

Ασκήσεις 18-11-2021

1. Στην κυματική συνάρτηση $\psi(x, t)$ οι μέσες τιμές και οι διασπορές της θέσης και της ορμής είναι γνωστές, $x_0, \Delta x_0, p_0, \Delta p_0$ αντίστοιχα. Να υπολογιστούν τα ανωτέρω μεγέθη για την κυματική συνάρτηση $\psi'(x, t) = \psi(x - a) e^{ikx}$

2. Κάθε κυματική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως:

$$\psi(x, t) = A(x, t) e^{i\varphi(x, t)},$$

όπου A και φ πραγματικές συναρτήσεις (η A μπορεί να θεωρηθεί και θετική).

α. Να δείξετε ότι η μέση τιμή και η διασπορά της θέσης δεν εξαρτάται από την συνάρτηση φ .

β. Εάν η συνάρτηση φ είναι χωρικά σταθερή να δείξετε ότι η μέση τιμή της ορμής και το ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας μηδενίζονται.

3. Κβαντικό σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) + i\Gamma(\hat{x}), \quad \text{όπου } A, \Gamma \text{ πραγματικές συναρτήσεις.}$$

Να εξαχθεί το αντίστοιχο της εξίσωσης συνέχειας. Ποία είναι η χρονική εξέλιξη της ολικής πιθανότητας όταν Γ είναι αρνητική σταθερά;

4. Κβαντικό σύστημα έχει δύο ενεργειακές στάθμες:

$$\hat{H}\varphi_1 = E_1\varphi_1, \quad \hat{H}\varphi_2 = E_2\varphi_2.$$

Θεωρούμε φυσικό μέγεθος με δύο, μη εκφυλισμένες ιδιοκαταστάσεις:

$$\hat{A}\psi_1 = \alpha_1\psi_1, \quad \hat{A}\psi_2 = \alpha_2\psi_2,$$

με

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \cos\theta\psi_1 + \sin\theta\psi_2 \quad \text{και} \quad \psi_1 = \cos\theta\varphi_1 - \sin\theta\varphi_2, \\ \varphi_2 &= -\sin\theta\psi_1 + \cos\theta\psi_2 \quad \text{και} \quad \psi_2 = \cos\theta\varphi_1 + \sin\theta\varphi_2. \end{aligned}$$

α. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα ευρίσκεται στην κατάσταση φ_1 . Να ευρεθούν οι πιθανότητες ώστε σε μέτρηση των (E, A) να έχουμε τις τιμές (E_1, E_2) και (α_1, α_2) αντίστοιχα, ως συναρτήσεις του χρόνου.

β. Την χρονική στιγμή $t = t_0$ γίνεται μέτρηση του μεγέθους A και ευρίσκεται η τιμή α_1 . Να απαντηθεί το προηγούμενο ερώτημα για $t > t_0$.

5. Για ελεύθερο σωματίο το οποίο περιγράφεται από τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\psi(x, t)$ να δείξετε ότι η μέση τιμή του τελεστή

$$m\hat{x} - t\hat{p},$$

παραμένει χρονικά σταθερή.

6. Να διερευνηθεί κατά πόσον η εξίσωση Schrödinger είναι συναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

7. Σωματίδιο μάζας κινείται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού στο διάστημα $[0, L]$ ευρισκόμενο σε ιδιοκατάσταση της ενέργειας.

α. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να ευρεθεί το σωματίο σε διάστημα $[a, b]$ με $0 \leq a < b \leq L$.

β. Να υπολογισθούν οι μέσες τιμές και οι διασπορές της θέσης και της ορμής.

γ. Να ελεγχθεί η αρχή της αντιστοιχίας (με την κλασική φυσική).

8. Για τις ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας σωματιδίου σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού:
- Είναι αυτές ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή \hat{p}^2 ή του τελεστή \hat{p} ;
 - Να ευρεθεί η πυκνότητα πιθανότητας και η αντίστοιχη πιθανότητα για την μέτρηση της ορμής.
 - Να ευρεθεί με απ' ευθείας υπολογισμό η μέση τιμή της θέσης στον χώρο των ορμών (να θεωρηθεί δεδομένο το ολοκλήρωμα που εκφράζει την κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης).
9. Σωματίδιο μάζας το οποίο κινείται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού στο διάστημα $[0, L]$ περιγράφεται από την κυματική συνάρτηση

$$\psi(x, t) = \begin{cases} Nx & \text{για } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ N \left(\frac{L}{2} - x\right) & \text{για } \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

- Να ευρεθεί η σταθερά κανονικοποίησης N .
- Να υπολογισθεί το πλάτος πιθανότητας και η αντίστοιχη πιθανότητα ώστε σε μέτρηση της ενέργειας να ευρεθεί η τιμή E_n και να γραφεί ως σειρά η συνθήκη κανονικοποίησης της κυματοσυνάρτησης.
- Να υπολογισθεί το πλάτος πιθανότητας και η αντίστοιχη πιθανότητα ώστε σε μέτρηση της ορμής να ευρεθεί η τιμή p .
- Να ευρεθεί με απ' ευθείας υπολογισμό η μέση τιμή της θέσης στον χώρο των ορμών (να θεωρηθεί δεδομένο το ολοκλήρωμα που εκφράζει την κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης)..