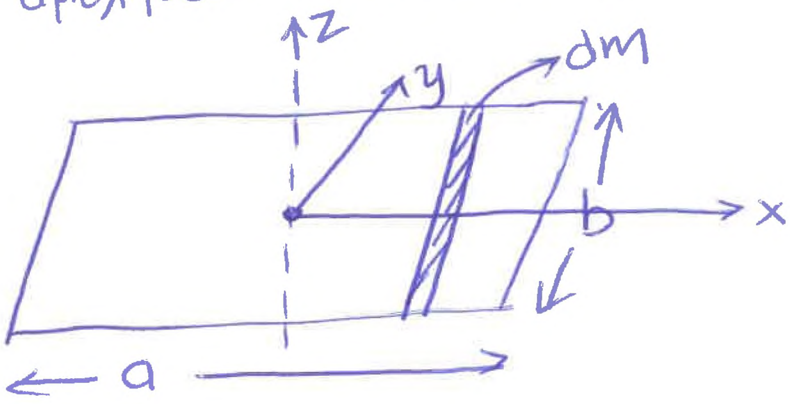
Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας μιας πλάκας ορθογώνιας αμελητέου πάχους με άξονα περιστροφής κατακόρυφο που περνά από το κέντρο μάζας του



Ροπή μοναδιαίας ράβδου μάζας dm ως προς άξονα περιστροφής

$$I_0 = \frac{1}{12}\, dm\, b^2$$

Θεώρημα του Steiner για οποιαδήποτε ράβδο που απέχει απόσταση x από τον άξονα περιστροφής

$$dI = I_0 + dm\, x^2 = \frac{1}{12} b^2 dm + x^2 dm =$$

$$= \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2\right) dm \qquad (1)$$

$$(2)$$

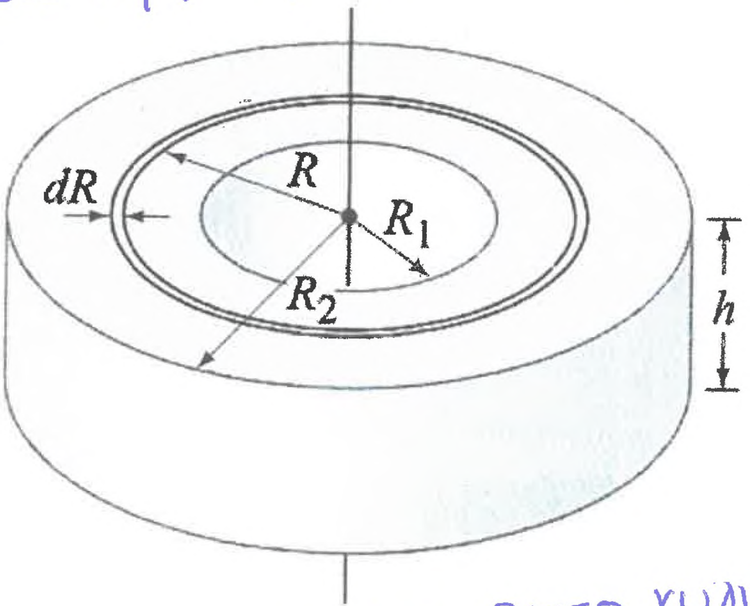
$$dm = \frac{M}{ab}\, b\, dx = \frac{M}{a}\, dx$$

ολοκλήρωση ως προς x

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{M}{a} dx \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2\right) = \frac{M}{\cancel{a}} \frac{b^2}{12} \cancel{a} + \frac{M}{a} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(-\frac{a}{2}\right)^3}{3} =$$

$$= \frac{Mb^2}{12} + Ma^2 \frac{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}{3} = \frac{Mb^2}{12} + \frac{Ma^2}{12} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ενός ομοιόμορφου κυλινδρικού κελύφους εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2 και μάζας Μ, εάν ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο και είναι παράλληλος στον άξονα συμμετρίας. Κατόπιν υπολογίστε τη ροπή αδράνειας για ένα συμπαγές κύλινδρο.



Λύση

Επιλέγουμε ως στοιχειώδη όγκο ένα λεπτό κυλινδρικό φλοιό που έχει τη μορφή ενός λεπτού δακτυλίου ακτίνας R, πάχους dR και ύψους h. Ο όγκος αυτός ισούται:

$$dV = 2\pi R \cdot h \cdot dR \quad \text{(όγκος λεπτού δακτυλίου)}$$

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot 2\pi R \cdot h \cdot dR$$

$$I = \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot 2\pi R^3 \cdot h \, dR = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_2} R^3 dR = 2\pi\rho h \left. \frac{R^4}{4} \right|_{R_1}^{R_2} =$$

$$= 2\pi\rho h \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = \frac{\pi\rho h}{2}(R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi\rho h}{2}(R_2^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2) \quad (1)$$

Αλλά ο όγκος κυλίνδρου είναι: $V = \pi h (R_2^2 - R_1^2)$ (2)

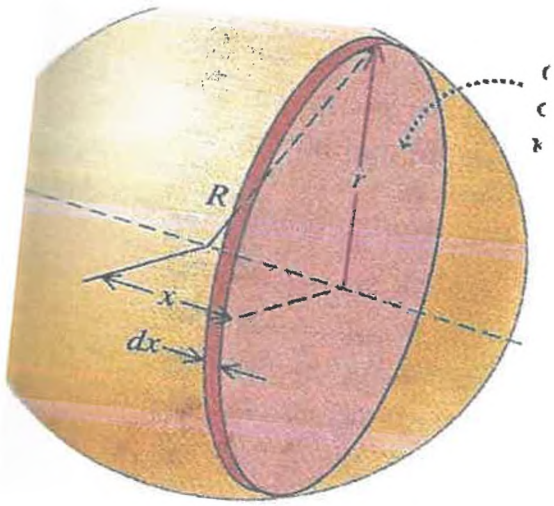
$$(1),(2) \Rightarrow I = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2)$$

Όταν $R_2 = R$ και $R_1 = 0$ ο κύλινδρος είναι συμπαγής

$$I = \frac{M}{2}R^2$$

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας συμπαγούς ομογενούς σφαίρας πυκνότητας ρ ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Η ακτίνα της σφαίρας είναι R.

Λύση Διαιρούμε τη σφαίρα σε λεπτούς συμπαγείς δίσκους πάχους dx και σε απόσταση x από το κέντρο της σφαίρας.



Η ακτίνα r του δίσκου είναι:

$$r=\sqrt{R^2-x^2}$$

Ο όγκος του δίσκου:

$$dV=\pi r^2 dx=\pi(R^2-x^2)dx$$

Η μάζα του:

$$dm=\rho\cdot dV=\pi\rho(R^2-x^2)dx$$

Η ροπή αδράνειας του στοιχειώδους δίσκου (θεωρείται γνωστή) είναι:

$$dI=\frac{1}{2}r^2dm=\frac{1}{2}(R^2-x^2)^2[\pi\rho(R^2-x^2)dx]=$$

$$=\frac{\pi\rho}{2}(R^2-x^2)^2dx$$

Ολοκληρώνουμε από 0 μέχρι R για το ένα ημισφαίριο και μετά πολλαπλασιάζουμε ×2 ή ολοκληρώνουμε από $-R$ μέχρι $+R$ για όλη τη σφαίρα.

$$I=\frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)^2dx=\left[\int_{-R}^{R}R^4dx-\int_{-R}^{R}2R^2x^2dx+\int_{-R}^{R}x^4dx\right]\frac{\pi\rho}{2}=$$

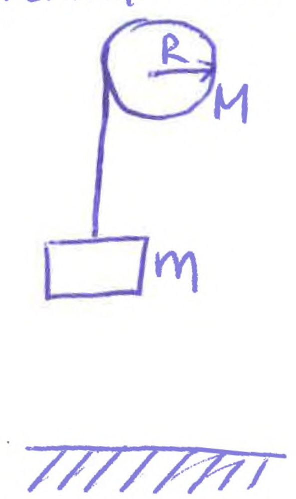
$$=\left(R^4\cdot 2R-2R^2\frac{2R^3}{3}+\frac{2R^5}{5}\right)\frac{\pi\rho}{2}=\frac{8}{15}\rho\pi R^5$$

Άρα: $I=\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\rho\pi R^3\right)R^2=\frac{2}{5}MR^2$

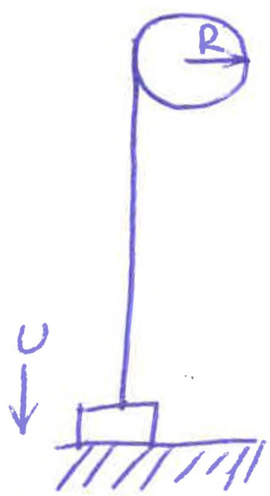
όπου $V_{σφαίρας}=\frac{4}{3}\pi R^3$ και $M=\rho\cdot V$

Τυλίγουμε ένα ελαφρύ, μη εκτατό σύρμα γύρω από έναν συμπαγή κύλινδρο μάζας M και ακτίνας R. Ο κύλινδρος περιστρέφεται με αμελητέα τριβή γύρω από ένα σταθερό οριζόντιο άξονα. Στερεώνουμε το ελεύθερο άκρο του σύρματος σε σώμα μάζας m και αφήνουμε τη μάζα με μηδενική αρχική ταχύτητα σε ύψος h από το έδαφος. Καθώς πέφτει το σώμα, το σύρμα ξετυλίγεται χωρίς ολίσθηση. Υπολογίστε την ταχύτητα της μάζας m και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του κυλίνδρου, όταν η μάζα φτάσει στο έδαφος.

Αρχική κατάσταση
(κύλινδρος και σώμα σε ηρεμία)



Τελική κατάσταση
(αμέσως πριν φτάσει το σώμα στο έδαφος)



Υποθέσεις: _Το σύρμα δεν ολισθαίνει και η τριβή δεν παράγει έργο
- Το σύρμα είναι αβαρές ώστε οι δυνάμεις που ασκεί στον κύλινδρο και το σώμα να έχουν το ίδιο μέτρο
- αγνοούμε την βαρυτική δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου γιατί δεν μεταβάλλεται το ύψος τα

Αρχικά: $K_1 = 0$

$U_1 = m \cdot g \cdot h$

Τελικά: $K_2 = \frac{1}{2} m υ^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

$U_2 = 0$

$I=\frac{1}{2}MR^2$ (ροπή αδράνειας κυλίνδρου)

$u=R\cdot\omega \Rightarrow \omega=\frac{u}{R}$ (η ταχύτητα του σώματος είναι ίση με την εφαπτομενική ταχύτητα στην περιφέρεια του κυλίνδρου)

Αρχή διατήρησης ενέργειας

$$K_1+U_1=K_2+U_2 \Rightarrow m\cdot g h=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{u}{R}\right)^2 \Rightarrow$$

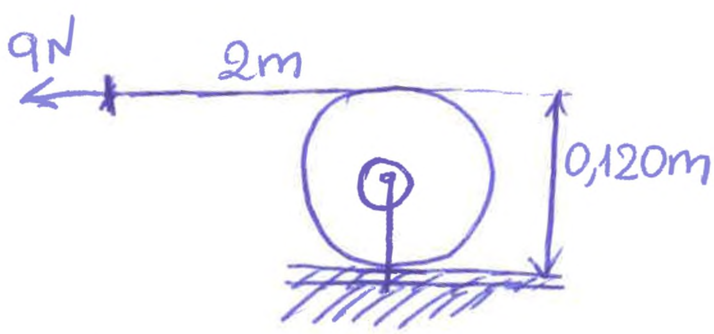
$$u=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{M}{2m}}}$$

Οπότε: $\omega=\frac{u}{R}$

Διερεύνηση: Όταν $M>>m$ τότε ταχύτητα $u=$μικρή

Όταν $M<<m$ τότε $u=\sqrt{2gh}$ ελεύθερη πτώση

Τυλίγουμε ένα ελαφρύ, μη εκτατό συρματόσχοινο γύρω από έναν συμπαγή κύλινδρο μάζας 50kg και διαμέτρου 0,120m ο οποίος περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από έναν σταθερό οριζόντιο άξονα στερεωμένος με ρουλεμάν. Έλκουμε το ελεύθερο άκρο του συρματόσχοινου με σταθερή δύναμη F=9N για απόσταση 2m. Το συρματόσχοινο ξετυλίγεται χωρίς ολίσθηση, στρέφοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ο κύλινδρος αρχικά είναι σε ηρεμία. Υπολογίστε τα μέτρα της τελικής γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου και της τελικής ταχύτητας του συρματόσχοινου.



R=ακτίνα περιστροφής=
$=\frac{0{,}120}{2}=0{,}06m$

Υποθέσεις: - Το συρματόσχοινο δεν έχει μάζα. Επομένως μόνον ο κύλινδρος έχει κινητική ενέργεια

- Δεν υπάρχουν μεταβολές στη δυναμική ενέργεια
- Δεν υπάρχει ολίσθηση του συρματόσχοινου στον κύλινδρο και επομένως δεν υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας
- Επειδή το συρματόσχοινο είναι αβαρές, η δύναμη που ασκεί στην περιφέρεια του κυλίνδρου είναι F=9N

Ο κύλινδρος αρχικά ηρεμεί: $K_1=0$

Μετά την μετακίνηση του συρματόσχοινου κατά 2m=s ο κύλινδρος έχει κινητική ενέργεια $K_2=\frac{1}{2}I\omega^2$

Ροπή αδράνειας κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (0,06)^2 =$

$= 0,090 \, kg \cdot m^2$

Αρχή διατήρησης ενέργειας

$$K_1 + U_1 + W = K_2 + U_2$$

$K_1 = 0$ ↓ έργο που παράγεται

$U_1 = 0, \; U_2 = 0$ από την εξωτερική δύναμη F

Άρα: $W = K_2 \Rightarrow F \cdot S = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \times 9 \times 2}{0,090}} = 20 \frac{rad}{s}$

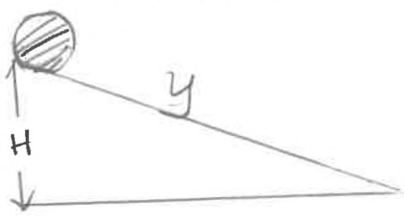
Το μέτρο της ταχύτητας του συρματόσχοινου θα είναι ίσο με το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας υ του κυλίνδρου στο σημείο αυτό

$$u = R \cdot \omega = 0,060 \times 20 = 1,2 \; m/s$$

Αν η μάζα του συρματόσχοινου ήταν σημαντική τότε μέρος του έργου $W = F \cdot S = 18J$. θα μετατρέποταν σε κινητική ενέργεια του συρματόσχοινου. Επομένως η K_2 και το ω θα είχαν μικρότερες τιμές.

Ποια θα είναι η ταχύτητα συμπαγούς σφαίρας μάζας Μ και ακτίνας r όταν φτάσει στη βάση κεκλιμένου επιπέδου αν ξεκινά από ηρεμία σε ύψος Η και κυλά χωρίς να ολισθαίνει?

Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό ενός σώματος που ολισθαίνει προς τα κάτω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο.



$I_k = \frac{2}{5} M r^2$ (για σφαίρα)

y = απόσταση από τη βάση

Στη βάση y=0

(A) Με τη βοήθεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας

Η συνολική ενέργεια σε απόσταση y από τη βάση:

$\frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} I_k \omega^2 + M \cdot g\, y$ (1)

κινητική ενέργεια λόγω μετακίνησης του ΚΜ

ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης

δυναμική ενέργεια

Η τριβή ΔΕΝ παράγει έργο

Χρησιμοποιώντας την (1) για την ολική ενέργεια στη βάση και στην κορυφή και εξισώνοντας:

$0 + 0 + M \cdot g H = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} I_k \omega^2 + 0 \Rightarrow$ (2)

κορυφή   βάση

$MgH = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} M r^2\right)\omega^2$

κύλιση χωρίς ολίσθηση $u = \omega \cdot r \Rightarrow \omega = \frac{u}{r}$ (3)

$(2),(3) \Rightarrow gH = \frac{7}{10} u^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{10}{7} gH}$ (4)

Όταν ένα σώμα ολισθαίνει σε λείο κεκλιμένο επίπεδο ισχύει:

$mgH = \frac{1}{2} m u^2 \Rightarrow u = \sqrt{2gH}$ (5)

Συγκρίνοντας (4) και (5): Το σώμα που ολισθαίνει φτάνει με μεγαλύτερη ταχύτητα από την κυλιόμενη σφαίρα γιατί στην ολίσθηση όλη η δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική (μεταφορική) και επομένως το ΚΜ έχει μεγαλύτερη ταχύτητα.

Σημείωση:

1) Το ότι η σφαίρα κινείται στο κεκλιμένο βραδύτερα από ότι ένα σώμα που ολισθαίνει (ίδιας μάζας) δεν οφείλεται στην επιβράδυνση λόγω τριβής, αλλά στο γεγονός ότι μέρος της δυναμικής ενέργειας μετατρέπεται σε κινητική λόγω περιστροφής και έτσι απομένει μικρότερη κινητική ενέργεια μεταφοράς.

2) Η ταχύτητα με την οποία φτάνει το στερεό στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου ΔΕΝ εξαρτάται από τη μάζα του και την ακτίνα του αλλά από την κατανομή της μάζας του γύρω από τον άξονα περιστροφής δηλ. το I_K. (και από τη γωνία φ και το ύψος H του επιπέδου) και επειδή I_K είναι ανεξάρτητη του M και R^2, αυτό που το διαφοροποιεί είναι ο συντελεστής

Στεφάνη $I_K = MR^2$

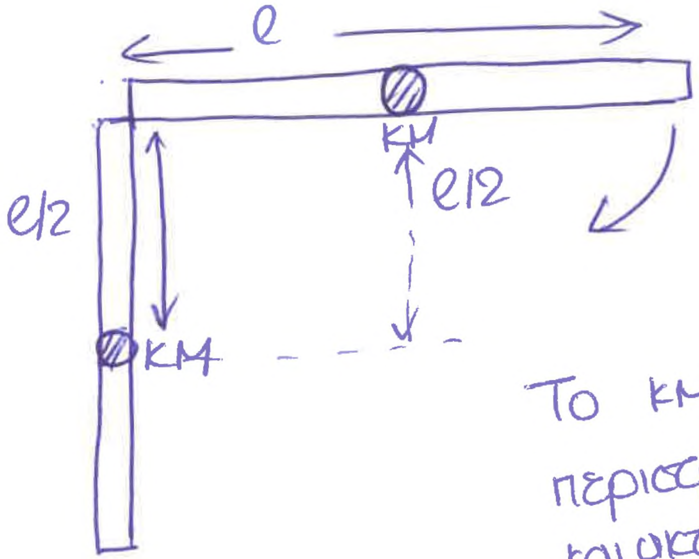
σφαίρα $I_K = \frac{2}{5} MR^2$

κύλινδρος $I_K = \frac{1}{2} MR^2$

Άρα $I_{K\,στεφ} >$ κύλινδρος $>$ σφαίρα $\Rightarrow$

$\omega_{στεφ} <$ κύλινδρος $<$ σφαίρα $\Rightarrow$ $\qquad u = \omega \cdot R$

$u_{στεφ} <$ κύλινδρος $<$ σφαίρα



$I_{KM} = \frac{1}{12} m\ell^2$

Το ΚΜ εκτελεί περιστροφή με άξονα περιστροφής το άκρο της ράβδου και ακτίνα $\ell/2$

Αρχικά: $K_1 = 0$ $\quad U_1 = Mg\frac{\ell}{2}$

Τελικά: $K_2 = \frac{1}{2} I\omega^2$ $\quad U_2 = 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow Mg\frac{\ell}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} I\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{Mg\ell}{I}$ (1)

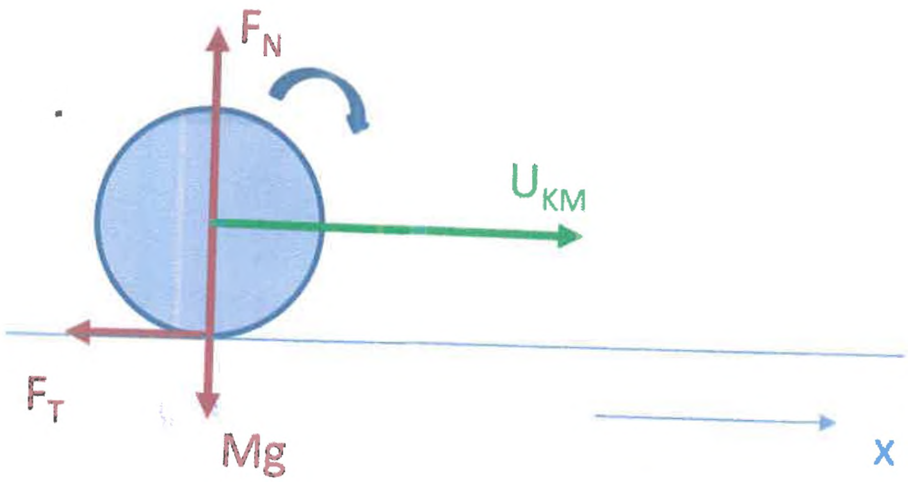
$I = I_{KM} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{12} M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow I = \frac{4M\ell^2}{12} \Rightarrow$

$\boxed{I = \frac{M\ell^2}{3}}$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow \omega^2 = \cancel{M}g\ell \frac{3}{\cancel{M}\ell^2} = \frac{3g}{\ell} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$

$\upsilon = \ell\omega$ γραμμική ταχύτητα στο άκρο της ράβδου

Μια μπάλα του bowling μάζας M και ακτίνας r εκτοξεύεται κατά μήκος μιας επίπεδης επιφάνειας έτσι ώστε αρχικά (t=0) να ολισθαίνει με γραμμική ταχύτητα u_0 χωρις να περιστρέφεται. Στη συνέχεια κάποια στιγμή ενώ ολισθαίνει αρχίζει και στροβιλίζεται και τελικά κυλά χωρίς να ολισθαίνει.Πόσο είναι το χρονικό διάστημα που παρέρχεται μέχρι να ξεκινήσει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει?



1) Μεταφορική κίνηση με ολίσθηση

$$M.a = \Sigma F = -F_T \Rightarrow Ma_x = -\mu F_N = -\mu Mg \Rightarrow a = \frac{-\mu Mg}{M} = -\mu g \text{ (σταθερή)}$$

Ταχύτητα γραμμική του κέντρου μάζας (κμ):

$$u_{KM} = u_0 + at = u_0 - \mu g \cdot t \quad (1)$$

2) Περιστροφική κίνηση $\left(I = \frac{2}{5} Mr^2\right)$

$$\Sigma\tau = I a_r \Rightarrow -F_T \cdot r = \left(\frac{2}{5} Mr^2\right) a_r \Rightarrow a_r = \frac{5\mu g}{2r} = \text{σταθερή}$$

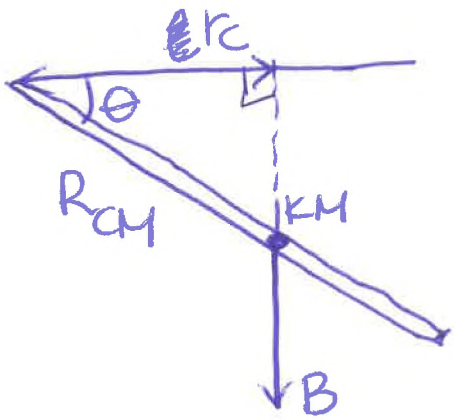
$$\omega = \cancel{\omega_0}^{\,0} + a_r \cdot t \Rightarrow \omega = \frac{5\mu g}{2r} \cdot t \quad (2)$$

Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει κύλιση χωρίς ολίσθηση:

$$u_{KM} = \omega \cdot r \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow u_0 - \mu g t_1 = \frac{5\mu g}{2r} t_1 r \Rightarrow t_1 = \frac{2u_0}{7\mu g}$$

Ομογενής ράβδος μήκους L που περιστρέφεται στο σημείο O με το βάρος της που εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας σε απόσταση $R_{CM}=\frac{5}{9}L$. Δίνεται $I=\frac{7}{18}ML^2$ όπου M το βάρος της ράβδου. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα.



$$r_c = R_{CM}\cdot\cos\theta$$

Ροπή δύναμης

$$\left.\begin{aligned} T &= I a_z = I\frac{d\omega}{dt} \\ T &= B\cdot r_c = M g R_{CM}\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = M\cdot g\,\frac{5}{9}L\cos\theta \Rightarrow$$

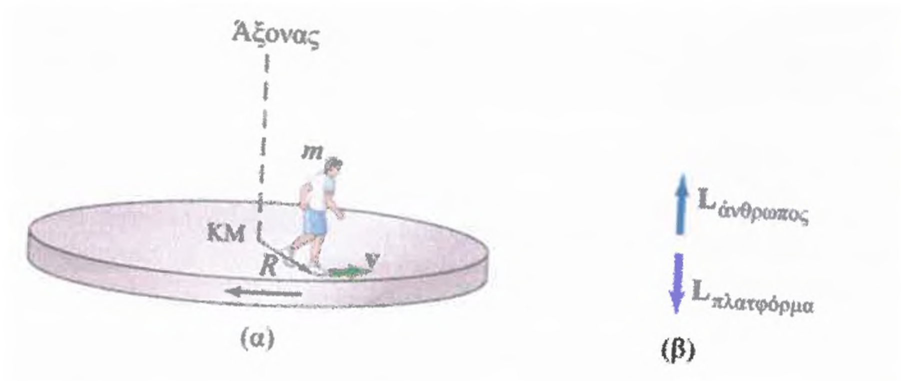
$$\frac{7}{18}\cancel{M}L^2\frac{d\omega}{dt} = \cancel{M}g\,\frac{5}{9}\cancel{L}\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{10}{7}\,\frac{g}{L}\cos\theta \Rightarrow \frac{d\omega}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{10}{7}\,\frac{g}{L}\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{d\omega}{d\theta}\,\omega = \frac{10}{7}\,\frac{g}{L}\cos\theta \Rightarrow \int_0^{\omega}\omega\,d\omega = \frac{10}{7}\,\frac{g}{L}\int_0^{\theta}\cos\theta\,d\theta \Rightarrow$$

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{10}{7}\,\frac{g}{L}\sin\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{20}{7}\,\frac{g}{L}\sin\theta}$$

Ένας άνθρωπος 60 Kg παραμένει ακίνητος στην περιφέρεια μιας κυκλικής πλατφόρμας διαμέτρου 6 m η οποία προσαρμόζεται σε ένα λείο έδρανο με ροπή αδράνειας 1800 $kg.m^2$. Η πλατφόρμα αρχικά ηρεμεί αλλά όταν ο άνθρωπος ξεκινά να τρέχει με ταχύτητα 4,2 m/s ~~(ως προς τη γη)~~ κυκλικά στην περιφέρειά της η πλατφόρμα ξεκινά να περιστρέφεται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Υπολογίστε την γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας



$m = 60kg$
$R = 3m$
$I = 1800 kgm^2$
$υ = 4,2 m/s$

Η συνολική ροπή είναι μηδέν. Οπότε χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής

Αρχικά $L_a = 0$ (άνθρωπος και πλατφόρμα ηρεμούν)

Τελικά $L_T = L_a + L_π$.

Για τον άνθρωπο: $L_a = Rmυ$ (θετική γιατί ο άνθρωπος κινείται αντίθετα στη φορά δεικτών του ρολογιού)

Για την πλατφόρμα: $L = -Iω$ (αρνητική γιατί κινείται κατά τη φορά δεικτών ρολογιού)

Άρα: $mυR - Iω = 0 \Rightarrow ω = \frac{mυR}{I} = 0,42 rad/s$

$f = \frac{ω}{2π} = 0,067 rev/s$

$T = \frac{1}{f} = 15s$

Στο σημείο του χώρου $\vec{r}=(1,1,1)$ επενεργούν 4 δυνάμεις $\vec{F}_1=(1,0,1)$, $\vec{F}_2=(2,-1,0)$, $\vec{F}_3=(-2,-1,0)$ και $\vec{F}_4=(0,1,1)$. Να βρεθεί η συνισταμένη ροπή του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων και να εξεταστεί αν αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από τη συνισταμένη δύναμη με τον ίδιο μοχλοβραχίονα

$$\vec{T}_{ολ}=\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{T}_3+\vec{T}_4=(\vec{r}\times\vec{F}_1)+(\vec{r}\times\vec{F}_2)+(\vec{r}\times\vec{F}_3)+(\vec{r}\times\vec{F}_4)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\2&-1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\-2&1&1\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}\Rightarrow \vec{T}_{ολ}=(2,-2,0)$$

Συνισταμένη δύναμη $\vec{F}_{ολ}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4=(1,1,3)$

$$\vec{r}\times\vec{F}_{ολ}=(1,1,1)\times(1,1,3)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\1&1&3\end{vmatrix}=$$

$$=(2,-2,0)$$

Άρα μπορεί να αντικατασταθεί από την $\vec{F}_{ολ}$ με τον ίδιο μοχλοβραχίονα, όταν οι δυνάμεις είναι συντρέχουσες

Όταν οι δυνάμεις ΔΕΝ είναι συντρέχουσες δεν μπορεί να γίνει η αντικατάσταση

π.χ. $\vec{F_1} = (1,1,0)$ με $\vec{r_1} = (1,1,1)$

$\vec{F_2} = (-1,2,1)$ με $\vec{r_2} = (1,2,0)$

$\vec{F_3} = (1,-1,-1)$ με $\vec{r_3} = (-1,1,1)$

$\vec{F}_{ολ} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = (1,2,0)$

$$\vec{T}_{ολ} = \vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} + \vec{r_3} \times \vec{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,1,0) + (2,-1,4) + (0,0,0) =$$

$$\Rightarrow \vec{T}_{ολ} = (1,0,4)$$

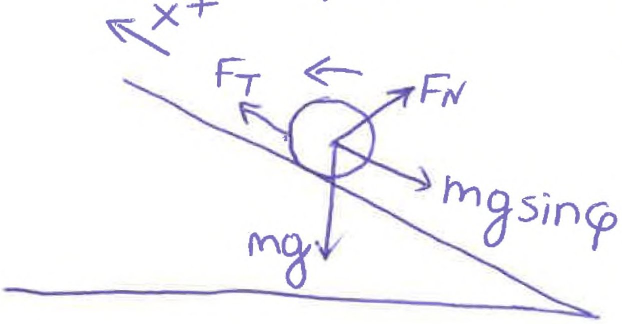
Η συνισταμένη $\vec{T}_{ολ}$ ΔΕΝ είναι κάθετη στη συνισταμένη δύναμη $\vec{F}_{ολ}$

$$\vec{F}_{ολ} \cdot \vec{T}_{ολ} = (1,2,0) \cdot (1,0,4) = 1 \neq 0$$

Άνοδος (Επιβράδυνση)

$\odot\,\omega$

$\otimes\,a_z$



Μεταφορική

$$-mg\sin\varphi + F_T = ma \Rightarrow F_T = mg\sin\varphi + ma = mg\sin\varphi + m\frac{du}{dt}$$ (1)

Περιστροφική

$$F_T R = -I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow F_T R = -\frac{1}{2}mR^2\frac{d\omega}{dt} \xRightarrow{u=\omega R} F_T R = -\frac{1}{2}mR^2\frac{du}{dt\,R}$$

$$\Rightarrow \left(mg\sin\varphi + m\frac{du}{dt}\right)R = -\frac{1}{2}mR\frac{du}{dt} \Rightarrow g\sin\varphi + \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{du}{dt} \Rightarrow$$

$$-\frac{3}{2}\frac{du}{dt} = g\sin\varphi \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{2}{3}g\sin\varphi \Rightarrow \int_{u_0}^{u} du = -\frac{2}{3}g\sin\varphi\int_0^t dt$$

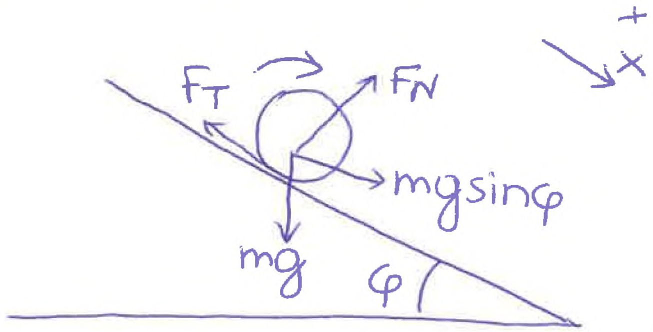
$$\Rightarrow u = u_0 - \frac{2}{3}g\sin\varphi\, t$$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow$

$$F_T = mg\sin\varphi - \frac{2}{3}mg\sin\varphi = \frac{1}{3}mg\sin\varphi$$

Η δύναμη τριβής είναι η ίδια και στην άνοδο και στην κάθοδο.

Κάθοδος (επιτάχυνση) $\otimes \omega$ $\otimes a_\Gamma$



$$I=\frac{1}{2}mR^2$$

$$a=\frac{d\upsilon_{KM}}{dt}=\frac{d\upsilon}{dt}$$

Ροπές του F_N και mg είναι μηδέν

Μεταφορική κίνηση

$$mg\sin\varphi - F_T = ma \Rightarrow F_T = mg\sin\varphi - ma = mg\sin\varphi - m\frac{d\upsilon}{dt} \quad (1)$$

Περιστροφική κίνηση

$$\tau = -F_T R = -I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow F_T R = \frac{1}{2}mR^2\frac{d\omega}{dt} \quad (2)$$

κύλιση χωρίς ολίσθηση $\upsilon=\omega R$ (3)

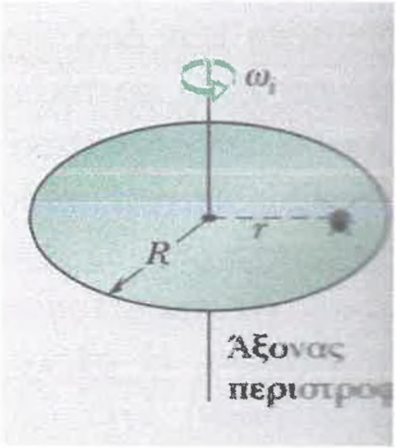
$$(2),(3) \Rightarrow F_T = \frac{1}{2}m\cancel{R}\frac{d\upsilon}{dt}\frac{1}{\cancel{R}} \overset{(1)}{\Rightarrow} mg\sin\varphi - m\frac{d\upsilon}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \frac{3}{2}\frac{d\upsilon}{dt} = g\sin\varphi \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{2}{3}g\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \frac{2}{3}g\sin\varphi\int_0^t dt \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 + \frac{2}{3}g\sin\varphi\, t \quad (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow F_T = mg\sin\varphi - \frac{2}{3}g\sin\varphi = \frac{1}{3}g\sin\varphi$$

Μια κατσαρίδα μάζας m βρίσκεται πάνω σε δίσκο μάζας $M=6m$ και ακτίνας R. Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από τον κεντρικό του άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω=1.5 rad/s Η κατασαρίδα βρίσκεται αρχικά σε απόσταση r=0,8 R από το κέντρο του δίσκου και μετα κινείται και φτάνει στην περιφέρεια του δίκσου. Θεωρείστε την κατσαρίδα ως σωματίδιο. Πόσο είναι τότε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας?



Η κίνηση της κατσαρίδας μεταβάλλει την κατανομή μάζας του συστήματος κατσαρίδα-δίσκος και επομένως και τη ροπή αδράνειας

Η στροφορμή του συστήματος δεν αλλάζει γιατί η εξωτερική ροπή είναι 0. (ροπή λόγω κίνησης κατσαρίδας είναι εσωτερική)

$I_d = I_{δίσκος} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(6m)R^2 = 3mR^2 \ kgr\,m^2$

κατσαρίδα ως σωματίδιο: αρχικά $I_{ci} = mr^2 = m(0,8R)^2 = 0,64mR^2$

τελικά $I_{cf} = mR^2$

Για τη ροπή αδράνειας του συστήματος:

αρχικά $I_i = I_d + I_{ci} = 3R^2m + 0,64mR^2 = 3,64mR^2$

τελικά: $I_f = I_d + I_{cf} = 3mR^2 + mR^2 = 4mR^2$

$L_{τελ} = I_f \cdot \omega_f$

$L_{αρχ} = I_i \cdot \omega_i$

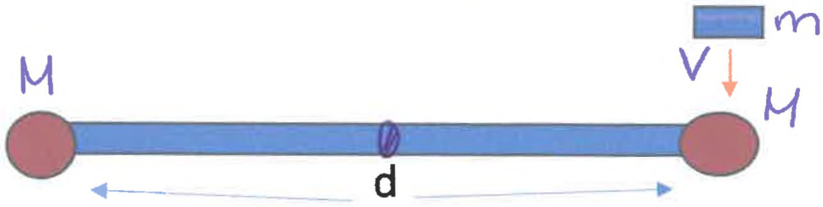
Αρχή διατήρησης στροφορμής $L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow I_i \cdot \omega_i = I_f \cdot \omega_f \Rightarrow$

$3,64\cancel{m}\cancel{R^2} \times 1,5 = 4\cancel{m}\cancel{R^2} \times \omega_f \Rightarrow \omega_f = 1,37 \ rad/s$

Μια μάζα m κινούμενη με ταχύτητα V προσκολλάται σε μία από τις μπάλες ενός αλτήρα, ο οποίος περιστρέφεται χωρίς τριβές κατακόρυφα γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της αβαρούς ράβδου που συνδέει τις δύο μπάλες. Εάν η μάζα της κάθε μπάλας είναι M και το μήκος της ράβδου d, να υπολογιστούν α) το μέτρο της γωνικής ταχύτητας αμέσως μετά την προσκόλληση της μάζας m στη μπάλα

β) τον λόγο των κινητικών ενεργειών πριν και μετά την πρόσκρουση.

~~γ) Τη συνολική γωνία περιστροφής του αλτήρα μετά την πρόσκρουση.~~



Θεωρουμε συστημα τη μάζα m και τις δύο μάζες M.

α)

Αρχικά: $L_{αρχ} = m.V \frac{d}{2}$

Τελικά: $L_{τελ} = \left[m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2M\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]ω$ $\quad [L = Iω]$

Αρχή διατήρησης της στροφορμής αφού δεν επιδρά κάποια εξωτερική ροπή

$L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow mv\frac{d}{2} = \left[m\frac{d^2}{4} + 2M\frac{d^2}{4}\right]ω \Rightarrow$

$ω = \frac{mV}{(2M+m).\left(\frac{d}{2}\right)} \Rightarrow ω = \frac{2mV}{(2M+m)d}$ (1)

β) Ο λόγος των κινητικών ενεργειών πριν και μετά την πρόσκρουση

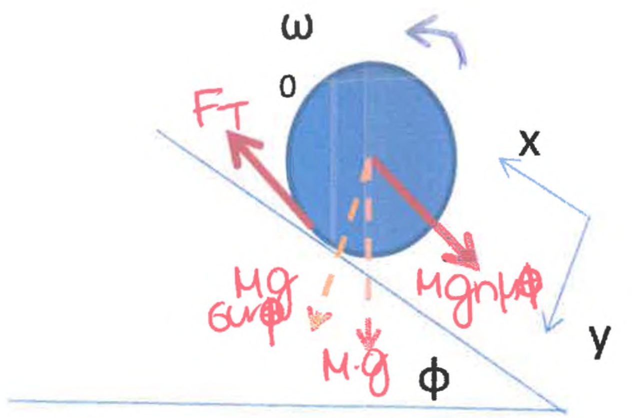
$\frac{K_{τελ}}{K_{αρχ}} = \frac{\frac{1}{2}Iω^2}{\frac{1}{2}mV^2} = \frac{I}{m}\left(\frac{ω}{V}\right)^2$ (2)

$I = (2M+m)\left(\frac{d}{2}\right)^2$ μετά την πρόσκρουση (3)

(2),(3) $\Rightarrow \frac{K_{τελ}}{K_{αρχ}} = \left(\frac{2M}{m}+1\right)\left(\frac{dω}{2V}\right)^2$

Με βάση την (1): $\frac{K_{τελ}}{K_{αρχ}} = \left(\frac{2M}{m}+1\right)\left(\frac{m}{2M+m}\right) \Rightarrow η = \frac{K_{τελ}}{K_{αρχ}} = \frac{m}{2M+m}$

Συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας Μ και ακτίνας R κυλίεται χωρις ολίσθηση ανερχόμενη κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας φ. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας και το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας



I_c (σφαίρα) $= \frac{2}{5} MR^2$

Μεταφορική κίνηση $F_T = - M \cdot g \sin\varphi = M \cdot a$ (1)

Περιστροφική $F_T \cdot R = - I a_r = -\frac{2}{5} M R^2 a_r$ (2)

Κύλιση χωρίς ολίσθηση $\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{1}{R} \Rightarrow a_r = \frac{a}{R}$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow a = -\frac{5}{7} g \sin\varphi$ (4)

(2) $\Rightarrow F_T \cdot R = -\frac{2}{5} M R^2 \frac{a}{R} \Rightarrow F_T = -\frac{2}{5} M a \overset{(4)}{\Rightarrow} F_T = -\frac{2}{5} M \cdot$

$(-\frac{5}{7} \sin\varphi) = \frac{2}{7} M g \sin\varphi$

$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = F_T \cdot R = \cancel{F_T} \cdot \frac{2}{7} M g \sin\varphi\, R.$

Σωματίδιο μάζας m=2kg κινείται στον άξονα x και έλκεται προς τη θέση ισορροπίας από μια δύναμη ίση με 4x (N). Αν στο σωματίδιο επιδρά δύναμη απόσβεσης FT=4u (όπου u=ταχύτητα) βρείτε την μετατόπιση x(t) και την ταχύτητα u(t) της ταλάντωσης

Λύση Ταλάντωση με απόσβεση

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma F = -F - F_T \Rightarrow 2\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 4u \Rightarrow$$

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 4\frac{dx}{dt} \Rightarrow 2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

Συγκρίνοντας με τη γενική εξίσωση της ταλάντωσης με απόσβεση:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + Kx = 0$$

προκύπτει $b=4$ και $K=4$ $\frac{b}{2m}=1$

Γωνιακή ταχύτητα χωρίς απόσβεση: $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{2}\ s^{-1}$

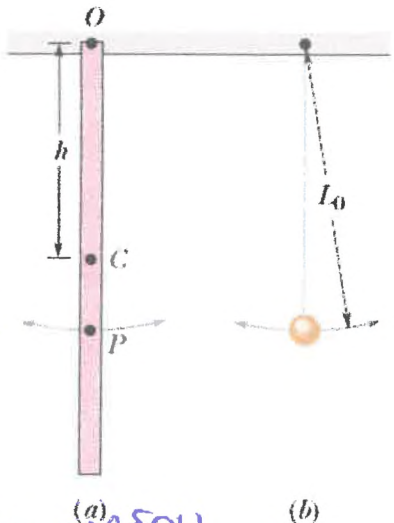
Γωνιακή ταχύτητα με απόσβεση: $\omega' = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = 1\ s^{-1}$

$$x(t) = A e^{\left(-\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow x(t) = A e^{-t} \cos(t+\varphi)$$

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A e^{-t} \cos(t+\varphi)\right) = -A e^{-t} \sin(t+\varphi) -$$

$$-A e^{-t} \cos(t+\varphi) = -A e^{-t}\left[\sin(t+\varphi) + \cos(t+\varphi)\right]$$

Ενας χάρακας αιωρείται αναρτημένος από ένα σημείο περιστροφής στο ένα άκρο σε απόσταση h από το κέντρο μάζας του. Α) Πόση είναι η περίοδος ταλάντωσης? Β) Πόση είναι η απόσταση L_0 μεταξύ του σημείου περιστροφής Ο του χάρακα και του κέντρου ταλάντωσης του χάρακα?



κέντρο ταλάντωσης του χάρακα ←

A) Περίοδος φυσικού εκκρεμούς

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (1)$$

Αν θεωρήσουμε το χάρακα ως ομογενή ράβδο μήκους L και μάζας m τότε:

Ροπή αδράνειας ράβδου ως προς τη μια άκρη της*

$$I = \frac{1}{3}mL^2 \qquad h = \frac{L}{2}$$

$$(1) \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Παρατηρούμε ότι η περίοδος T είναι ανεξάρτητη της μάζας m του εκκρεμούς

B) Ουσιαστικά θέλουμε το μήκος Lo του απλού εκκρεμούς που έχει την ίδια περίοδο με το φυσικό εκκρεμές

$$\underbrace{T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}}_{\text{φυσικό εκκρεμές}} = \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{L_o}{g}}}_{\text{απλό εκκρεμές}} \Rightarrow L_o = \frac{2}{3}L$$

$$\left[I = I_C + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2\right]$$ θεώρημα Steiner

Δακτύλιος με ακτίνα 0.10m κρέμεται από τριγωνική ράβδο. Να υπολογιστεί η περίοδος ταλαντώσεων του δακτυλίου ως προς το κέντρο στήριξης στην περιφέρεια.

<u>Λύση</u>

Έστω R η ακτίνα του δακτυλίου.

Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του είναι:

$$I_c = mR^2$$

Οπότε η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο στήριξης είναι:

$$I = I_c + mR^2 = 2mR^2$$

Αν θεωρήσουμε το σύστημα φυσικό εκκρεμές, τότε η περίοδος T είναι:

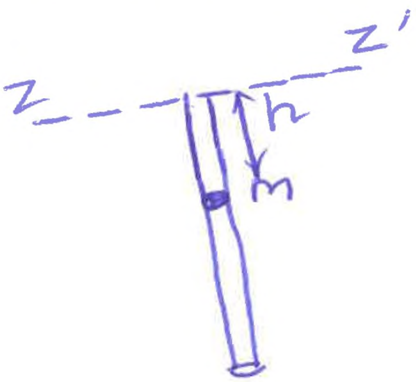
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

όπου I = ροπή αδράνειας
d = απόσταση του κέντρου βάρους από τον άξονα περιστροφής = R

Άρα: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mg \cdot R}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

για $R = 0.10\,m$ και $g = 9.8\,m/s^2 \rightarrow T = 0{,}88s$.

Ράβδος μήκους L ταλαντώνεται κρεμασμένη από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της. Σημειακή μάζα, ίση με τη μάζα της ράβδου προσαρμόζεται σε απόσταση h από τον άξονα πάνω στη ράβδο. α) Βρείτε την περίοδο ταλαντώσεων του συστήματος σαν συνάρτηση του h και του L. β) Ποια είναι η τιμή του h για την οποία η περίοδος είναι τόση, όση ήταν όταν δεν υπήρχε η πρόσθετη μάζα. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα zz' είναι $I_Z = \frac{mL^2}{3}$



Δίνεται ότι η εξίσωση κίνησης είναι:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2mgb\sin\theta$$

όπου b είναι η θέση του ΚΜ του συστήματος

↑ ίδια μάζα

Η ολική ροπή αδράνειας (ράβδος+μάζα) είναι:

$$I = m\frac{L^2}{3} + mh^2 = m\left(\frac{L^2}{3} + h^2\right) \qquad (1)$$

Η θέση του κέντρου μάζας (ΚΜ) του συστήματος προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$b = \frac{\frac{mL}{2} + mh}{2m} = \frac{L+2h}{4} \qquad (2)$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2mgb\sin\theta \xRightarrow{(1)(2)} \frac{d^2\theta}{dt} + \frac{2mg(L+2h)}{4m(L^2/3+h^2)}\sin\theta = 0 \xRightarrow{\text{για θ μικρό}} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2\cancel{mg}(L+2h)}{4m(\frac{L^2}{3}+h^2)}\theta = 0 \qquad (3)$$

όπου $\frac{2\cancel{mg}(L+2h)}{4\cancel{mg}\frac{(L^2+3h^2)}{3}} = \frac{3(L+2h)}{2(L^2+3h^2)} = \omega^2$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3g}\,\frac{(L^2+3h^2)}{L+2h}}$$

β) Για τη ράβδο χωρίς την πρόσθετη μάζα

$$(3) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$$ για $h=0$ και $m=0$

όπου $\omega_0^2 = \frac{3g}{2L}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Για να είναι $T=T_0$:

$$\frac{L^2+3h^2}{L+2h} = L \Rightarrow \begin{cases} h=0 \\ h=\frac{2}{3}L \end{cases}$$