

Ασκήσεις επανάληψης στις δέσμιες καταστάσεις. (Τμήματα Α και Β)

1. Σωματίδιο μάζας m κινούμενο σε μία διάσταση βρίσκεται σε δυναμικό $V(x) = \infty$ για $x > d$ και $x < -d$ και $V(x) = \lambda\delta(x)$, $\lambda < 0$, αλλιώς (απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με δυναμικό $\lambda\delta(x)$ στο κέντρο). Να βρεθούν οι ιδιοτιμές της ενέργειας. Να βρεθεί συνθήκη για το λ ώστε να έχουμε αρνητική ιδιοτιμή ή αρνητικές ιδιοτιμές ενέργειας.

2. Σωματίδιο μάζας m κινούμενο σε μία διάσταση βρίσκεται δεσμευμένο σε σε δυναμικό $V(x) = \infty$ για $x > d$ και $x < -d$ και $V(x) = 0$, διαφορετικά (απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού). Έστω $\phi_1, \phi_2, \dots \in \mathbb{R}$ οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της χαμιλτονιανής. Κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ η κυματοσυνάρτηση είναι επαλληλία της θεμελιώδους και της πρώτης διεγερμένης στάθμης: $\Psi(t = 0) = (\phi_1 + \phi_2)/\sqrt{2}$. Να βρεθεί η χρονική εξάρτηση της μέσης τιμής της θέσης και της ορμής για $t > 0$.

3. Σωματίδιο βρίσκεται δεσμευμένο σε κάποιο δυναμικό και έστω \hat{A} κάποιο φυσικό μέγεθος. Οι ιδιοκαταστάσεις και οι ιδιοτιμές τόσο της Χαμιλτονιανής, $\hat{H}\phi_n = E_n\phi_n$, όσο και του μεγέθους \hat{A} , $\hat{A}\phi_n = \lambda_n\phi_n$, θεωρούνται γνωστές και δεν παρουσιάζουν εκφυλισμό.

(α) Να συγκρίνετε τις εξής 2 πιθανότητες: (α1) την πιθανότητα, όταν έχετε μετρήσει την τιμή E_n για την ενέργεια, αμέσως μετά να μετρήσετε την τιμή λ_n για το μέγεθος \hat{A} και (α2) την πιθανότητα, όταν έχετε μετρήσει την τιμή λ_n για το \hat{A} , αμέσως μετά να μετρήσετε την ενέργεια και να βρείτε την τιμή E_n .

(β) Πώς θα άλλαζαν οι προηγούμενες πιθανότητες αν ανάμεσα στη μέτρηση των μεγεθών μεσολαβούσε χρόνος t ;

(γ) Έστω ότι μετράτε το μέγεθος \hat{A} και βρίσκετε την τιμή λ_n . Μετά από χρόνο t μετράτε και πάλι το ίδιο μέγεθος. Προσδιορίστε, ως συνάρτηση των ϕ_n , E_n και f_n , την πιθανότητα να βρείτε και πάλι λ_n . Τι θα πρέπει να συμβαίνει ώστε αυτή η πιθανότητα να είναι μονάδα; Εφαρμόστε στην απλοποιημένη περίπτωση $f_n = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$, $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$.

4. Θεωρήστε το πρόβλημα ασύμμετρου πηγαδιού δυναμικού με $V(x) = V_L > 0$, $x < -d$, $V(x) = V_R > 0$, $x > d$, και $V(x) = 0$, $-d < x < d$, για σωματίδιο μάζας m . Βρείτε τις ιδιοτιμές δέσμιων καταστάσεων μέσω γραφικής λύσης. Εξετάστε επίσης την ειδική περίπτωση $V_L = \infty$.

5. Θεωρήστε το πρόβλημα σωματιδίου σε δέσμια κατάσταση δυναμικού $V(x) = \lambda\delta(x)$, $\lambda < 0$. Υπολογίστε την αβεβαιότητα ορμής, θέσης, και το γινόμενο $(\Delta x)(\Delta p)$. Συγκρίνετε το γινόμενο με το ελάχιστο γινόμενο αβεβαιότητας, $\hbar/2$, και δικαιολογήστε το αποτέλεσμα.

6. Θεωρήστε το πρόβλημα δύο δυναμικών δέλτα σε απόσταση $2d$: $V(x) = \lambda\delta(x + d) + \lambda\delta(x - d)$, $\lambda < 0$, για σωματίδιο μάζας m . Βρείτε με γραφική λύση τις ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων. Βρείτε συνθήκη για κρίσιμη τιμή d_0 ώστε για $d < d_0$ να υπάρχει μόνο μία δέσμια κατάσταση.