



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Φυσική Ι

6 Νοεμβρίου 2018

Υπολογισμός της θέσης του κέντρου καμπυλότητας σε βολές

Έστω βλήμα που κινείται σε ομογενές βαρυντικό πεδίο, βαλλόμενο αρχικά με ταχύτητα v_0 .

Η εξίσωση κίνησης του βλήματος (υποθέτοντας ότι αρχικά βρίσκεται στην αρχή των αξόνων) σε παραμετρική μορφή μέσω της παραμέτρου t είναι

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos \phi t \\z(t) &= v_0 \sin \phi t - \frac{g}{2} t^2.\end{aligned}$$

Απαλείφοντας την παράμετρο t μπορούμε να κατασκευάσουμε την εξίσωση της τροχιάς:

$$z(x) = \tan \phi x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \phi} \quad (1)$$

και μέσω της εισαγωγής της ποσότητας με διαστάσεις μήκους

$$x_1 = \frac{v_0^2 \cos \phi \sin \phi}{g}$$

η εξίσωση της τροχιάς λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{z}{x_1} = \tan \phi \left(\frac{x}{x_1} \right) \left(1 - \frac{x}{2x_1} \right). \quad (2)$$

Η τελευταία αυτή μορφή μας δίνει το βεληνεκές της τροχιάς ($x_{\max} = x(z=0) = 2x_1$) και το μέγιστο ύψος της τροχιάς στο μέσο ανάμεσα στις 2 ρίζες της παραπάνω έκφρασης δηλαδή στο $x = x_1$ ($z_{\max} = z(x=x_1) = \tan \phi x_1/2$).

Ας γράψουμε τώρα το διάνυσμα της ταχύτητας ως συνάρτηση του χρόνου και στη συνέχεια ως συνάρτηση της αδιάστατης ποσότητας x/x_1 .

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_0 \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + (v_0 \sin \phi - gt) \hat{\mathbf{k}} \\&= v_0 \left[\cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \phi \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \hat{\mathbf{k}} \right].\end{aligned} \quad (3)$$

Το μοναδιαίο εφαπτομενικό στην κίνηση διάνυσμα είναι αυτό της κατεύθυνσης της ταχύτητας

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_T &= \frac{\mathbf{v}}{v} \\&= \frac{\cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \phi \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi (1 - x/x_1)^2}} \\&= \frac{\cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \phi \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi (x/x_1)(2 - x/x_1)}}.\end{aligned} \quad (4)$$

Προφανώς το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $\hat{\mathbf{e}}_T$ είναι το $\hat{\mathbf{e}}_\perp$ μπορεί να βρεθεί εύκολα αντιστρέφοντας το ρόλο των x - και z - συνιστωσών του και αλλάζοντας το πρόσημο της μιας από αυτές (ώστε $\hat{\mathbf{e}}_T \cdot \hat{\mathbf{e}}_\perp = 0$). Έτσι

$$\hat{\mathbf{e}}_\perp = \frac{-\cos \phi \hat{\mathbf{k}} + \sin \phi \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi (x/x_1)(2 - x/x_1)}}. \quad (5)$$

Η επιλογή αλλαγής προσήμου της $\hat{\mathbf{k}}$ έγινε προκειμένου να λάβουμε κατεύθυνση προς τα κοίλα της τροχιάς, δηλαδή προς τα κάτω.

Η επιτάχυνση $\mathbf{g} = g(-\hat{\mathbf{k}})$ αναλυμένη καταλλήλως σε επιτρόχια και κεντρομόλο επιτάχυνση θα μας οδηγήσει στην θέση του κέντρου καμπυλότητας.

Έτσι

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \hat{\mathbf{e}}_T \cdot \mathbf{g} \Rightarrow \\ \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} &= -g \frac{\sin \phi \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi (x/x_1)(2 - x/x_1)}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Η επαναγραφή του dv/dt ως $(dv/dx)(dx/dt)$ διευκολύνει τον υπολογισμό αφού η έκφραση του $v(x)$ έχει ήδη γραφεί παραπάνω (η 2η έκφραση της (3) δίνει το $\mathbf{v}(x)$) ενώ η dx/dt είναι απλά $v_0 \cos \phi$. Επομένως

$$v_0 \frac{(-1/x_1) \sin^2 \phi (1 - x/x_1)}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi (x/x_1)(2 - x/x_1)}} v_0 \cos \phi = -g \frac{\sin \phi \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi (x/x_1)(2 - x/x_1)}}. \quad (7)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η παραπάνω πρόταση είναι απλώς μια ταυτότητα.

Παράλληλα ισχύει ότι

$$a_\perp = \frac{v^2}{R} = \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\perp$$

οπότε λύνοντας ως προς την ακτίνα καμπυλότητας R βρίσκουμε

$$\begin{aligned} R &= \frac{v^2}{\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\perp} \Rightarrow \\ &= \frac{v_0^2 \left(\sqrt{1 - \sin^2 \phi (x/x_1)(2 - x/x_1)} \right)^2}{g \cos \phi / \sqrt{1 - \sin^2 \phi (x/x_1)(2 - x/x_1)}} \\ &= x_1 \frac{\left(\sqrt{1 - \sin^2 \phi (x/x_1)(2 - x/x_1)} \right)^3}{\cos^2 \phi \sin \phi}. \end{aligned} \quad (8)$$

Η δε θέση του κέντρου καμπυλότητας είναι

$$\mathbf{r}_0 = (x\hat{\mathbf{i}} + z(x)\hat{\mathbf{k}}) + R\hat{\mathbf{e}}_\perp \quad (9)$$

και σε μονάδες x_1

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{r}_0}{x_1} &= ((x/x_1)\hat{\mathbf{i}} + (z(x)/x_1)\hat{\mathbf{k}}) + (R/x_1)\hat{\mathbf{e}}_{\perp} \\ &= \left((x/x_1) \left[\hat{\mathbf{i}} + \tan \phi \left(1 - \frac{x}{2x_1} \right) \hat{\mathbf{k}} \right] + \frac{(\sqrt{\dots})^3 - \cos \phi \hat{\mathbf{k}} + \sin \phi \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \hat{\mathbf{i}}}{\cos^2 \phi \sin \phi \sqrt{\dots}} \right) \quad (10)\end{aligned}$$

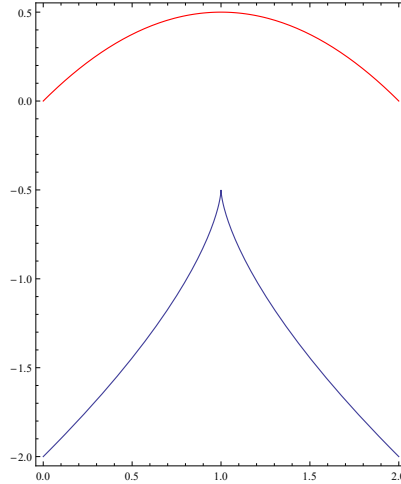
όπου η έκφραση $\sqrt{\dots}$ αντιπροσωπεύει την πολύ κοινή στις παραπάνω εκφράσεις ρίζα

$$\sqrt{1 - \sin^2 \phi (x/x_1)(2 - x/x_1)}.$$

Συμμαζεύοντας τις εκφράσεις των 2 συνιστωσών

$$\frac{\mathbf{r}_0}{x_1} = \left(\hat{\mathbf{i}} \left[(x/x_1) + \frac{\left(1 - \frac{x}{x_1} \right) (\sqrt{\dots})^2}{\cos^2 \phi} \right] + \hat{\mathbf{k}} \left[\tan \phi (x/x_1) \left(1 - \frac{x}{2x_1} \right) - \frac{(\sqrt{\dots})^2}{\tan \phi \cos^2 \phi} \right] \right) \quad (11)$$

Το x_1 μέσω του οποίου έχουν παραμετροποιηθεί όλα τα μήκη μπορεί να εκληφθεί ως μια κλίμακα μήκους του προβλήματος που θέτει όλες τις βολές, ανεξαρτήτως της γωνίας βολής, σε κατάλληλη κλίμακα ώστε όλες να έχουν το ίδιο βεληγεκές (ίσο με $2x_1$).



Σχήμα 1: Στο σχήμα φαίνεται η παραβολική τροχιά μιας πλάγιας βολής με γωνία εκτόξευσης $\pi/4$ (κόκκινη καμπύλη) μαζί με την τροχιά του αντίστοιχου κέντρου καμπυλότητας (μπλέ καμπύλη). Όταν η τροχιά βρίσκεται στο πλέον αριστερό σημείο (σημείο εκτόξευσης) το κέντρο καμπυλότητας βρίσκεται στο απώτερο δεξιά σημείο της μπλε καμπύλης, και καθώς το βλήμα κινείται προς τα δεξιά, το κέντρο καμπυλότητας κινείται προς τα αριστερά, διαγράφοντας την περίεργη αυτή αιχμηρή καμπύλη. Αυτή είναι περίπου η εικόνα της τροχιάς του κέντρου καμπυλότητας για οποιαδήποτε γωνία βολής. Η αιχμή εξηγείται από το γεγονός ότι όταν το βλήμα διαγράφει το τόξο κοντά στο ψηλότερο σημείο, αυτό είναι σε πολύ καλή προσέγγιση τόξο ενός κύκλου με κέντρο την αιχμή της μπλε καμπύλης. Οι συντεταγμένες και των δύο καμπυλών είναι μετρημένες σε μονάδες x_1 .