Περιστροφή στερεού σώματος

Κινηματική και Δυναμική της
περιστροφής

Στερεό σώμα

‘Ενα σώμα στο οποίο οι αποστάσεις μεταξύ όλων των σωματιδίων που το αποτελούν παραμένουν σταθερές υπό την επίδραση δυνάμεων ή ροπών.

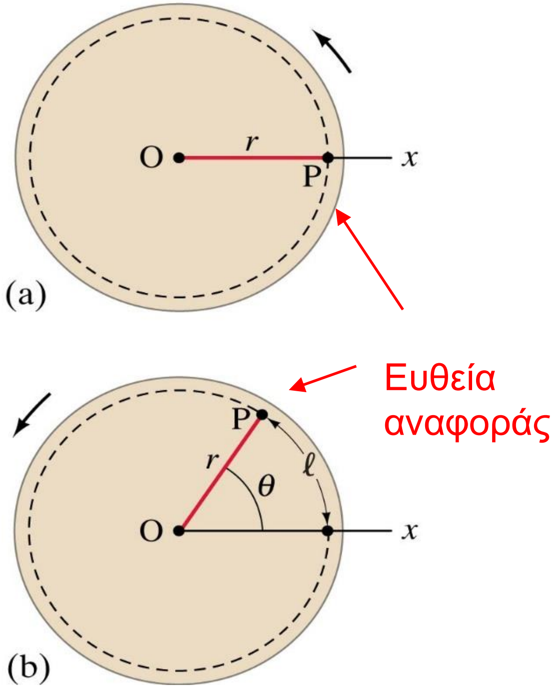
Το στερεό σώμα διατηρεί το σχήμα του και το μέγεθός του κατά τη διάρκεια της κίνησής του

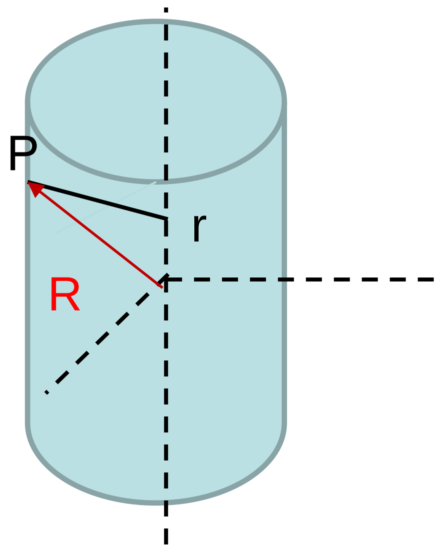
Περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα

Όλα τα σημεία του σώματος κινούνται σε κύκλους

Τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής

Ο άξονας περιστροφής δεν διέρχεται πάντα από το κέντρο μάζας του σώματος



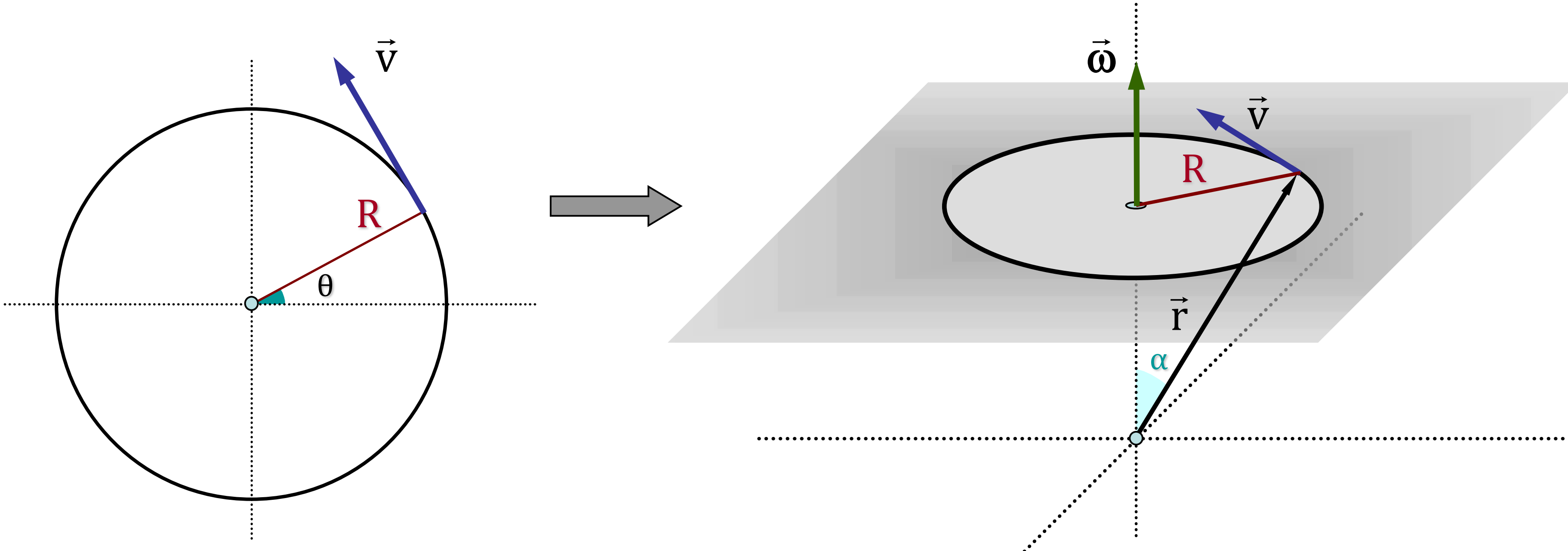


r=κάθετη απόσταση σημείου από τον άξονα περιστροφής

R=θέση σημείου από την αρχή των αξόνων

Σε κάποιες περιπτώσεις ταυτόσημα

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



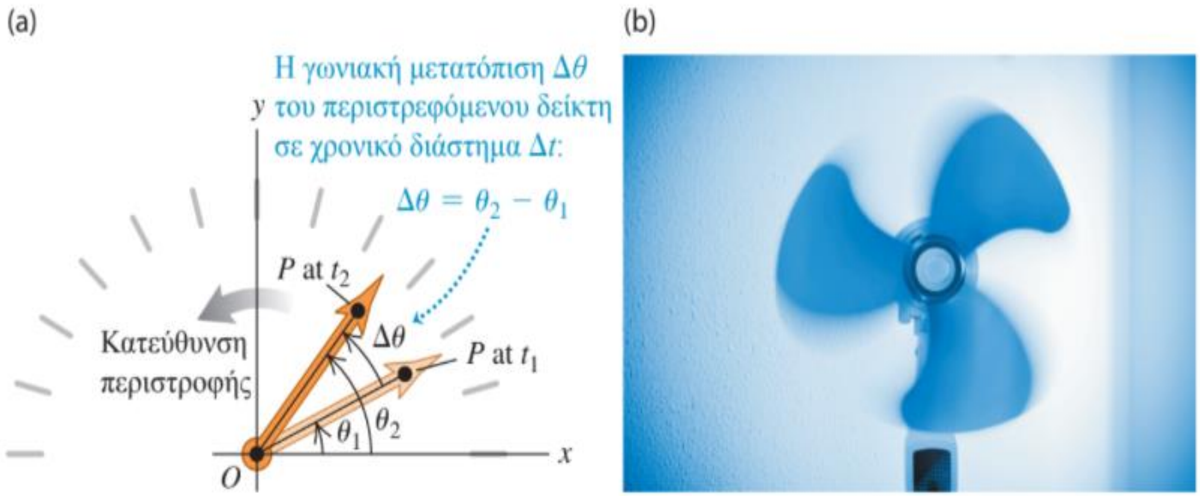
Η κυκλική κίνηση στο χώρο μπορεί να περιγραφεί από το διάνυσμα θέσης **r** .

Σχέση μεταξύ γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha = \omega(r\sin a) = \omega R = R\frac{d\theta}{dt}$$

Γωνιακή ταχύτητα



Σε κάθε χρονική στιγμή, κάθε τμήμα του περιστρεφόμενου στερεού σώματος έχει την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

Δ θ =γωνιακή μετατόπιση = θ $_2$ (τελική γωνία)– θ$_1$ (αρχική)

θ =γωνιακή συντεταγμένη του σώματος

Μέση γωνιακή ταχύτητα

$$\omega_{\text{av-}z} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα

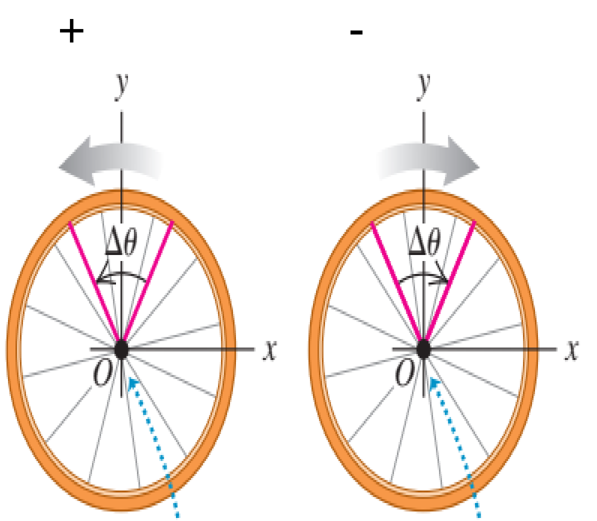
Η **στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα** στερεού σώματος που περιστρέφεται περί τον άξονα z...

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (9.3)$$

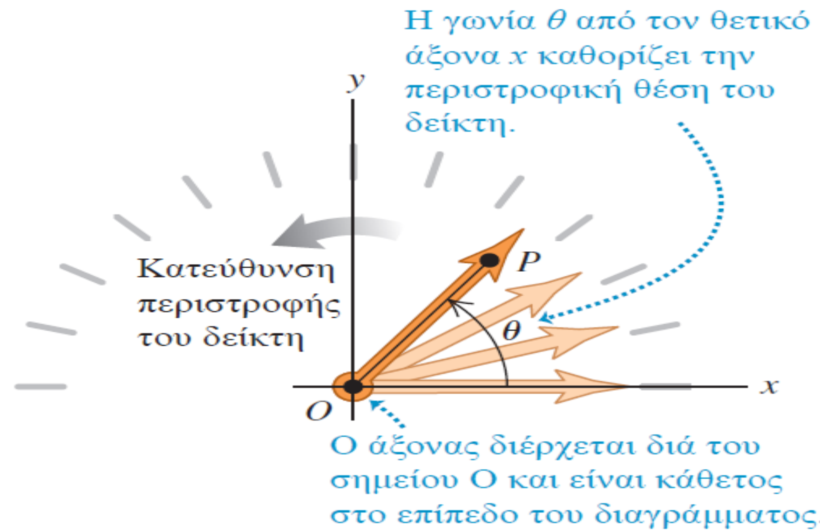
... ισούται με το όριο της μέσης γωνιακής ταχύτητας του σώματος καθώς το χρονικό διάστημα τείνει στο μηδέν...

... και ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της γωνιακής συντεταγμένης του σώματος.

Η γωνιακή ταχύτητα μπορεί να είναι θετική ή αρνητική



Ο άξονας περιστροφής (άξονας z) διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος στο επίπεδο του διαγράμματος.



Ορίζεται θετική

Αριστερόστροφη Περιστροφή (αντίθετη στη φορά δεικτών του ρολογιού):

το θ αυξάνεται, επομένως η γωνιακή ταχύτητα είναι θετική.

Δ θ > 0, άρα

$\omega_{avz} = \Delta\theta/\Delta t > 0$

Ορίζεται αρνητική

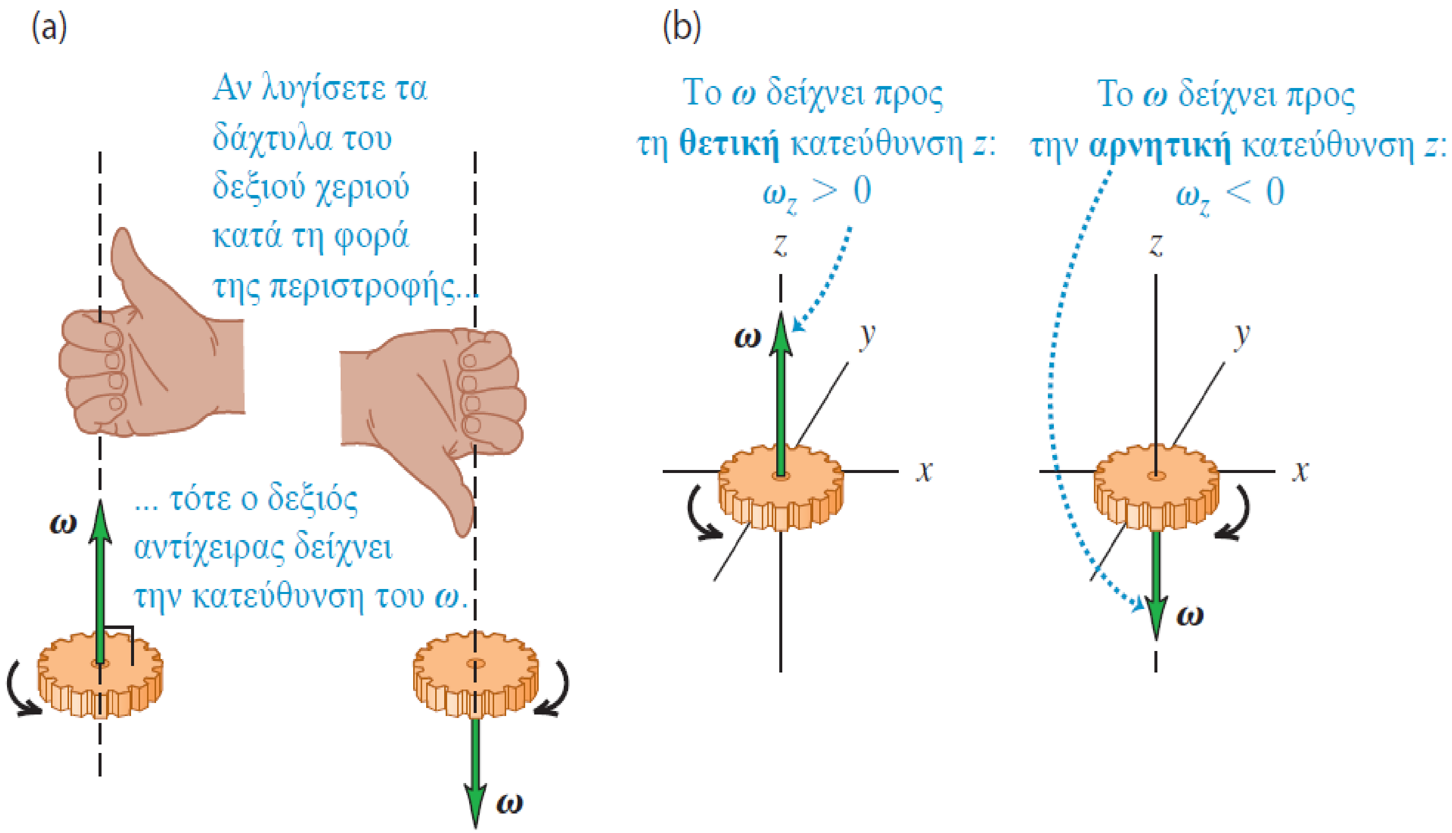
Δεξιόστροφη Περιστροφή (κατά τη φορά δεικτών του ρολογιού):

το θ μειώνεται, επομένως η γωνιακή ταχύτητα είναι αρνητική.

Δ θ < 0, άρα

$\omega_{avz} = \Delta\theta/\Delta t < 0$

Η γωνιακή ταχύτητα ως διάνυσμα



Μονάδες μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας

Μονάδα SI rad/sec

$$\frac{s}{r} = \theta\ (\sigma\varepsilon\ rad)$$

θ= $\frac{2\pi r}{r}$=2π rad=360° (για μια περιστροφή)

$$\boxed{1\ rad = \frac{360^0}{2\pi}}$$

$$\boxed{360° = 2\pi\ rad}$$

‘Άλλες μονάδες

- **Περιστροφή ανά min**

Rev/min=rpm

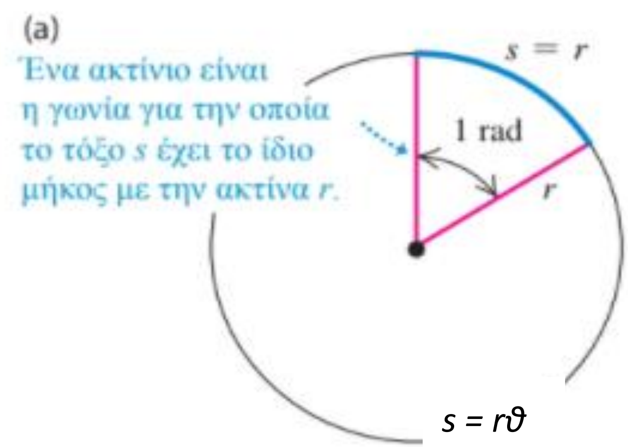
1rev=2π rad
1rev/s=2π rad/s
1rev/min=1 rpm=2π/60 rad/s

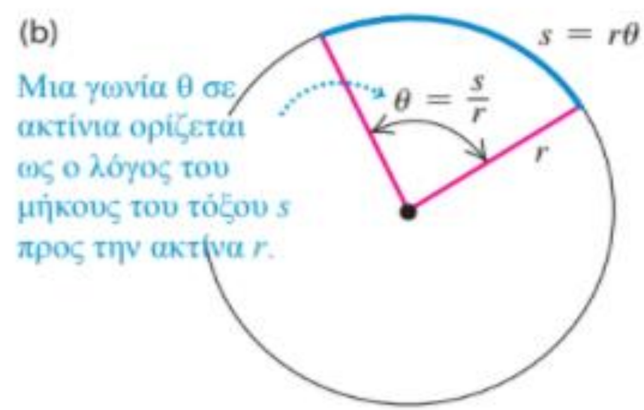
Ορισμός ακτινίου (rad)=αδιάστατο μέγεθος

Ένα ακτίνιο είναι η γωνία για την οποία το τόξο *s* έχει το ίδιο μήκος με την ακτίνα *r*   *s* = *r*

Μια γωνία θ σε ακτίνια ορίζεται ως ο λόγος του μήκους του τόξου *s* προς την ακτινα *r*

9.2 Μετρώντας τις γωνίες σε ακτίνια.





Γωνιακή επιτάχυνση

Ένα στερεό σώμα, του οποίου η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται, έχει γωνιακή επιτάχυνση.

Μέση γωνιακή επιτάχυνση

$$\alpha_{\text{av-}z} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}$$

Στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση

Η **στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση** στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα *z*...

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} \qquad (9.5)$$

... ισούται με το όριο της μέσης γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος καθώς το χρονικό διάστημα τείνει στο μηδέν...

... και ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.

Σχέση στιγμιαίας γωνιακής επιτάχυνσης και γωνιακής μετατόπισης

$$\alpha_z = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Αν το σώμα περιστρέφεται περί τον άξονα *z*, τότε το $\boldsymbol{\alpha}$ έχει μόνο συνιστώσα κατά τον άξονα *z*, δηλαδή α_z.

Η γωνιακή επιτάχυνση ως διάνυσμα

Όταν ο άξονας περιστροφής είναι σταθερός, τα διανύσματα της γωνιακής επιτάχυνσης και γωνιακής ταχύτητας είναι κατά μήκος του άξονα.

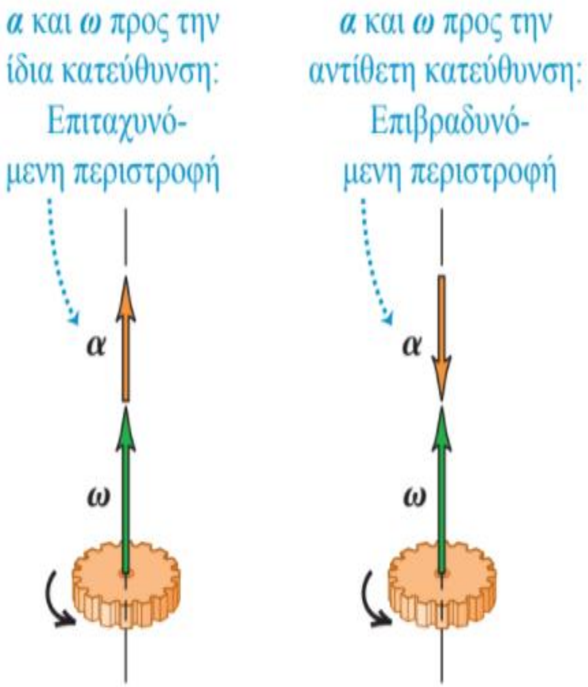
Μονάδα SI
rad/s^2

Προσοχή:

Οταν α_z και ω έχουν το ίδιο πρόσημο τότε η περιστροφική κίνηση ειναι επιταχυνόμενη. Δηλαδή όταν
$\alpha_z>0$ και $\omega>0$ ή $\alpha_z<0$ και $\omega<0$

Οταν έχουν διαφορετικό πρόσημο τότε η περιστροφική κίνηση είναι επιβραδυνόμενη

$\alpha_z>0$ και $\omega<0$ ή $\alpha_z<0$ και $\omega>0$



Τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι κάθετα στο επίπεδο περιστροφής και όχι πάνω σε αυτό.
Αποτελούν χαρακτηριστικό όλου του σώματος και όχι ενός σημείου του

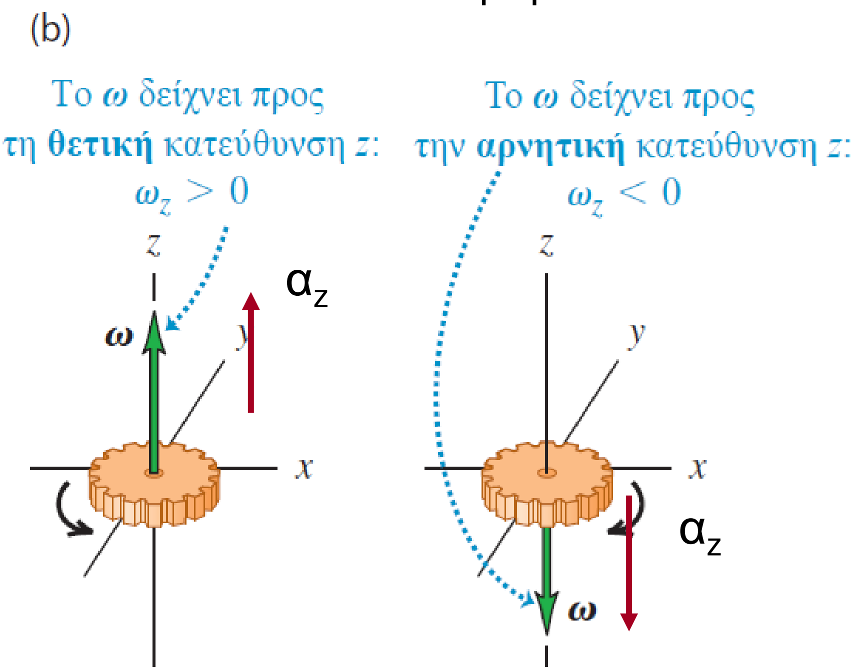
Σχέση διανύσματος ω και α_z

$d\,|\omega|\,/dt>0$

Ερώτηση:

Αν το μέτρο ω αυξάνει κατά 10rad/s και ω<0 (περιστροφή κατά τη φορά δεικτών ρολογιού), τότε τι συμπέρασμα βγάζετε για το α_z ?

Τι συμβαίνει όταν ω παραμένει σταθερό?



Αν το μέτρο του ω αυξάνει τότε το α_z κατευθύνεται προς τα πάνω. Διαφορετικά προς τα κάτω

Αν το μέτρο του ω αυξάνει τότε το α_z κατευθύνεται προς τα κάτω. Διαφορετικά προς τα πάνω

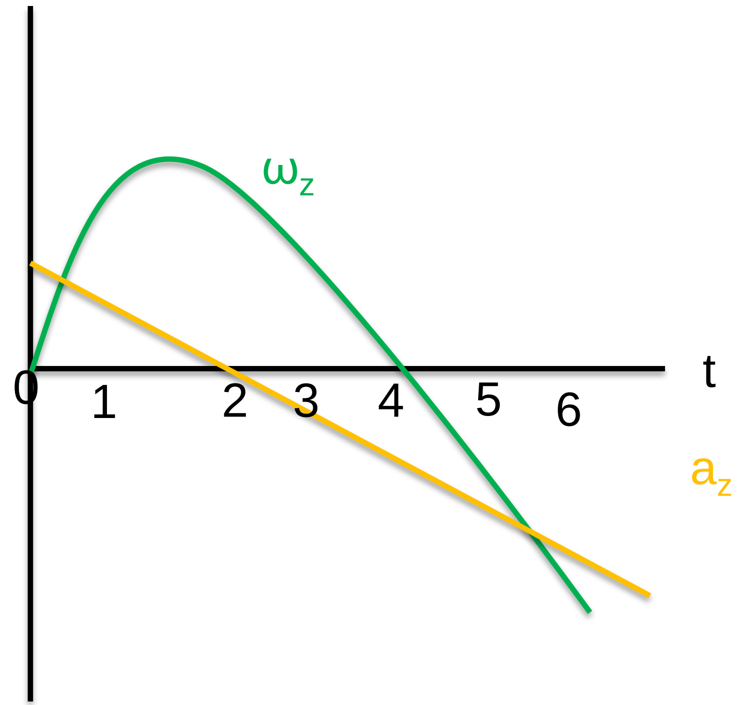
Παράδειγμα 1

Δίνεται ότι η γωνιακή θέση σφονδύλου διαμέτρου d=0,36 είναι: $\theta=2\ t^3$ (σε rad)

Υπολογίστε: α) τη γωνία θ σε ακτίνια και μοίρες στους χρόνους $t_1=2$ s και $t_2=5$ s
β) την απόσταση κατά την οποία μετατοπίζεται ένα σωμάτιο στη στεφάνη του σφονδύλου από $t_1=2$ s σε $t_2=5$ s
γ) τη μέση γωνιακή ταχύτητα στο ίδιο διάστημα σε rad/s και rev/min
δ) τη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα για $t_1=2$ s και $t_2=5$
ε) τη μέση γωνιακή επιτάχυνση στο ίδιο διάστημα
στ) τη στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση για $t_1=2$ s και $t_2=5$

Παράδειγμα 2

Σε ποια χρονικα διαστηματα επιταχύνεται η περιστροφή?
a) 0<t<2
b)2<t<4
c) 4<t<6



Σε ποια χρονικα διαστηματα επιβραδυνεται η περιστροφή?
a) 0<t<2
b)2<t<4
c) 4<t<6

Περιστροφή με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση

Γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή t ενός στερεού σώματος με **σταθερή γωνιακή επιτάχυνση**

Γωνιακή ταχύτητα του σώματος τη στιγμή 0

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \qquad (9.7)$$

Χρόνος

Σταθερή γωνιακή επιτάχυνση του σώματος

Γωνιακή θέση τη στιγμή t στερεού σώματος με **σταθερή γωνιακή επιτάχυνση**

Γωνιακή θέση του σώματος τη στιγμή 0

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \qquad (9.10)$$

Χρόνος

Γωνιακή ταχύτητα του σώματος τη στιγμή 0

Γωνιακή ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t

Σχέση μεταξύ θ και *t* που να μην περιέχει το ω_z

Γωνιακή θέση τη στιγμή t στερεού σώματος με **σταθερή γωνιακή επιτάχυνση**

Γωνιακή θέση σώματος τη στιγμή 0

Χρόνος

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2 \qquad (9.11)$$

Γωνιακή ταχύτητα του σώματος τη στιγμή 0

Σταθερή γωνιακή επιτάχυνση του σώματος

Σχέση μεταξύ των θ και ω_z, που να μην περιέχει τον χρόνο *t*.

Γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή t στερεού σώματος με **σταθερή γωνιακή επιτάχυνση**

Γωνιακή ταχύτητα του σώματος τη στιγμή 0

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \qquad (9.12)$$

Σταθερή γωνιακή επιτάχυνση του σώματος

Γωνιακή θέση σώματος τη στιγμή t

Γωνιακή θέση σώματος τη στιγμή 0

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.1 Σύγκριση Γραμμικής και Περιστροφικής Κίνησης με Σταθερή Επιτάχυνση

Ευθύγραμμη Κίνηση με Σταθερή Γραμμική Επιτάχυνση		Περιστροφή Περί Σταθερό Άξονα με Σταθερή Γωνιακή Επιτάχυνση	
$a_x = \text{σταθερά}$		$\alpha_z = \text{σταθερά}$	
$v_x = v_{0x} + a_x t$	(2.8)	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$	(9.7)
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	(2.12)	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$	(9.11)
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(2.13)	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$	(9.12)
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	(2.14)	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t$	(9.10)

Ερώτηση 1

Σε ποια από τις 4 περιπτώσεις μπορούν να εφαρμοστούν οι εξισώσεις του πίνακα της προηγούμενης διαφάνειας?
θ(t)=η γωνιακή θέση ενός περιστρεφόμενου σώματος

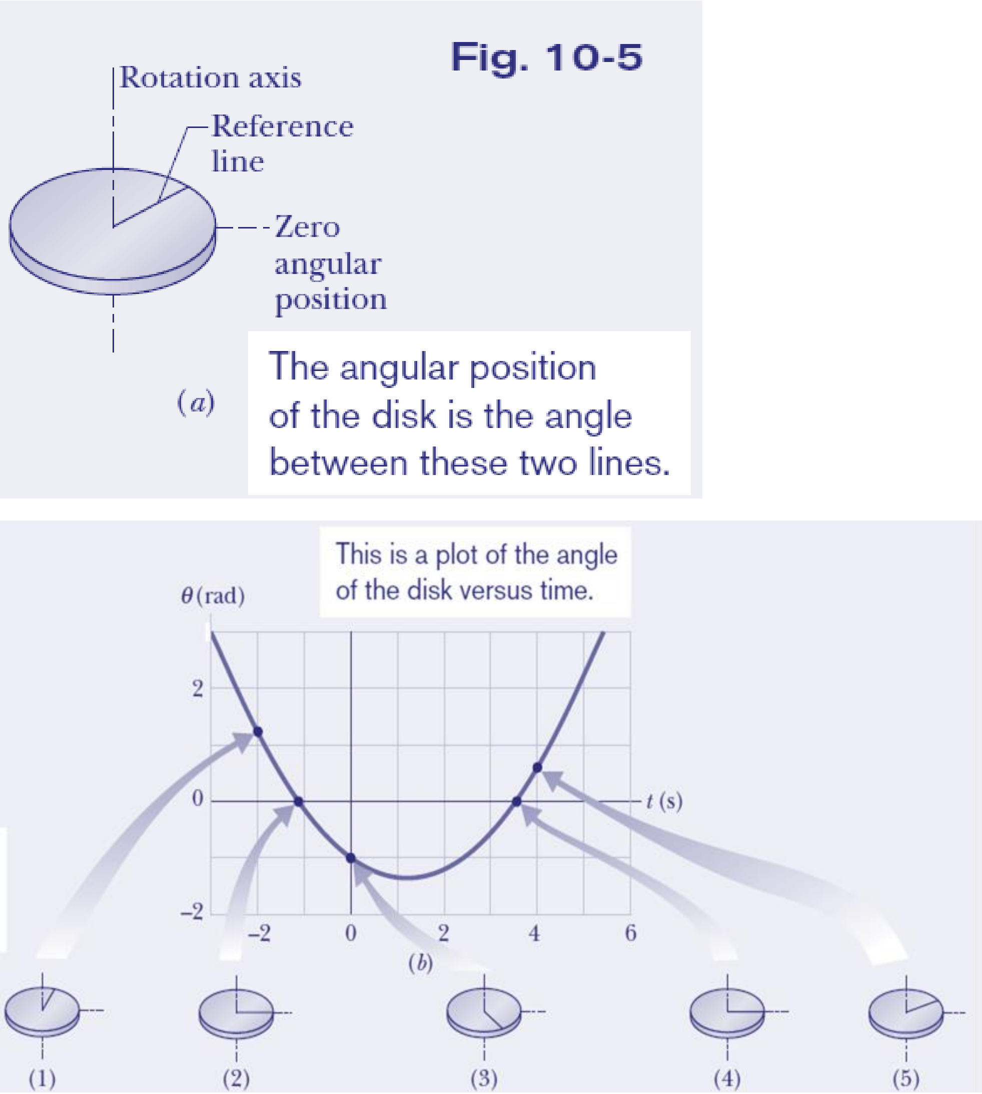
$$(a)\theta = 3t - 4$$

(b) $\theta = -5\,t^3 + 4t^2 + 6$

$$(c)\ \theta = -\frac{2}{t^2} \quad - \frac{4}{t}$$

(d) θ=5 t^2-3

Παράδειγμα 3



Ο δίσκος του διπλανού σχήματος περιστρεφεται γυρω απο τον κεντρικό του αξονα. Η θέση θ(t) πάνω στο δίσκο δίνεται απο τη σχέση

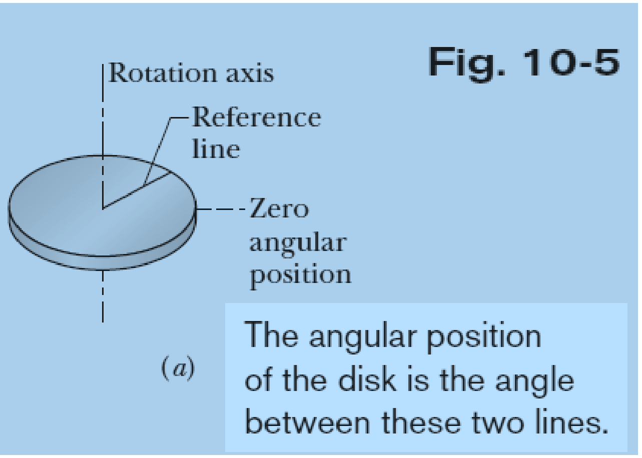
θ=-1-0.6t+0,25t^2

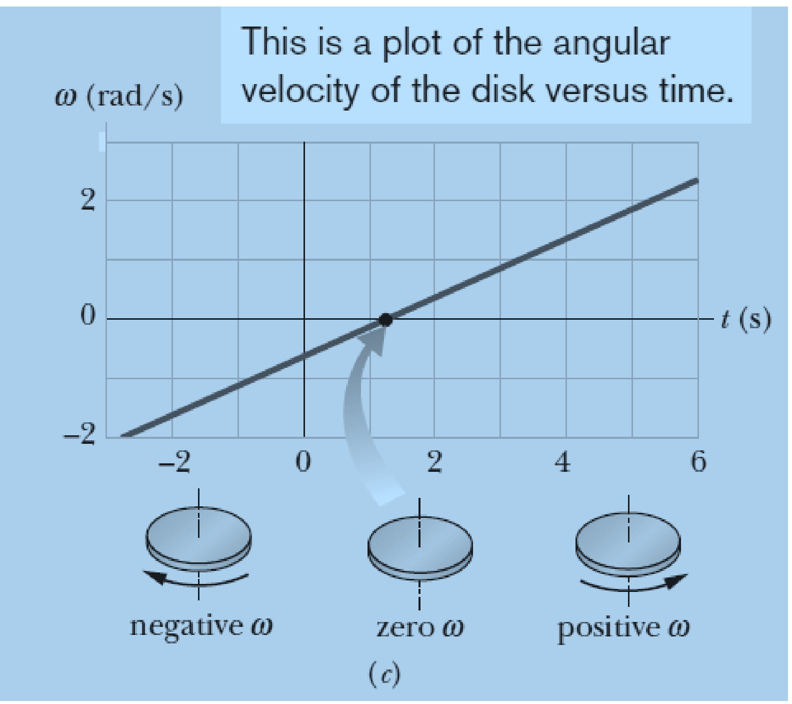
Όπου

θ σε rad, t σε sec και το 0 στη θέση που φαινεται στο σχήμα (α)

Να κάνετε τη γραφική παρασταση της θέσης ως συνάρτηση του χρόνου απο t=-2 μέχρι t=4 sec.

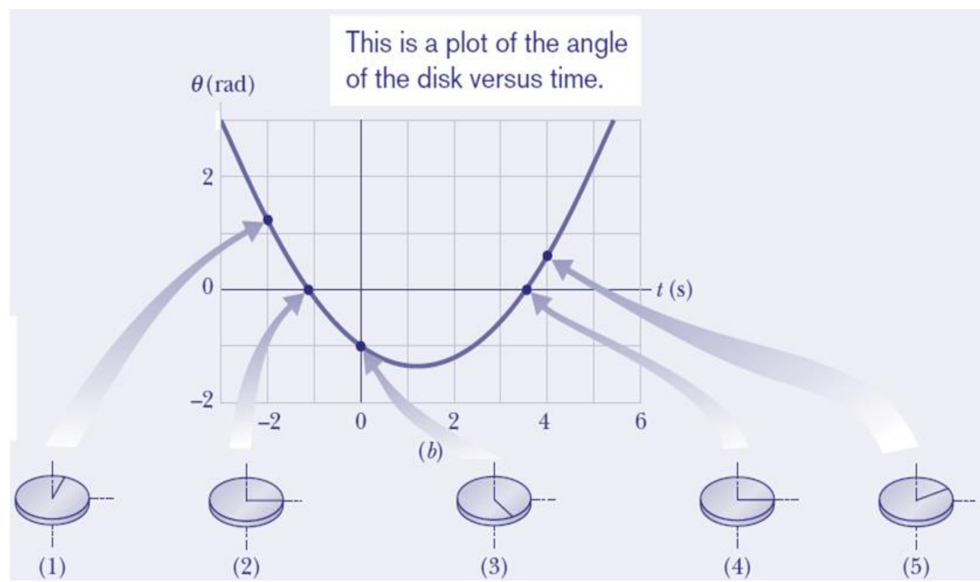
Να σχεδιάσετε το δίσκο και της ευθείας αναφοράς για t= -2,0,4 sec και όταν η καμπύλη τεμνει τον αξονα t





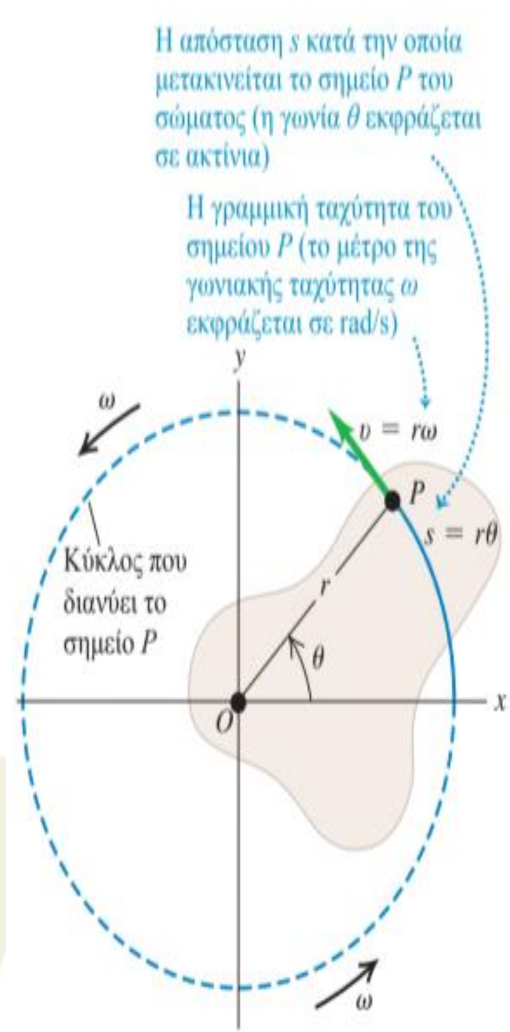
Β) Σε ποια χρονική στιγμή tmin η θ(t) παίρνει την ελάχιστη τιμή ? Ποια ειναι αυτή?

Γ) να κάνετε τη γραφική παρασταση της γωνιακής ταχύτητας ω του δισκου ως συνάρτηση του χρόνου απο t=-2s μέχρι t=6 s



Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

Όταν ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, κάθε σημείο του σώματος κινείται σε κυκλική τροχιά **με σταθερή ακτίνα r**, η οποία κείται σε επίπεδο κάθετο προς τον άξονα, με το κέντρο της στον άξονα.



Γραμμική Ταχύτητα στην Περιστροφή Στερεού Σώματος

$s = r\,\theta$ $\qquad \left|\dfrac{ds}{dt}\right| = r\left|\dfrac{d\theta}{dt}\right|$

Μέτρο της γραμμικής ταχύτητας σημείου σε περιστρεφόμενο στερεό σώμα

$$\upsilon = r\omega \qquad (9.13)$$

Μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του περιστρεφόμενου στερεού σώματος

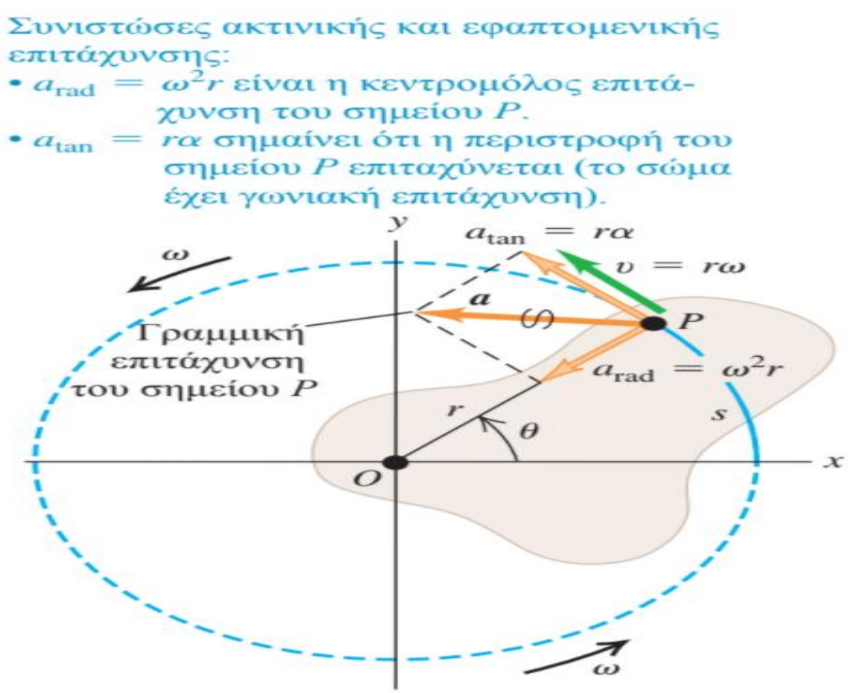
Απόσταση του σημείου αυτού από τον άξονα περιστροφής

Προσοχή: όλα τα γωνιακά μεγέθη να είναι μετρημένα σε rad

Συνιστώσες Γραμμικής επιτάχυνσης

Η γραμμική επιτάχυνση α ενός σημείου σε περιστρεφόμενο στερεό έχει δύο συνιστώσες:

- **Ακτινική ή κεντρομόλος συνιστώσα** α_{rad} που κατευθύνεται προς τον άξονα περιστροφής και συνδέεται με την αλλαγή της κατεύθυνσης της ταχύτητας του σημείου *P* (πάντοτε υφίσταται σε περιστρεφόμενη κίνηση)
- **Εφαπτομενική ή επιτρόχια συνιστώσα** α_{tan} που εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς και οφείλεται στην αλλαγή μέτρου της γραμμικής ταχύτητας Οταν ω=σταθερή τότε $\alpha_{tan}=0$



Προσοχή!!!
Η κεντρομόλος συνιστώσα υπάρχει σε κάθε περιστρεφόμενο σώμα.
Η εφαπτομενική μόνον όταν μεταβαλλεται η γωνιακή ταχύτητα

Σχέση γραμμικής και γωνιακής επιτάχυνσης

Μέτρο της γραμμικής ταχύτητας στο σημείο αυτό

Κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σημείου σε περιστρεφόμενο σώμα

Μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος

$$a_{\mathrm{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad (9.15)$$

Απόσταση του σημείου αυτού από τον άξονα περιστροφής

Και οι δυο συνιστώσες σε ένα σημείο εξαρτώνται από την απόστασή του από τον άξονα περιστροφής

Εφαπτομενική επιτάχυνση σημείου σε περιστρεφόμενο στερεό σώμα

Απόσταση του σημείου αυτού από τον άξονα περιστροφής

$$a_{\mathrm{tan}} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad (9.14)$$

r $a_Γ$

Ρυθμός μεταβολής της γραμμικής ταχύτητας στο σημείο αυτό

Ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος

Προσοχή: Στην περίπτωση της εφαπτομενικής επιτάχυνσης το r ταυτίζεται με την ακτίνα του κύκλου R κατά την οποία κινείται το σημείο

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε χρονική στιγμή, *ακόμη και όταν οι ω και υ δεν είναι σταθερές*.

Η συνισταμένη της a_{tan} και a_{rad} δίνει τη συνισταμένη οριζόντια γραμμική επιταχυνση

Προσοχή:

$a_Γ = d|\omega|/dt \neq a_z = d\bar{\omega}/dt$

$a_z = a_Γ\ \bar{\omega} > 0$

$-a_z = a_Γ\ \bar{\omega} < 0$

Ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γωνιακής ταχυτητας (πάντα θετικός αριθμός)

Ρυθμός μεταβολής της διανυσματικής γωνιακής ταχυτητας (μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός ανάλογα με το διάνυσμα του ω)

Περίοδος περιστροφής για ένα σημείο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

ή

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(radian measure)}$$

v=μέτρο της γραμμικής ταχύτητας

ω=μέτρο της γωνιακήσταχύτητας

r=η απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής

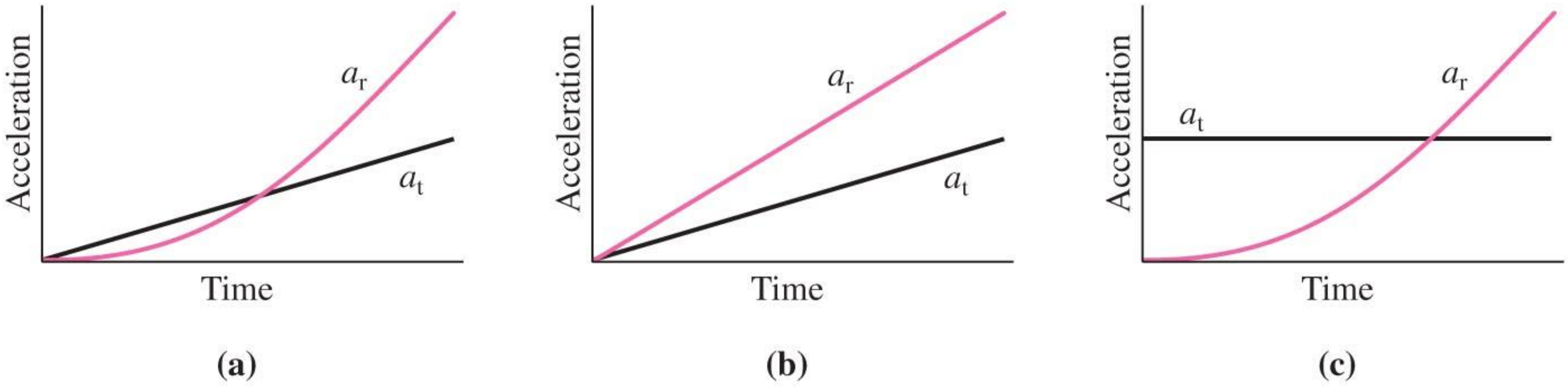
Ερώτηση 2

Σε ένα καρουζέλ ένα παιδί κάθεται κοντά στην εξωτερική περιφέρεια και ένα άλλο στη μέση της απόστασης από το κέντρο.

1. Ποιο από τα δυο παιδιά έχει τη μεγαλύτερη γραμμική ταχύτητα?
2. Ποιο έχει τη μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα?
3. Ποιο έχει τη μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση? (αν ω=σταθερή)

Ερώτηση 3

Μια ρόδα παρουσιάζει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ξεκινώντας από ηρεμία. Ποιο σχήμα απεικονίζει σωστά τη μεταβολή της κεντρομόλου και εφαπτομενικής επιτάχυνσης με το χρόνο σε ένα συγκεκριμένο σημείο στην περιφέρεια της ρόδας?



Παράδειγμα 4

Σε ένα μεγάλο οριζόντιο δακτύλιο του λουνα παρκ που περιστρεφεται γυρω απο έναν κατακόρυφο άξονα με ακτίνα R=33.1 m. Για το χρονικό διάστημα απο t=0 μέχρι t=2.30 s η γωνιακη θέση θ(t) δίνεται απο τη σχέση

$$\theta = ct^3$$

Όπου $c=6,39\times10^{-2}$ rad/$s^{3.}$ Μετά τη στιγμή t=2.3 s η γωνιακή ταχύτητα διατηρείται σταθερή. Για τη στιγμή t=2.2 s να προσδιοριστεί η γωνιακή ταχύτητα ω, η γραμμική ταχύτητα, η γωνιακή επιταχυνση, η εφαπτομενική γωνιακή επιτάχυνση, και το διάνυσμα της επιτάχυνσης

Παράδειγμα 5

Η γωνιακή επιτάχυνση ειναι $a_Γ = 5t^3 - 4t$ όπου t= χρόνος σε sec, και $a_Γ$ σε rad/sec^2

Οταν t=0 η γωνιακή ταχύτητα ειναι ω=5 rad/sec και η γωνιακή θέση θ=2 rad
Βρείτε τη σχέση ω(t) και θ(t)

Θυμόμαστε:Κέντρο μάζας

$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{M}$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_ix_i.$$

Για ένα σύστημα σημείων

$$x_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_ix_i, \qquad y_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_iy_i, \qquad z_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_iz_i.$$

Σε 3 διαστάσεις

$$x_{com} = \frac{1}{M}\int x\,dm, \qquad y_{com} = \frac{1}{M}\int y\,dm, \qquad z_{com} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Σε στερεό σώμα

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V},$$

$$x_{com} = \frac{1}{V}\int x\,dV, \qquad y_{com} = \frac{1}{V}\int y\,dV, \qquad z_{com} = \frac{1}{V}\int z\,dV.$$

Ομογενή στερεα σωματα

Ροπή αδράνειας στερεού

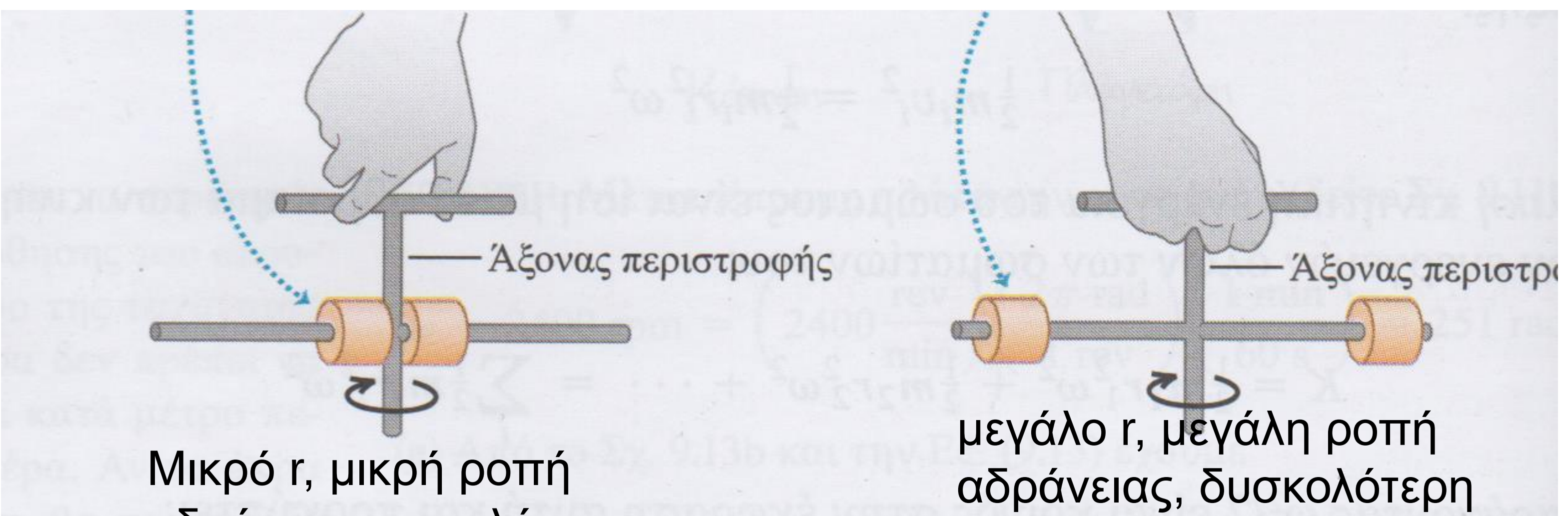
$$I = \int r^2 dm$$

(συνεχής κατανομή μάζας)

Μονάδα μέτρησης SI $kg.m^2$

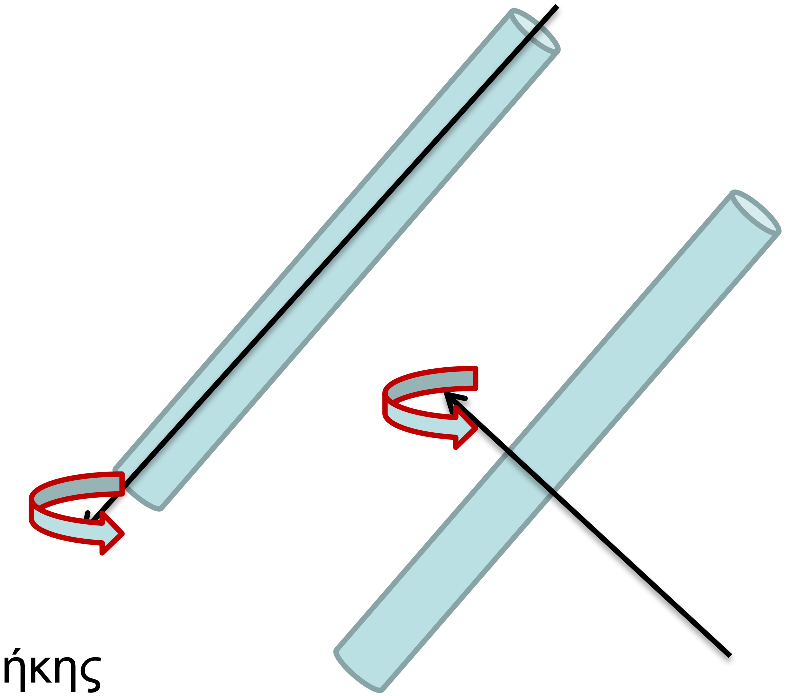
Φυσική ερμηνεία:

- Στην περιστροφή στερεού σώματος παίζει ρόλο όχι μόνο η μάζα του αλλά και η κατανομή της γύρω απο τον άξονα περιστροφής
- Όσο μεγαλύτερες οι αποστάσεις των σωματιδίων που αποτελούν το σώμα απο τον άξονα περιστροφής τόσο μεγαλύτερη η ροπή αδράνειας
- όσο μεγαλύτερη είναι η I, τόσο δυσκολότερα θα σταματήσει η περιστροφική κίνηση ενός σώματος, αν ήδη περιστρέφεται ή τόσο πιο δύσκολη η εκκίνηση περιστροφής. Για τον λόγο αυτό, η *I* καλείται και **περιστροφική αδράνεια.**



Μικρό r, μικρή ροπή αδράνειας, ευκολότερη εκκίνηση περιστροφής

μεγάλο r, μεγάλη ροπή αδράνειας, δυσκολότερη εκκίνηση περιστροφής



Διαμήκης
άξονας
περιστροφής

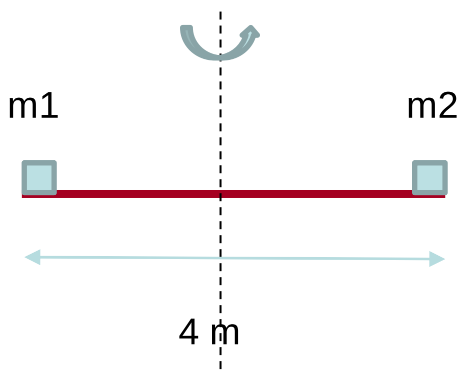
Εγκάρσιος
άξονας
περιστροφής

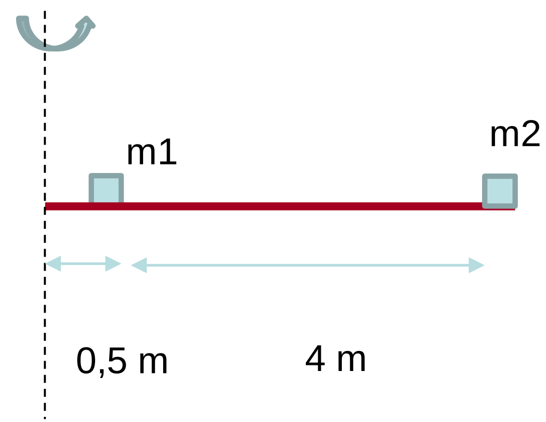
Ιδια μάζα αλλά
ευκολότερη
περιστροφή ράβδου
στον διαμήκη άξονα
περιστροφής σε
σχέση με τον
εγκάρσιο γιατι η
μάζα ειναι
κατανεμημένη πιο
κοντά στον διαμήκη
άξονα περιστροφής

Ροπή αδράνειας συστήματος σωμάτων

$I = \sum m_i r_i^2$ (rotational inertia)

Δύο σημειακές μάζες m_1=5 kg και m_2=7 kg είναι τοποθετημένες σε απόσταση πάνω σε μια ελαφριά ράβδο (της οποίας η μάζα μπορεί να αγνοηθεί). Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας στις δυο παρακάτω περιπτώσεις

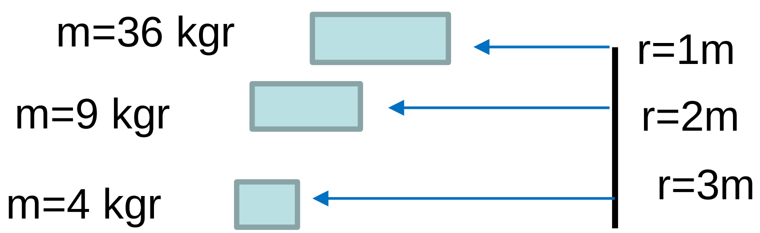




Συμπέρασμα????

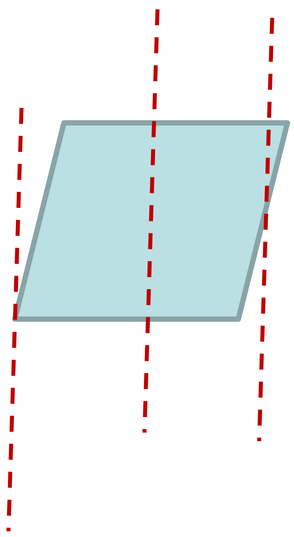
Ερώτηση 1

Ποια μάζα έχει τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας?



Ερώτηση 2

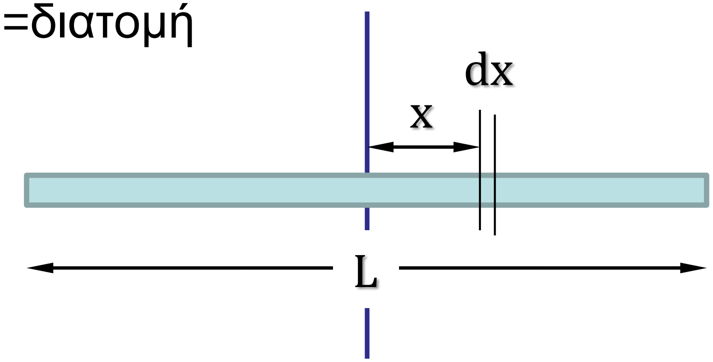
Ως προς ποιο άξονα περιστροφής το στερεό έχει τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας?



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο βάρους

S=διατομή



dm=ρ.dV

dV=S.dx

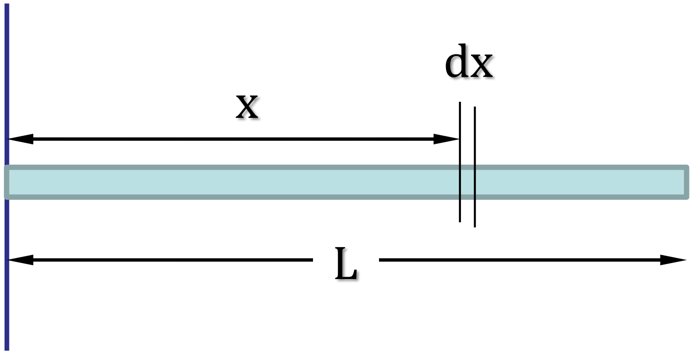
$$I = \int_M x^2 dm = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \rho S dx = \rho S \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx$$

$$I = \rho S \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-L/2}^{+L/2} = \left(\rho S \frac{L^3}{24}\right) - \left(-\rho S \frac{L^3}{24}\right) = \rho S \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12}(\rho S L) L^2 = \frac{1}{12} M L^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{12} M L^2}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από τη μία άκρη της



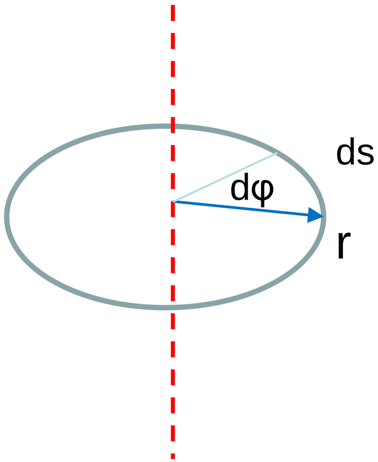
$$I = \int_M x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho S dx = \rho S \int_0^L x^2 dx$$

$$I = \rho S \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{+L} = \left(\rho S \frac{L^3}{3}\right) - \left(\rho S \frac{0^3}{24}\right) = \rho S \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3}(\rho S L)L^2 = \frac{1}{3} M L^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3} M L^2}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Δακτύλιος ή στεφάνη με άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο του και κάθετο στο επίπεδο του δακτυλίου



dm=ρ.ds=ρ.r.dφ

Το πάχος είναι αμελητέο

I=

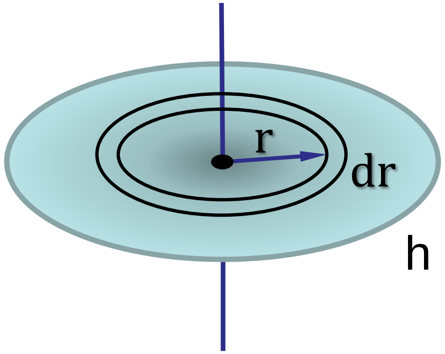
$$\int r^2 dm = \int_0^{2\pi} r^2 \rho . r . d\varphi = r^3 \rho 2\pi = mr^2$$

Γιατί όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια σε απόσταση r (ακτίνα)

$$\rho = \frac{m}{2\pi r}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του



στοιχειώδης δακτύλιος ακτίνας r και πάχους dr και ύψους h

dV=(2πr.dr). h

dm=ρdV

$$I=\int_M r^2 dm=\int_0^R r^2 \rho h 2\pi r dr = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr$$

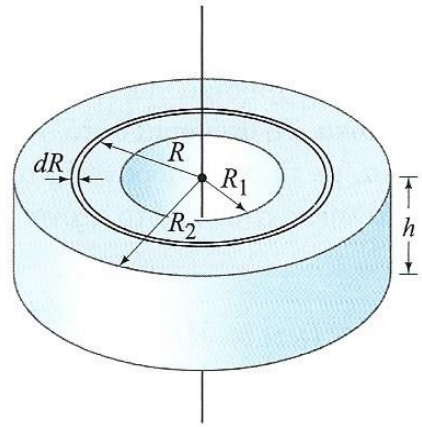
$$I=2\pi\rho h \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4 = \frac{1}{2}\left(\pi R^2 h\rho\right)R^2 = \frac{1}{2}MR^2$$

$\acute{o}\pi o\upsilon\ M = \rho.\mathrm{V} = \rho.\mathrm{S}.\mathrm{h} = \rho\ \pi \mathrm{R}^2\mathrm{h}$

$$\boxed{I=\frac{1}{2}MR^2}$$

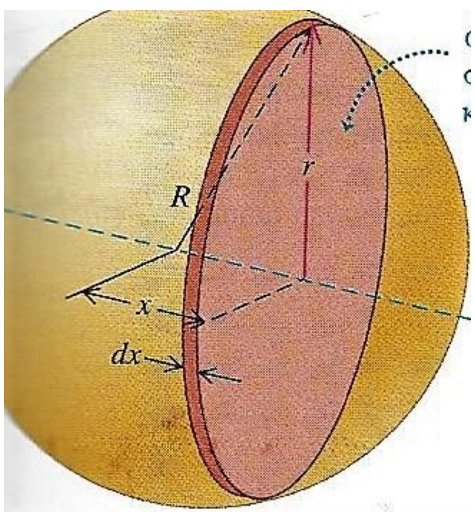
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπή αδράνειας κυλίνδρου συμπαγούς κυλίνδρου ή κυλινδρικού κέλυφους



Θεωρήστε στοιχειώδη δακτύλιο ακτίνας R και πάχους dR

Ροπή αδράνειας συμπαγούς σφαίρας

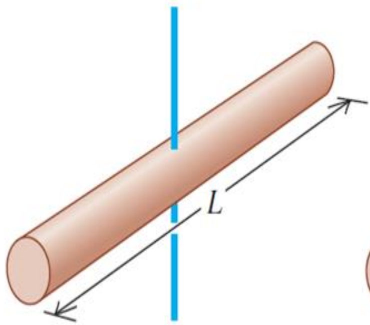


Θεωρήστε στοιχειώδη δίσκο ακτίνας R και πάχους dR

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.2 Ροπές Αδράνειας Διαφόρων Ομογενών Σωμάτων

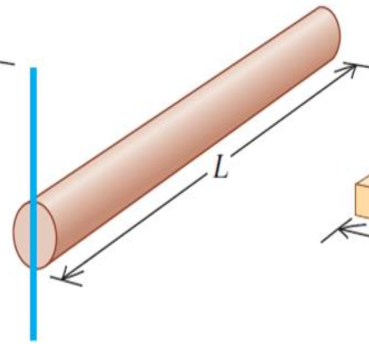
(a) Λεπτή ράβδος ως προς άξονα διά του κέντρου

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



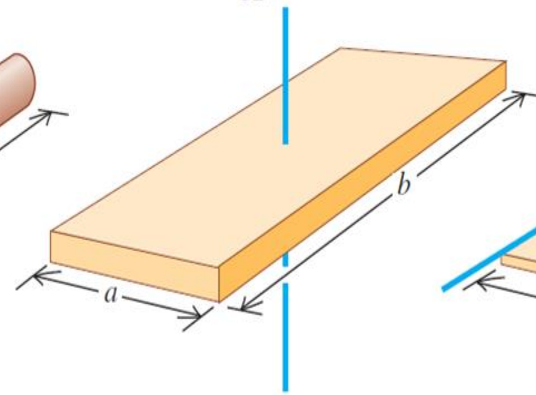
(b) Λεπτή ράβδος ως προς άξονα διά ενός άκρου

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



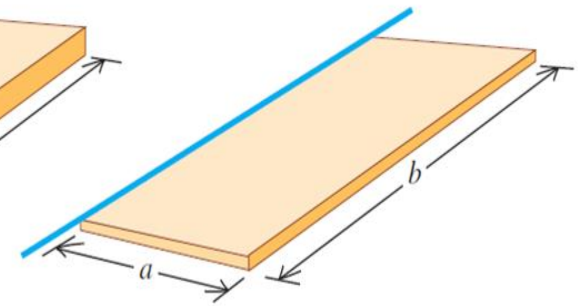
(c) Ορθογώνια πλάκα ως προς άξονα διά του κέντρου

$$I = \frac{1}{12}M\left(a^2 + b^2\right)$$



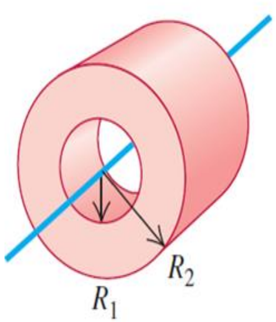
(d) Λεπτή ορθογώνια πλάκα ως προς άξονα κατά μήκος μιας ακμής

$$I = \frac{1}{3}Ma^2$$



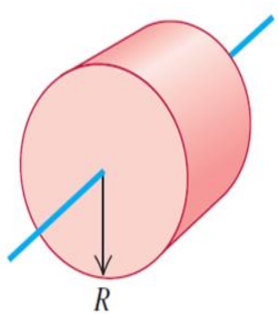
(e) Κοίλος κύλινδρος

$$I = \frac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$



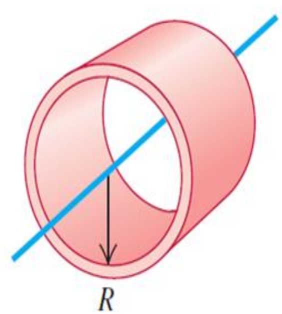
(f) Συμπαγής κύλινδρος

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



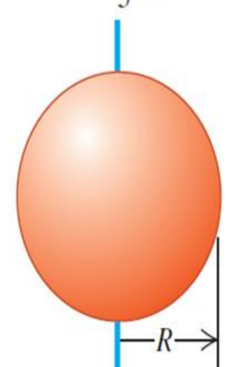
(g) Λεπτότοιχος κοίλος κύλινδρος

$$I = MR^2$$



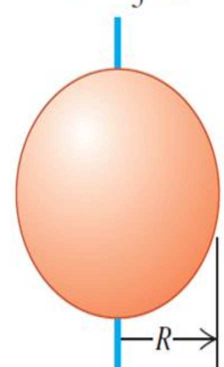
(h) Συμπαγής σφαίρα

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

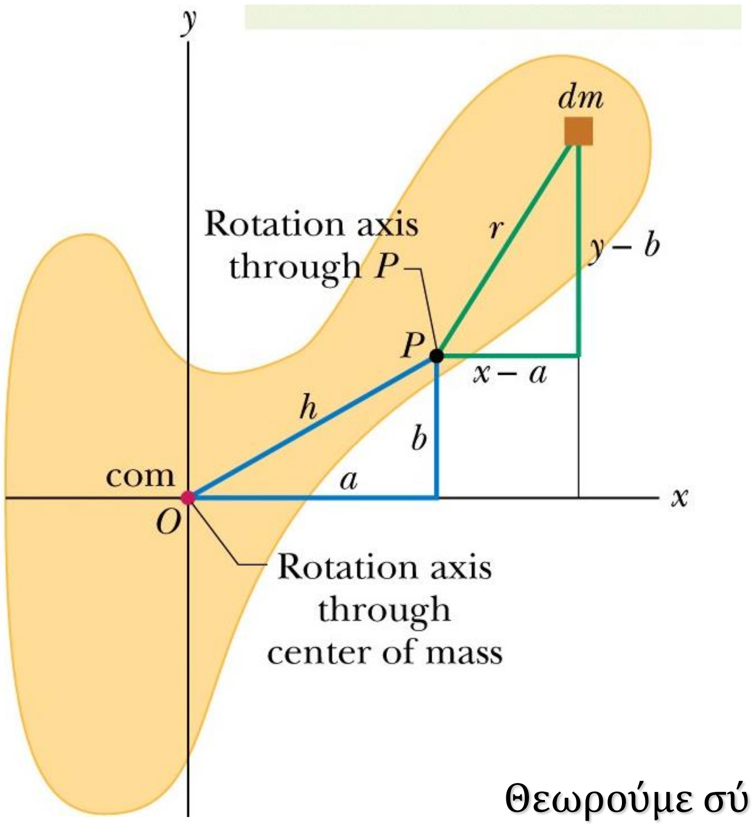


(i) Λεπτότοιχος σφαιρικός φλοιός

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



Θεώρημα Παραλλήλων Αξόνων (Steiner)



Εάν η ροπή αδράνειας στερεού σώματος μάζας Μ ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας του *(σημείο Ο)* είναι I_{CM}, τότε η ροπή αδράνειας I ως προς παράλληλο άξονα μετατοπισμένο κατά h *(σημείο P)* δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{I = I_{CM} + Mh^2}$$

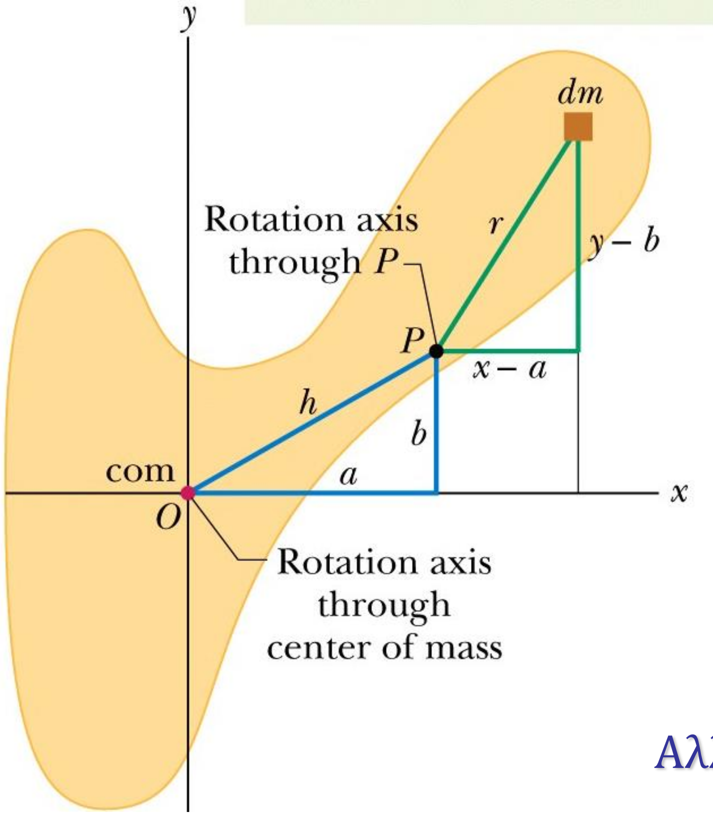
Απόδειξη Θεωρήματος Steiner

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο μάζας του σώματος. Το σημείο P έχει στο σύστημα αυτό συντεταγμένες (a,b) και ισχύει $h^2 = a^2+b^2$. Η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα διερχόμενο από το P υπολογίζεται ως ακολούθως:

M: Μάζα στερεού σώματος
h: απόσταση του άξονα P από τον άξονα του κέντρου μάζας O.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Θεώρημα Παραλλήλων Αξόνων (Steiner)



$$I=\int r^2 dm=\int\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]dm$$

$$\Downarrow$$

$$I=\int(x^2+y^2)dm+\int(a^2+b^2)dm$$

$$-2a\int x\,dm-2b\int y\,dm$$

Αλλά όμως $\int x\,dm=0$ & $\int y\,dm=0$

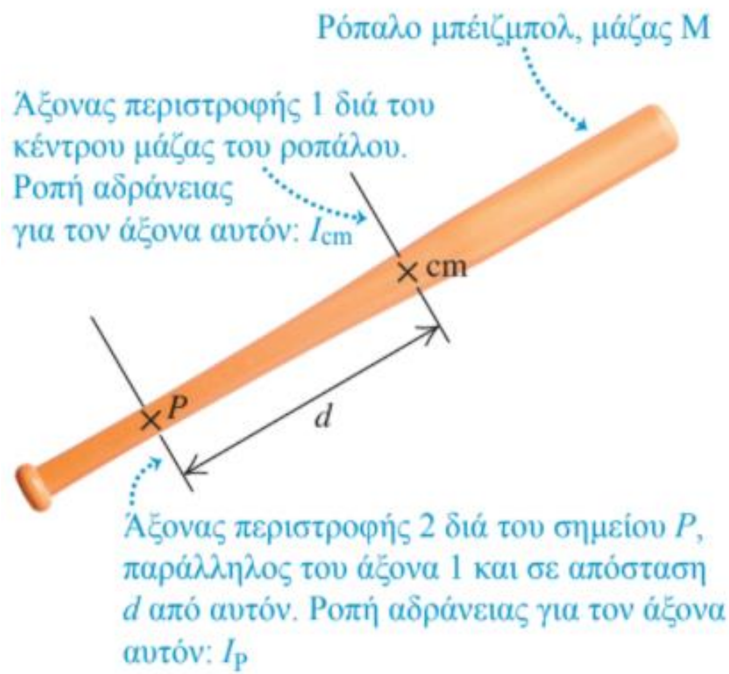
επειδή το κέντρο μάζας του σώματος βρίσκεται στο σημείο (x, y)=(0, 0), οπότε:

$$\boxed{I=I_{CM}+Mh^2}$$

h: απόσταση του άξονα P από τον άξονα του κέντρου μάζας O, με $h^2 = a^2 + b^2$.

Θεώρημα Παραλλήλων Αξόνων (Steiner)

9.19 Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων.



ένα στερεό σώμα έχει μικρότερη ροπή αδράνειας ως προς άξονα διά του κέντρου μάζας του παρά ως προς οποιονδήποτε άλλο παράλληλο άξονα. Επομένως, είναι ευκολότερο να ξεκινήσει ένα σώμα την περιστροφική του κίνηση αν ο άξονας περιστροφής διέρχεται διά του κέντρου μάζας.

Θεώρημα των παράλληλων αξόνων: Ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο P

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \tag{9.19}$$

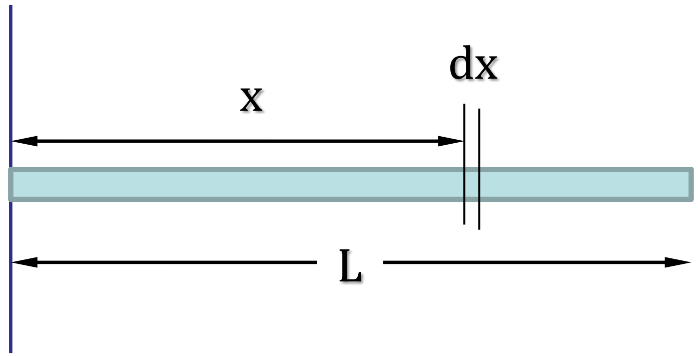
Μάζα σώματος

Απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων αξόνων

Ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα παράλληλο που διέρχεται από το κέντρο μάζας.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Θεώρημα Παραλλήλων Αξόνων (Steiner)



Όπως υπολογίσθηκε προηγουμένως, η ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς ράβδου μήκους L και μάζας M ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από τη μία άκρη της είναι:

$$\boxed{I = \frac{1}{3}ML^2}$$

Η εφαρμογή του θεωρήματος των παραλλήλων αξόνων καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα:

$$\boxed{I = I_{CM} + Mh^2}$$

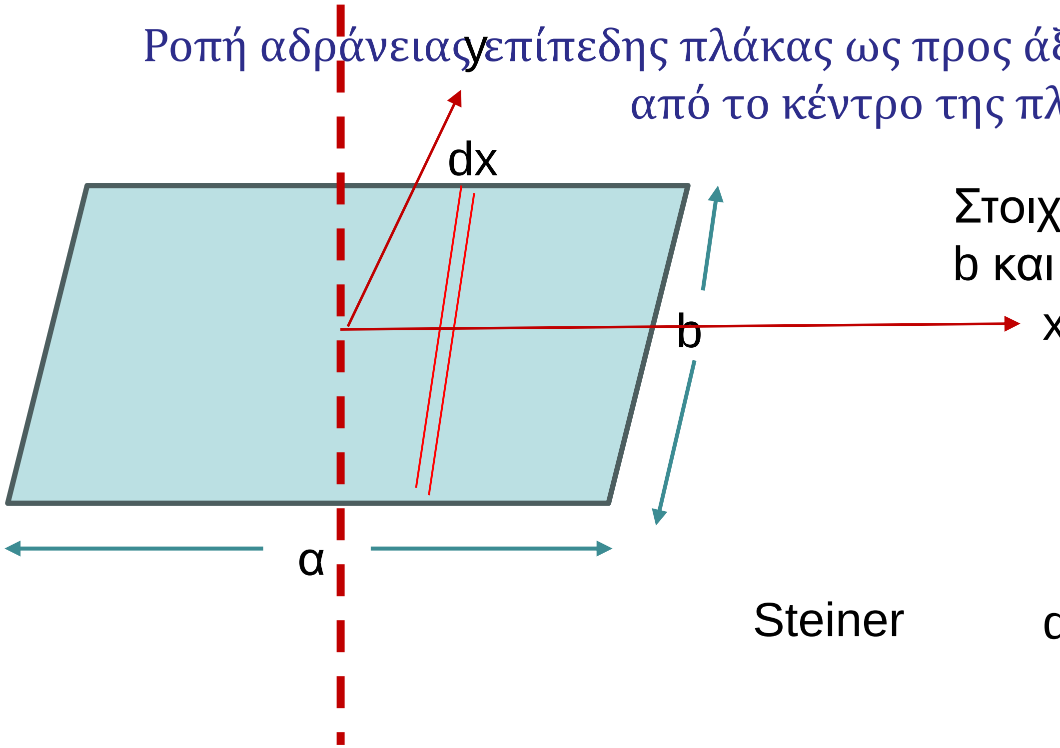
$$\Downarrow$$

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Προσοχή: μην επιχειρείτε πάντα να πείτε ότι όλη η μάζα ενος στερεού είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας και να πολλαπλασιάζετε την ολική μαζα με την απόσταση απο το κέντρο βάρους.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπή αδράνειας επίπεδης πλάκας ως προς άξονα περιστροφής που περνά από το κέντρο της πλάκας



Στοιχειώδης ράβδος με σταθερό b και μεταβαλλόμενο dx

$dm=\rho\ b\ dx=\frac{M}{ab}bdx$

$dI_0=\frac{1}{12}\ dm.b^2$

Steiner $dI= dI_0 +dm.x^2 = (\frac{1}{12}.b^2+ x^2\ )dm$

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{M}} \mathrm{r}^2\mathrm{dm} = \int_{-\mathrm{a}/2}^{+\mathrm{a}/2} (\frac{1}{12}.b^2+ x^2\ )\frac{M}{a}\mathrm{dx} = \frac{1}{12}.(b^2+ a^2)$$

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Για ένα σύνολο σωματιδίων που περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω :

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \ldots = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\Downarrow$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$\Downarrow$$

Προσοχή: Το ω πρεπει αν μετριέται σε rad/sec

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{όπου} \quad I = \sum_i m_i r_i^2}$$

I: Ροπή Αδράνειας Σώματος

Μονάδα SI
Joule

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Συμπέρασμα

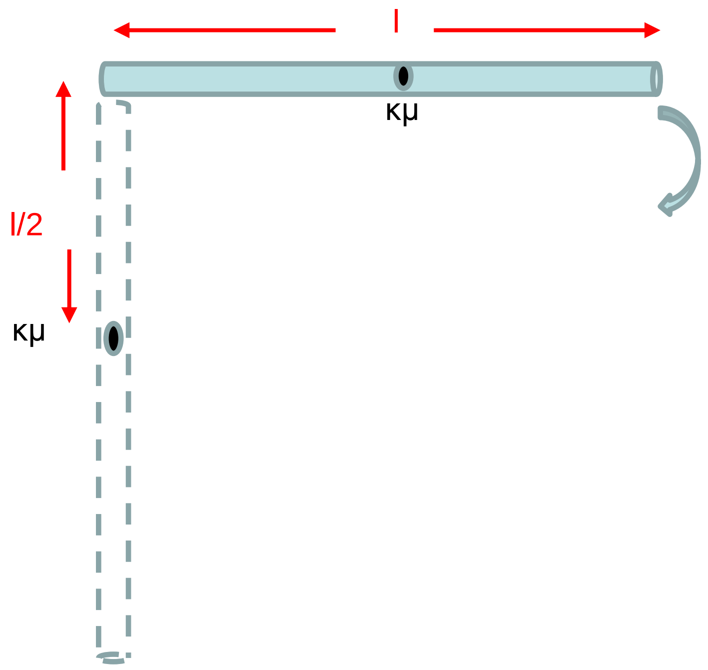
- Οσο μεγαλύτερη η ροπή αδράνειας, τόσο μεγαλύτερη η κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος που περιστρεφεται με γωνιακή ταχύτητα ω

- Για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας παίζει ρόλο όχι μόνο η μάζα του στερεού αλλά και η κατανομή της περί τον άξονα περιστροφής

- Οσο μεγαλύτερη η ροπή αδράνειας του σώματος, τόσο δυσκολότερα θα σταματήσει την περιστροφική του κίνηση, αν ήδη περιστρέφεται. Για το λογο αυτο η Ι ονομάζεται και *περιστροφική αδράνεια*.

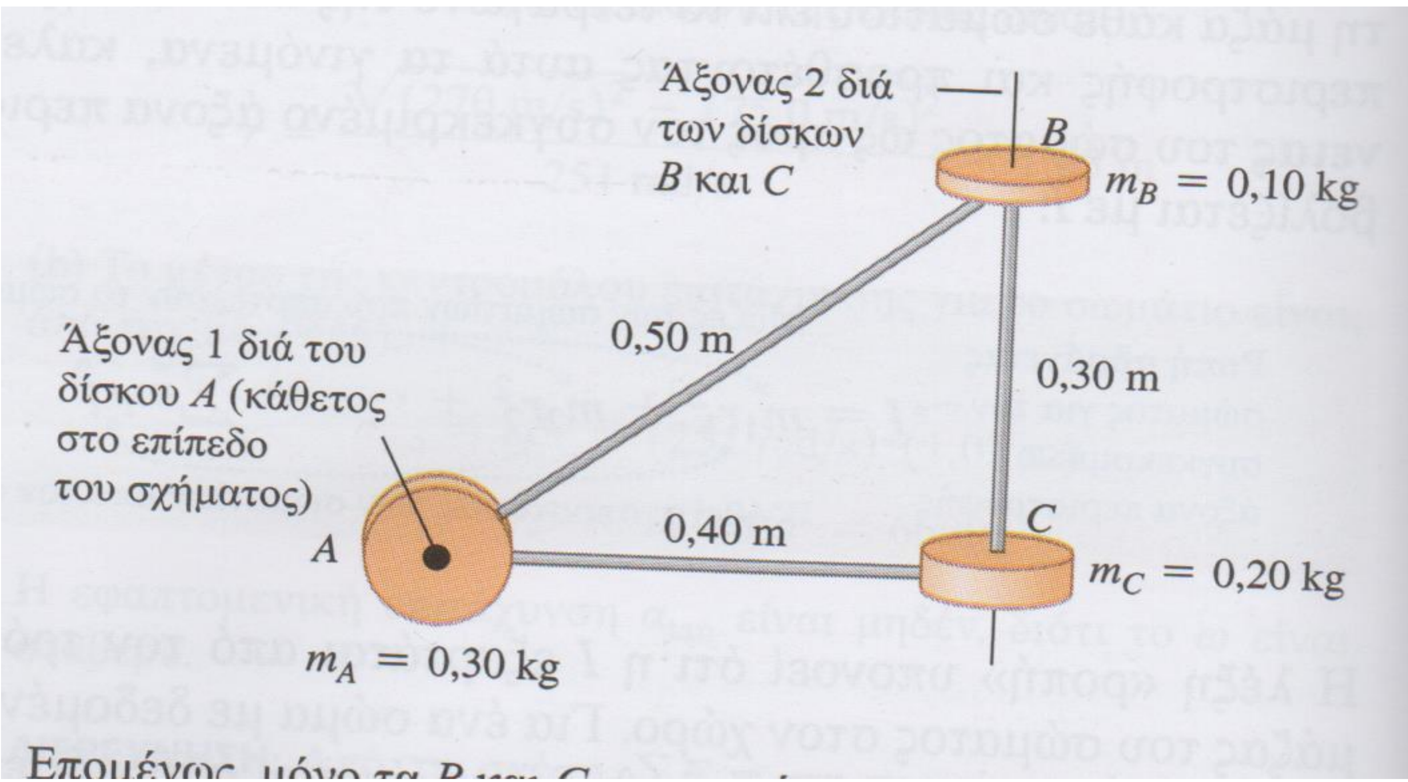
Παράδειγμα 6

Μια ράβδος μάζας Μ περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το ένα άκρο της. Η ράβδος συγκρατείται αρχικά οριζόντια σε κατάσταση ηρεμίας και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερη. Προσδιορίστε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν φτάνει σε κάθετη θέση και την ταχύτητα του άκρου της ράβδου την ίδια χρονική στιγμή.



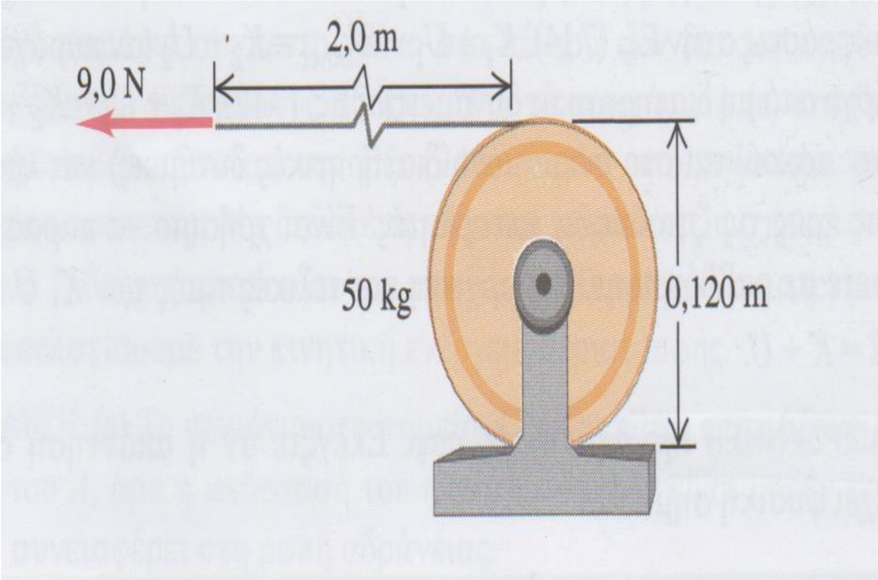
Παράδειγμα 7

Εξάρτημα μηχανής αποτελείται απο 3 δισκους που συνδεονται μεταξυ τους με ελαφριές ράβδους. Α) Ποση ειναι η ροπή αδράνειας αυτου του εξαρτήματος ως προς αξονα διερχόμενο απο το Α και κάθετο στο επιπεδο του σχήματος (άξονας 1)? Β) Ποση ειναι η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται απο το κέντρο των δίσκων Β και C (άξονας 2)? γ() πόση ειναι η κινητική ενέργεια του σωματος όταν αυτο περιστρεφεται με γωνιακή ταχυτητα μέτρου ω=4 rad/s περι τον άξονα 1?



Παράδειγμα 8

Τυλίγουμε ένα ελαφρύ, μη εκτατό συρματόσχοινο γυρω απο έναν συμπαγή κύλινδρο μάζας 50 kg και διαμέτρου 0,120 m ο οποίος περιστρέφεται χωρις τριβές γύρω απο έναν σταθερό οριζόντιο άξονα στερεωμένος με ρουλεμάν. Ελκουμε το ελεύθερο άκρο του συρματόσχοινου με σταθερή δύναμη F=9,0 N για απόσταση 2 m. Το συρματόσχοινο ξετυλίγεται χωρις ολίσθηση, στρεφοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ο κύλινδρος αρχικά ειναι σε ηρεμία. Υπολογιστε τα μέτρα της τελικής γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου και της τελικής ταχυτητας του συρματόσχοινου

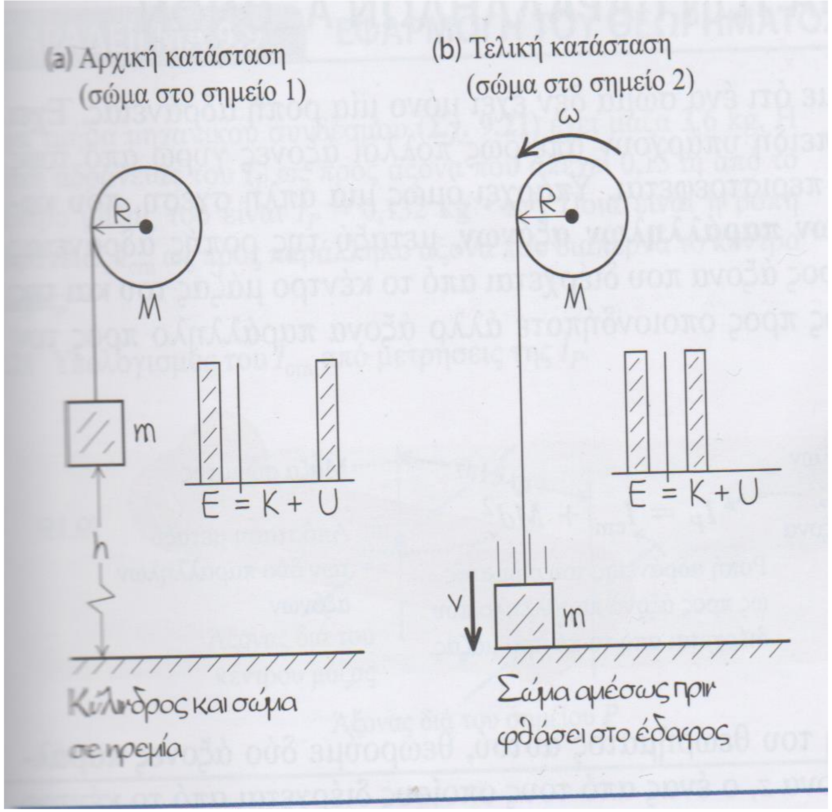


Παραδοχές

1. Το συρματόσχοινο δεν έχει μάζα, άρα κινητική ενέργεια έχει μόνο η τροχαλία
2. Δεν υπάρχει μεταβολή στη δυναμική ενέργεια
3. Δεν υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας λόγω τριβής
4. Επειδή το σχοινί είναι αβαρές η δύναμη F είναι η ίδια που ασκείται στην περιφέρεια της τροχαλίας από το σχοινί

Παράδειγμα 9

Τυλίγουμε ένα ελαφρύ, μη εκτακτό σύρμα γυρω απο έναν συμπαγη κύλινδρο μάζας M και ακτίνας R. O κύλινδρος περιστρέφεται με αμελητέα τριβή γύρω απο ένα σταθερό οριζόντιο άξονα. Στερεώνουμε το ελέυθερο άκρο του σύρματος σε σώμα μάζας m και αφήνουμε τη μάζα με μηδενική αρχική ταχύτητα σε ύψος h απο το έδαφος. Καθως πέφτει το σώμα, το σύρμα ξετυλίγεται χωρις ολίσθηση. Υπολογιστε την ταχύτητα της μάζας m και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του κυλίνδρου, όταν η μάζα φτασει στο έδαφος.



Παραδοχές

Η τριβή δεν παράγει έργο γιατί το σύρμα δεν ολισθαίνει

Αγνοούμε την δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου γιατί δεν μεταβάλλεται το ύψος του

Το σύρμα είναι αβαρές οπότε η δύναμη που ασκεί στον κύλινδρο και στο σώμα είναι ίδιες