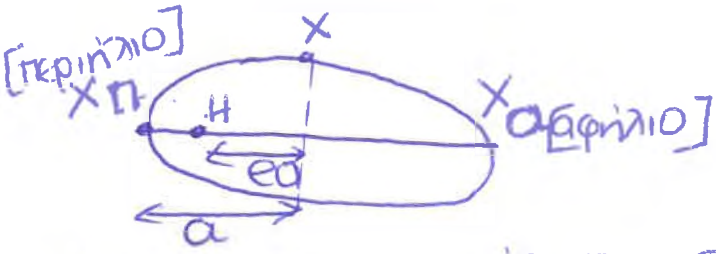
Ο κομήτης του Χάλεϋ κινείται σε μια επιμήκη τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Οι αποστάσεις του από τον Ήλιο στο περιήλιο και αφήλιο είναι $8{,}75\times10^7$ km και $5{,}26\times10^9$ km αντίστοιχα. Βρείτε τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιάς, την εκκεντρότητα και την περίοδο



Μήκος μεγάλου ημιάξονα α

$2a =$ απόσταση περιηλίου + αφηλίου $\Rightarrow \frac{HX_\pi + HX_a}{2} = a \Rightarrow$

$$a = \frac{8{,}75\times10^7 + 5{,}29\times10^9}{2} = 2{,}67\times10^9 \text{ km}$$

Στο περιήλιο: $X_\pi H = a - ea \Rightarrow X_\pi H = a(1-e) =$
$= 8{,}75\times10^7 \Rightarrow$

$$e = 1 - \frac{8{,}75\times10^7}{a} = 0{,}967$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)a^3 = 2{,}38\times10^9 \text{ s} = 75{,}5 \text{ years}$$

όπου $M =$ μάζα ήλιου $= 1{,}99\times10^{30}$ kg.

Η εκκεντρότητα είναι κοντά στο 1 και επομένως η τροχιά είναι πολύ επιμηκυμένη. Ο κομήτης βρισκόταν στο περιήλιο το 1986. Επομένως θα ξαναβρεθεί μια περίοδο μετά, δηλαδή το 2061

Ένα βλήμα εκτοξεύεται από τη Γη. α) βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα που απαιτείται για να εκτοξευθεί το βλήμα κατευθείαν πάνω από τη Γη με το ύψος ίσο με την ακτίνα της γης. β) βρείτε την ταχύτητα διαφυγής του βλήματος. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα, την περιστροφή της γης, την βαρυτική έλξη από τη σελήνη.

$R_\Gamma = 6{,}37 \times 10^6 m \qquad M = 5{,}94 \times 10^{24} kg$

$[K_2 = 0]$

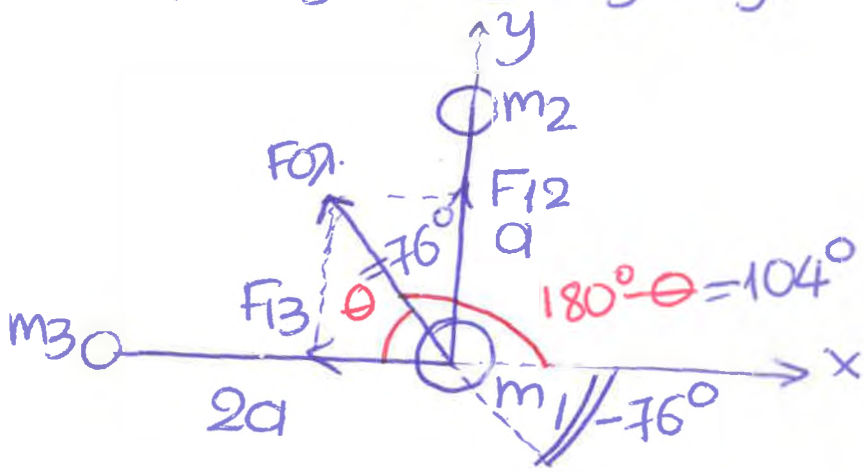
α) $K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m u_1^2 + \left(-\frac{GmM}{R_\Gamma}\right) = 0 + \left(-\frac{GMm}{2R_\Gamma}\right) \Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_\Gamma}} = 28500 \, km/h$

β) $r_2 \to \infty \qquad U_2 = 0 \qquad K_2 = 0$

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m u_1^2 + \left(-\frac{GmM}{R_\Gamma}\right) = 0 \Rightarrow$

$u_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R_\Gamma}} = 40200 \, km/h$

Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τη συνισταμένη βαρυτική δύναμη στη μάζα m από τις άλλες δύο μάζες. Δίνεται $m_1 = 6kg$ $m_2 = m_3 = 4kg$. Η απόσταση $a = 2cm$



$$F_{12} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{a^2} = 4 \times 10^{-6} N$$

$$F_{13} = \frac{G\, m_1 \cdot m_3}{(2a)^2} = 1 \times 10^{-6} N$$

$$F_{ολ} = \sqrt{F_{12}^2 + F_{13}^2} = 4.1 \times 10^{-6} N$$

$$εφθ = \frac{F_{12}}{F_{13}} \Rightarrow θ = 76^\circ$$ (αρνητική για $F_{13} = -1 \times 10^{-6} N$)

$$180^\circ - θ = 104^\circ$$

Ένας πλανήτης έχει α) διπλάσια μάζα από τη Γη και διπλάσια ακτίνα β) τετραπλάσια μάζα από τη Γη και διπλάσια ακτίνα. Κατατάξτε τους πλανήτες με βάση την επιτάχυνση βαρύτητας

α) $g_P = G \frac{M_P}{R_P^2}$

$g_\Gamma = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$

$M_P = 2M_\Gamma$
$R_P = 2R_\Gamma$

$$\frac{g_P}{g_\Gamma} = \frac{R_\Gamma^2 \cdot M_P}{R_P^2 \; M_\Gamma} \Rightarrow \frac{g_P}{g_\Gamma} = \frac{R_\Gamma^2 \, 2M_\Gamma}{(2R_\Gamma)^2 M_\Gamma} = \frac{R_\Gamma^2 \, 2}{4R_\Gamma^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$g_P = \frac{g_\Gamma}{2}$$

β) $M_P = 4M_\Gamma$
$R_P = 2R_\Gamma$

$$\frac{g_P}{g_\Gamma} = \frac{\cancel{R_\Gamma^2} \, 4\cancel{M_\Gamma}}{\cancel{4}\cancel{R_\Gamma^2}\cancel{M_\Gamma}} = 1 \Rightarrow g_P = g_\Gamma$$

Ο πλανήτης Κρόνος έχει μάζα 100 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα της γης και βρίσκεται 10 φορές πιο μακριά από τον Ήλιο σε σχέση με τη γη. Συγκρίνετε την επιτάχυνση βαρύτητας της γης που προκαλείται από την βαρυτική έλξη του Ήλιου με αυτή του Κρόνου λόγω της βαρυτικής έλξης του Ήλιου

$m_K = 100 m_\Gamma$
$r_K = 10 r_\Gamma$

$$\left.\begin{aligned} F_{gK} &= \frac{m_K \cdot m_H}{r_K^2} G \\ F_{g\Gamma} &= \frac{m_\Gamma \cdot m_H}{r_\Gamma^2} G \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{F_{gK}}{F_{g\Gamma}} = \frac{m_K \cancel{m_H} r_\Gamma^2}{m_\Gamma \cdot \cancel{m_H} r_K^2} = \frac{100 \cancel{m_\Gamma} \, r_\Gamma^2}{\cancel{m_\Gamma} (10 r_\Gamma)^2} = \frac{10^2 r_\Gamma^2}{10^2 r_\Gamma^2} = 1$$

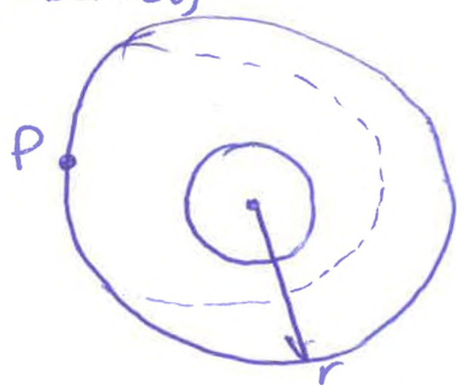
Άρα οι δυνάμεις βαρύτητας των δύο πλανητών λόγω της βαρυτικής επίδρασης του Ήλιου είναι ίσες

$$\left.\begin{aligned} F_{gK} &= m_K g_K \\ F_{g\Gamma} &= m_\Gamma \cdot g_\Gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{gK} = F_{g\Gamma} \Rightarrow m_K g_K = m_\Gamma \cdot g_\Gamma \Rightarrow$$

$$100 \cancel{m_\Gamma} \cdot g_K = \cancel{m_\Gamma} \cdot g_\Gamma \Rightarrow g_K = \frac{g_\Gamma}{100}$$

Ένα διαστημόπλοιο μάζας $m = 4.50 \times 10^3$ kg διαγράφει κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη με ακτίνα $r = 8 \times 10^6$ m και περίοδο $T_0 = 118.6$ min $= 7.119 \times 10^3$ s. Όταν ενεργοποιείται ένας προωθητικός κινητήρας δίνοντας ώθηση προς τα πίσω για να μειώσει την ταχύτητα στο 96% της αρχικής ταχύτητας. Πόση είναι η περίοδος της ελλειπτικής τροχιάς που προκύπτει;

Μάζα της γης $= 5.98 \times 10^{24}$ kg



Αμέσως μετά την ώθηση η κινητική ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \,(0.96 v_0)^2 \qquad (1)$$

$$v_0 = \frac{2\pi r}{T_0} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow K = \frac{1}{2}(4.5 \times 10^3)(0.96)^2 \left(\frac{2\pi (8 \times 10^6)}{7.119 \times 10^3}\right)^2 = 1{,}0338 \times 10^{11}\ \text{J}$$

Αμέσως μετά την ώθηση το διαστημόπλοιο συνεχίζει να παραμένει σε τροχιά ακτίνας r. Η δυναμική του ενέργεια είναι:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}98 \times 10^{24} \cdot 4{,}50 \times 10^3}{8 \times 10^6} = -2{,}2436 \times 10^{11}\ \text{J}$$

Άρα: $E = K + U = 1{,}0338 \times 10^{11} - 2{,}2436 \times 10^{11} = -1{,}2098 \times 10^{11}$ J

Για ελλειπτική τροχιά με μεγάλο ημιάξονα a:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow a = \frac{GMm}{2E} = 7{,}418 \times 10^6 m$$

Η περίοδος T (3ος νόμος Kepler)

$$T = \left[\frac{4\pi^2 a^3}{GM}\right]^{1/2} = 106 min$$

$T < T_0$ γιατί: 1) το μήκος της τροχιάς είναι μικρότερο 2) η ελλειπτική τροχιά φέρνει το διαστημόπλοιο πιο κοντά στη Γη (εκτός από το σημείο πυροδότησης). Αυτό σημαίνει μείωση της U και αύξηση της K, άρα αύξηση της ταχύτητας άρα ελάττωση της περιόδου.

Ένας γεωστατικός δορυφόρος (που περιστρέφεται σε τροχιά πάνω από ένα σταθερό σημείο στον ισημερινό). Να προσδιορίσετε α) το ύψος πάνω από την επιφάνεια της γης στο οποίο πρέπει να κινείται ο γεωστατικός δορυφόρος β) την ταχύτητα του δορυφόρου γ) να συγκρίνετε την ταχύτητα ενός γεωστατικού δορυφόρου με αυτήν ενός δορυφόρου που περιφέρεται σε ύψος 200km από την επιφάνεια της γης

Λύση

Η περίοδος του γεωστατικού δορυφόρου είναι T=24h καθώς παραμένει στο ίδιο σημείο της γης, ενώ η γη περιστρέφεται.

Η μόνη δύναμη που ασκείται στο δορυφόρο είναι η βαρυτική

α) $F_G = G\dfrac{mM}{\underbrace{(R_r+h)^2}_{\text{απόσταση από το κέντρο της γης} = r}}$

όπου M = μάζα γης
m = μάζα δορυφόρου
R_r = ακτίνα της γης (καθώς ο δορυφόρος κινείται πάνω στον ισημερινό). h = το ύψος πάνω από την επιφάνεια της γης

Αν θεωρήσουμε ότι η τροχιά είναι κυκλική: $F_G = G\dfrac{\cancel{m}M}{r^2} = \dfrac{u^2}{r}\cancel{m} \Rightarrow G\dfrac{M}{r} = u^2$ (1)

$u = \dfrac{2\pi r}{T} \Rightarrow u = \dfrac{2\pi r}{86400\,sec}$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow r^3 = \dfrac{GMT^2}{4\pi^2} \Rightarrow r = 4{,}22 \times 10^7 m = 42200\ km$

Άρα: $h = r - R_r = (42200 - 6380)km \simeq 36000\ km$

β) $(1) \Rightarrow u = \sqrt{\dfrac{GM}{r}} = 3070\ m/s$

[ή $(2) \Rightarrow u = \dfrac{2\pi r}{T} = 3070\ m/s$]

γ) $u' = \dfrac{Gm}{r'}$ (για τον δορυφόρο σε ύψος 200m)
$r' = R_r + 200$

$\dfrac{u'}{u} = \sqrt{\dfrac{r}{r'}} = 7770\ m/s$

Η ενέργεια ενός δορυφόρου, λόγω τριβής, μειώθηκε κατά 2%. Υπολογίστε το ποσοστό μεταβολής της ακτίνας, της ταχύτητας και της περιόδου. Η τροχιά διατηρείται κυκλική.

Λύση $\quad E=\frac{1}{2}mu^2-G\frac{Mm}{r} \quad (1)$

κυκλική τροχιά → $\frac{mu^2}{r}=\frac{GmM}{r^2} \Rightarrow u^2=\frac{GM}{r} \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow \boxed{E=-\frac{GmM}{2r}}$

$$dE=-\frac{GMm}{2}\,d\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow dE=\frac{GMm}{2r^2}\,dr \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{E}=\frac{\frac{GMm}{2r^2}\,dr}{-\frac{GmM}{2r}} \Rightarrow \frac{dE}{E}=-\frac{dr}{r} \Rightarrow \frac{dr}{r}=-0.02$$

(μείωση του E (περισσότερο αρνητική) ⇒ μείωση του r)

$$u^2=\frac{GM}{r} \Rightarrow d(u^2)=GM\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow 2u\,du=\frac{-GM}{r^2}\,dr \Rightarrow u\,du=-\frac{GM}{2r^2}$$

$$\frac{u\,du}{u^2}=\frac{-\frac{GM}{2r^2}\,dr}{\frac{GM}{r}} \Rightarrow \frac{du}{u}=-\frac{dr}{2r}=0.01$$

(αύξηση του r → αύξηση του u)

$$T=2\pi\frac{r}{u} \Rightarrow dT=2\pi\frac{dr}{u}+2\pi r\,d\left(\frac{1}{u}\right)=2\pi\frac{dr}{u}-2\pi\frac{r}{u^2}\,du \Rightarrow$$

$$\frac{dT}{T}=\frac{dr}{r}-\frac{du}{u}=-0.02-0.01=-0.03$$

(αύξηση του T → αύξηση του u)