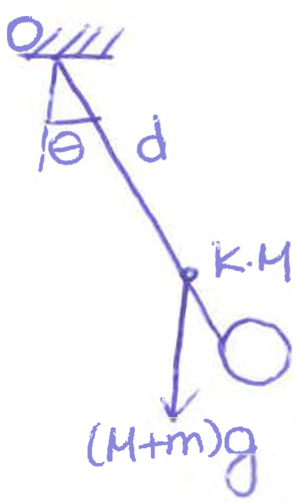
Στο άκρο νήματος μήκους $\ell$ και μάζας $m$ είναι δεμένη σφαίρα μάζας $M$ και ακτίνας $R$. Το νήμα κρέμεται από την οροφή και εκτρέπεται κατά μικρή γωνία $\theta$. α) Γράψτε την εξίσωση της κίνησης β) βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης γ) εξετάστε την περίπτωση $m \to 0$ και $R \ll \ell$




Φυσικό εκκρεμές

α) I = ροπή αδράνειας ως προς το σημείο ανάρτησης O

d = απόσταση του KM του συστήματος από τον άξονα περιστροφής

Ροπή επαναφοράς $T_z = -(M+m)g \cdot d \sin\theta$

$$T_z = I a \Rightarrow -(M+m)g \cdot d \sin\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1)$$

Όταν $\theta$ = μικρό $\to \sin\theta \simeq \theta$ Οπότε:

$$(1) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(M+m)gd}{I} \cdot \theta = 0 \qquad (2)$$

που είναι εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης

Το νήμα μπορεί να θεωρηθεί ράβδος με μάζα $m$ και μήκος $\ell$: $\quad I_N = \frac{1}{3} m \ell^2 \qquad (3)$

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς O:

$$I_\Sigma = \underbrace{\frac{2}{5} M R^2}_{\text{ως προς άξονα που περνά από το κ.μ της σφαίρας}} + M(R+\ell)^2 \text{ (από Steiner)} \qquad (4)$$

Άρα η ολική ροπή αδράνειας:

$$(3),(4) \Rightarrow I_{ολ} = \frac{1}{3} m\ell^2 + \frac{2}{5} MR^2 + M(R+\ell)^2 \quad (5)$$

Από τον ορισμό του ΚΜ: θεωρούμε ότι το νήμα έχει τη μάζα του στο ΚΜ που είναι στο μέσο της

$$d = \frac{\frac{m\ell}{2} + M(R+\ell)}{M+m} \quad (6)$$

Επομένως με βάση (5),(6):

$$(2) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{g\,\frac{\frac{m\ell}{2} + M(R+\ell)}{\frac{m\ell^2}{3} + \frac{2MR^2}{5} + M(R+\ell)^2}}_{\omega^2}\,\theta = 0$$

β) $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{3} + \frac{2MR^2}{5} + M(R+\ell)^2}{g\left[\frac{m\ell}{2} + M(R+\ell)\right]}}$

γ) Για $m \to 0$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2R^2}{5} + (R+\ell)^2}{g(R+\ell)}} \quad (7)$

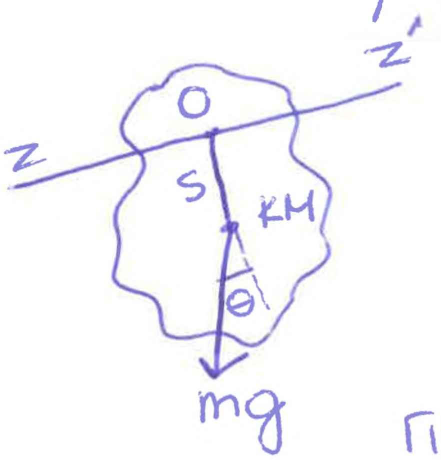
Για $R \ll \ell$ δηλαδή $\ell + R = \ell$:

$$(7) \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Επομένως το εκκρεμές που περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να θεωρηθεί απλό, αρκεί το νήμα να έχει αμελητέα μάζα $(m=0)$ ενώ η ακτίνα της σφαίρας $(R)$ να είναι πολύ μικρότερη από το μήκος του νήματος $(R \ll \ell)$

Στερεό σώμα μάζας m κρέμεται από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από σημείο που απέχει s από το κέντρο μάζας ΚΜ του σώματος. Έστω $I_C$ η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς το ΚΜ. Θεωρούμε τις τριβές αμελητέες.

Βρείτε τη διαφορική εξίσωση της κίνησης και την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων σαν συνάρτηση του s και αποδείξτε ότι:
α) υπάρχουν δύο τιμές του $(s_1, s_2)$ που αντιστοιχούν σε αυτήν την περίοδο β) η περίοδος μπορεί να γραφεί και με τη μορφή $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(s_1+s_2)}{g}}$ Βρείτε για ποια τιμή του s η περίοδος είναι ελάχιστη




Αν zz' ο άξονας που διέρχεται από το O έχουμε:

$$I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgs \cdot \sin\theta \quad (1)$$

Για μικρό θ:

$$(1) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgs}{I_z}\theta = 0 \qquad (2) \text{ όπου } \omega^2 = \frac{mgs}{I_z}$$

$$I_z = I_C + ms^2 \qquad (3)$$

Άρα: $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + ms^2}{mgs}} \qquad (4)$$

α) $$(4) \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{I_C + ms^2}{mgs} \Rightarrow s^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2}s + \frac{I_C}{m} = 0$$

Άρα η λύση της δευτεροβάθμιας ως προς s:

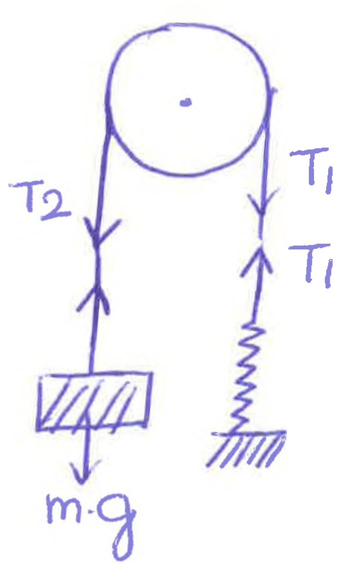
$$S_1 = \frac{gT^2}{8\pi^2} + \sqrt{\frac{g^2T^4}{64\pi^4} - \frac{I_c}{m}}$$

$$S_2 = \frac{gT^2}{8\pi^2} - \sqrt{\frac{g^2T^4}{64\pi^4} - \frac{I_c}{m}}$$

β) Παρατηρούμε ότι: $S_1 + S_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{S_1+S_2}{g}}$

Από την (4.) $\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{I_c + ms^2}{mgs}\right) = 0 \Rightarrow S_{min} = \sqrt{\frac{I_c}{m}}$

Αβαρές και μη εκτατό νήμα που περνά από κυλινδρική τροχαλία μάζας m και ακτίνας R, στο ένα άκρο είναι συνδεδεμένο με μάζα m, ενώ στο άλλο με ελατήριο σταθεράς K, το οποίο είναι στερεωμένο. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί. Τραβάμε λίγο προς τα κάτω τη μάζα m, εκτρέποντας την από τη θέση ισορροπίας. Να υπολογιστεί η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων. Θεωρούμε ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία.




Κατά την ισορροπία του συστήματος, το ελατήριο θα εκταθεί κατά $x_0$ οπότε:

$$mg = T = kx_0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k} \quad (1)$$

Όταν το σύστημα κινείται για το σώμα ισχύει:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - T_2 \quad (2)$$

Για την τροχαλία: $$(T_2 - T_1)R = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3)$$

Για το ελατήριο: $$T_1 = k(x + x_0) \quad (4)$$

Επειδή το νήμα είναι κολλημένο στην τροχαλία:

$x = R\theta$ οπότε $$\frac{d^2x}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (5)$$

Το x ισούται με την μετακίνηση κάποιου σημείου του νήματος που είναι ίσο με την μετακίνηση ενός σημείου στην περιφέρεια της τροχαλίας

Με βάση (1)→(5)

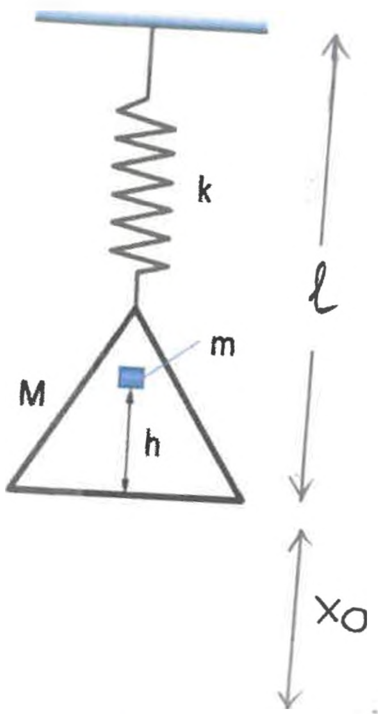
$$\left(mR+\frac{I}{R}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}+KR\theta=0 \qquad (6)$$

$\left[I=\frac{mR^2}{2}\right.$ για τροχαλία$\left.\right]$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2k}{3m}\theta=0$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

Σε ισορροπούσα πλατφόρμα μάζας M που είναι κρεμασμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς K πέφτει σώμα μάζας m από ύψος h και κολλά πάνω της. Υπολογίστε το πλάτος των ταλαντώσεων του συστήματος




Λύση

Το σύστημα θα ταλαντώνεται γύρω από μια καινούργια θέση που απέχει απόσταση $x_0$ από τη θέση στην οποία βρίσκεται η πλατφόρμα πριν κολλήσει η μάζα m

Στη θέση ισορροπίας:

πριν $M\cdot g = K\cdot \ell$ (1)

μετά $(M+m)g = K(x_0+\ell) \Rightarrow$
$Mg+mg = Kx_0+K\ell$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow \cancel{K\ell}+mg = Kx_0+\cancel{K\ell} \Rightarrow x_0=\frac{mg}{K}$ (3)

Για την ταλάντωση γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας ισχύει:

$$(M+m)\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \quad \text{όπου} \quad \omega=\sqrt{\frac{K}{m+M}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=A\cos(\omega t+\varphi)\Rightarrow x^2\omega^2=A^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi) \\ u=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)\Rightarrow u^2=A^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(πρόσθεση κατά μέλη)}$$

$$x^2\omega^2+u^2=A^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)+A^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)\Rightarrow$$

$$x^2\omega^2+u^2=A^2\omega^2\Rightarrow A^2=\frac{x^2\omega^2+u^2}{\omega^2} \quad (4)$$

Το σώμα m πριν την κρούση στην πλατφόρμα έχει ταχύτητα u.
Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$\frac{1}{2}mu^2=mgh\Rightarrow u=\sqrt{2gh} \quad (5)$$

Σύμφωνα με τη διατήρηση της ορμής πριν και μετά την κρούση:

$$m\cdot u=(M+m)u_0\Rightarrow u_0=\frac{mu}{M+m}\overset{(5)}{\Rightarrow} u_0=\frac{m\sqrt{2gh}}{M+m} \quad (6)$$

όπου $u_0$ = ταχύτητα της πλατφόρμας μαζί με τη μάζα m

Αντικαθιστώντας την (3) και (6) στη σχέση (4) προκύπτει:

$$A=\frac{mg}{K}\sqrt{1+\frac{2Kh}{(M+m)g}}$$