

Ασκήσεις επανάληψης, β' φυλλάδιο. (Τμήματα Α και Β)

1. Για ελεύθερο σωματίο μάζας m , το οποίο περιγράφεται από κανονικοποιημένη κυματική συνάρτηση $\psi(x)$, να δείξετε ότι η μέση τιμή του τελεστή

$$m \hat{x} - t \hat{p}$$

(όπου t ο χρόνος) παραμένει χρονικά σταθερή.

2. Να δείξετε ότι σε δέσμια κατάσταση η μέση τιμή οποιουδήποτε φυσικού μεγέθους $\hat{A}(\hat{x}, \hat{p})$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Εν συνεχεία για σύστημα το οποίο περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

και θεωρώντας τον τελεστή

$$\hat{A}(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{2} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})$$

να δείξετε ότι σε δέσμια κατάσταση:

$$2\langle T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle,$$

όπου $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$. (Θεώρημα Virial).

3. Η κυματική συνάρτηση σωματίου μάζας m το οποίο ευρίσκεται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού στο διάστημα $[-L, L]$ είναι

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } |x| > L, \\ N(L+x), & \text{εάν } -L < x < 0, \\ N(L-x) & \text{εάν } 0 < x < L. \end{cases}$$

όπου N σταθερά κανονικοποίησης. Να ευρεθεί η κυματική συνάρτηση στον χώρο των ορμών $\tilde{\psi}(p)$ (ο μετασχηματισμός Fourier της κυματοσυνάρτησης), δηλαδή το πλάτος πιθανότητας να ευρεθεί η τιμή p σε μέτρηση της ορμής.

4. Η κυματική συνάρτηση σωματίου μάζας m στον χώρο των ορμών (ο μετασχηματισμός Fourier της κυματοσυνάρτησης) είναι

$$\tilde{\psi}(p) = N \sqrt{2\pi} e^{-\frac{p^2}{2\hbar^2 a^2}}$$

Να ευρεθεί ο συντελεστής κανονικοποίησης N .

Να ευρεθεί η κυματική συνάρτηση του σωματίου $\psi(x)$. Είναι αυτή κανονικοποιημένη;