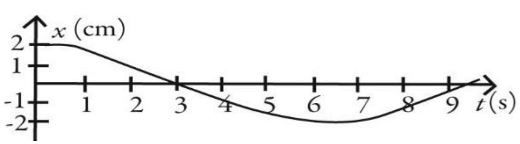
Α)



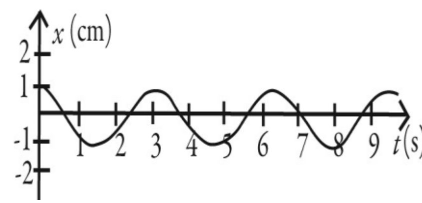
Β)



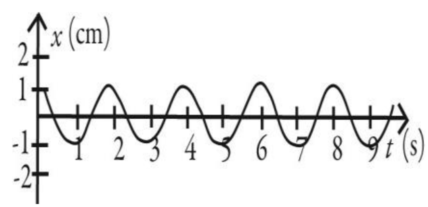
Γ)



Δ)



Ε)



Παράδειγμα 1

Για t=0 η μετατόπιση x(0) ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι -8,50 cm. Η ταχύτητα v(0)=-0,920 m/s και η επιτάχυνση α(0)=+47 m/s^2

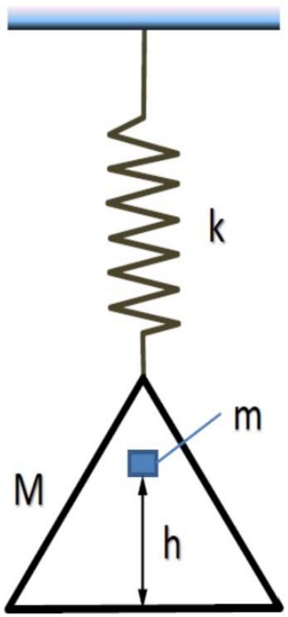
a)Πόση ειναι η γωνιακή συχνότητα ω?
B) ποση ειναι η γωνία φάσης και το πλάτος?

Παράδειγμα 2

Σωματίδιο μάζας m=2 kg κινείται πάνω στον άξονα x και έλκεται από το σημείο O από μια δύναμη 8x (σε N). Για t=0 η μετατόπιση x(0)=20 m και η ταχύτητα v(0)=0. Βρείτε α) τη διαφορική εξίσωση της κίνησης β) τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου γ) το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης

Παράδειγμα 3

Σε ισορροπούσα πλατφόρμα μάζας M που είναι κρεμασμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k πέφτει σώμα μάζας m από ύψος h και κολλά πάνω της. Υπολογίστε το πλάτος των ταλαντώσεων του συστήματος.



Ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση

Δυναμική ενέργεια ελαστικότητας (για το ελατήριο)

$$U(t) = \int \mathrm{Fdx} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\mathrm{A}^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

Κινητική ενέργεια (για το σώμα)

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\mathrm{A}^2\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}k\mathrm{A}^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

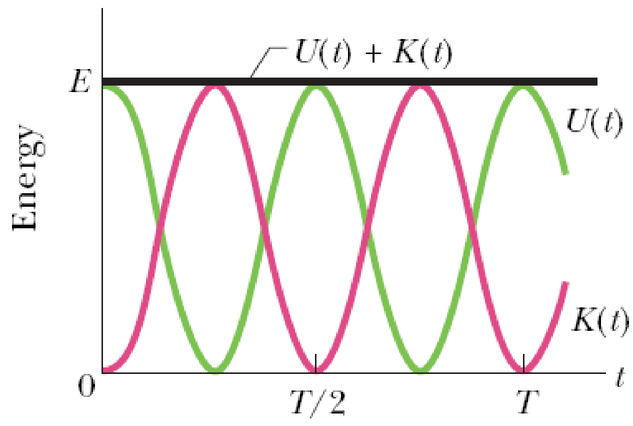
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Συνολική μηχανική ενέργεια:

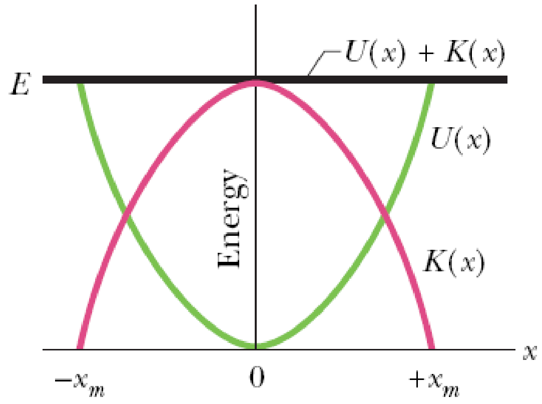
$$E = U + K = \frac{1}{2}k\mathrm{A}^2$$

$\cos^2(\omega t+\varphi)+\sin^2(\omega t+\varphi)=1$

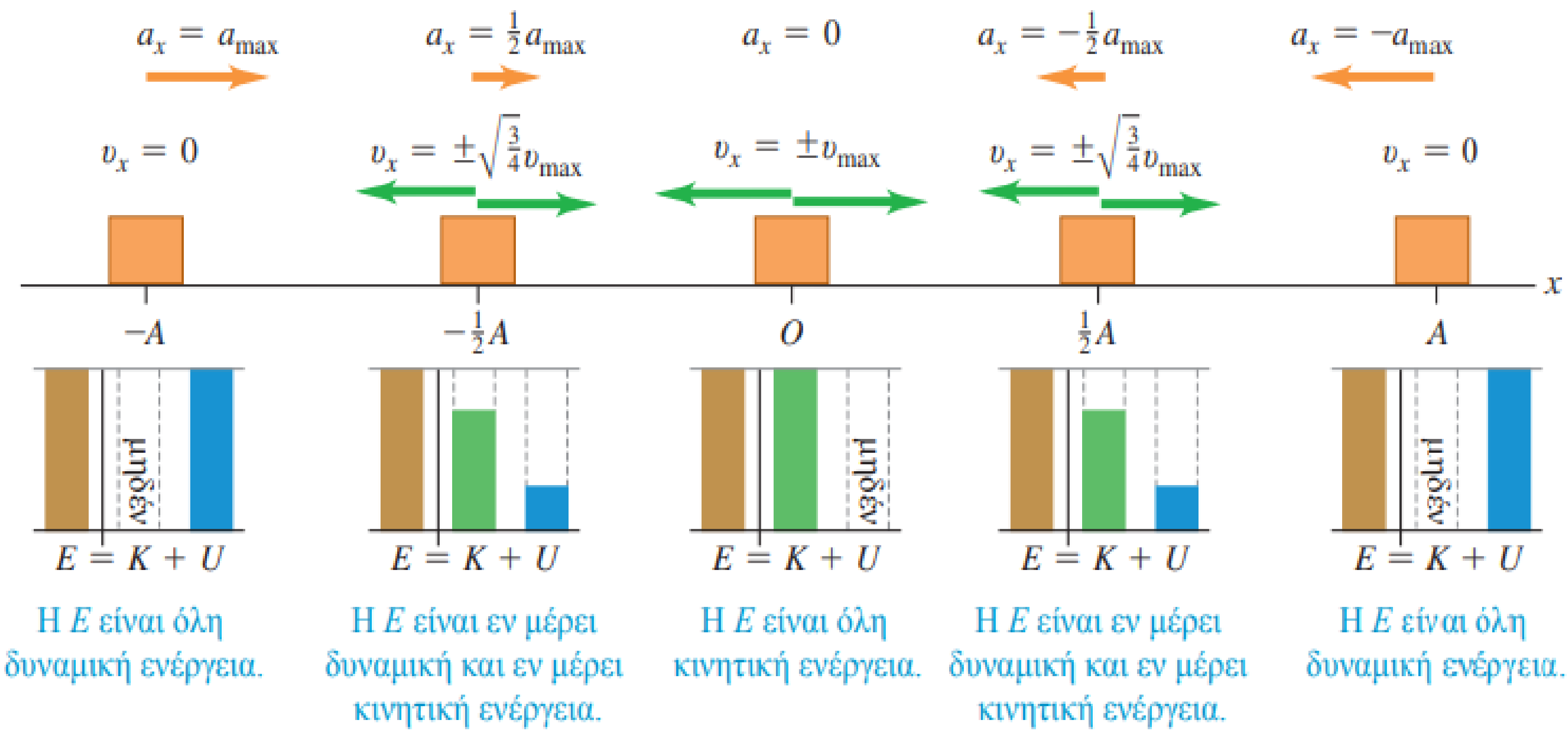
U(t)=δυναμική ενέργεια
K(t)= κινητική ενέργεια



Καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος η ενέργεια μετατρεπεται απο τη μια μορφή στην αλλη αλλά το άθροισμα είναι σταθερό



Καθώς μεταβάλλεται η θέση η ενέργεια μετατρεπεται απο τη μια μορφή στην αλλη αλλά το άθροισμα είναι σταθερό



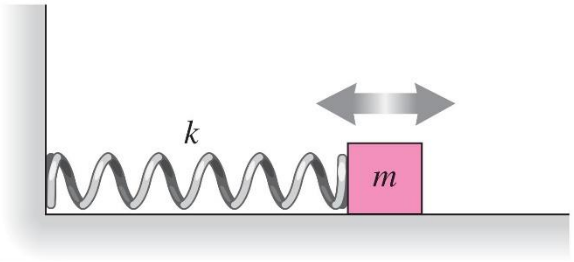
Ολική μηχανική ενέργεια στην απλή αρμονική κίνηση

Μάζα, Σταθερά της δύναμης επαναφοράς

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{σταθερή} \tag{14.21}$$

Ταχύτητα, Μετατόπιση, Πλάτος

Ερώτηση

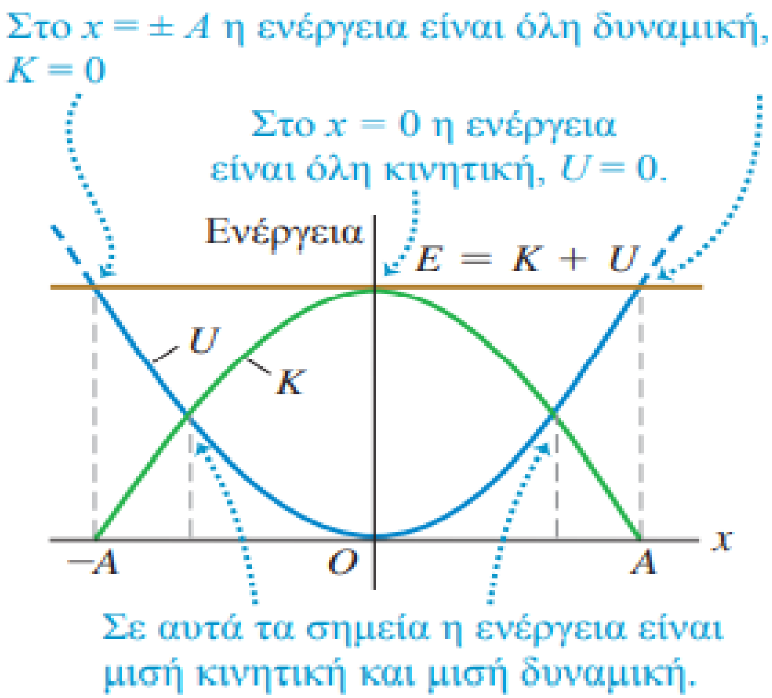


Το σώμα έχει κινητική ενέργεια 3 J και το ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια 2 J όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση x=+2 cm.

a) Πόση είναι η κινητική ενέργεια όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση x=0?
b) Πόση είναι η δυναμική ενέργεια όταν βρίσκεται στο σημείο x=-2 cm
c) Πόση είναι η δυναμική ενέργεια όταν βρίσκεται στο σημείο x=-A

Ενέργεια ως συνάρτηση της θέσης

Για κάθε τιμή του x το άθροισμα των *K* και *U* ισούται με τη σταθερή τιμή της *E*.



$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \quad (14.22)$$

Η ταχύτητα για δεδομένη μετατόπιση x
Προκύπτει απο τη σχέση της ενέργειας

Ερώτηση

- Εάν διπλασιάσουμε μόνο τη μάζα ενός ιδανικού, δονούμενο συστήματος μάζας-ελατηρίου, η μηχανική ενέργεια του συστήματος

Α) αυξάνεται κατά ένα παράγοντα ίσο με .

Β) αυξάνεται κατά ένα παράγοντα ίσο με 2.

Γ) αυξάνεται κατά ένα παράγοντα ίσο με 3.

Δ) αυξάνεται κατά ένα παράγοντα ίσο με 4.

Ε) δεν μεταβάλλεται.

- Ένα σώμα συνδεδεμένο με ένα κάθετο, αβαρές ελατήριο και μετακινείται πάνω-κάτω μεταξύ των δυο ακραίων σημείων Α και Β. Όταν η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ελάχιστη, το σώμα βρίσκεται

Α) είτε στο Α είτε στο Β.

Β) στο μέσο μεταξύ των Α και Β.

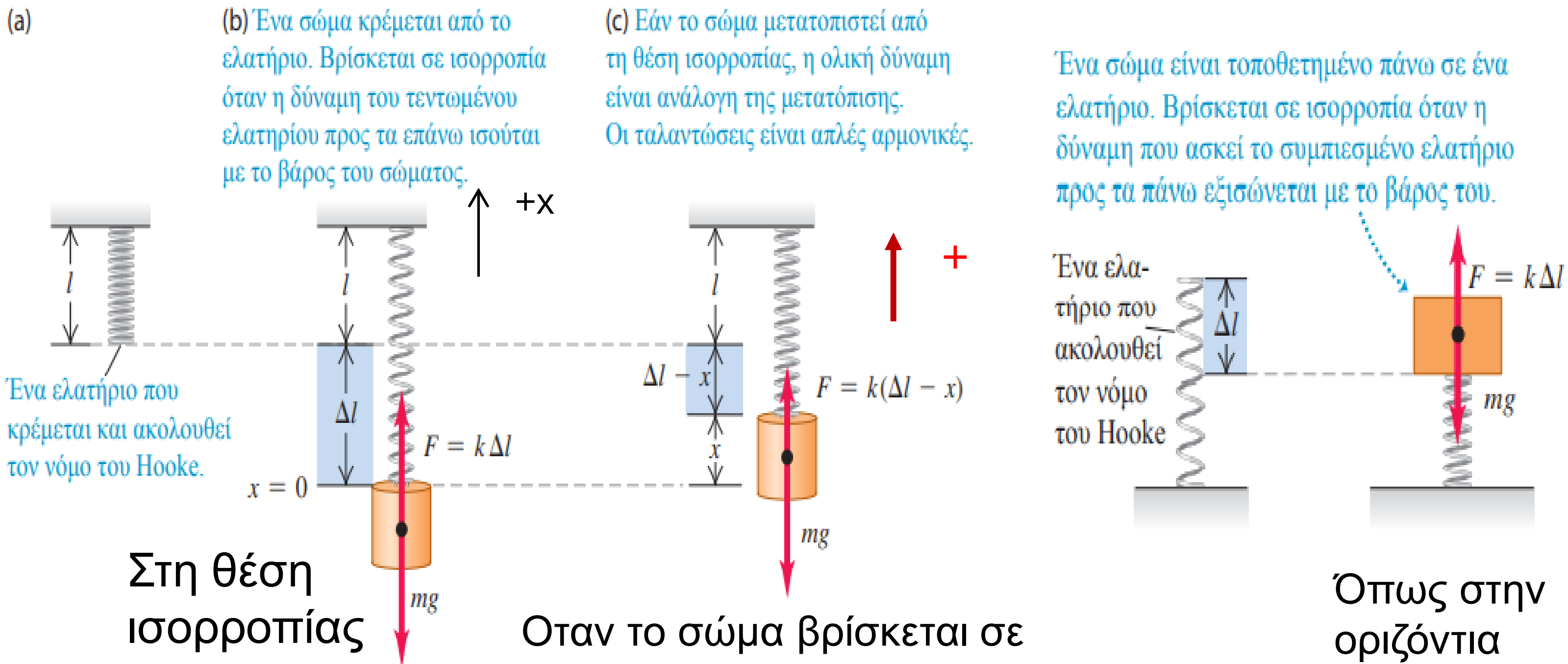
Γ) στο 1/3 της απόστασης από το Α στο Β.

Δ) στο 1/4 της απόστασης από το Α στο Β.

Ε) σε απόσταση 1/ φορές την απόσταση από το Α στο Β.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Κατακόρυφη Απλή Αρμονική Κίνηση



Στη θέση ισορροπίας
$mg=k\Delta l$

Οταν το σώμα βρίσκεται σε απόσταση x προς τα πάνω, η επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι Δl-x και η ολική δυναμη θα έχει φορά προς τα κάτω

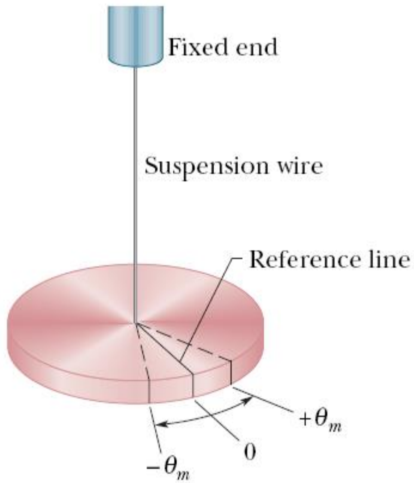
$F_{o\lambda}=k(\Delta l-x)-mg=-kx$

Όπως στην οριζόντια ταλάντωση με το ίδιο ω

Το ίδιο και όταν επιμηκύνεται προς τα κάτω η δυναμη θα έχει φορά προς τα πάνω

Γωνιακή Απλή Αρμονική Κίνηση

Η απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας γίνεται μέσω στροφής (στροφικό εκκρεμές)



Η απομάκρυνση θ από τον άξονα περιστροφής γίνεται από την τάση τ (ροπή επαναφοράς)

$$T = -\kappa\theta = I\alpha \quad \text{ή} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

Κ=σταθερά στρέψης που εξαρτάται από το μήκος, τη διάμετρο και το υλικό του σύρματος ανάρτησης

Γωνιακή απλή αρμονική κίνηση: Γωνιακή συχνότητα, Συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{και} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad (14.24)$$

Λόγος σταθεράς στρέψης προς τη ροπή αδράνειας

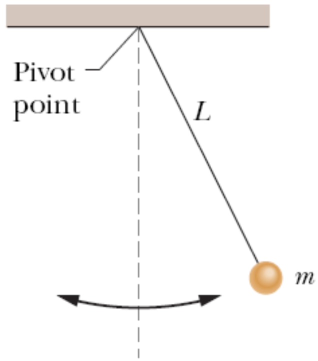
Η γωνιακή μετατόπιση θ συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την:

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \varphi)$$

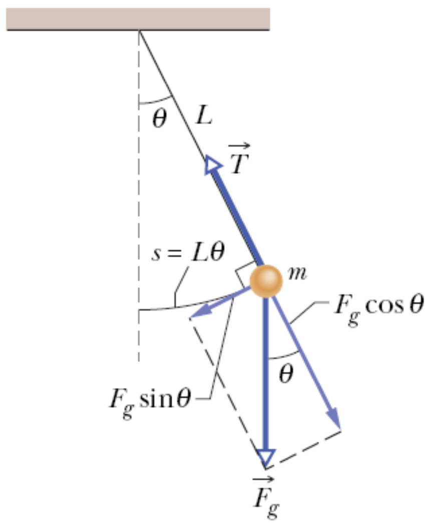
όπου το Θ παίζει τον ρόλο γωνιακού πλάτους.

Ο σφόνδυλος ενός μηχανικού ρολογιού. Το σπειροειδές ελατήριο ασκεί ροπή επαναφοράς ανάλογη της γωνιακής μετατόπισης θ. Άρα πρόκειται για γωνιακή απλή αρμονική κίνηση.

ΤΟ ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ



(a)



(b)

η μάζα του σώματος m είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο

Ροπή επαναφοράς ως προς το σημείο περιστροφής από την εφαπτομενική συνιστώσα του βάρους $F_g\sin\theta$ (αντίθετη στη μετατόπιση)

$$\tau = -L(mg\sin\theta) = I\alpha_\Gamma$$

L=μοχλοβραχίονας της δυναμης $F_g\sin\theta$

I=ροπή αδράνειας του εκκρεμούς

α_Γ=γωνιακή επιτάχυνση

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha_\Gamma = -\frac{mgL}{I}\sin\theta$$

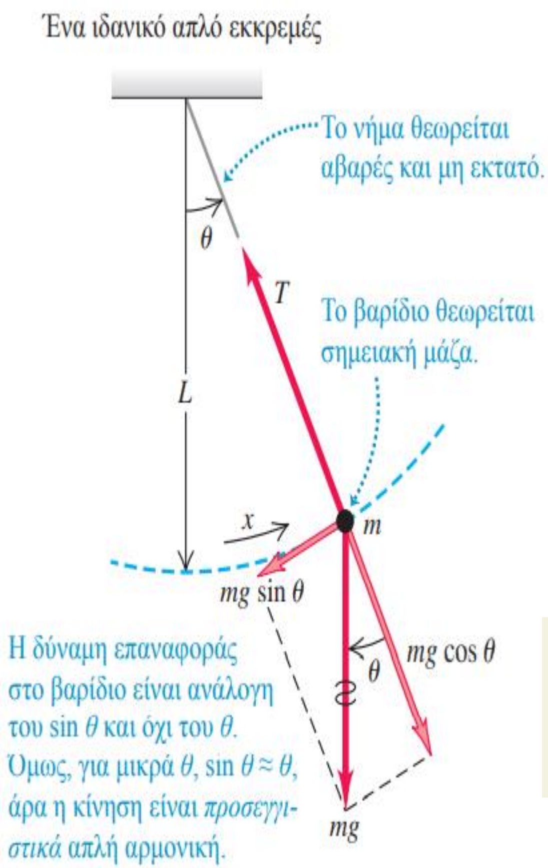
Επειδή $I = mL^2$
(ροπή σημείου)

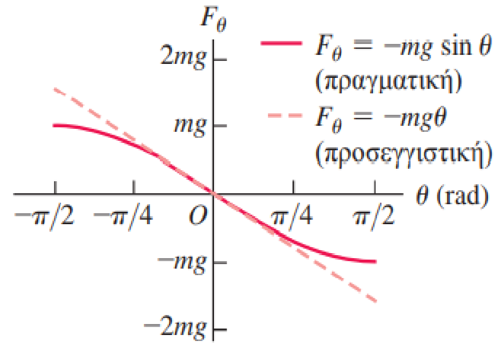
Αν θεωρήσουμε ότι θ=πολύ μικρή (ιδανικό εκκρεμές)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{mL^2}\theta = -\frac{g}{L}\theta$$

Συμπέρασμα: η επιτάχυνση είναι ανάλογη της γωνιακής επιτάχυνσης αλλά με αντίθετο πρόσημο

ΤΟ ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ





Για μικρές γωνιακές μετατοπίσεις θ, η δύναμη επαναφοράς $F_\theta = -mg\sin\theta$ σε ένα απλό εκκρεμές είναι κατά προσέγγιση ίση με $-mg\theta$, δηλαδή είναι προσεγγιστικά ανάλογη της μετατόπισης θ. **Κατά συνέπεια, οι ταλαντώσεις για μικρές γωνίες είναι απλές αρμονικές.**

Γωνιακή συχνότητα απλού εκκρεμούς, μικρό πλάτος

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (14.32)$$

Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας (g) · Μήκος εκκρεμούς (L) · Μάζα εκκρεμούς (απαλείφεται) (m)

Συχνότητα απλού εκκρεμούς, μικρό πλάτος

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (14.33)$$

Γωνιακή συχνότητα (ω) · Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας (g) · Μήκος εκκρεμούς (L)

Περίοδος απλού εκκρεμούς, μικρό πλάτος

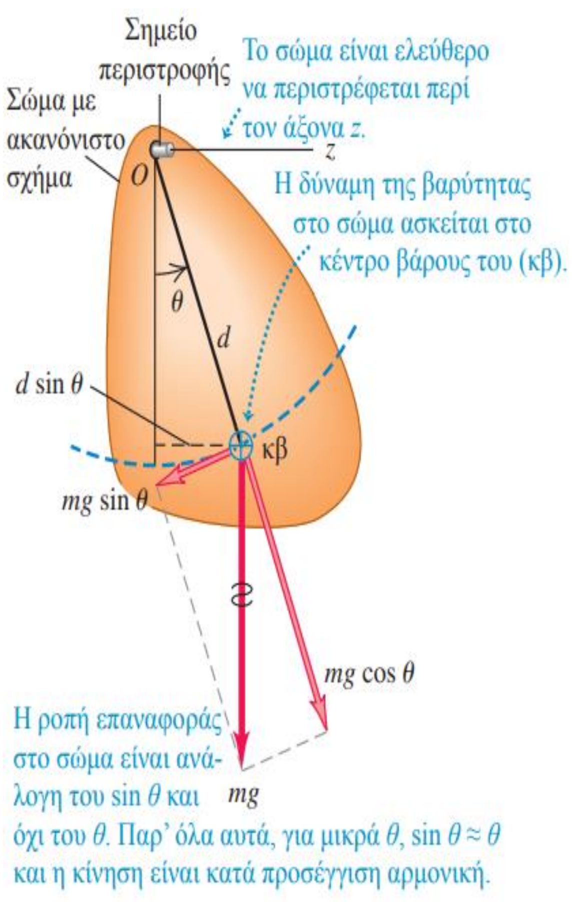
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (14.34)$$

Μήκος εκκρεμούς (L) · Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας (g) · Γωνιακή συχνότητα (ω) · Συχνότητα (f)

ΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ (ταλάντωση στερεού σώματος)

Φυσικό εκκρεμές είναι οποιοδήποτε πραγματικό εκκρεμές, όπου χρησιμοποιείται σώμα με πεπερασμένο μέγεθος, σε αντίθεση με το εξιδανικευμένο μοντέλο του απλού εκκρεμούς, στο οποίο όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο.

14.23 Η δυναμική ενός φυσικού εκκρεμούς.



Ροπή επαναφοράς (ροπή βάρους ως προς τον άξονα περιστροφής O:

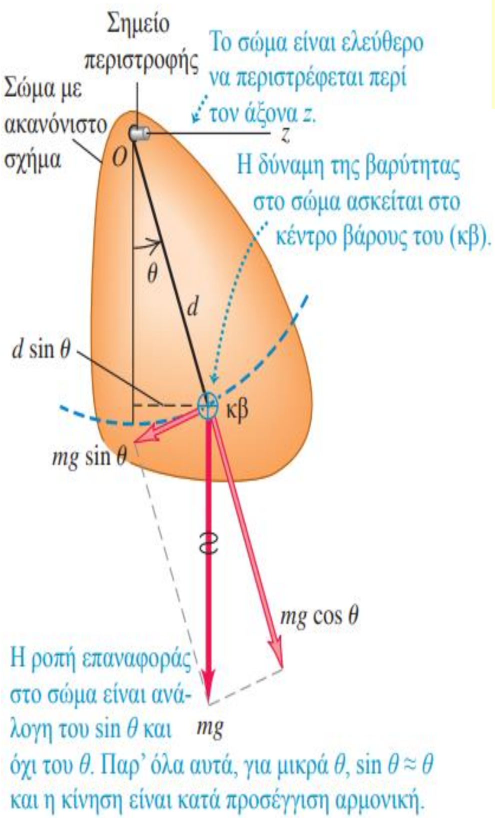
$\tau_Z = -(mg\sin\theta)\, d$ d=μοχλοβραχίονας

Όπως και στο απλό εκκρεμές η ροπή επαναφοράς είναι η ίδια. Η διαφορά είναι ότι ο **μοχλοβραχίονας είναι η απόσταση του κέντρου μάζας από τον άξονα περιστροφής και όχι το μήκος του νήματος**.

Ομοια με το απλό εκκρεμές, όταν η γωνία θ είναι μικρή,προσεγγίζουμε το sinθ με θ (σε ακτίνια)

ΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

14.23 Η δυναμική ενός φυσικού εκκρεμούς.



$$I a_\Gamma = -mgd\theta \Leftrightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\theta \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0$$

οπότε το στερεό σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με περίοδο

Όπου $\omega^2 = \frac{mgd}{I}$

Η ροπή αδράνειας I αναφέρεται στον άξονα περιστροφής O ενώ το τ_0=mgd είναι η μοναδική ασκούμενη ροπή του βάρους με μοχλοβραχίονα το d, δηλαδή την απόσταση του κέντρου μάζας (C) από τον άξονα περιστροφής (O).

Γωνιακή συχνότητα φυσικού εκκρεμούς, μικρό πλάτος

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad (14.38)$$

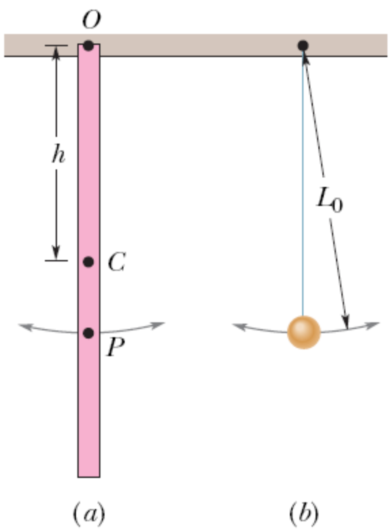
Μάζα · Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας · Απόσταση του κέντρου βάρους από τον άξονα περιστροφής · Ροπή αδράνειας

Περίοδος φυσικού εκκρεμούς, μικρό πλάτος

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (14.39)$$

Ροπή αδράνειας · Απόσταση του κέντρου βάρους από τον άξονα περιστροφής · Μάζα · Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας

‘Ενας χάρακας αιωρείται αναρτημένος από ένα σημείο περιστροφής στο ένα άκρο σε απόσταση h από το κέντρο μάζας του. Α) Πόση είναι η περίοδος ταλάντωσης? Β) Πόση είναι η απόσταση L_0 μεταξύ του σημείου περιστροφής Ο του χάρακα και του κέντρου ταλάντωσης του χάρακα?



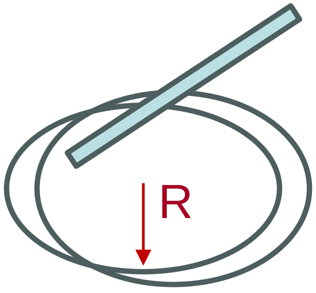
Για ομογενή ράβδο που περιστρέφεται από το κμ, η ροπή αδράνειας δίνεται

$$I_c = \frac{1}{12} mL^2$$

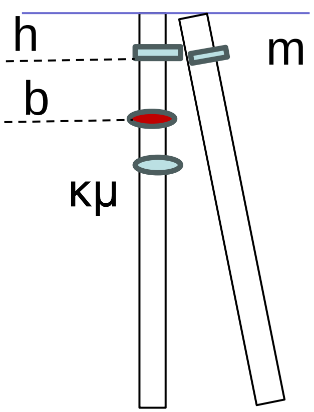
Όταν η ράβδος περιστρέφεται από το ένα άκρο της

$$I = I_c + mh^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3} mL^2$$

‘Δακτύλιος με ακτίνα 0.10 m κρέμεται από τριγωνική ράβδο. Να υπολογιστεί η περίοδος ταλαντώσεων του δακτυλίου ως προς το κέντρο στήριξης στην περιφέρεια



Ράβδος μήκους L ταλαντώνεται κρεμασμένη από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της. Σημειακή μάζα ίση με τη μάζα της ράβδου προσαρμόζεται σε απόσταση h από τον άξονα περιστροφής πάνω στη ράβδο. Βρείτε την περίοδο ταλαντώσεων του συστήματος. (ροπή της ράβδου ως τον άξονα περιστροφής I= $\frac{1}{3}mL^2$.



Η εξίσωση της κίνησης είναι

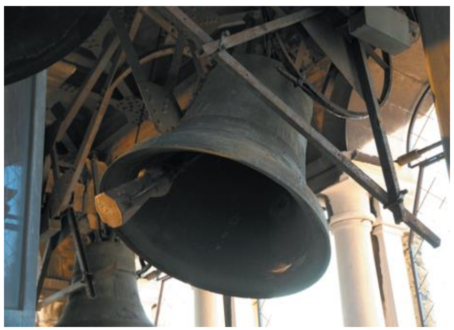
$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2mgb\,\sin\theta$

όπου b=απόσταση του κβ του συστήματος από τον άξονα περιστροφής

ΑΠΟΣΒΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Τα πραγματικά συστήματα έχουν πάντοτε κάποιες δυνάμεις απόσβεσης και οι ταλαντώσεις ελαττώνονται σιγά σιγά με τον χρόνο εκτός και αν αντικαταστήσουμε τη μηχανική ενέργεια που χάνεται.

Η ελάττωση που προκαλείται στο πλάτος λόγω των δυνάμεων απωλειών ονομάζεται **απόσβεση** και η αντίστοιχη κίνηση ονομάζεται **αποσβενόμενη ταλάντωση**.



πρόσθετη δύναμη απόσβεσης στο σώμα (συνήθως λόγω τριβής), $-bv$

$$-\mathrm{kx} - \mathrm{b}v = \mathrm{ma} \text{ ή } -\mathrm{kx} - \mathrm{b}\frac{dx}{dt} = \mathrm{m}\frac{d^2x}{dt^2}$$

όπου b=σταθερά απόσβεσης

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Με την ισχυρότερη απόσβεση (μεγαλύτερο b):
- το πλάτος (εμφανίζεται με τις διακεκομμένες γραμμές) ελαττώνεται πιο ραγδαία.
- η περίοδος T αυξάνεται (T_0 = περίοδος με μηδενική απόσβεση).

Λύση της διαφορικής εξίσωσης

Αρχικό πλάτος — Σταθερά απόσβεσης — Μάζα — Χρόνος

Μετατόπιση ταλαντωτή, μικρή απόσβεση

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (14.42)$$

Γωνιακή συχνότητα αποσβενόμενων ταλαντώσεων — Γωνία φάσης

Σταθερά ελατηρίου δύναμης επαναφοράς

Γωνιακή συχνότητα ταλαντωτή, μικρή απόσβεση

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (14.43)$$

Σταθερά απόσβεσης — Μάζα

ω’<ω

ΑΠΟΣΒΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Για να υπάρχει πραγματική λύση

$$\frac{k}{m} > \frac{b^2}{4m^2} \rightarrow b^2 < 4mk$$

Αν b=0 Δεν υπάρχει απόσβεση $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\text{Αν } b^2 = 4mk \text{ τότε } \omega' = 0$

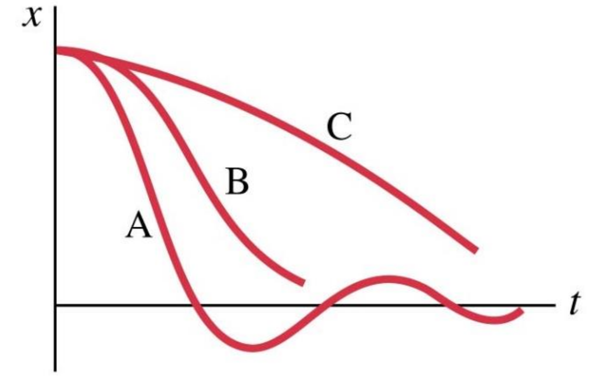
Κρίσιμη απόσβεση. Το b γίνεται αρκετά μεγάλο. Το σύστημα δεν ταλαντώνεται πια, αλλά επανέρχεται στην κατάσταση ισορροπίας του χωρίς ταλάντωση στο πιο σύντομο χρόνο (καμπύλη B)

$\text{Αν } b^2 \gg 4mk \text{ τότε}$ ω' είναι φανταστικός αριθμός

Υπεραπόσβεση Και πάλι δεν υπάρχει ταλάντωση καθώς η απόσβεση είναι πολύ μεγάλη. Το σύστημα όμως επιστρέφει στην ισορροπία πολύ πιο αργά από ότι στην κρίσιμη απόσβεση(καμπύλη C). Λύσεις της μορφής: $x(t) = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}$

$\text{Αν } b^2 < 4mk$

Υποκρίσιμη απόσβεση Το σύστημα εκτελεί έναν μεγάλο αριθμό ταλαντώσεων μέχρι να έρθει σε κατάσταση ισορροπίας (καμπύλη A)



Κάποια συστήματα σχεδιάζονται να λειτουργούν συνήθως σε κρίσιμη απόσβεση αλλά όσο περνά ο καιρός με τη φθορά τους η απόσβεση γίνεται υποκρίσιμη

ΑΠΟΣΒΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ενέργεια στις Αποσβενόμενες Ταλαντώσεις

Στις αποσβενόμενες ταλαντώσεις η δύναμη απόσβεσης δεν είναι διατηρητική. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται συνεχώς πλησιάζοντας το μηδέν μετά από πολύ χρόνο.

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + k\frac{dx}{dt} = v(ma + k) = v(-bv) = -bv^2$$

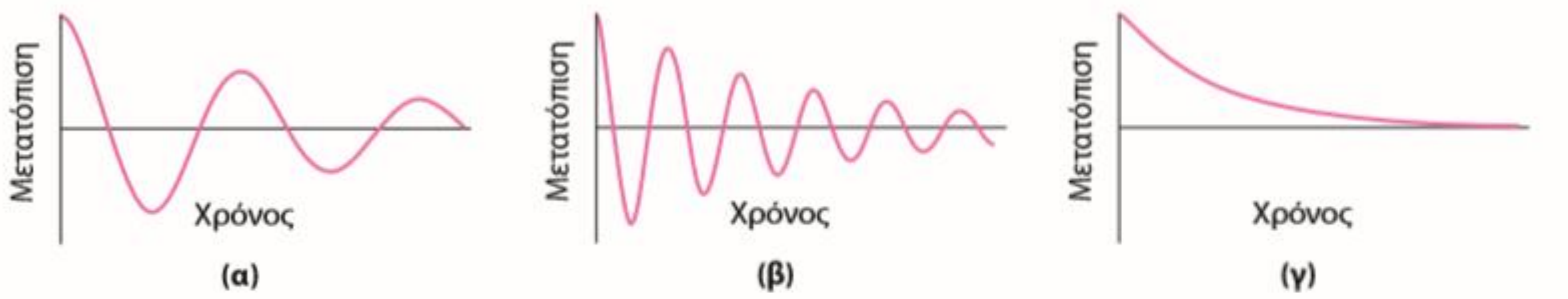
Ο όρος $-bv^2$ είναι πάντοτε αρνητικός και για θετική και αρνητική ταχύτητα. Αυτό δείχνει ότι καθώς κινείται το σώμα η ενέργεια ελαττώνεται όχι όμως με σταθερό ρυθμό. Ο όρος αυτός δείχνει το ρυθμό που η δύναμη απόσβεσης παράγει αρνητικό έργο

Ερώτηση

Το σχήμα δείχνει τρία διαφορετικά συστήματα μάζας - ελατηρίου. Ο χρόνος είναι ο ίδιος και για τα τρία συστήματα

Σε ποιο σύστημα η απόσβεση είναι ισχυρότερη;

Σε ποιο σύστημα η απόσβεση είναι ασθενέστερη;



Σωματίδιο μάζας m=2kg κινείται στον άξονα x και έλκεται προς τη θέση ισορροπίας από μια δύναμη ίση με 4x (N). Αν στο σωματίδιο επιδρά δύναμη απόσβεσης F_T=4u (όπου u=ταχύτητα) βρείτε την μετατόπιση x(t) και την ταχύτητα u(t) της ταλάντωσης

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ένας ταλαντωτής με απόσβεση, αν αφεθεί ελεύθερος, κάποια στιγμή θα σταματήσει να κινείται. Μπορούμε όμως να διατηρήσουμε την κίνησή του με σταθερό πλάτος ασκώντας μία δύναμη που μεταβάλλεται με τον χρόνο με περιοδικό τρόπο. Αυτή την πρόσθετη δύναμη την ονομάζουμε **διεγείρουσα δύναμη**.

Ταλάντωση με Περιοδική Διεγείρουσα Δύναμη

Αν ασκήσουμε μια περιοδικά μεταβαλλόμενη διεγείρουσα δύναμη με γωνιακή συχνότητα ω_{d} σε έναν ταλαντωτή με απόσβεση, η κίνηση που θα προκύψει ονομάζεται **εξαναγκασμένη ταλάντωση**.

Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση, όμως, η γωνιακή συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται η μάζα ισούται με τη διεγείρουσα γωνιακή συχνότητα ω_{d}.

Αυτή δεν πρέπει να είναι κατ' ανάγκη ίση με τη φυσική γωνιακή συχνότητα ω', η οποία καθορίζεται από τα m, k και b.

Μέγιστη τιμή δύναμης επαναφοράς

Πλάτος εξαναγκασμένου ταλαντωτή

Σταθερά απόσβεσης

$$A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{(k - m\omega_{\mathrm{d}}^2)^2 + b^2\omega_{\mathrm{d}}^2}} \qquad (14.46)$$

Σταθερά ελατηρίου δύναμης επαναφοράς

Μάζα

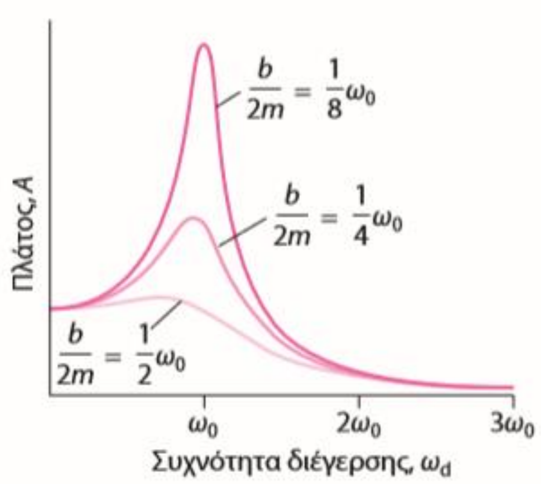
Γωνιακή συχνότητα διεγείρουσας δύναμης

Συντονισμός

Όταν ένα σύστημα εξαναγκάζεται από μια εξωτερική δύναμη η οποία είναι κοντά στη φυσική του συχνότητα, αντιδρά με ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται **συντονισμός**

- Το μέγεθος του συντονισμού αυξάνεται καθώς η απόσβεση μειώνεται
- Το πλάτος της καμπύλης συντονισμού (πλάτος ταλάντωσης έναντι συχνότητας διέγερσης) επίσης μειώνεται με χαμηλότερη απόσβεση

Η ω_0 είναι η φυσική συχνότητα $\sqrt{k/m}$



Οι καμπύλες συντονισμού για τρεις διαφορετικές σταθερές απόσβεσης

Η εμφάνιση ενός μέγιστου στην καμπύλη του πλάτους όταν οι διεγείρουσες συχνότητες είναι κοντά στη φυσική συχνότητα του συστήματος---συντονισμός