

Δυναμική της περιστροφικής κίνησης στερεού

Κύλιση ενός στερεού: Συνδυασμός μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης

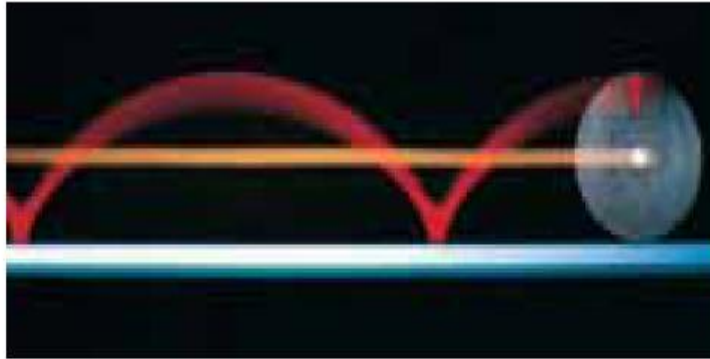


Fig. 11-2 A time-exposure photograph of a rolling disk. Small lights have been attached to the disk, one at its center and one at its edge. The latter traces out a curve called a *cycloid*. (Richard Megna/*Fundamental Photographs*)

Τι προσδίνει στο σώμα γωνιακή επιτάχυνση?

Τι χρειάζεται ένα ακίνητο σώμα να αρχίσει να περιστρέφεται?

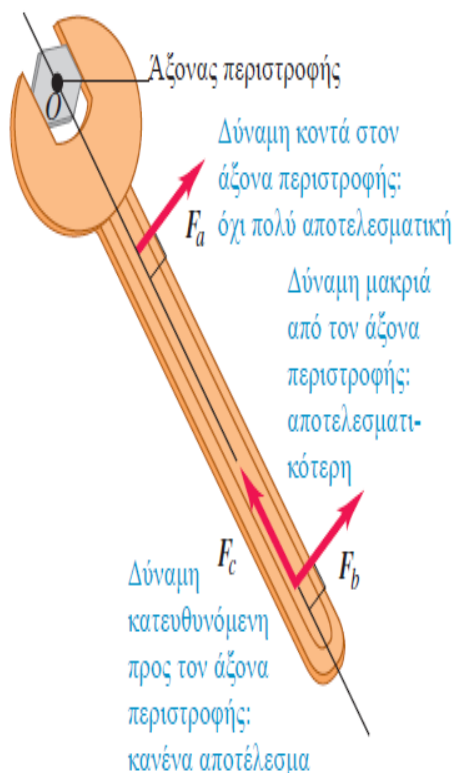
Τι χρειάζεται ένα περιστρεφόμενο σώμα να σταματήσει?

Είναι αρκετή μία δύναμη?

Ροπή δύναμης (torque)

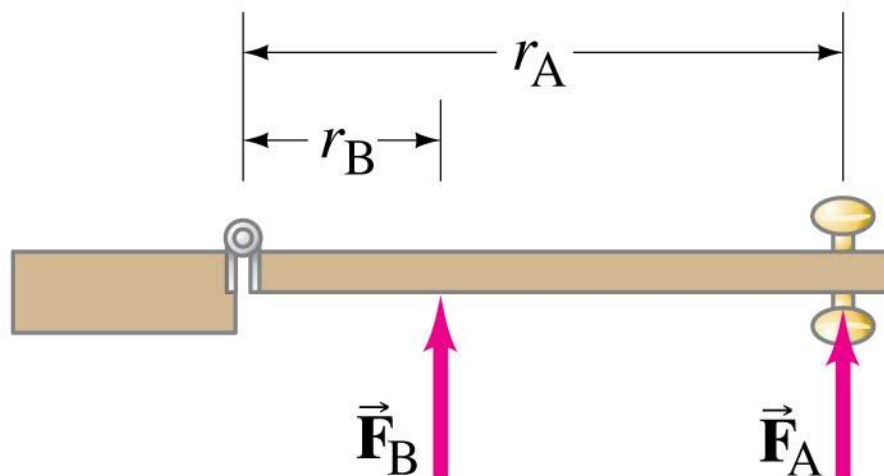
Περιγράφει την περιστροφική συνέπεια μιας δύναμης

10.1 Ποια από τις τρεις παρακάτω ίσες κατά μέτρο δυνάμεις ξεσφίγγει ευκολότερα τον σφιχτοβιδωμένο κοχλία;



Για την περιστροφή χρειάζεται όχι μόνο μια δύναμη (κατεύθυνση και μέτρο) αλλά παίζει ρόλο και η θέση του σημείου όπου ασκείται η δύναμη ως προς τον άξονα περιστροφής

Η ροπή μετριέται πάντα ως προς ένα σημείο. Όταν αλλάζει το σημείο αλλάζει και η ροπή. Για το λόγο αυτό λέμε «**ροπή δύναμης F ως προς το σημείο O** »



Κάτοψη πόρτας: Όσο πιο μεγάλη η δύναμη F_A τόσο πιο γρήγορα ανοίγει η πόρτα. Αν ασκήσουμε F_B πιο κοντά στην πόρτα τότε η πόρτα ανοίγει πιο αργά

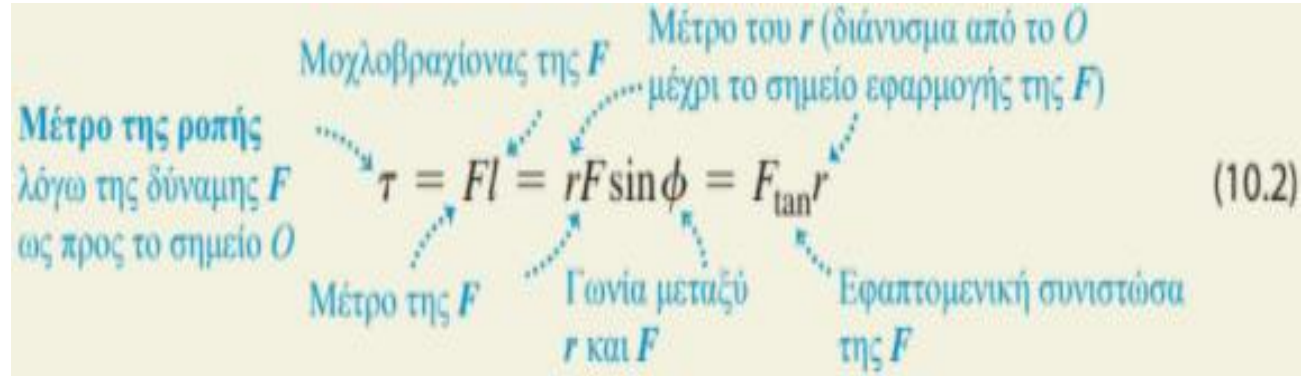
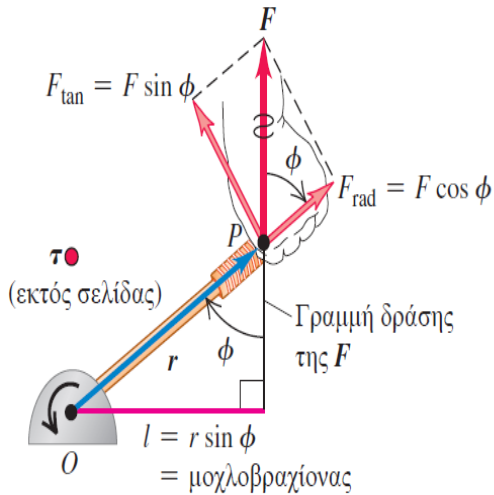
Ροπή δύναμης

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Μονάδα SI: N.m

Τρεις τρόποι υπολογισμού της ροπής:

$$\tau = Fl = rF \sin \phi = F_{\tan} r$$



$r_c = l = r \sin \phi$ = μοχλοβραχίονας ή βραχίονας ροπής
= σταθερή απόσταση της δύναμης F από το σημείο O που διέρχεται ο άξονας περιστροφής

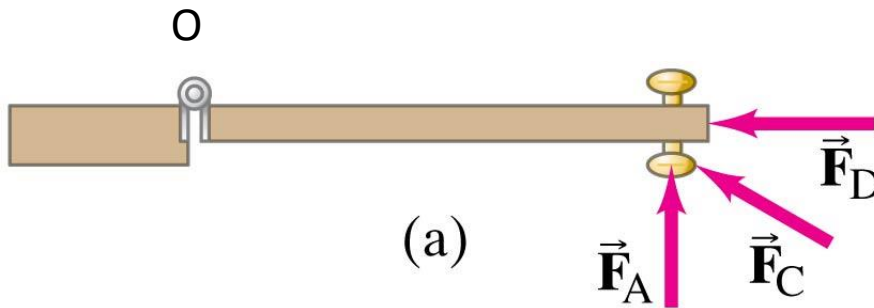
- Η ροπή δεν εξαρτάται από την απόσταση r από το σημείο O αλλά από την κάθετη απόσταση r_c
- Είναι ανάλογη της εφαπτομενικής συνιστώσας της δύναμης. Η ακτινική δεν προκαλεί περιστροφή.

Όταν $\phi = 90^\circ$ τότε
 $r_c = r$ και $\tau = \max$

Όταν $\phi = 0^\circ$ ή 180°
τότε $\tau = 0$

Προσοχή: Το N.m εκφράζει Joule (μονάδα έργου και ενέργειας). Όμως η ροπή ΔΕΝ εκφράζεται με Joule.

Εύρεση της ροπής
δύναμης F_C που
σηματίζει γωνία με τον
άξονα περιστροφής

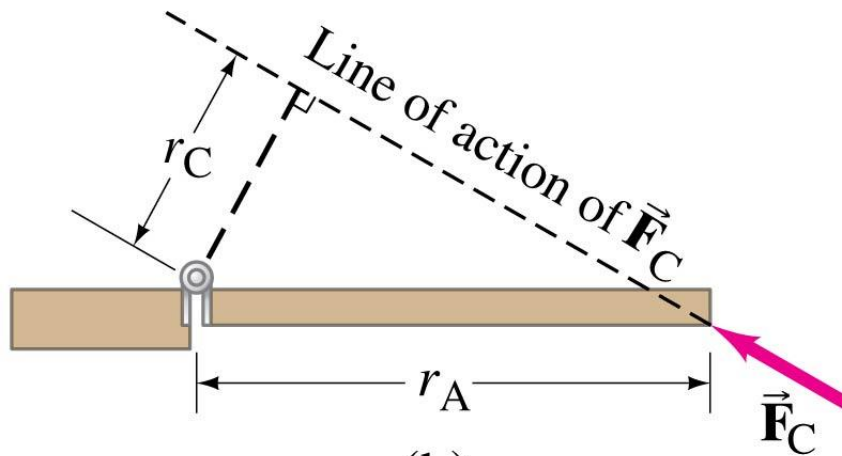


(a)

μοχλοβραχίονας ή βραχίονας ροπής

$=r_C$

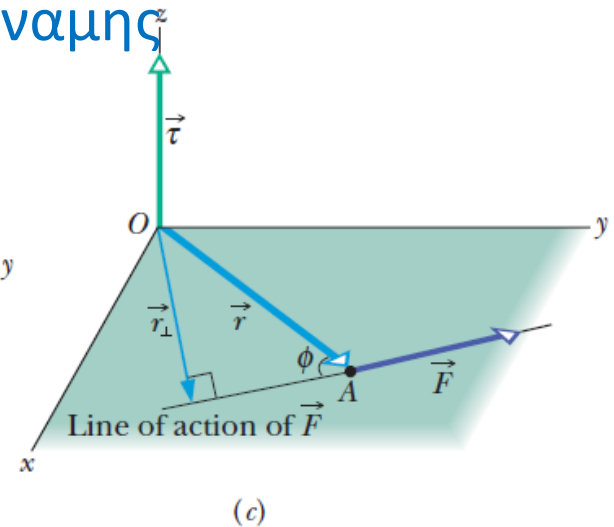
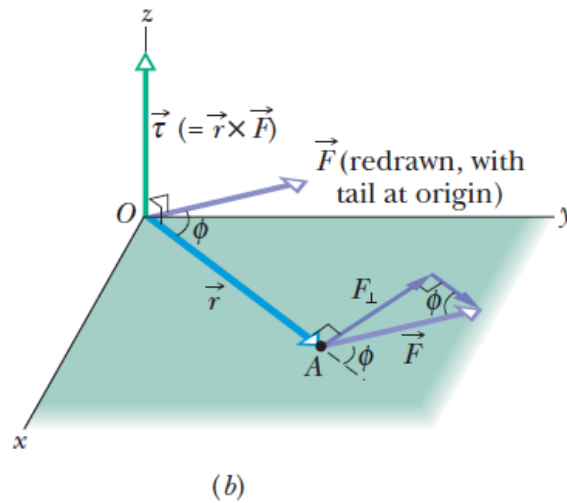
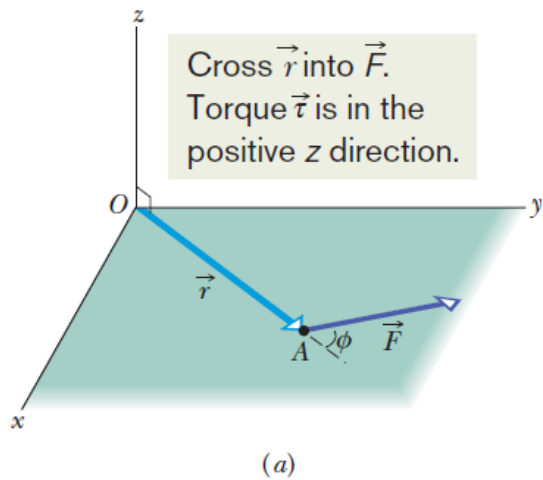
σταθερή απόσταση της δύναμης F
από το σημείο O που διέρχεται ο
άξονας περιστροφής



(b)

- Φέρνουμε γραμμή στη διεύθυνση της δύναμης (γραμμή δράσης)
- Σχεδιάζουμε γραμμή κάθετη στη γραμμή δράσης η οποία διέρχεται από τον άξονα περιστροφής στο σημείο περιστροφής O

Τρόποι υπολογισμού της ροπής δύναμης



$$\tau = F_{tan} \cdot r = F \cdot \sin\phi \cdot r$$

$$\tau = F \cdot r_\perp = F \cdot r \cdot \sin\phi$$

Μόνον η εφαπτομενική συνιστώσα της δύναμης F_{tan} προκαλεί ροπή. Η ακτινική είναι κατά μήκος του r

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{torque defined}).$$

Προσοχή:

- Η ροπή εξαρτάται όχι μόνο από το μέτρο της δύναμης αλλά και την κατεύθυνση της.
- Η ροπή ορίζεται ως προς ένα σημείο.
- Είναι κάθετη στο επίπεδο που βρίσκεται το σημείο περιστροφής και η δύναμη

Ροπή δύναμης ως διάνυσμα

Αν δείξετε με τα δάχτυλα του δεξιού χεριού την κατεύθυνση του r και έπειτα τα κυρτώσετε προς την κατεύθυνση του F , ο προτεταμένος σας αντίχειρας δείχνει προς την κατεύθυνση του τ .

Διάνυσμα ροπής
εξαιτίας της δύναμης F
ως προς το σημείο O

Διάνυσμα από το O μέχρι
το σημείο εφαρμογής της F

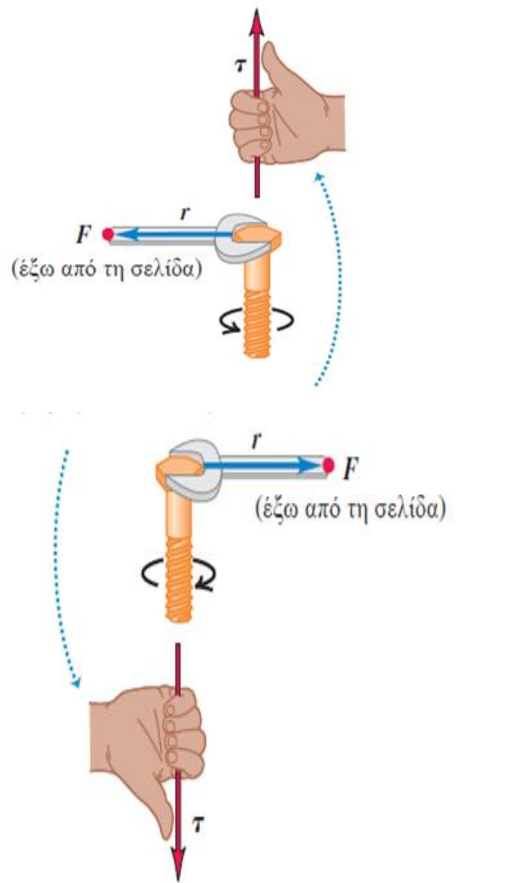
Δύναμη F

$$\tau = r \times F \quad (10.3)$$

Εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης από το O και της δύναμης

έχει διεύθυνση κατά μήκος του άξονα περιστροφής, κάθετο στο r και στο F . Τα δάχτυλα του δεξιού χεριού κυρτώνονται προς την κατεύθυνση της περιστροφής που τείνει να προκαλέσει η ροπή.

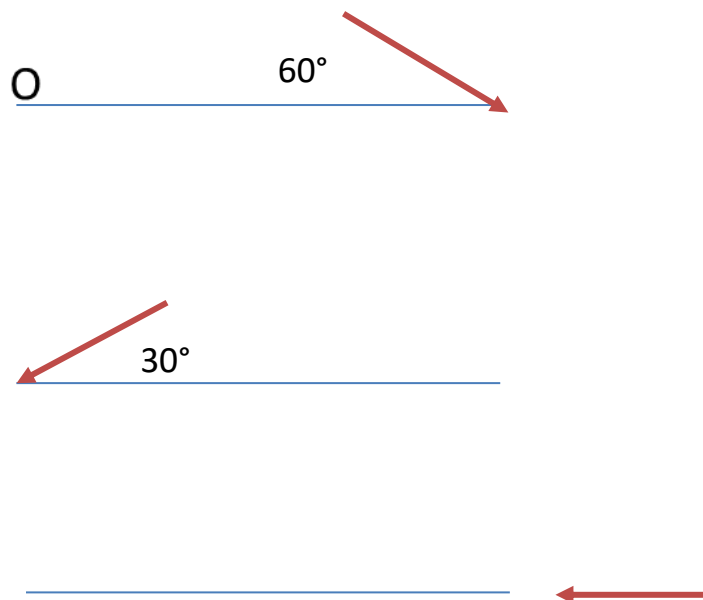
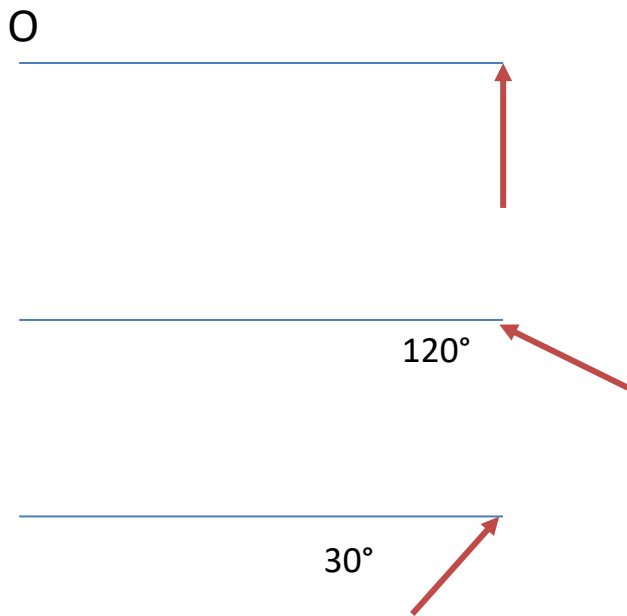
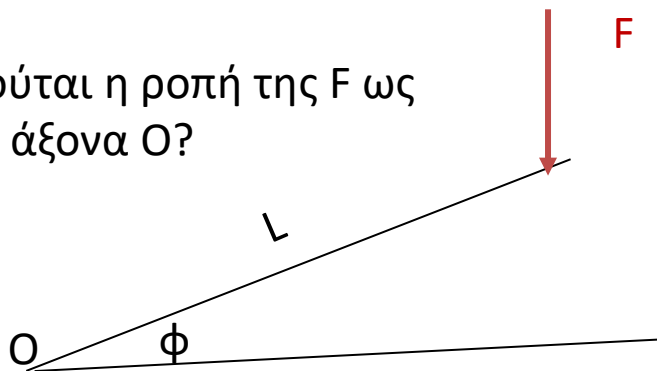
Φορά αρνητική όταν η δύναμη περιστρέφει το σώμα κατά τη φορά δεικτών του ρολογιού και θετική αντίθετα στη φορά δεικτών του ρολογιού



Ερωτήσεις

Με τι ισούται η ροπή της F ως προς τον άξονα O ?

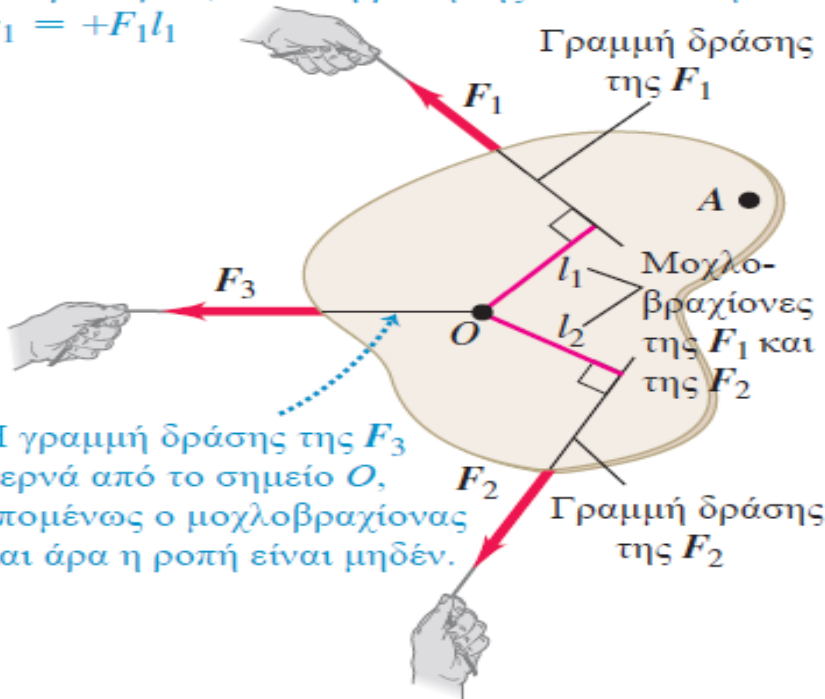
- 1) $F \cdot L \cdot \sin\phi$
- 2) $F \cdot L \cdot \cos\phi$
- 3) $F \cdot L \cdot \tan\phi$
- 4) $F \cdot L / \sin\theta$
- 5) FL



10.2 Η ροπή δύναμης ως προς σημείο είναι το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί τον μοχλοβραχίονα της δύναμης.

Η F_1 τείνει να προκαλέσει περιστροφή ως προς το σημείο O αντίθετη προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού, οπότε η ροπή της είναι θετική:

$$\tau_1 = +F_1 l_1$$



Η γραμμή δράσης της F_3 περνά από το σημείο O , επομένως ο μοχλοβραχίονας και άρα η ροπή είναι μηδέν.

Η F_2 τείνει να προκαλέσει περιστροφή ως προς το σημείο O , σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, οπότε η ροπή της είναι αρνητική:

$$\tau_2 = -F_2 l_2$$

$$\tau_1 = +F_1 \cdot l_1$$

$\tau_3 = 0$ γιατί περνά από το σημείο O

$$\tau_2 = -F_2 \cdot l_2$$

Ερωτήσεις

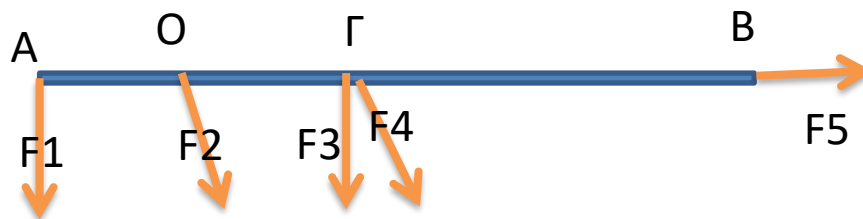
1) Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου δείχνει προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα z . Προς ποια κατεύθυνση είναι η δύναμη που προκαλεί τη ροπή, αν η ροπή στο σωματίδιο είναι:

α) 0

β) προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x και

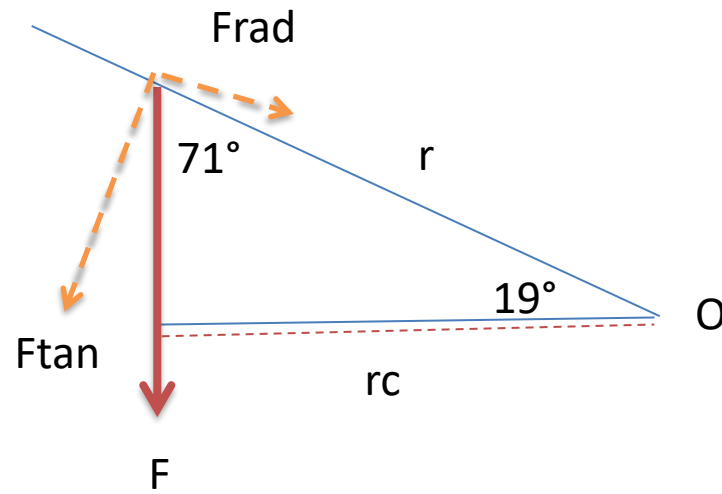
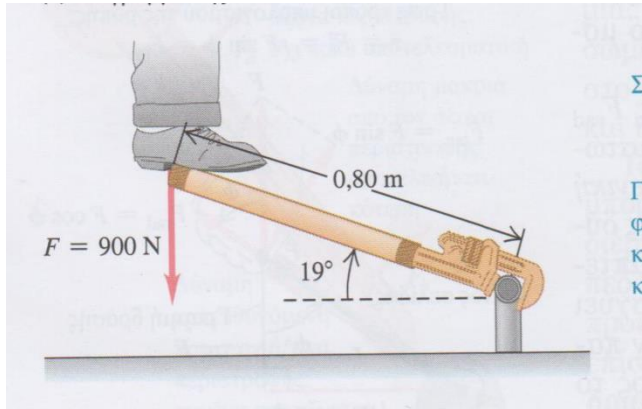
γ) προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα y ,

2) Οι δυνάμεις είναι ομοεπίπεδες και έχουν το ίδιο μέτρο. Η ράβδος περιστρέφεται γύρω από το σημείο O που απέχει 20 cm από την άκρη της ράβδου A . Κατατάξτε τις δυνάμεις με βάση τη ροπή που προκαλούν με τη μεγαλύτερη πρώτη

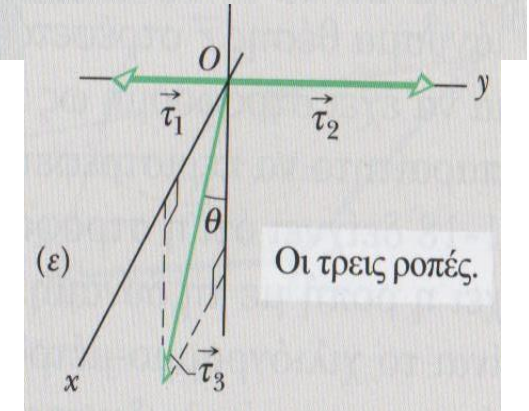
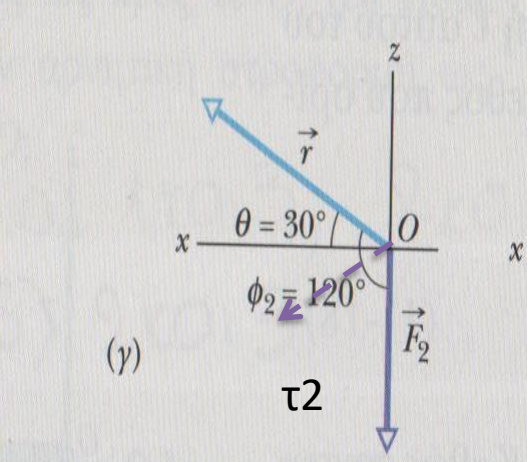
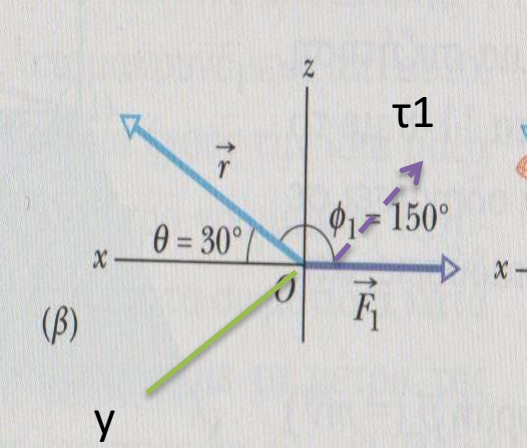
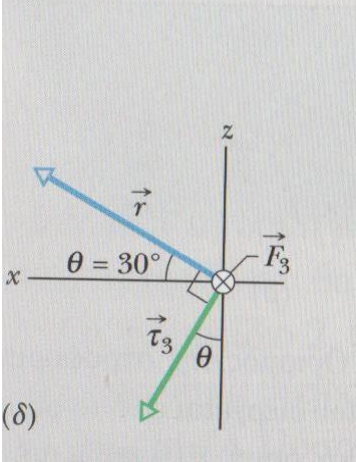
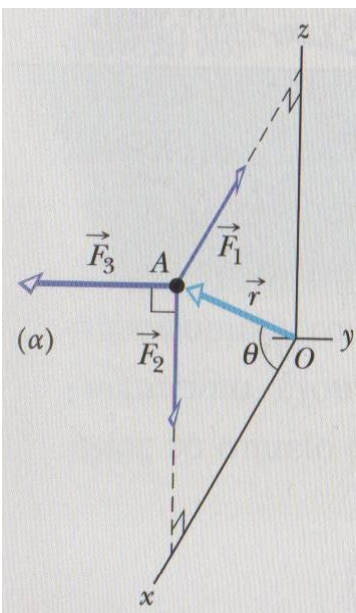


AO=20 cm
AΓ=40 cm
AB=100 cm

Παράδειγμα 9



Παράδειγμα 10



Η ροπή τ1 κατευθунεται προς το εσωτερικό της σελίδας κατά μήκος του αξονα γ (-)

Η ροπή τ2 κατευθунεται προς το εξωτερικό της σελίδας κατα μήκος του αξονα γ (+)

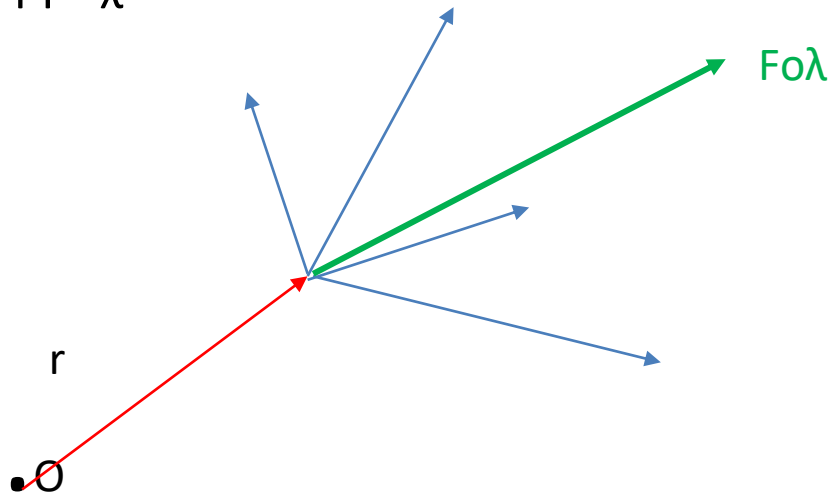
Η ροπή τ3 είναι πάνω στο επιπεδο xz (καθώς η F3 είναι κατα τον άξονα γ)

$$\begin{aligned} \tau_1 &= rF_1 \sin \phi_1 = (3.0 \text{ m})(2.0 \text{ N})(\sin 150^\circ) = 3.0 \text{ N} \cdot \text{m}, \\ \tau_2 &= rF_2 \sin \phi_2 = (3.0 \text{ m})(2.0 \text{ N})(\sin 120^\circ) = 5.2 \text{ N} \cdot \text{m}, \\ \tau_3 &= rF_3 \sin \phi_3 = (3.0 \text{ m})(2.0 \text{ N})(\sin 90^\circ) \\ &= 6.0 \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

(Answer)

Παράδειγμα 11

Στο σημείο του χώρου $\vec{r}=(1,1,1)$ επενεργούν 4 δυνάμεις $\vec{F}_1=(1,0,1)$, $\vec{F}_2=(2,-1,0)$, $\vec{F}_3=(-2,-1,0)$, $\vec{F}_4=(0,1,1)$. Να βρεθεί η συνισταμένη ροπή του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων και να εξεταστεί αν αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από τη συνισταμένη δύναμη με τον ίδιο μοχλοβραχίονα



Συμπέρασμα:
Συνολική Ροπή
συντρεχουσών
δυνάμεων=ροπή της
συνισταμένης δύναμης

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ NEWTON

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την εφαπτομενική συνιστώσα έχει τη μορφή

$$F_{1,\text{tan}} = m_1 a_{1,\text{tan}}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την εφαπτομενική επιτάχυνση του πρώτου σωματίου ως συνάρτηση της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος α_z

$$a_{1,\text{tan}} = r_1 \alpha_z$$

$$F_{1,\text{tan}} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha_z \quad \tau_{1z} = I_1 \alpha_z = m_1 r_1^2 \alpha_z$$

Γράφουμε μια τέτοια εξίσωση για κάθε σωματίο που ανήκει στο στερεό σώμα και μετά προσθέτουμε όλες αυτές τις εξισώσεις:

$$\sum \tau_{iz} = (\sum m_i r_i^2) \alpha_z$$

Περιστροφικό ανάλογο του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για ελεύθερο σώμα:

Συνισταμένη ροπή σε στερεό σώμα περί τον άξονα z \rightarrow $\sum \tau_z = I \alpha_z$ \leftarrow Ροπή αδράνειας του στερεού σώματος περί τον άξονα z
 \leftarrow Γωνιακή επιτάχυνση στερεού σώματος περί τον άξονα z (10.7)

Συμπέρασμα: η συνισταμένη ροπή σε στερεό σώμα περί άξονα προκαλεί **γωνιακή επιτάχυνση** περί αυτόν τον άξονα

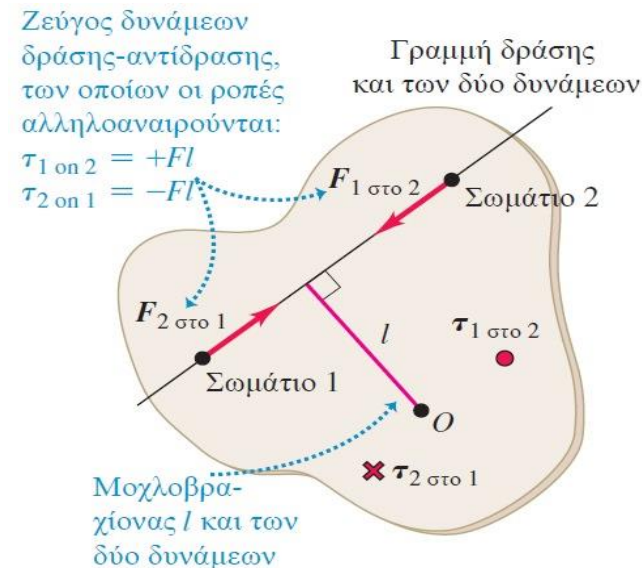
ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ NEWTON

Προϋποθέσεις:

- α_z είναι ίδια για όλα τα σωμάτια που απαρτίζουν το σώμα
- Ισχύει μόνο για στερεά σώματα Συνεπώς, η εξίσωση αυτή δεν ισχύει για την περίπτωση μιας περιστρεφόμενης δεξαμενής νερού ή για έναν ανεμοστρόβιλο, διαφορετικά μέρη των οποίων έχουν διαφορετικές γωνιακές επιταχύνσεις.
- αφού για την απόδειξη αυτής της εξίσωσης χρησιμοποιήθηκε η Εξ. $a_{tan} = r\alpha_z$, το α_z πρέπει να μετριέται σε rad/s^2 .
- Μόνον οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων επηρεάζουν την περιστροφή ενός στερεού σώματος

Γιατί όλες οι εσωτερικές ροπές αλληλοαναιρούνται

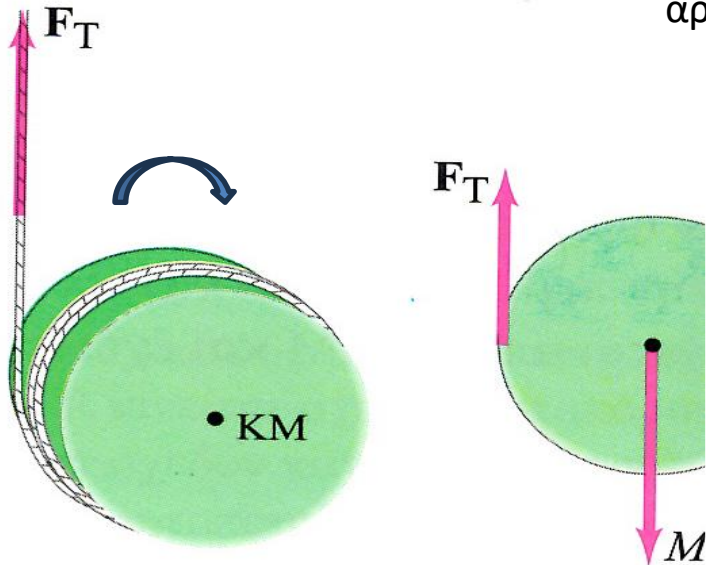
Όταν $\tau=0$ τότε $\alpha_z=0$ και ω =σταθερό



Εφαρμογή

Γύρω από έναν ομοιόμορφο συμπαγή κύλινδρο μάζας M και ακτίνας R τυλίγεται νήμα. Ο κύλινδρος εκτελεί πτώση εκκινώντας από ηρεμία. Σε τυχαία θέση στην πτώση του κυλίνδρου βρείτε α) την επιτάχυνσή του β) την τάση του νήματος

Δεξιόστροφη περιστροφή-αρνητική ροπή



εφαπτομενική επιτάχυνση της τροχαλίας στην άκρη της $= a$

Υπολογισμός επιτάχυνσης του κυλίνδρου

Περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου

$$\tau_{NET} = I a_z$$

για κύλινδρο

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

$$-R F_T = \frac{1}{2} MR^2 (-a_z) \Rightarrow F_T = \frac{1}{2} MR a_z$$

$$F_T = \frac{1}{2} Ma$$

$$a = a_t = a_z R$$

Μεταφορική κίνηση του κμ του κυλίνδρου

$$Mg - F_T = Ma$$

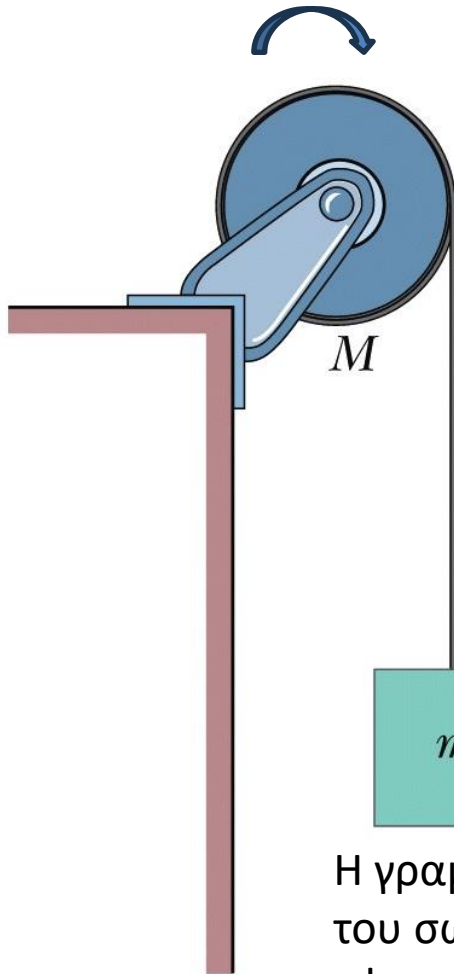
$$a = \frac{2}{3} g$$

$$F_T = \frac{1}{2} Ma = \frac{1}{2} Mg \frac{2}{3} = \frac{1}{3} Mg$$

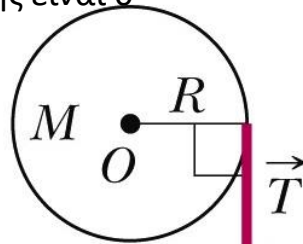
Η επιτάχυνση a είναι μικρότερη από ότι θα ήταν αν ο κύλινδρος έπεφτε ελεύθερα

Εφαρμογή

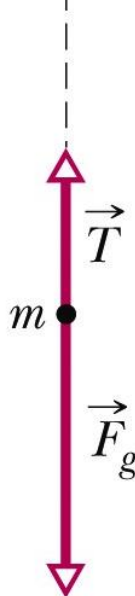
Ροπή του βάρους της τροχαλίας και της δύναμης στον άξονα περιστροφής είναι 0



(a) Η γραμμική επιτάχυνση του σώματος $a =$ εφαπτομενική επιτάχυνση της τροχαλίας στην άκρη της a_t



(c)



(b)

Δεξιόστροφ
η
περιστροφή
-αρνητική
ροπή

Υπολογισμός επιτάχυνσης στο σύστημα βάρους-τροχαλίας

$$\tau_{\text{NET}} = I a_z$$



για δίσκο
 $I = \frac{1}{2} MR^2$

$$-RT = \frac{1}{2} MR^2 (-a_z) \Rightarrow T = \frac{1}{2} MR a_z$$



$a = a_t = a_z R$

$$T = \frac{1}{2} Ma$$

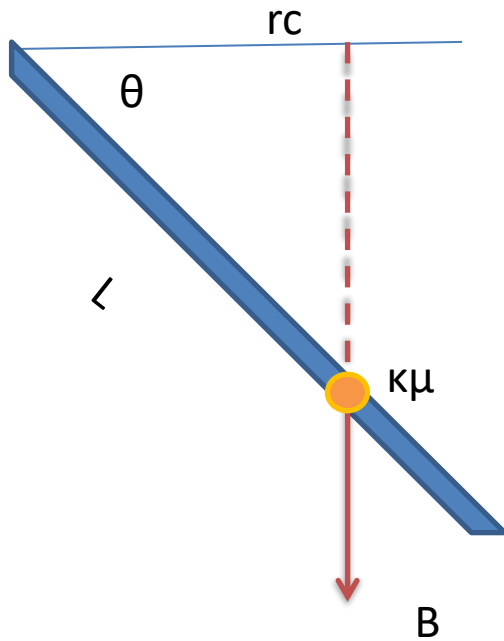
Μεταφορική
κίνηση στον
άξονα y

$$T - mg = -ma \quad \text{οπότε}$$

$$a = g \frac{2m}{M + 2m}$$

Η επιτάχυνση a και η τάση T εξαρτώνται από τη μάζα του δίσκου αλλά όχι από την ακτίνα του

Παράδειγμα 13

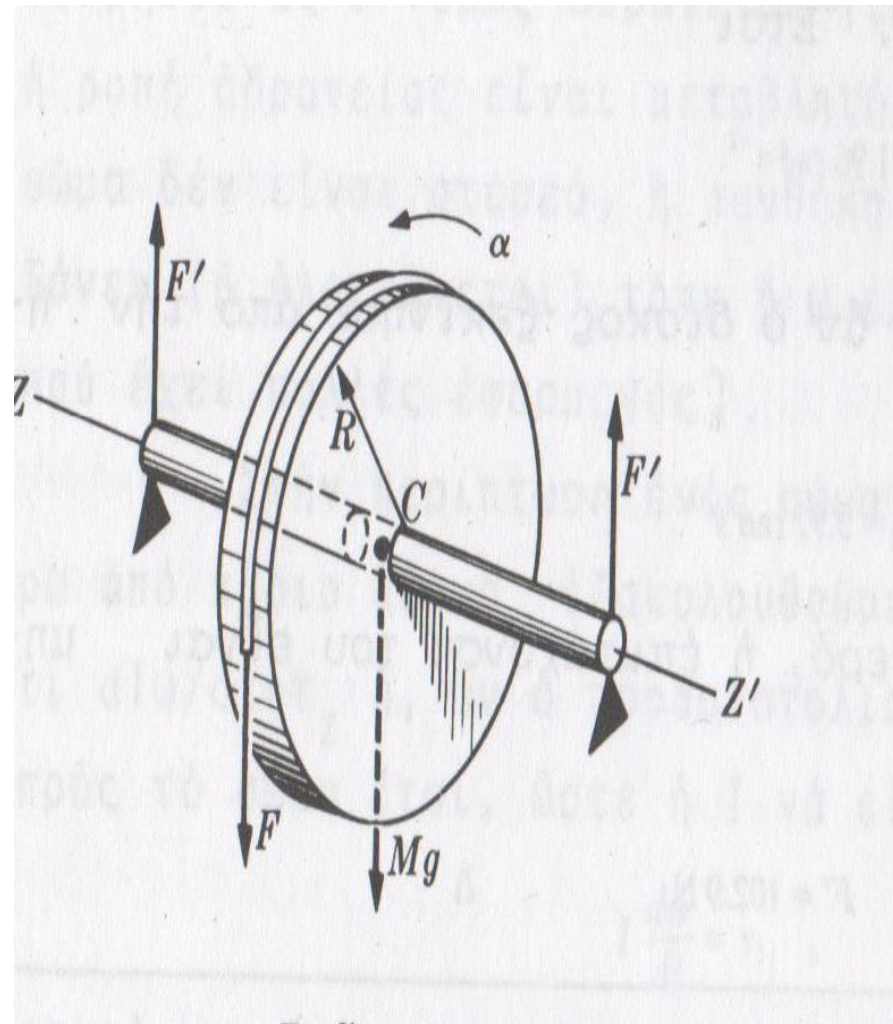


Ομογενής ράβδος μήκους L που περιστρέφεται στο σημείο O με το βάρος της που εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας σε απόσταση $R_{CM} = 5/9 L$

$$\text{Δίνεται } I = \frac{7}{18} M \cdot L^2$$

Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω

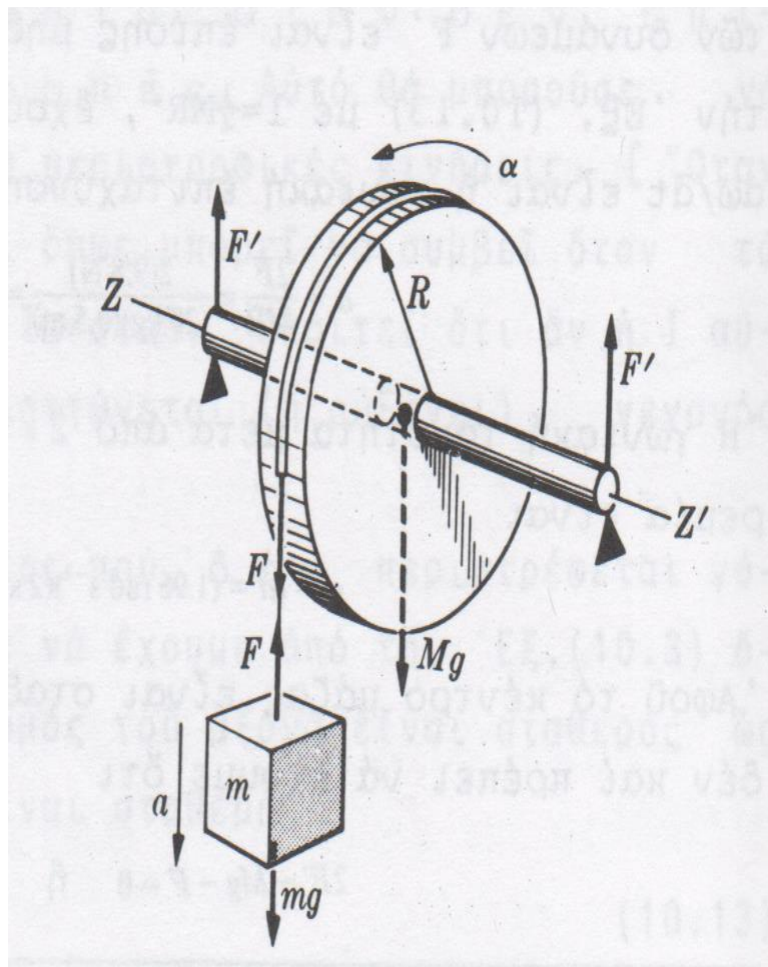
Παράδειγμα 14



Δίσκος ακτίνας 0.5 m και μάζας 20 kg μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του. Τραβώντας ένα σχοινί που είναι τυλισμένο γύρω από την περιφέρεια του δίσκου εφαρμόζουμε μια δύναμη 9.8 N . Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου και η γωνιακή του ταχύτητα μετά από 2 sec .

Παράδειγμα 15

Ιδια δεδομένα με το προηγούμενο παραδειγμα. Η μάζα του σώματος είναι $m=1\text{kg}$



ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ - ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

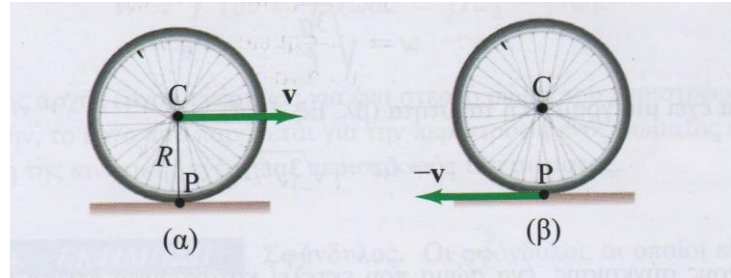
Some Corresponding Relations for Translational and Rotational Motion

Pure Translation (Fixed Direction)		Pure Rotation (Fixed Axis)	
Position	x	Angular position	θ
Velocity	$v = dx/dt$	Angular velocity	$\omega = d\theta/dt$
Acceleration	$a = dv/dt$	Angular acceleration	$\alpha = d\omega/dt$
Mass	m	Rotational inertia	I
Newton's second law	$F_{\text{net}} = ma$	Newton's second law	$\tau_{\text{net}} = I\alpha$
Work	$W = \int F dx$	Work	$W = \int \tau d\theta$
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power (constant force)	$P = Fv$	Power (constant torque)	$P = \tau\omega$
Work – kinetic energy theorem	$W = \Delta K$	Work – kinetic energy theorem	$W = \Delta K$

ΚΥΛΙΣΗ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ & ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Κύλιση χωρίς ολίσθηση

Εξαρτάται από τη στατική τριβή μεταξύ σώματος και εδάφους.



Η τριβή είναι στατική γιατί το σημείο επαφής του κυλιόμενου σώματος με το έδαφος είναι σε κάθε χρονική στιγμή ακίνητο.

Σχέση που συνδέει τη γραμμική ταχύτητα με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής

Συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση:

$$v_{cm} = R\omega \quad (10.11)$$

Μέτρο της ταχύτητας κέντρου μάζας κυλιόμενου τροχού

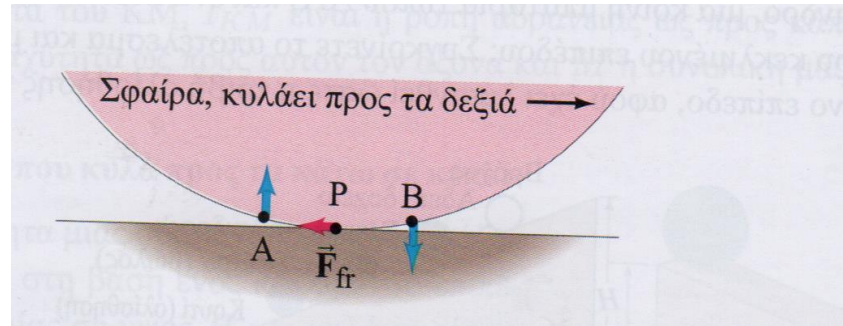
Ακτίνα τροχού

Μέτρο γωνιακής ταχύτητας τροχού

ΠΡΟΣΟΧΗ Η σχέση αυτή ισχύει μόνο για κύλιση χωρίς ολίσθηση.

ΚΥΛΙΣΗ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ & ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Για να μπορέσει να κυλήσει ένα σώμα είναι απαραίτητη η ύπαρξη στατικής τριβής.



Το σημείο P είναι ακίνητο. Το σημείο B κινείται στιγμιαία προς τα κάτω και το σημείο A προς τα πάνω

Η δύναμη της τριβής προκαλεί ταυτόχρονα:

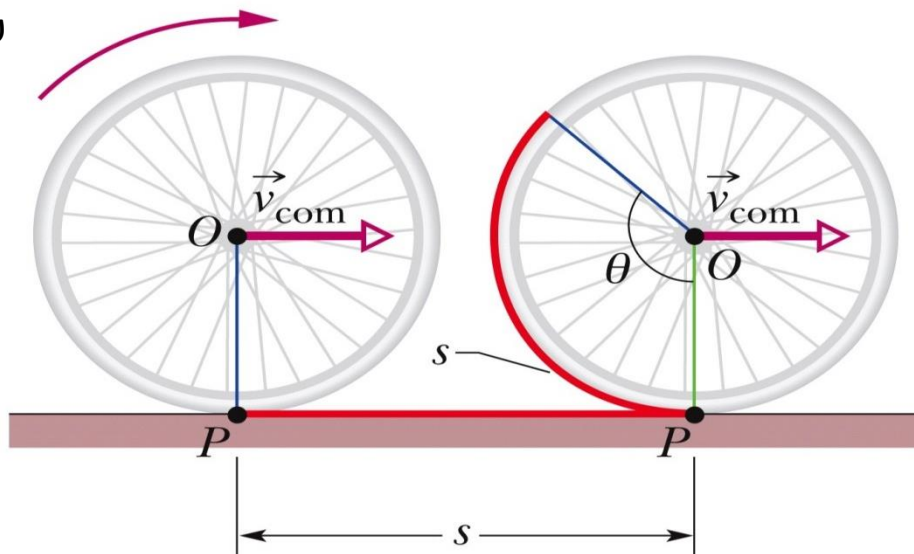
- Επιβραδυνση της μεταφορικής κίνησης του κμ
- Περιστροφή του σώματος

Προσοχή!

Η στατική τριβή ΔΕΝ παράγει έργο γιατί δύναμη και μετατόπιση είναι κάθετες μεταξύ τους στο σημείο επαφής με το έδαφος.

ΚΥΛΙΣΗ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ & ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

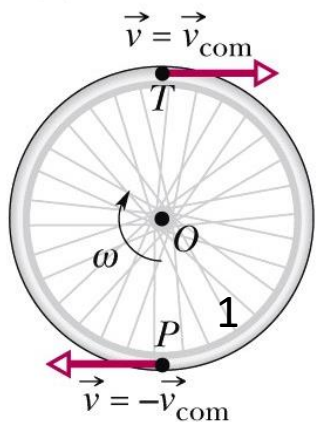
Το σημείο επαφής του τροχού με την επιφάνεια πρέπει να βρίσκεται στιγμιαία σε ηρεμία εφόσον ο τροχός δεν ολισθαίνει.



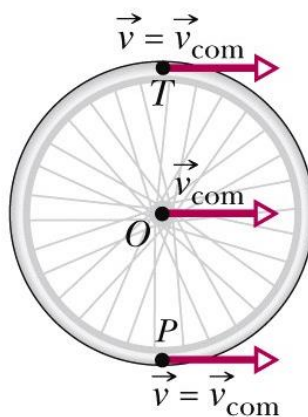
Ο τροχός είναι συμμετρικός και το κέντρο μάζας ταυτίζεται με το γεωμετρικό κέντρο

Περιστροφική κίνηση

(a) Pure rotation

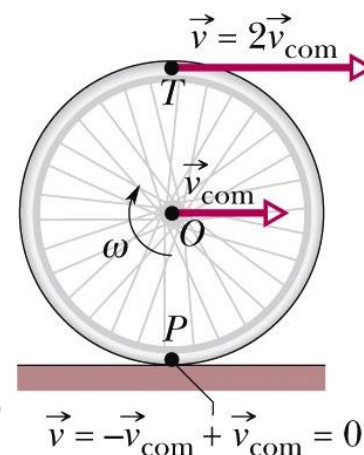


μεταφορική κίνηση
(b) Pure translation



Συνδυαστική κίνηση

(c) Rolling motion



Ένας παρατηρητής στο κέντρο μάζας βλέπει την περιφέρεια να εκτελεί τον ίδιο αριθμό περιστροφών ανά δευτερόλεπτο, όπως και ένας παρατηρητής στην περιφέρεια, στο σημείο 1, που παρατηρεί το κέντρο μάζας να περιστρέφεται γύρω από εκείνον.

Ο τροχός ηρεμεί στιγμιαία στο σημείο που επαφτείται στο εδαφος

$$\vec{v} = -\vec{v}_{\text{com}} + \vec{v}_{\text{com}} = 0$$

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΥΛΙΣΗΣ

Κινητική ενέργεια κυλιόμενου τροχού:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$I_P = I_{CM} + MR^2$$



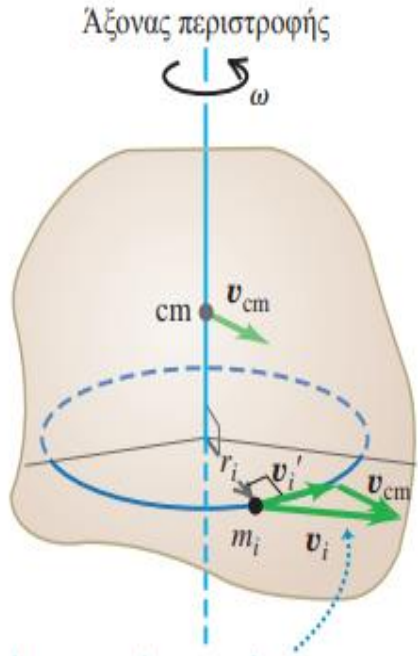
$$K = \frac{1}{2} (I_{CM} + MR^2) \omega^2$$



$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Περιστροφική και μεταφορική
κινητική ενέργεια

Ταχύτητα v_i ενός σωματίου του περιστρεφόμενου και μετατοπιζόμενου στερεού σώματος = (ταχύτητα v_{cm} του κέντρου μάζας) συν (ταχύτητα του σωματίου v_i' ως προς το κέντρο μάζας)



Κινητική ενέργεια μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας (κ.μ.)

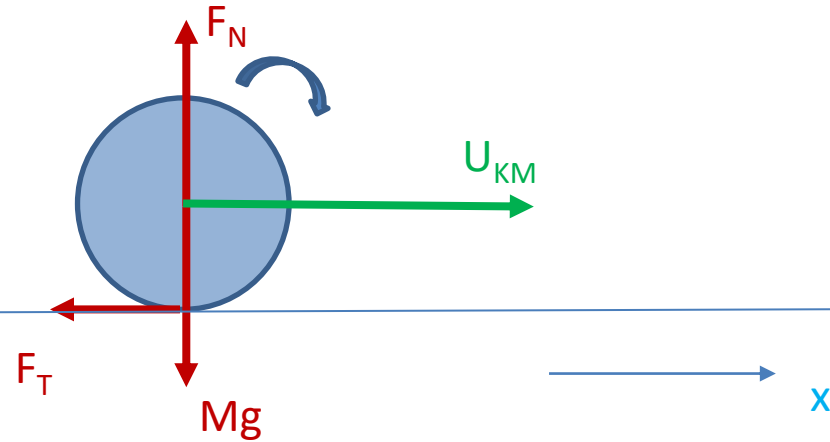
Κινητική ενέργεια περιστροφικής κίνησης περί άξονα διερχόμενο διά κ.μ.

Κινητική ενέργεια στερεού σώματος με ταυτόχρονη μεταφορική και περιστροφική κίνηση

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \quad (10.8)$$

Μάζα του σώματος
Ταχύτητα του κ.μ.
Ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα διά του κ.μ.
Γωνιακή ταχύτητα

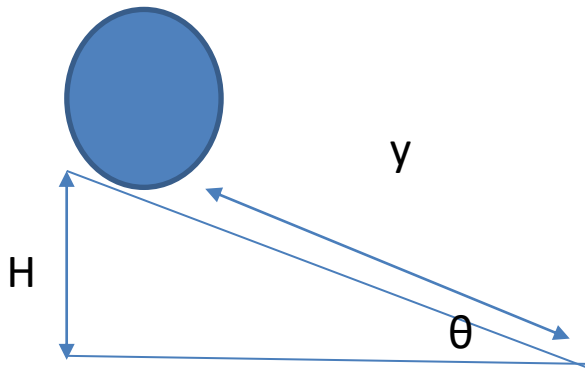
Μια μπάλα του bowling μάζας M και ακτίνας r εκτοξεύεται κατά μήκος μιας επίπεδης επιφάνειας έτσι ώστε αρχικά ($t=0$) να ολισθαίνει με γραμμική ταχύτητα u_0 χωρίς να περιστρέφεται. Στη συνέχεια κάποια στιγμή ενώ ολισθαίνει αρχίζει και στροβιλίζεται και τελικά κυλά χωρίς να ολισθαίνει. Πόσο είναι το χρονικό διάστημα που παρέχεται μέχρι να ξεκινήσει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει?



Κύλιση χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο: προσέγγιση μέσω αρχής διατήρησης της ενέργειας

Ποια θα είναι η ταχύτητα συμπαγούς σφαίρας μάζας M και ακτίνας R όταν φτάσει στη βάση κεκλιμένου επιπέδου αν ξεκινά από ηρεμία σε ύψος H και κυλά χωρίς να ολισθαίνει?

- Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό ενός σώματος που ολισθαίνει προς τα κάτω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο.
- Ποιο από τα παρακάτω στερεά (με την ίδια μάζα και ακτίνα) θα φτάσει πιο γρήγορα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου: σφαίρα, κύλινδρος, στεφάνη.

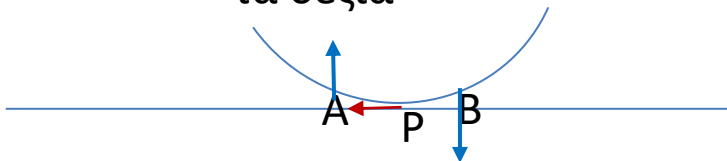


$$I_{\text{σφαίρας}} = \frac{2}{5}MR^2$$

$$I_{\text{κύλινδρου}} = \frac{1}{2}MR^2$$

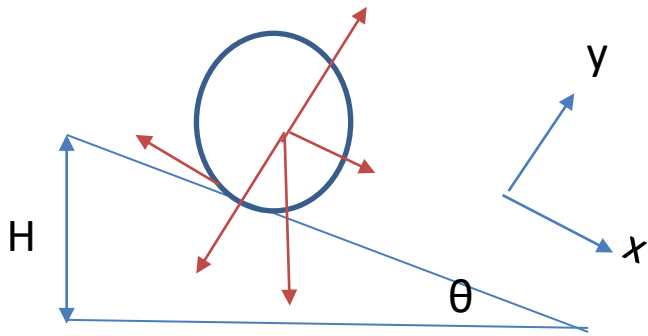
$$I_{\text{στεφάνη}} = MR^2$$

Σφαίρα κυλά προς τα δεξιά



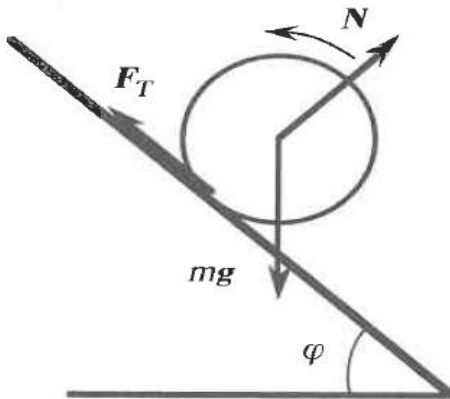
Κύλιση χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο: προσέγγιση με τη βοήθεια δυνάμεων

Ποια θα είναι η ταχύτητα συμπαγους σφαίρας μάζας M και ακτίνας r όταν φτάσει στη βάση κεκλιμένου επιπεδου αν ξεκινά από ηρεμία σε ύψος H και κυλά χωρίς να ολισθαίνει? Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό ενός σώματος που ολισθαίνει προς τα κάτω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο.



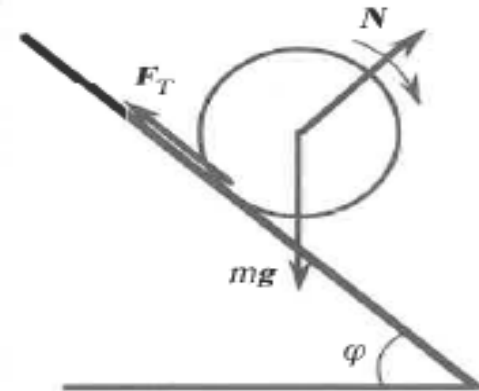
Σύγκριση ανόδου και καθόδου περιστρεφόμενου κυλίνδρου σε κεκλιμένο επίπεδο

άνοδος



Επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση

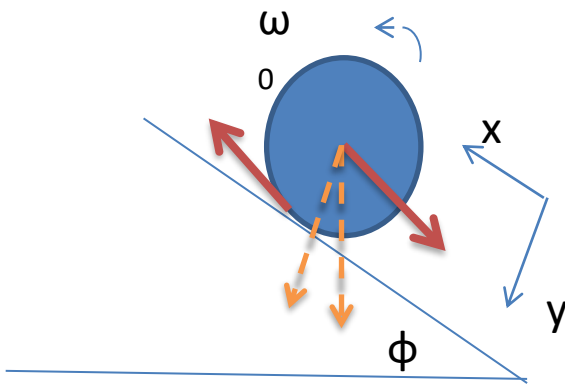
κάθοδος



Επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση

Η δύναμη τριβής F_T ίδια και στις δυο περιπτώσεις

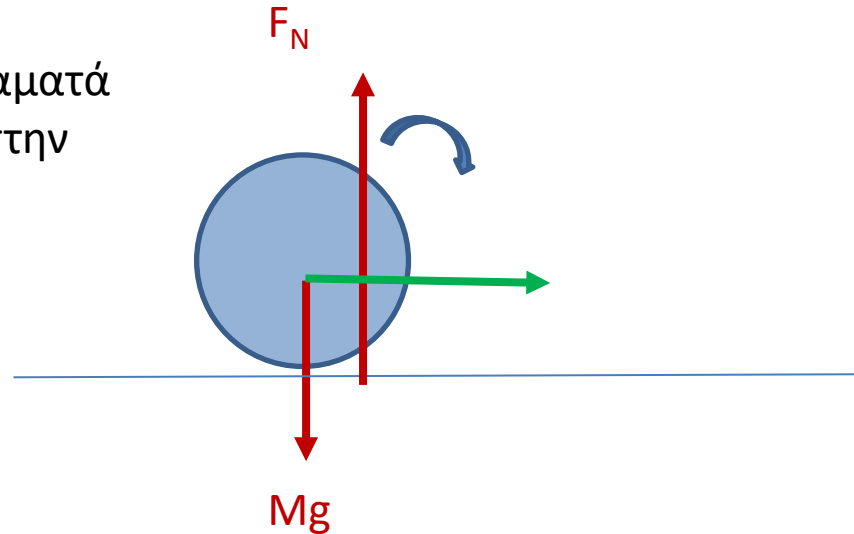
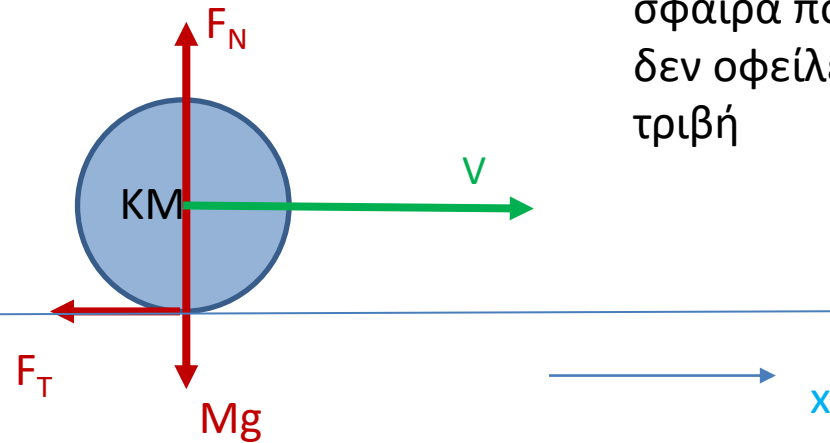
Συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R κυλίνεται χωρίς ολίσθηση ανερχόμενη κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας ϕ . Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας



Γιατί μια κυλιόμενη σφαίρα επιβραδύνεται?

Ο ρόλος της τριβής: επιβραδυντικός για τη μεταφορική κίνηση, επιταχυντικός στην περιστροφική κίνηση Παράδοξο???

Μια κυλιόμενη σφαίρα που σταματά δεν οφείλεται στην τριβή



Απάντηση:

Λόγω της μη ομοιομορφίας της σφαίρας που δημιουργεί επιφάνεια επαφής και όχι σημείο επαφής

Η F_N ασκείται από την επιφάνεια προς τη σφαίρα και εφαρμόζεται μπροστά από το ΚΜ. Η ροπή της είναι αντίθετη από αυτή που δημιουργεί η τριβή και τελικά επιβραδύνει τη σφαίρα

Συνδυασμός Μεταφοράς και Περιστροφής: Δυναμική

Η περιστροφή του τροχού περιγράφεται από την Εξ. (10.13), ενώ το ποδήλατο δεν στρίβει ούτε γέρνει στο πλάι (κάτι που θα άλλαζε τον προσανατολισμό του άξονα).



Συνισταμένη εξωτερική δύναμη στο σώμα

$$\sum F_{\text{ext}} = M a_{\text{cm}} \quad (10.12)$$

Συνολική μάζα του σώματος
Επιτάχυνση του κέντρου μάζας

Η περιστροφική κίνηση περί το κέντρο μάζας περιγράφεται από το περιστροφικό ανάλογο του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα:

Συνισταμένη ροπή σε στερεό σώμα περί τον άξονα z, που διέρχεται από το κέντρο μάζας

$$\sum \tau_z = I_{\text{cm}} \alpha_z \quad (10.13)$$

Ροπή αδράνειας στερεού σώματος περί τον άξονα z
Γωνιακή επιτάχυνση στερεού σώματος περί τον άξονα z

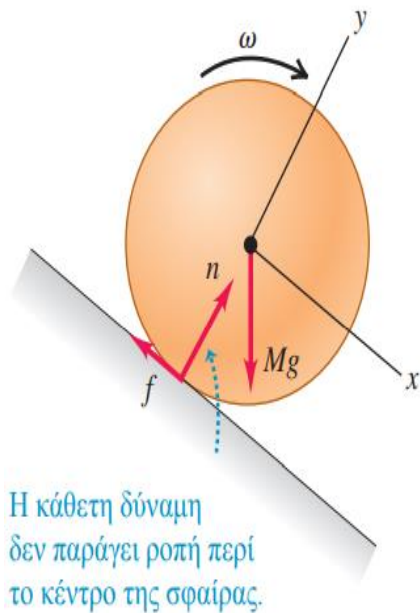
Η Εξ. (10.13) ισχύει ακόμα και όταν ο άξονας περιστροφής κινείται, αρκεί να πληρούνται οι εξής δύο προϋποθέσεις:

1. Ο άξονας που διέρχεται από το κέντρο μάζας πρέπει να είναι άξονας συμμετρίας του σώματος.
2. Ο άξονας δεν πρέπει να αλλάζει κατεύθυνση.

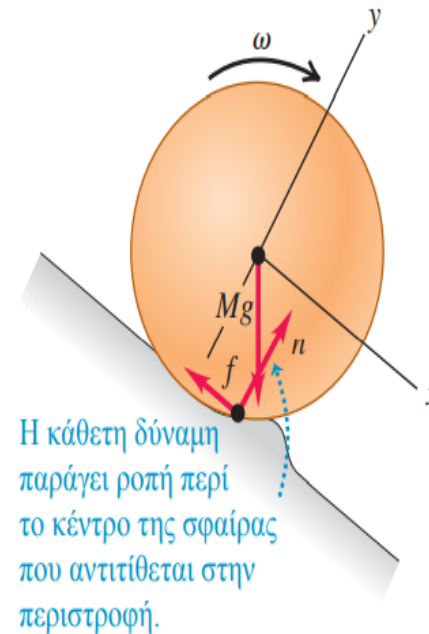
Τριβή Κυλίσεως

Κύλιση σε (a) τέλεια στερεή κατωφέρεια, και (b) παραμορφωμένη επιφάνεια. Στο (b) η παραμόρφωση εμφανίζεται υπερβολικά μεγαλοποιημένη, και η δύναμη n είναι η συνιστώσα της δύναμης επαφής, η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο της επιφάνειας προτού αυτή παραμορφωθεί.

(a) Τέλεια στερεή σφαίρα που κυλά πάνω σε τέλεια στερεή επιφάνεια



(b) Στερεή σφαίρα που κυλά σε παραμορφωμένη επιφάνεια



ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ - ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Αντιστοίχιση Δυναμικών Μεγεθών Μεταφορικής και Περιστροφικής Κίνησης

Translational		Rotational	
Force	\vec{F}	Torque	$\vec{\tau} (= \vec{r} \times \vec{F})$
Linear momentum	\vec{p}	Angular momentum	$\vec{\ell} (= \vec{r} \times \vec{p})$
Linear momentum ^b	$\vec{P} (= \Sigma \vec{p}_i)$	Angular momentum ^b	$\vec{L} (= \Sigma \vec{\ell}_i)$
Linear momentum ^b	$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{com}}$	Angular momentum ^c	$L = I\omega$
Newton's second law ^b	$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	Newton's second law ^b	$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Conservation law ^d	$\vec{P} = \text{a constant}$	Conservation law ^d	$\vec{L} = \text{a constant}$

ΔΥΝΑΜΗ **F** ↔ ΡΟΠΗ **τ**

ΟΡΜΗ **p** ↔ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ **L**

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Στροφορμή σωματίου ως προς την αρχή των αξόνων O αδρανειακού συστήματος αναφοράς

Διάνυσμα θέσης σωματίου ως προς το O

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (10.24)$$

Γραμμική ορμή του σωματίου = μάζα επί ταχύτητα

$$\mathbf{L} = r m U \sin\phi = (r \sin\phi) m U = r m (U \sin\phi)$$

Η τιμή του L εξαρτάται από την επιλογή της αρχής O , αφού περιλαμβάνει το διάνυσμα θέσης του σωματίου ως προς το O .

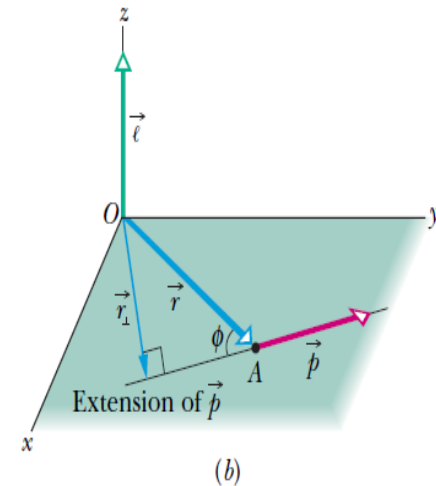
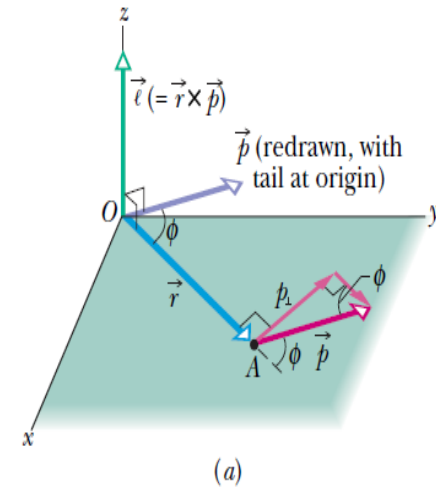
Μέτρο

$$L = r m U \sin\phi = (r \sin\phi) m U$$

Μοχλοβραχίονας = κάθετη απόσταση ανάμεσα στο O και τον φορέα της v (ή της P)

Μονάδα μέτρησης SI

$\text{Kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ή $\text{J}\cdot\text{s}$



Προσοχή: το L είναι πάντα κάθετο στο επίπεδο των r και v (ή p)

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Κατεύθυνση

Με βάση τον κανόνα του εξωτερικού γινομένου (απο r προς v με τη μικρότερη γωνία) αφού έχουμε μετακινήσει τα διανύσματα με κοινή αρχή το O



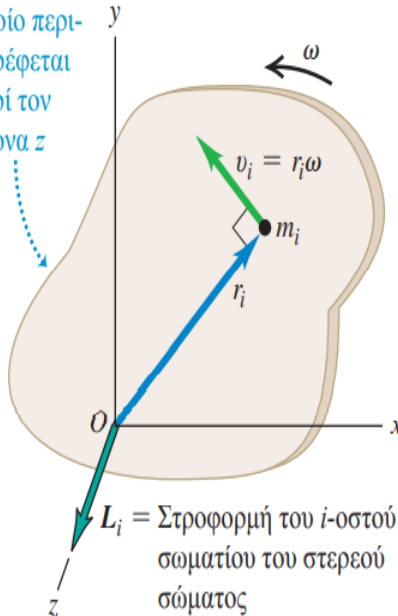
Αν ο άξονας περιστροφής είναι και άξονας συμμετρίας του σώματος, η στροφορμή L έχει την ίδια κατεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα ω

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ στερεού σώματος

$$L = \sum m_i \cdot r_i \cdot v_i = \sum (m_i \cdot r_i)(\omega \cdot r_i)$$

$$L = \sum L_i = (\sum m_i r_i^2) \omega = I \omega$$

Λεπτή τομή του στερεού σώματος το οποίο περιστρέφεται περί τον άξονα z



Το L_i είναι κάθετο στο επίπεδο της κίνησης (αν η αρχή O βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο) και έχει μέτρο $L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega$.

Στροφορμή στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα συμμετρίας

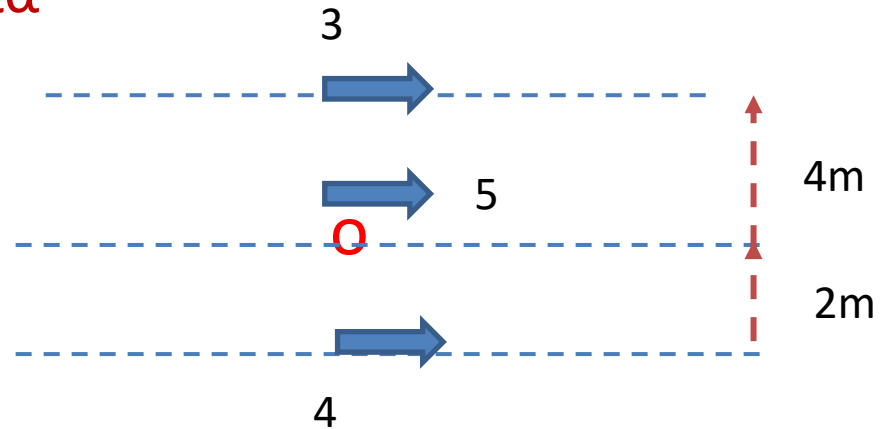
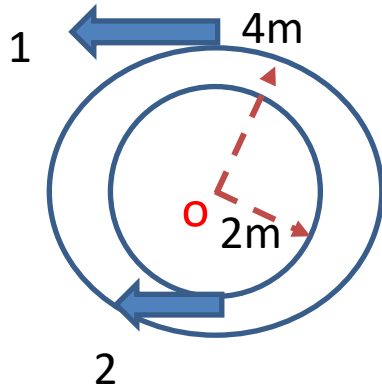
$$L = I \omega$$

Ροπή αδράνειας στερεού σώματος ως προς άξονα συμμετρίας

Διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας σώματος

(10.28)

Παράδειγμα



Να κατατάξετε τα σωματίδια 1-5 με βάση την στροφορμή κατά φθίνουσα σειρά. Η ταχύτητα και η μάζα είναι η ίδια και στα 5 σωματίδια.

Ποια σωματίδια έχουν αρνητική στροφορμή?

Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Όταν μια συνισταμένη δύναμη \vec{F} δρα σε σώματιο, η ταχύτητα και η ορμή του μεταβάλλονται, οπότε μπορεί να μεταβληθεί και η στροφορμή του.

Απόδειξη

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \right) + m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m (\vec{v} \times \vec{v}) + m (\vec{r} \times \vec{a}) = 0 + (\vec{r} \times m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Συμπέρασμα: Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός σώματιου ισούται με τη ροπή της συνισταμένης δύναμης που δρα σε αυτό

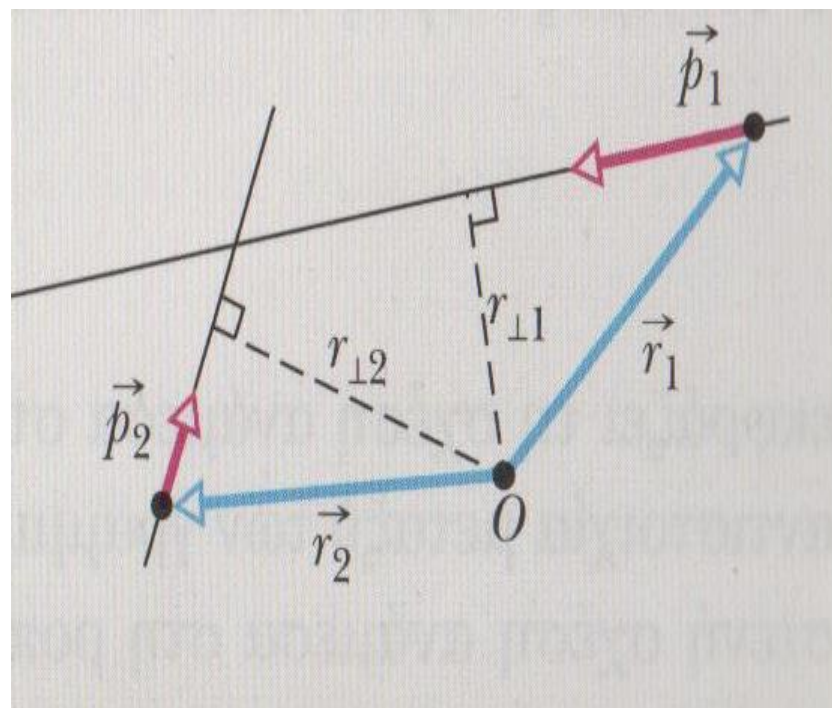
Παράδειγμα

Στο Σχ. 11-13 φαίνεται σε κάτοψη η κίνηση δύο σωματιδίων με σταθερή ορμή σε οριζόντιες τροχιές. Το σωματίδιο 1, με ορμή μέτρου $p_1 = 5.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, έχει διάνυσμα θέσης \vec{r}_1 και θα περάσει στα 2.0 m από το σημείο O . Το σωματίδιο 2, με ορμή μέτρου $p_2 = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, έχει διάνυσμα θέσης \vec{r}_2 και θα περάσει στα 4.0 m από το σημείο O . Πόσο είναι το μέτρο και ποια είναι η κατεύθυνση της συνολικής στροφορμής \vec{L} , ως προς το σημείο O , του συστήματος των δύο σωματιδίων;

μοχλοβραχιόνες

$$rc_2 = 4 \text{ m}$$

$$rc_1 = 2 \text{ m}$$



Αρχή διατήρησης της στροφορμής

Για ένα σύστημα σωματίων:
Άθροισμα των εξωτερικών ροπών στο σύστημα

$$\sum \tau = \frac{dL}{dt} \quad (10.29)$$

Ρυθμός μεταβολής της ολικής στροφορμής L του συστήματος

Αν ισχύει $\sum \tau = 0$, τότε $dL/dt = 0$ και το L είναι σταθερό.

Συμπέρασμα: Όταν η συνισταμένη εξωτερική ροπή που επενεργεί στο σύστημα είναι μηδέν, τότε η ολική στροφορμή του συστήματος είναι σταθερή (διατηρείται).

Αρχή διατήρησης της στροφορμής

Προσοχή!!!!

Για να ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής απαιτείται η συνισταμένη των ροπών να είναι μηδέν, όχι απαραίτητα η συνισταμένη των δυνάμεων
 $\Sigma \tau = 0$ όχι όμως απαραίτητα $\Sigma F = 0$

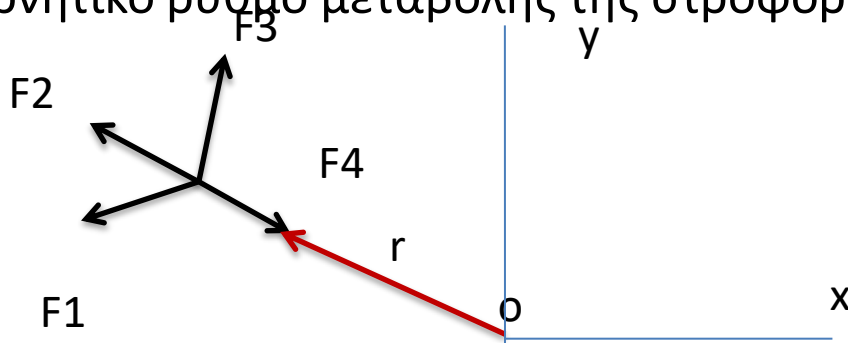
Η αρχή αυτή, όπως συμβαίνει και με τη διατήρηση της ενέργειας ή της (γραμμικής) ορμής, είναι ένας παγκόσμιος νόμος διατήρησης που ισχύει σε συστήματα κάθε κλίμακας μεγέθους, από τα ατομικά και πυρηνικά συστήματα έως τις κινήσεις των γαλαξιών.

Όταν ένα σύστημα αποτελείται από διάφορα τμήματα, οι εσωτερικές δυνάμεις που ασκούν τα τμήματα μεταξύ τους προκαλούν μεταβολές στις στροφορμές των τμημάτων, αλλά η ολική στροφορμή δεν μεταβάλλεται εξαιτίας των εσωτερικών δυνάμεων.

1. Ένας δίσκος, μια στεφάνη και μια συμπαγής σφαίρα περιστρέφονται γύρω από τον κεντρικό άξονά τους με τη βοήθεια νημάτων που δημιουργούν την ίδια σταθερή εφαπτομενική δύναμη. Τα τρία αντικείμενα έχουν την ίδια μάζα και ακτίνα και είναι αρχικά ακίνητα. α) Να τα κατατάξετε σε φθίνουσα σειρά ανάλογα με τη στροφορμή τους ως προς τον κεντρικό άξονα και β) το μέτρο της γωνιακής τους ταχύτητας όταν τα νήματα έχουν τραβηχθεί για κάποιο διάστημα.

$$I_{\text{σφαίρας}} = \frac{2}{5}MR^2 \quad I_{\text{κυλίνδρου}} = \frac{1}{2}MR^2 \quad I_{\text{στεφάνη}} = MR^2$$

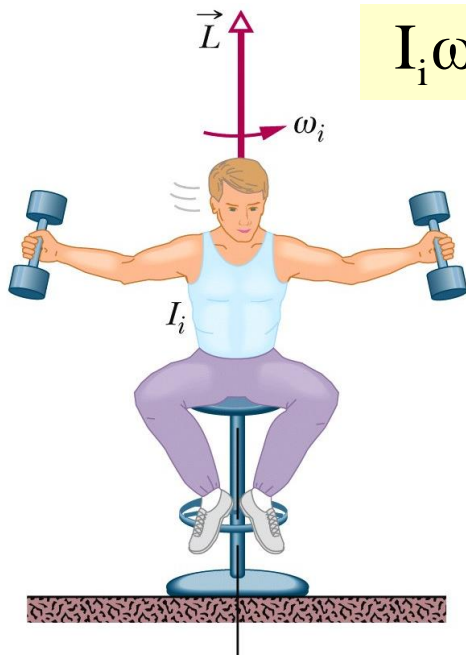
2. Οι δυνάμεις F_1 , F_2 , F_3 και F_4 βρίσκονται στο επίπεδο xy και έχουν το ίδιο μέτρο. Να κατατάξετε κατά φθίνουσα σειρά τις δυνάμεις με βάση τη μεταβολή της στροφορμής με το χρόνο dL/dt . Ποια περίπτωση οδηγεί σε αρνητικό ρυθμό μεταβολής της στροφορμής?



Αρχή διατήρησης της στροφορμής

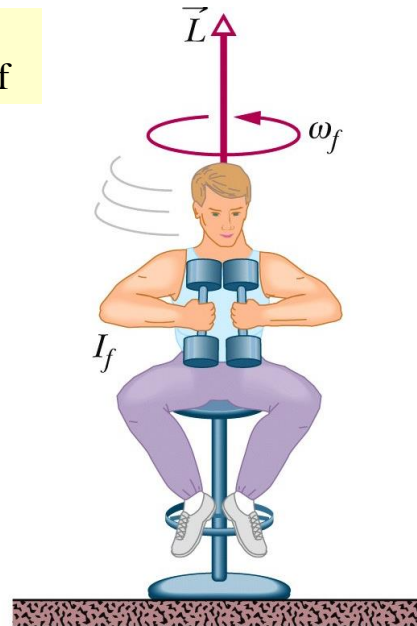
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = 0 \Rightarrow L = \text{const}$$

R=μεγάλο, I= μεγάλο,
 ω =μικρό



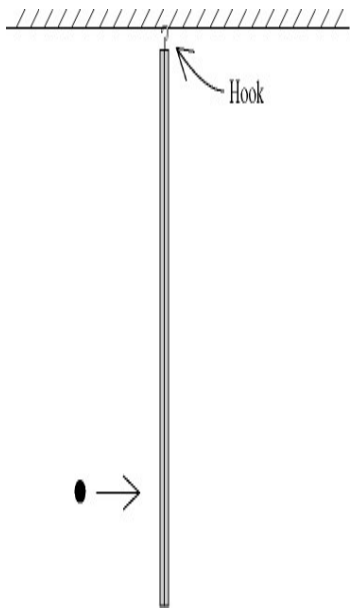
$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

R=μικρό, I= μικρό
 ω =μεγάλο



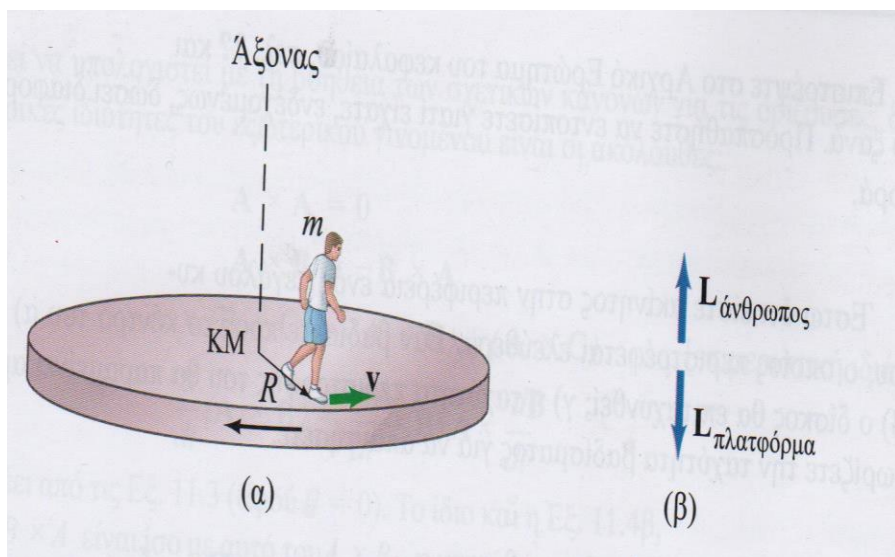
Παράδειγμα

Μια μεταλλική ράβδος κρέμεται από ένα άγκιστρο στην οροφή, όταν ξαφνικά δέχεται το χτύπημα μιας μπάλας που κινείται οριζόντια (βλ. σχήμα). Η μπάλα είναι καλυμμένη με κόλλα, οπότε και κολλάει στη ράβδο. Κατά τη διάρκεια αυτής της κρούσης

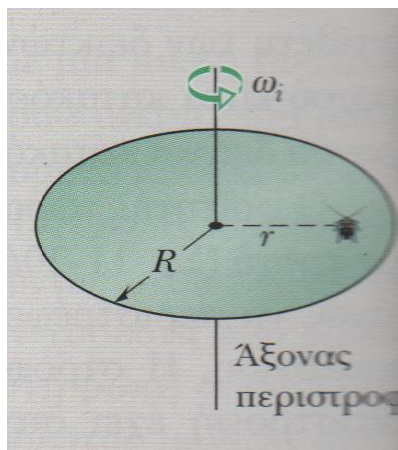


- A) η στροφορμή του συστήματος (μπάλα και ράβδος) διατηρείται ως προς το άγκιστρο επειδή μόνο η βαρύτητα δρα στο σύστημα.
- B) η στροφορμή του συστήματος (μπάλα και ράβδος) δεν διατηρείται, επειδή το άγκιστρο ασκεί δύναμη στη ράβδο.
- Γ) η στροφορμή του συστήματος (μπάλα και ράβδος) διατηρείται ως προς το άγκιστρο, επειδή ούτε το άγκιστρο ούτε η βαρύτητα ασκούν σ' αυτό το σύστημα ροπή ως προς το άγκιστρο.
- Δ) διατηρούνται τόσο η στροφορμή του συστήματος (μπάλα και ράβδος) όσο και η κινητική του ενέργεια.
- Ε) διατηρούνται τόσο η γραμμική ορμή όσο και η στροφορμή του συστήματος (μπάλα και ράβδος).

Ενας άνθρωπος 60 Kg παραμένει ακίνητος στην περιφέρεια μιας κυκλικής πλατφόρμας διαμέτρου 6 m η οποία προσαρμόζεται σε ένα λείο έδρανο με ροπή αδράνειας $1800 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Η πλατφόρμα αρχικά ηρεμεί αλλά όταν ο άνθρωπος ξεκινά να τρέχει με ταχύτητα $4,2 \text{ m/s}$ κυκλικά στην περιφέρειά της η πλατφόρμα ξεκινά να περιστρέφεται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Υπολογίστε την γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας



Μια κατσαρίδα μάζας m βρίσκεται πάνω σε δίσκο μάζας $M=6m$ και ακτίνας R . Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από τον κεντρικό του άξονα με γωνιακή ταχύτητα $\omega=1.5 \text{ rad/s}$. Η κατσαρίδα βρίσκεται αρχικά σε απόσταση $r=0,8 R$ από το κέντρο του δίσκου και μετά κινείται και φτάνει στην περιφέρεια του δίσκου. Θεωρείστε την κατσαρίδα ως σωματίδιο. Πόσο είναι τότε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας;



Μια μάζα m κινούμενη με ταχύτητα V προσκολλάται σε μία από τις μπάλες ενός αλτήρα, ο οποίος περιστρέφεται χωρίς τριβές κατακόρυφα γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της αβαρούς ράβδου που συνδέει τις δύο μπάλες. Εάν η μάζα της κάθε μπάλας είναι M και το μήκος της ράβδου d , να υπολογιστούν α) το μέτρο της γωνικής ταχύτητας αμέσως μετά την προσκόλληση της μάζας m στη μπάλα
β) τον λόγο των κινητικών ενεργειών πριν και μετά την πρόσκρουση.
γ) Τη συνολική γωνία περιστροφής του αλτήρα μετά την πρόσκρουση.

