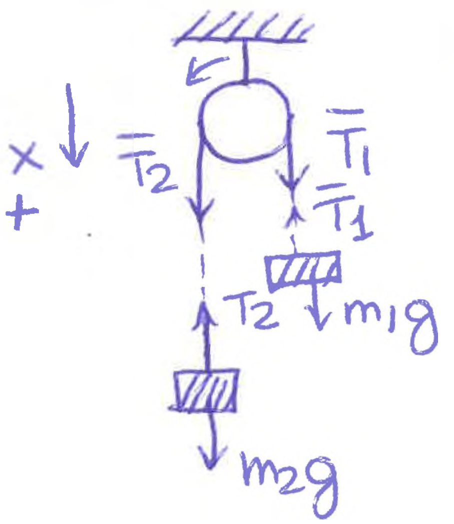
Δύο μάζες m_1 και m_2 $(m_2>m_1)$ συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα που είναι περασμένο σε τροχαλία, η οποία έχει το σχήμα κυλίνδρου ακτίνας R και μάζας M. Θεωρούμε ότι το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Υπολογίστε την επιτάχυνση του m_2 όταν το σύστημα αφεθεί ελεύθερο (μηχανή Atwood)



• Παρατηρούμε ότι $\bar{T}_1 \neq \bar{T}_2$ επειδή ασκούνται στην τροχαλία και πρέπει να δημιουργήσουν ροπή που θα την αναγκάσει να περιστραφεί

• Για το σώμα m_1 έχουμε:

$$m_1 \cdot g - T_1 = -m_1 \alpha \quad (1)$$

↑ στιγμιαία επιτάχυνση

Για το m_2: $$m_2 \cdot g - T_2 = m_2 \alpha \quad (2)$$

Για την τροχαλία: $$(T_2 - T_1)R = I \frac{d\omega}{dt} \quad (3)$$

όπου α η γραμμική επιτάχυνση των m_1, m_2, I ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της και $\frac{d\omega}{dt}$ η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας

Για τον κύλινδρο: $$I = \frac{1}{2} M R^2 \quad (4)$$

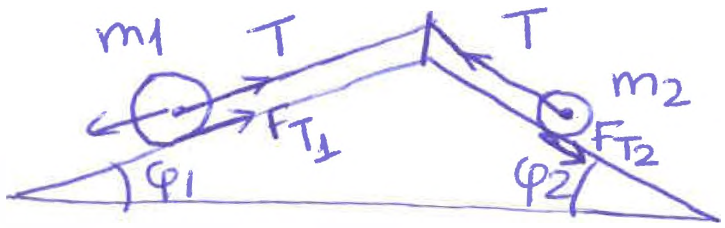
Ισχύει: $a_\gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\alpha}{R}$ (5) (γωνιακή επιτάχυνση)

$\left[\alpha = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} \Rightarrow \upsilon = \omega \cdot R\right]$

Από τις (1)→(5) προκύπτει ότι:

$$\alpha = \frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2 + \frac{M}{2})g}$$

Στη διάταξη του παρακάτω σχήματος οι δύο σφαίρες είναι συνδεδεμένες με μη εκτατό νήμα και κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Υπολογίστε την γραμμική και γωνιακή ταχύτητα κάθε σφαίρας.



$$I_{σφαίρας} = \frac{2}{5} m R^2$$

Για το σώμα m_1:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$m_1 \cdot g \sin\varphi_1 - F_{T_1} - T = m_1 a \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{T} = I \vec{\alpha}$$

$$F_{T_1} \cdot R_1 = I_1 \cdot \alpha_1 \Rightarrow F_{T_1} \cdot R_1 = \left(\frac{2}{5} m_1 \cdot R_1^2\right) \cdot \frac{a}{R_1} \Rightarrow F_{T_1} = \frac{2}{5} m_1 \cdot a \quad (2)$$

Για το σώμα m_2:

$$T - m_2 \cdot g \sin\varphi_2 - F_{T_2} = m_2 \cdot a \quad (3)$$

$$F_{T_2} R_2 = I_2 \cdot \alpha_2 \Rightarrow F_{T_2} \cdot R_2 = \left(\frac{2}{5} m_2 \cdot R_2^2\right) \frac{a}{R_2} \Rightarrow$$

$$F_{T_2} = \frac{2}{5} m_2 \cdot a \quad (4)$$

$$(1),(2) \Rightarrow m_1 \cdot g \sin\varphi_1 - \frac{2}{5} m_1 \cdot a - T = m_1 \cdot a \Rightarrow$$

$$m_1 \cdot g \sin\varphi_1 - T = \frac{7}{5} m_1 \cdot a \quad (5)$$

$$(3),(4) \Rightarrow T - m_2 g \sin\varphi_2 - \frac{2}{5} m_2 \cdot a = m_2 \cdot a$$

$$T - m_2 g \sin\varphi_2 = \frac{7}{5} m_2 a \quad (6)$$

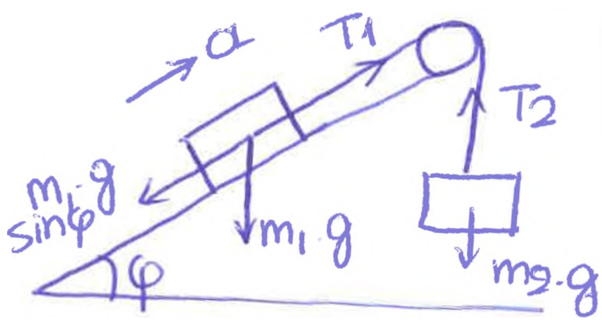
$$(5),(6) \Rightarrow a = \frac{5}{7} \frac{(m_1 \sin\varphi_1 - m_2 \sin\varphi_2) g}{m_1 + m_2}$$

Γραμμική ταχύτητα $a = \frac{5}{7} \frac{(m_1 \sin\varphi_1 - m_2 \sin\varphi_2) g}{m_1 + m_2}$

Γωνιακή ταχύτητα $\alpha_1 = \frac{a}{R_1}$

$\alpha_2 = \frac{a}{R_2}$

Δύο σώματα m_1, m_2 συνδέονται με νήμα αμελητέας μάζας που περνά από τροχαλία ακτίνας R.
Το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο κινείται προς τα πάνω χωρίς τριβές και με σταθερή επιτάχυνση a. 1) Προσδιορίστε τις τάσεις T_1 και T_2 στο νήμα 2) βρείτε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας



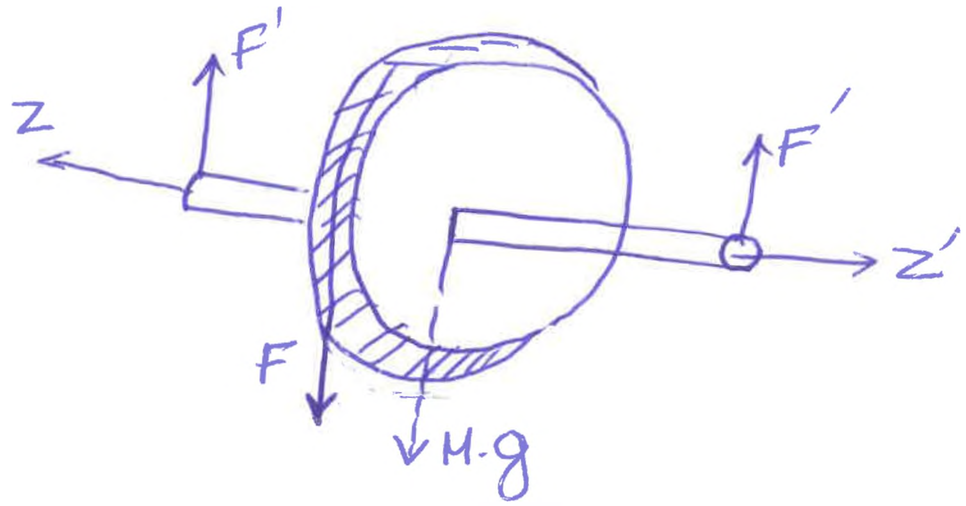
$$T_1 - m_1 \cdot g \cdot \sin\varphi = m_1 \cdot a \Rightarrow T_1 = m_1 \cdot a + m_1 \cdot g \cdot \sin\varphi$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 \cdot a \Rightarrow T_2 = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a$$

Ροπή δύναμης $\quad (T_2 - T_1) \cdot R = \underbrace{I}_{\text{ροπή αδράνειας τροχαλίας}} \cdot a \Rightarrow I = \dfrac{(T_2 - T_1) R}{\frac{a}{R}} =$

$$= \frac{(T_2 - T_1) R^2}{a}$$

Δίσκος ακτίνας 0.5m και μάζας 20kg μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του. Τραβώντας ένα σχοινί που είναι τυλιγμένο γύρω από την περιφέρεια του δίσκου εφαρμόζουμε δύναμη 9.8N. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου και η γωνιακή του ταχύτητα μετά από 2sec. $[I=\frac{1}{2}MR^2]$



ροπή του βάρους $T_B=0$

συνισταμένη ροπών F' $\Sigma_{F'}=0$

Άρα η μόνη δύναμη που έχει ροπή είναι η F

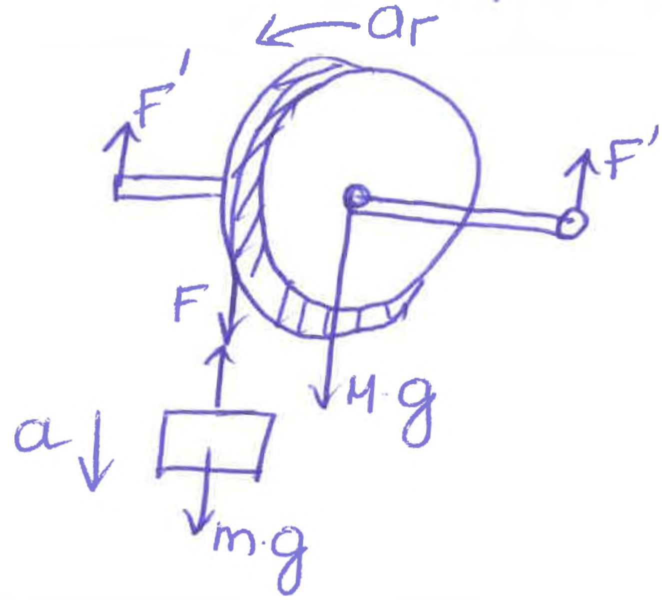
$$\left.\begin{array}{l} T_F = F \cdot R \\ T_F = I \cdot a_r \end{array}\right\} \Rightarrow a_r = \frac{FR}{I} = \frac{FR}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2F}{MR^2} = 1{,}96\,rad/s^2$$

$$a_r = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \omega = a_r \cdot t = 3{,}92\ rad/s$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων είναι 0 αφού δεν έχουμε μεταφορική κίνηση

$$\Sigma_F = 0 \Rightarrow 2F' - Mg - F = 0 \Rightarrow F' = 102{,}9N$$

Ίδιο περίπτωση αλλά κρέμεται σώμα μάζας m.



Εφόσον το σώμα κινείται προς τα κάτω με επιτάχυνση γραμμική a $F_{0λ} \neq 0$ (αντίθετο με την προηγούμενη περίπτωση) και $F \neq m \cdot g$ και συγκεκριμένα $F < m \cdot g$. Επομένως και στο δίσκο ασκείται μικρότερη ροπή

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot g - F = m \cdot a = m R a_r \\ F R = I a_r \Rightarrow F = \dfrac{I a_r}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$a = a_r \cdot R$

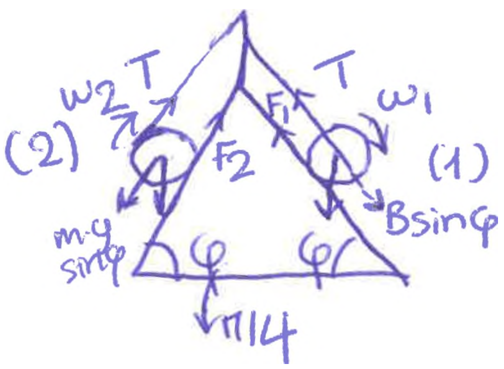
$$m \cdot g - \frac{I a_r}{R} = m R a_r \Rightarrow a_r = \frac{mg}{(m + \frac{1}{2} M)} = 1{,}80 \text{ rad/sec}^2$$

Άρα η γωνιακή επιτάχυνση είναι μικρότερη από την προηγούμενη περίπτωση

Γραμμική επιτάχυνση $a = R a_r = 0{,}90$ rad/sec^2

Σε ακίνητο πρίσμα βρίσκονται δύο ίδιοι κύλινδροι συνδεδεμένοι με αβαρές και μη εκτατό νήμα. Στον κύλινδρο 1 το νήμα είναι δεμένο στον άξονα του, ενώ στο 2 είναι περιτυλιγμένο. Οι γωνίες της βάσης του πρίσματος είναι π/4. Θεωρούμε ότι η μόνη δυνατή κίνηση των κυλίνδρων είναι η κύλιση χωρίς ολίσθηση. Θα κινηθεί το σύστημα; Αν ναι, με ποια φορά και με ποια ταχύτητα;

Έστω ότι ο κύλινδρος 1 κατεβαίνει και ο 2 ανεβαίνει.



Για κάθε κύλινδρο οι εξισώσεις κίνησης του ΚΜ είναι:

$$m \cdot g \sin\varphi - T - F_1 = m\frac{du_1}{dt} \quad (1)$$

$$T + F_2 - mg\sin\varphi = m\frac{du_2}{dt} \quad (2)$$

Για την περιστροφική κίνηση: $\left(I = \frac{1}{2} m R^2\right)$ $[u = \omega \cdot R]$

$$F_1 \cdot R = I\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{2}R^2\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{2}mR\frac{du_1}{dt} \quad (3)$$ [η ροπή του T είναι 0 ως. τον κύλινδρο 1]

$$(T - F_2)R = \frac{1}{2}mR^2\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{2}\omega R\frac{du_2}{dt} \quad (4)$$

Επειδή οι κύλινδροι κυλίονται χωρίς ολίσθηση, ισχύει για κάθε έναν $u = \omega \cdot R$

Όταν ο κύλινδρος (2) ανεβαίνει κατά s, θα ξετυλιχθεί απ' αυτόν και νήμα μήκους s, άρα στον κύλινδρο (1) θα ξετυλιχθεί 2s οπότε ισχύει:

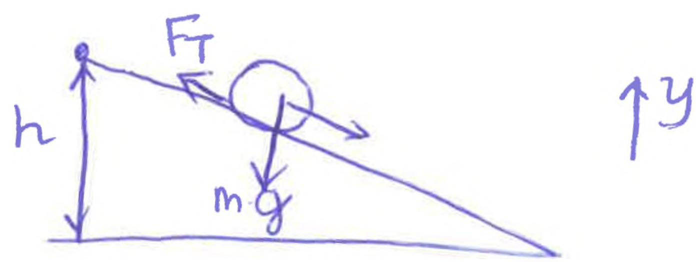
$$\frac{dv_1}{dt} = 2\frac{dv_2}{dt} \quad (5)$$

Από τις (1)→(5) βρίσκουμε: $[\varphi = \pi/4]$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{4}{15} g \sin\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{15} g \Rightarrow v_1 = \frac{2\sqrt{2}}{15} g \cdot t > 0$$

Επομένως το σύστημα θα κινηθεί με την ταχύτητα που βρήκαμε και τη φορά που επιλέξαμε

Μια σφαίρα, ένας κύλινδρος και ένας δακτύλιος έχουν την ίδια ακτίνα. Κυλούν σε ένα κεκλιμένο επίπεδο από ύψος h. Να βρεθεί η ταχύτητα ως συνάρτηση του ύψους h με την οποία φτάνει το καθε σώμα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.



στο ύψος h: $E_{αρχ} = K + U = M \cdot g \cdot h$ $(υ=0)$ μόνο δυναμική ενέργεια

Σε οποιαδήποτε ενδιάμεση θέση:

$$E = \frac{1}{2} M υ^2 + \frac{1}{2} I ω^2 + M g y \quad (1)$$

Επειδή $υ = ωR$: $(1) \Rightarrow E = \frac{1}{2} M υ^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} υ^2 + M g y$ (2).

Στη βάση: $y = 0 \Rightarrow$ $E_β = \frac{1}{2} M υ^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} υ^2$

Εξισώνοντας την ολική ενέργεια με την αρχική

$$E_{αρχ} = E_β \Rightarrow M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} M υ^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} υ^2 \Rightarrow$$

$$M \cdot g h = \left(\frac{1}{2} M + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} \right) υ^2 \Rightarrow υ^2 = \frac{2 M g h}{M + \frac{I}{R^2}}$$

Για τη σφαίρα: $I = \frac{2}{5} M R^2 \rightarrow υ^2 = \frac{10}{7} g h$ (πιο γρήγορα)

Για τον κύλινδρο: $I = \frac{1}{2} M R^2 \rightarrow υ^2 = \frac{4}{3} g h$

Για το δακτύλιο: $I = M R^2 \rightarrow υ^2 = g h$