26-11-2020

1. Στις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας πηγαδιού απείρου βάθους να υπολογισθούν οι μέσες τιμές και οι διασπορές της θέσης και της ορμής.

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{n\pi}{L}x \quad , \qquad x \in [0, L],$$

$$\psi_n = 0 \quad , \qquad x > L, x < 0.$$

(i).
$$\left.\begin{array}{l} \langle x \rangle = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L x \sin^2\frac{n\pi}{L}x \, dx \\ \sin^2\dfrac{n\pi}{L}x = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\dfrac{2n\pi}{L}x\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{L}\int_0^L \left[x - x\cos\frac{2n\pi}{L}x\right] dx$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{L^2}{2} - \frac{L}{2n\pi}\int_0^L x\left(\sin\frac{2n\pi}{L}x\right)' dx\right)$$

$$= \frac{L}{2} + \frac{1}{2n\pi}\underbrace{\cancel{\int_0^L \sin\frac{2n\pi}{L}x \, dx}}_{\to 0} = \frac{L}{2}.$$

(ii).
$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \sin^2\frac{n\pi}{L}x \, dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L \left(x^2 - x^2\cos\frac{2n\pi}{L}x\right) dx$$

$$= \frac{L^2}{3} - \frac{1}{L}\underbrace{\int_0^L x^2 \cos\frac{2n\pi}{L}x \, dx}_{*}$$

$$* \int_0^L x^2 \cos\frac{2n\pi}{L}x \, dx = \frac{L}{2n\pi}\int_0^L x^2\left(\sin\frac{2n\pi}{L}x\right)' dx$$

$$= -\frac{L}{2n\pi}\, 2\int_0^L x \sin\frac{2n\pi}{L}x \, dx = \frac{L^2}{2n^2\pi^2}\int_0^L x\left(\cos\frac{2n\pi}{L}x\right)' dx$$

$$= \frac{L^3}{2n^2\pi^2} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2}\cancel{\int_0^L \cos\frac{2n\pi}{L}x \, dx}^{\,0}$$

Άρα: $\langle x^2\rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2} \Rightarrow$

$$\langle x^2\rangle = \frac{L^2}{3}\left(1 - \frac{3}{2n^2\pi^2}\right)$$

κλασικό αποτέλεσμα

Διασπορά: $(\Delta x)^2 = \frac{L^2}{3}\left(1-\frac{3}{2n^2\pi^2}\right) - \frac{L^2}{4} = \frac{L^2}{12}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)$

(iii). $\langle p\rangle = \frac{2}{L}(-i\hbar)\int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x \,\frac{d}{dx}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$

$$= -i\hbar\,\frac{2}{L}\int_0^L \left(\frac{n\pi}{L}\right)\sin\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= -i\hbar\,\frac{n\pi}{L^2}\int_0^L \cancelto{0}{\sin\frac{2n\pi}{L}x\,dx} \Rightarrow$$

$\langle p\rangle = 0$ (Θα δειχθεί ότι ισχύει για κάθε ιδιοσυνάρτηση της ενέργειας διακριτού φάσματος).

(iv). $\langle p^2\rangle = \frac{2}{L}\hbar^2\int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x\left(-\frac{d^2}{dx^2}\sin\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

$$= \frac{2}{L}\hbar^2\,\frac{n^2\pi^2}{L^2}\int_0^L \sin^2\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\Rightarrow \langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{L^2}$$

Διασπορά $(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{L^2}$

Επομένως:

$$\langle x \rangle = \frac{L}{2}$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{L^2}{12}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\langle p \rangle = 0, \qquad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{L^2} n^2\pi^2$$

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{12} n^2\pi^2 \left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)$$

2. Σωματίδιο μάζας m ευρισκόμενο σε απειρόβαθο πηγάδι περιγράφεται την χρονική στιγμή $t=0$ από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x,0) = \alpha\,\psi_n(x) + \beta\,\psi_m(x), \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Να υπολογισθούν οι μέσες τιμές της ενέργειας, της θέσης και της ορμής ως συναρτήσεις του χρόνου. Να επιβεβαιωθεί το θεώρημα Ehrenfest.

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x, \qquad E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}.$$

Για $t>0$:

$$\psi(x,t) = \alpha e^{-i\omega_n t}\psi_n + \beta e^{-i\omega_m t}\psi_m, \qquad \omega_{n,m} = \frac{E_{n,m}}{\hbar}.$$

(i). Για την ενέργεια:

$$\langle E\rangle_t = |\alpha|^2 E_n + |\beta|^2 E_m,$$ ανεξάρτητη του χρόνου,

$$\langle E^2\rangle_t = |\alpha|^2 E_n^2 + |\beta|^2 E_m^2,$$ -//- .

Διασπορά: $(\Delta E)^2 = \langle E^2\rangle_t - (\langle E\rangle_t)^2 =$

$$= |\alpha|^2 E_n^2 + |\beta|^2 E_m^2 - (|\alpha|^2 E_n + |\beta|^2 E_m)^2 =$$

$$= |\alpha|^2 E_n^2 + |\beta|^2 E_m^2 - |\alpha|^4 E_n^2 - |\beta|^4 E_m^2 - 2|\alpha|^2|\beta|^2 E_n E_m$$

$$= E_n^2 |\alpha|^2 \underbrace{(1-|\alpha|^2)}_{|\beta|^2} + E_m^2 |\beta|^2 \underbrace{(1-|\beta|^2)}_{|\alpha|^2} - 2|\alpha|^2|\beta|^2 E_n E_m$$

$$= |\alpha|^2|\beta|^2 (E_n - E_m)^2,$$ ανεξάρτητη του χρόνου.

(ii). Για την θέση:

$$\langle x\rangle_t = \int_0^L (\alpha^* e^{i\omega_n t}\psi_n + \beta^* e^{i\omega_m t}\psi_m)\, x\,(\alpha e^{-i\omega_n t}\psi_n + \beta e^{-i\omega_m t}\psi_m)\,dx$$

$$= |\alpha|^2\int_0^L \psi_n x \psi_n\,dx + |\beta|^2\int_0^L \psi_m x \psi_m\,dx$$
$$+ \alpha^*\beta\, e^{i(\omega_n-\omega_m)t}\int_0^L \psi_n x \psi_m + \alpha\beta^* e^{-i(\omega_n-\omega_m)t}\int_0^L \psi_m x \psi_n\,dx$$

$$\langle x\rangle_t = \frac{L}{2} + I_{nm}\, 2\left\{ Re(\alpha^*\beta)\cos(\omega_n-\omega_m)t - Im(\alpha^*\beta)\sin(\omega_n-\omega_m)t \right\}$$

όπου: $\int_0^L \psi_{n,m}\, x\, \psi_{n,m}\,dx = \frac{L}{2}$ και

$I_{nm} = \int_0^L \psi_n x \psi_m\,dx = I_{mn}$ επειδή οι

ψ_m, ψ_n είναι πραγματικές (Αυτή η ιδιότητα θα δούμε ότι ισχύει γενικά για ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας δυναμικού φρέατος).

Υπολογισμός του I_{nm}.

$$I_{nm} = \frac{2}{L}\int_0^L x \sin\frac{n\pi}{L}x \sin\frac{m\pi}{L}x\,dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L x\left[\cos\frac{n-m}{L}\pi x - \cos\frac{n+m}{L}\pi x\right]dx$$

$$= \frac{1}{L}\left\{ \frac{L}{\pi(n-m)}\int_0^L x\left(\sin\frac{n-m}{L}\pi x\right)'dx - \frac{L}{(n+m)\pi}\int_0^L x\left(\sin\frac{n+m}{L}\pi x\right)'dx \right\}$$

$$= -\frac{1}{(n-m)\pi}\int_0^L \sin\frac{n-m}{L}\pi x\,dx + \frac{1}{(n+m)\pi}\int_0^L \sin\frac{n+m}{L}\pi x\,dx$$

$$= \frac{L}{\pi^2(n-m)^2}\int_0^L \left(\cos\frac{n-m}{L}\pi x\right)'dx - \frac{L}{(n+m)^2\pi^2}\int_0^L \left(\cos\frac{n+m}{L}\pi x\right)'dx$$

$$= \left[(-1)^{n-m} \, 1 - 1\right] \frac{L}{\pi^2} \underbrace{\left(\frac{1}{(n-m)^2} - \frac{1}{(n+m)^2} \right)}_{\frac{4nm}{(n-m)^2(n+m)^2}}$$

$$\left((-1)^{n-m} = (-1)^{n+m} \right)$$

$$I_{nm} = \left[(-1)^{n-m} - 1\right] \frac{4nmL}{\pi^2 (n-m)^2 (n+m)^2} = \begin{cases} 0 \,, & \text{εάν } (n-m) \text{ άρτιο} \\ -\dfrac{8nmL}{\pi^2 (n-m)^2 (n+m)^2} & \text{εάν } (n-m) \text{ περιττό.} \end{cases}$$

π.χ. $\quad I_{21} = -\dfrac{16L}{9\pi^2}$

και: $\quad \langle x \rangle_t = \dfrac{L}{2} - \dfrac{32L}{9\pi^2} \left\{ Re(\alpha^* \beta) \cos(\omega_2 - \omega_1)t - Im(\alpha^* \beta) \sin(\omega_2 - \omega_1)t \right\}$

(iii). Για την ορμή:

$$\langle p \rangle_t = \int_0^L \left(\alpha^* e^{i\omega_n t} \psi_n + \beta^* e^{i\omega_m t} \psi_m \right)\left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)\left(\alpha e^{-i\omega_n t} \psi_n + \beta e^{-i\omega_m t} \psi_m \right) dx$$

$$= |\alpha|^2 \int_0^L \psi_n \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \psi_n \right) dx + |\beta|^2 \int_0^L \psi_m \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \psi_m \right) dx$$

$$+ \alpha^* \beta \, e^{i(\omega_n - \omega_m)t} (-i\hbar) \int_0^L \psi_n \frac{d}{dx} \psi_m$$

$$+ \alpha \beta^* e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} (-i\hbar) \int_0^L \psi_m \frac{d}{dx} \psi_n$$

$$\int_0^L \psi_n \frac{d}{dx} \psi_n \, dx = 0 \qquad \text{και}$$

$$\int_0^L \psi_n \frac{d}{dx} \psi_m \, dx = -\int_0^L \left(\frac{d}{dx} \psi_n \right) \psi_m$$

(Και αυτές οι σχέσεις ισχύουν για οποιοδήποτε διακριτό ενεργειακό φάσμα.)

Επομένως :

$$\langle p \rangle_t = -i\hbar\, J_{nm} \left[\alpha^* \beta\, e^{i(\omega_n - \omega_m)t} - \alpha \beta^* e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \langle p \rangle_t = \hbar 2 J_{nm} \left[Re(\alpha^* \beta) \sin(\omega_n - \omega_m)t + Im(\alpha^* \beta) \cos(\omega_n - \omega_m)t \right]$$

$$J_{nm} = \int_0^L \psi_n \frac{d}{dx} \psi_m \, dx$$

Υπολογισμός του J_{nm}.

α). $$J_{nm} = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x \, \frac{m\pi}{L} \cos\frac{m\pi}{L}x \, dx$$

$$= \frac{m\pi}{L^2} \int_0^L \left[\sin\frac{n+m}{L}\pi x + \sin\frac{n-m}{L}\pi x \right] dx$$

$$= \frac{m\pi}{L^2} \left\{ -\frac{L}{(n+m)\pi} \left[(-1)^{n+m} - 1 \right] - \frac{L}{(n-m)\pi} \left[(-1)^{n-m} - 1 \right] \right\}$$

$$= -\left[(-1)^{n-m} - 1 \right] \frac{2nm\pi}{L \quad (n^2 - m^2)}$$

$$\langle p \rangle_t = - \left[(-1)^{n-m} - 1 \right] 4\hbar \frac{nm}{L(n^2 - m^2)} \left[Re(\alpha^* \beta) \sin(\omega_n - \omega_m)t + Im(\alpha \beta^*) \cos(\omega_n - \omega_m)t \right]$$

π.χ. για $n=2, m=1$ $$\langle p \rangle_t = \frac{\hbar 16}{3L} \left[Re(\alpha^* \beta) \sin(\omega_2 - \omega_1)t + Im(\alpha \beta^*) \cos(\omega_2 - \omega_1)t \right]$$

Επιβεβαίωση του Θ. Ehrenfest.

$$\frac{d\langle x\rangle_t}{dt} = +\frac{32L}{9\pi^2}(\omega_2-\omega_1)\left\{ Re(\alpha^*\beta)\sin(\omega_2-\omega_1)t + Im(\alpha^*\beta)\cos(\omega_2-\omega_1)t \right\}$$

$$\omega_2-\omega_1 = \frac{3\pi^2\hbar}{2mL^2}$$

$$= \frac{\hbar 16}{3mL}\left\{ Re(\alpha^*\beta)\sin(\omega_2-\omega_1)t + Im(\alpha^*\beta)\cos(\omega_2-\omega_1)t \right\}$$

$$= \frac{1}{m}\langle p\rangle_t .$$

Για τυχαία n, m:

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle_t = -\left[(-1)^{n-m}-1\right]\frac{8nmL}{\pi^2(n^2-m^2)^2}\,\frac{(n^2-m^2)\pi^2\hbar}{2\underset{\text{μάζα}}{m}L^2}$$

$$\left\{ Re(\alpha^*\beta)\sin(\omega_n-\omega_m)t + Im(\alpha^*\beta)\cos(\omega_n-\omega_m)t \right\}$$

$$= -\left[(-1)^{n-m}-1\right]\frac{4nm\hbar}{L(n^2-m^2)\underset{\text{μάζα}}{m}}\left\{ Re(\alpha^*\beta)\sin(\omega_n-\omega_m)t + Im(\alpha^*\beta)\cos(\omega_n-\omega_m)t \right\}$$

$$= \frac{1}{m}\langle p\rangle_t .$$

β). Η σχέση του J_{nm} με το I_{nm} ευρίσκεται γενικά για ιδιοσυναρτήσεις διακριτού ενεργειακού φάσματος.

$$J_{nm} = \int \psi_n \frac{d}{dx} \psi_m \, dx$$

$$= \frac{i}{\hbar} \int \psi_n \hat{p} \psi_m \, dx$$

$$= \frac{i}{\hbar} \frac{mi}{\hbar} \int \psi_n [\hat{H}, \hat{x}] \psi_m \, dx$$

$$= -\frac{m}{\hbar^2} (E_n - E_m) I_{nm}$$

$$= -\frac{m}{\hbar} (\omega_n - \omega_m) I_{nm}$$

Επομένως:

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle_t = -2 I_{nm} (\omega_n - \omega_m) \Big\{ Re(\alpha^* \beta) \sin(\omega_n - \omega_m)t + Im(\alpha^* \beta) \cos(\omega_n - \omega_m)t \Big\}$$

$$= 2 \frac{\hbar}{m} J_{nm} \Big\{ \quad -//- \quad \Big\}$$

$$= \frac{1}{m} \langle p \rangle_t . \quad \text{ok.}$$

3. Την χρονική στιγμή $t=0$ σωμάτιο σε απειρόβαθο πηγάδι περιγράφεται από την κυματική συνάρτηση:

$$\psi(x) = K\,x(x-L) \qquad 0 \le x \le L,$$
$$\psi(x) = 0 \qquad x<0 \text{ και } x>L.$$

α. Να κανονικοποιηθεί η κυματοσυνάρτηση.

β. Να ευρεθεί η πιθανότητα σε μέτρηση της ενέργειας να ευρεθεί η E_n.

α)
$$K^2 \int_0^L x^2(x-L)^2\,dx = K^2 \int_0^L (x^4 - 2x^3L + x^2L^2)\,dx$$
$$= K^2L^5\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = K^2L^5\,\frac{6-15+10}{30} = K^2L^5\,\frac{1}{30}$$
$$\Rightarrow K = \sqrt{\frac{30}{L^5}}$$ (με ελευθερία παράγοντα φάσης)

β)
$$C_n = \int_0^L \psi_n(x)\psi(x)\,dx$$
$$= \frac{2\sqrt{15}}{L^3} \int_0^L x(x-L)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\int_0^L x^2 \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = -\frac{L}{n\pi}\int_0^L x^2\left(\cos\frac{n\pi}{L}x\right)'dx =$$
$$-\frac{L^3}{n\pi}(-1)^n + \frac{2L}{n\pi}\int_0^L x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx =$$
$$-\frac{L^3}{n\pi}(-1)^n + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\int_0^L x\left(\sin\frac{n\pi}{L}x\right)'dx =$$
$$-\frac{L^3}{n\pi}(-1)^n - \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx =$$
$$-\frac{L^3}{n\pi}(-1)^n + \frac{2L^3}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$\int_0^L x\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = -\frac{L^2}{n\pi}(-1)^n$$

Επομένως:

$$C_n = \frac{2\sqrt{15}}{L^3} L^3 \left\{ -\cancel{\frac{(-1)^n}{n\pi}} + \frac{2}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right] + \cancel{\frac{(-1)^n}{n\pi}} \right\} \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{4\sqrt{15}}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} -\dfrac{8\sqrt{15}}{n^3\pi^3}, & n \text{ περιττό} \\ 0, & n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

$$P(E_n) = |C_n|^2 = \begin{cases} \dfrac{960}{n^6\pi^6}, & n \text{ περιττό} \\ 0, & n \text{ άρτιο} \end{cases} \qquad (\pi^6 = 961.389)$$

$$(|c_1|^2 = 0.9985)$$

4. Τα ανωτέρω ερωτήματα για την κυματική συνάρτηση:

$$\psi(x) = \begin{cases} kx & 0 \le x \le L/2 \\ k(L-x) & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

α). $$\int_0^L \psi^2(x)\,dx = 2k^2 \int_0^{L/2} x^2\,dx = 2k^2 \frac{1}{3}\frac{L^3}{8} = k^2\frac{L^3}{12}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{L^3}}$$

β). Για n άρτιο $C_n = 0$.

Για n περιττό:

$$C_n = \frac{4\sqrt{6}}{L^2}\int_0^{L/2} x \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{L^2}\left(-\frac{L}{n\pi}\right)\int_0^L x\left(\cos\frac{n\pi}{L}x\right)' dx$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{L}\frac{1}{n\pi}\int_0^L \cos\frac{n\pi}{L}x\, dx$$

$$= -\frac{4\sqrt{6}}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$c_n = \begin{cases} \mp\dfrac{4\sqrt{6}}{n^2\pi^2}, & n \text{ περιττό}, \\ 0, & n \text{ άρτιο}, \end{cases}$$

και:

$$P(E_n) = c_n^2 = \begin{cases} \dfrac{96}{n^4\pi^4}, & n \text{ περιττό}, \\ 0, & n \text{ άρτιο}. \end{cases}$$

$$(c_1^2 = 0.9927)$$

5. Σωμάτιο μάζας m βρίσκεται στην βασική στάθμη απειρόβαθου πηγαδιού εύρους L. Την χρονική στιγμή $t=0$ το εύρος του πηγαδιού διπλασιάζεται ακαριαία. Να βρεθεί η πιθανότητα, σε μέτρηση της ενέργειας για $t>0$ να βρεθεί ενέργεια $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(2L)^2}$.

$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{\pi x}{L}$: κυματοσυνάρτηση του σωματίου. $x \in [0,L]$

$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\frac{n\pi}{2L}x$: ιδιοσυναρτήσεις του νέου προβλήματος ($t>0$).

$L \longrightarrow$ η $\psi(x)$ μηδενίζεται για $x>L$.

$$c_n = \frac{\sqrt{2}}{L}\int_0^L \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{n\pi}{2L}x \, dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{L}\int_0^L \sin\frac{2\pi x}{2L} \sin\frac{n\pi}{2L}x \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}L}\int_0^L \left[\cos\frac{(n-2)\pi}{2L}x - \cos\frac{(n+2)\pi}{2L}x\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}L}\left[-\frac{2L}{(n-2)\pi}\sin\frac{(n-2)\pi}{2} + \frac{2L}{(n+2)\pi}\sin\frac{(n+2)\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\frac{(n-2)\pi}{2} \frac{4}{(n^2-4)\pi} \quad *$$

$$P(E_n) = |c_n|^2 = \frac{32}{(n^2-4)^2\pi^2} \quad n \text{ περιττό}$$

$$0 \quad n \text{ άρτιο} \neq 2$$

$$\frac{1}{2} \quad n = 2.$$

Δηλαδή έχουμε:

πιθανότητα: $\frac{1}{2}$ να μην αλλάξει η ενέργεια:

$$E_2 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2m(2L)^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$ (η βασική στάθμη του αρχικού προβλήματος)

και πιθανότητα: $\frac{32}{9\pi^2} = 0.36$ η ενέργεια

να ελαττωθεί

$$\left(E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2} < \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \right).$$

* Για $n=2$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \sin\frac{(n-2)\pi}{2} \frac{4}{(n-2)(n+2)\pi} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sin\frac{(n-2)\pi}{2}}{\frac{(n-2)\pi}{2}} \frac{2}{n+2} \xrightarrow{n\to 2} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6. Στις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας απειρόβαθου πηγαδιού να ευρεθούν οι $\tilde{\psi}_n(p)$, δηλαδή τα πλάτη πυκνότητας πιθανότητας για την ορμή και οι αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας.

$$\tilde{\psi}_n(p) = f_p \circ \psi_n \qquad \Rightarrow$$

↳ ιδιοσυνάρτηση της ορμής

$$\Rightarrow \tilde{\psi}_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\sqrt{\frac{2}{L}}\int_0^L e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \sin\frac{n\pi}{L}x \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar L}}\left(-\frac{i}{2}\right)\int_0^L e^{-ipx/\hbar}\left(e^{\frac{in\pi}{L}x} - e^{-\frac{in\pi}{L}x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar L}}\left(-\frac{i}{2}\right)\int_0^L \left[e^{-i\left(\frac{p}{\hbar}-\frac{n\pi}{L}\right)x} - e^{-i\left(\frac{p}{\hbar}+\frac{n\pi}{L}\right)x}\right]dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar L}}\left(-\frac{i}{2}\right) i \left[\frac{1}{\frac{p}{\hbar}-\frac{n\pi}{L}}\left(e^{-i\left(\frac{pL}{\hbar}-n\pi\right)}-1\right) - \frac{1}{\frac{p}{\hbar}+\frac{n\pi}{L}}\left(e^{-i\left(\frac{pL}{\hbar}+n\pi\right)}-1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar L}}\,\frac{1}{2}\left[e^{-i\frac{pL}{\hbar}}(-1)^n - 1\right]\left(\frac{1}{\frac{p}{\hbar}-\frac{n\pi}{L}} - \frac{1}{\frac{p}{\hbar}+\frac{n\pi}{L}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar L}}\,\frac{n\pi}{L}\,\frac{1}{\frac{p^2}{\hbar^2}-\frac{n^2\pi^2}{L^2}}\left[e^{-ipL/\hbar}(-1)^n - 1\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\pi L}{\hbar}}\,\frac{n}{\left(\frac{pL}{\hbar}\right)^2 - n^2\pi^2}\, e^{-ipL/2\hbar}(-)\left[e^{ipL/2\hbar} - e^{-ipL/2\hbar}(-1)^n\right]$$

Άρα:

$$\tilde{\psi}_n(p) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\pi L}{\hbar}} \frac{2n}{\left(\frac{pL}{\hbar}\right)^2 - n^2\pi^2} e^{-ipL/2\hbar} \cos\frac{pL}{2\hbar}, & n \text{ περιττό} \\ -i\sqrt{\frac{\pi L}{\hbar}} \frac{2n}{\left(\frac{pL}{\hbar}\right)^2 - n^2\pi^2} e^{-ipL/2\hbar} \sin\frac{pL}{2\hbar}, & n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

και:

$$|\tilde{\psi}_n(p)|^2 = \begin{cases} \frac{4n^2\pi L}{\hbar} \frac{1}{\left(\frac{p^2L^2}{\hbar^2} - n^2\pi^2\right)^2} \cos^2\frac{pL}{2\hbar}, & \text{για } n \text{ περιττό,} \\ * \\ \frac{4n^2\pi L}{\hbar} \frac{1}{\left(\frac{p^2L^2}{\hbar^2} - n^2\pi^2\right)^2} \sin^2\frac{pL}{2\hbar}, & \text{για } n \text{ άρτιο.} \end{cases}$$

* Οι $|\tilde{\psi}_n(p)|^2$ είναι πεπερασμένες για $\frac{pL}{\hbar} = n\pi$

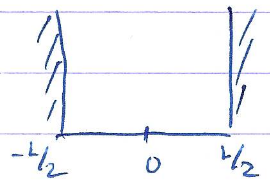
(ορμές που αντιστοιχούν στις ενέργειες του πηγαδιού)

παρά τον μηδενισμό του παρονομαστού.

7. Σωματίδιο βρίσκεται δεσμευμένο στην περιοχή $[-L/2, L/2]$ υπό την επίδραση δυναμικού απειρόβαθου πηγαδιού. Μέτρηση της ενέργειας έδωσε μόνο τις τιμές E_1 και E_2 με διασπορά $(\Delta E) = \frac{\sqrt{2}}{3}(E_2 - E_1)$

α). Να βρείτε την γενική μορφή της κατάστασης η οποία είναι συμβατή με αυτό το αποτέλεσμα και η οποία έχει θετική μέση ομοτιμία.

β). Να προσδιορίσετε την ακριβή μορφή της προηγούμενης κατάστασης, την χρονική στιγμή $t=0$, εάν ξέρετε ότι η μέση τιμή της θέσης είναι μηδέν και η μέση τιμή της ορμής του είναι θετική.



$$\psi_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi}{L} x , & n \text{ περιττό } (1,3,5,\dots) \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x , & n \text{ άρτιο } (2,4,6,\dots) \end{cases}$$

και $E_n = \dfrac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.

Εφ' όσον έχουν μετρηθεί μόνον E_1 και E_2 $\Rightarrow$

$$\psi(x) = \alpha \psi_1 + \beta \psi_2 \quad \text{με} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} (\Delta E)^2 = |\alpha|^2 |\beta|^2 (E_1 - E_2)^2 \Rightarrow |\alpha|^2 |\beta|^2 = \frac{2}{9} \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$|\alpha|^4 - |\alpha|^2 + \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow |\alpha|^2 = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{και} \quad |\beta|^2 = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

α). $\underbrace{\langle P \rangle}_{\text{ομοτιμία}} = |\alpha|^2 \cdot \underbrace{1}_{(\psi_1)} + |\beta|^2 \underbrace{(-1)}_{(\psi_2)} = |\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0 \Rightarrow |\alpha|^2 > |\beta|^2$

Άρα: $|\alpha|^2 = \frac{2}{3}$ και $|\beta|^2 = \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\psi(x) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, e^{i\varphi_1}\psi_1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, e^{i\varphi_2}\psi_2 .}$$

β).

$$\langle x\rangle = \int_{-L/2}^{L/2} \psi^* x \psi \, dx =$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} e^{-i\varphi_1}\psi_1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}} e^{-i\varphi_2}\psi_2\right) x \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} e^{i\varphi_1}\psi_1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}} e^{i\varphi_2}\psi_2\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}\underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \psi_1 x \psi_1\, dx}_{0} + \frac{1}{3}\underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \psi_2 x \psi_2\, dx}_{0} + \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}\int_{-L/2}^{L/2} \psi_1 x \psi_2\, dx$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-i(\varphi_2-\varphi_1)}\underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \psi_2 x \psi_1\, dx}_{\frac{16L}{9\pi^2}\ (\text{δίδεται})}$$

$$\langle x\rangle = \frac{32\sqrt{2}L}{27\pi^2}\cos(\varphi_2-\varphi_1) = 0 \Rightarrow \cos(\varphi_2-\varphi_1) = 0$$

$$\langle p\rangle = \int_{-L/2}^{L/2} \psi^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\psi\right) =$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} e^{-i\varphi_1}\psi_1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}} e^{-i\varphi_2}\psi_2\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} e^{i\varphi_1}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\varphi_2}\psi_2\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-L/2}^{L/2} \psi_1 \cancel{\left(-i\hbar\frac{d\psi_1}{dx}\right)}^{0} + \frac{1}{3}\int_{-L/2}^{L/2} \psi_2 \cancel{\left(-i\hbar\frac{d\psi_2}{dx}\right)}^{0}$$ (χωρίς υπολογισμό)

$$+ \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}\int_{-L/2}^{L/2} (-i\hbar)\psi_1\psi_2'\, dx \rightarrow (-i\hbar)\frac{8}{3L}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-i(\varphi_2-\varphi_1)}\underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} (-i\hbar)\psi_2\psi_1'\, dx}_{= -\int_{-L/2}^{L/2} (-i\hbar)\psi_1\psi_2'\, dx}$$

(χωρίς υπολογισμό)

Επομένως:

$$\langle p\rangle = (-i\hbar)\frac{8}{3L}\sqrt{\frac{2}{3}}\, 2i$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}L}\sin(\varphi_2-\varphi_1) > 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\varphi_2-\varphi_1) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

Άρα
$$\boxed{\psi(x) = e^{i\varphi_1}\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\psi_2\right\}}.$$

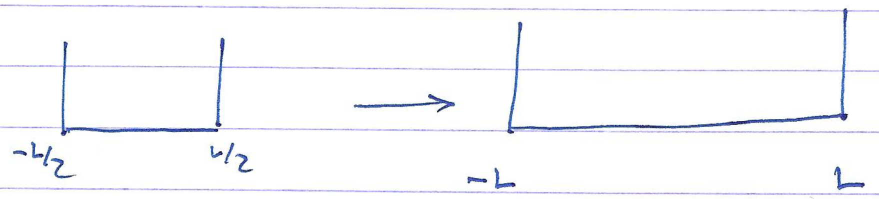
γ). Έστω ότι την χρονική στιγμή $t=0$ το σωμάτιο βρίσκεται στην κατάσταση που προσδιορίσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Μετά από χρόνο t τα όρια στα οποία είναι δεσμευμένο διπλασιάζονται (συμμετρικά). Αμέσως μετά μετράμε την ενέργειά του. Ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθεί με την ελάχιστη δυνατή και ποιά με την πρώτη διεγερμένη ενέργεια που του επιτρέπεται;

Εφ' όσον
$$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\psi_2$$

μέχρι την χρονική στιγμή t έχουμε την εξέλιξη με βάση το αρχικό ενεργειακό φάσμα. Επομένως:

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-i\omega_1 t}\psi_1 + \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-i\omega_2 t}\psi_2$$

Για κλασική στιγμή t:



ψ_n, E_n

$$\phi_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L}} \cos \frac{n\pi}{2L} x & n \text{ περιττό} \\ \sqrt{\frac{1}{L}} \sin \frac{n\pi}{2L} x & n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

με $\mathcal{E}_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(2L)^2}$

Για $n=1$: $\mathcal{E}_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}E_1$ $\quad \phi_1 = \sqrt{\frac{1}{L}}\cos\frac{\pi}{2L}x$

$\mathcal{E}_2 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = E_1$ $\quad \phi_2 = \sqrt{\frac{1}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}$

$$C(1) = \int_{-L/2}^{L/2} \phi_1 \psi(x,t) \quad , \quad P(\mathcal{E}_1) = |c(1)|^2$$

$$C(2) = \int_{-L/2}^{L/2} \phi_2 \psi(x,t) \quad , \quad P(\mathcal{E}_2) = |c(2)|^2$$

$$C(1) = \sqrt{\frac{1}{L}} \int_{-L/2}^{L/2} \cos\frac{\pi}{2L}x \left[\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\omega_1 t} \cos\frac{\pi}{L}x + \cancel{\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{i}{\sqrt{3}} e^{-i\omega_2 t} \sin\frac{2\pi}{L}x} \right] dx$$

(περιττή συνάρτηση)

$$C(2) = \sqrt{\frac{1}{L}} \int_{-L/2}^{L/2} \sin\frac{\pi}{L}x \left[\cancel{\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\omega_1 t} \cos\frac{\pi}{L}x} + \sqrt{\frac{2}{L}}\frac{i}{\sqrt{3}} e^{-i\omega_2 t} \sin\frac{2\pi}{L}x \right] dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C(1) = \frac{1}{L}\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-i\omega_1 t} \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \cos\frac{\pi}{2L}x \cos\frac{\pi}{L}x \, dx}_{= \frac{4\sqrt{2}L}{3\pi}} \\ C(2) = \frac{1}{L} i \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\omega_2 t} \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \sin\frac{\pi}{L}x \sin\frac{2\pi}{L}x \, dx}_{= \frac{4L}{3\pi}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C(1) = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\pi} e^{-i\omega_1 t} & |C(1)|^2 = \frac{128}{27\pi^2} \sim 0.48 \\ C(2) = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\pi} i e^{-i\omega_2 t} & |C(2)|^2 = \frac{8}{27\pi^2} \sim 0.12 \end{cases}$$