1. Σωματίδιο μάζας m κινούμενο σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή με

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

περιγράφεται την χρονική στιγμή $t=0$ από την κυματική συνάρτηση

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_n(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_{n+1}(x) = \psi(x,0).$$

(i). Να γραφεί η $\psi(x,t)$.

(ii). Να υπολογισθούν οι $\langle x\rangle_t$, $\langle p\rangle_t$. (Θ.Ε)

(iii). Να υπολογισθούν οι $(\Delta x)_t$, $(\Delta p)_t$.

(iv). Να επιβεβαιωθούν οι σχέσεις αβεβαιότητας θέσης - ορμής.

(i).
$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_n t}\phi_n(x) + \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_{n+1}t}\phi_{n+1}(x)$$

$$\omega_n = \frac{1}{\hbar}E_n = \omega(n+\tfrac{1}{2})$$

(ii).
$$\langle x\rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)\,\hat{x}\,\psi(x,t)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n\hat{x}\phi_n\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{n+1}\hat{x}\phi_{n+1}\,dx$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\Delta\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n\hat{x}\phi_{n+1}\,dx - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{+i\Delta\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{n+1}\hat{x}\phi_n\,dx$$

$$\Delta\omega = \omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \hat{x} \phi_n = \frac{1}{\sqrt{2}\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n (\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}) \phi_n \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\beta} \left\{ \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \phi_{n-1} + \sqrt{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \phi_{n+1} \right\} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \hat{x} \phi_{n+1} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n (\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}) \phi_{n+1} \, dx = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\beta}$$

$$\text{"} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1} \hat{x} \phi_n \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1} (\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}) \phi_n \, dx = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\beta} \text{"}$$

Άρα:

$$\langle x \rangle_t = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\beta} (-i 2 \sin \Delta\omega t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle x \rangle_t = \frac{\sqrt{n+1}}{\beta} \sin \Delta\omega t.}$$

$$\langle \hat{p} \rangle_t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cancelto{0}{\phi_n \hat{p} \phi_n} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cancelto{0}{\phi_{n+1} \hat{p} \phi_{n+1}}$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\Delta\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \hat{p} \phi_{n+1} \, dx - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\Delta\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1} \hat{p} \phi_n \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \hat{p} \phi_{n+1} \, dx = -\frac{im\omega}{\sqrt{2}\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n (\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}) \phi_{n+1} \, dx = -\frac{im\omega}{\sqrt{2}\beta} \sqrt{n+1}$$

$$\text{"} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1} \hat{p} \phi_n \, dx = -\frac{im\omega}{\sqrt{2}\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1} (\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}) \phi_n \, dx = \frac{im\omega}{\sqrt{2}\beta} \sqrt{n+1}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \hat{p} \phi_{n+1} \, dx \text{"}.$$

Άρα:

$$\langle p \rangle_t = -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{im\omega}{\sqrt{2}\beta} \sqrt{n+1} \, e^{-i\Delta\omega t} - \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{im\omega}{\sqrt{2}\beta} \sqrt{n+1} \, e^{i\Delta\omega t}$$

$$\boxed{\langle p \rangle_t = \frac{m\omega}{\beta} \sqrt{n+1} \cos \Delta\omega t = m \frac{d}{dt} \langle x \rangle_t.}$$

(iii). $\langle \hat{x}^2 \rangle_t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \hat{x}^2 \phi_n + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1} \hat{x}^2 \phi_{n+1}$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\Delta\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{\phi_n \hat{x}^2 \phi_{n+1}}^{\,0} - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\Delta\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{\phi_{n+1} \hat{x}^2 \phi_n}^{\,0}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2\beta^2}(2n+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{2\beta^2}(2n+5) = \frac{1}{4\beta^2}(4n+6) = \frac{1}{2\beta^2}(2n+3)$$

Enginers:

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{2\beta^2}(2n+3) - \frac{n+1}{\beta^2}\sin \Delta\omega t$$

$$= \frac{1}{2\beta^2}\left[(2n+3) - (2n+2)\sin \Delta\omega t\right]$$

$$\boxed{(\Delta x)^2 = \frac{1}{2\beta^2}\left[1 + 2(n+1)\left(1 - \sin \Delta\omega t\right)\right]}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle_t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \hat{p}^2 \phi_n + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1} \hat{p}^2 \phi_{n+1} + 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \hat{p}^2 \phi_n = -\frac{m^2\omega^2}{2\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \left(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\phi_n$$

$$= \frac{m^2\omega^2}{2\beta^2}(2n+1)$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \langle \hat{p}^2 \rangle_t = \frac{m^2\omega^2}{4\beta^2}(4n+6) \quad \Rightarrow$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{m^2\omega^2}{4\beta^2}(4n+6) - \frac{m^2\omega^2}{\beta^2}(n+1)\cos \Delta\omega t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{(\Delta p)^2 = \frac{m^2\omega^2}{2\beta^2}\left[1 + 2(n+1)\left(1 - \cos \Delta\omega t\right)\right]}$$

2. Σωμάτιο μάζας m και φορτίου q βρίσκεται σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή και ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έντασης E_0. Να βρεθεί το ενεργειακό φάσμα και οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας.

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 - qE_0 \hat{x}$$

$$= \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\hat{x}^2 - 2\frac{qE_0}{m\omega^2} \hat{x} \right)$$

$$= \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\hat{x} - \frac{qE_0}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2 E_0^2}{m\omega^2}$$

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}\psi + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x - \frac{qE_0}{m\omega^2} \right)^2 \psi - \frac{1}{2} \frac{q^2 E_0^2}{m\omega^2} \psi = E\psi$$

Θέτουμε:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= x - \frac{qE_0}{m\omega^2} \\ \frac{d}{dx} &= \frac{d}{d\chi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\chi^2}\psi + \frac{1}{2} m\omega^2 \chi^2 \psi - \frac{1}{2} \frac{q^2 E_0^2}{m\omega^2} \psi = E\psi$$

Λύση:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{q^2 E_0^2}{m\omega^2}$$

$$\phi_n(\chi) = N_n H_n(\beta\chi) e^{-\beta^2 \chi^2/2}$$

$$= N_n H_n\left(\beta\left(x - \frac{qE_0}{m\omega^2}\right)\right) e^{-\frac{\beta^2}{2}\left(x - \frac{qE_0}{m\omega^2}\right)^2}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - \frac{q^2E_0^2}{2m\omega^2}$$

$$\hat{\pi}\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x).$$

Για την αλγεβρική λύση:

$$\hat{\alpha} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{\pi}\right)$$

$$\hat{\alpha}^{\dagger} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{\pi}\right)$$

$$[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^{\dagger}] = 1$$

Και:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{\alpha}^{\dagger}\hat{\alpha} + \frac{1}{2}\right) - \frac{q^2E_0^2}{2m\omega^2}$$

$$\vdots$$

3. Σωμάτιο μάζας m και φορτίου q βρίσκεται στην βασική στάθμη αρμονικού ταλαντωτή. Την χρονική στιγμή $t=0$ εφαρμόζεται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E_0. Ποια είναι η πιθανότητα σε μέτρηση της ενέργειας σε χρόνο $t>0$ να βρεθεί η βασική στάθμη της νέας Χαμιλτονιανής;

$$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}}$$

Για $t>0$:
$$\phi_0(x) = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{\beta^2}{2}(x-\delta)^2}, \quad \delta = \frac{qE_0}{m\omega^2}$$

Η $\psi(x,0)$ αναπτύσσεται στις ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - qE_0\hat{x}$$

και

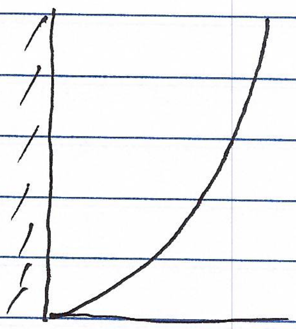
$$c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x)\,\psi(x,0)\,dx = e^{-\frac{\beta^2\delta^2}{4}}$$

$$\Downarrow$$

$$P(E_0) = e^{-\frac{\beta^2\delta^2}{2}} \qquad \left(E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{2}\frac{q^2E_0^2}{m\omega^2}\right).$$

1. Να ευρεθεί το ενεργειακό φάσμα και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις για το δυναμικό:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 , & x>0 \\ \infty , & x<0 . \end{cases}$$



Η εξίσωση που πρέπει να λύσει είναι:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_E}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi_E = E\psi_E \qquad \text{για } x>0$$

και προφανώς $\psi_E(x)=0$ εάν $x<0$.

Λόγω της συνέχειας των $\psi_E(x)$: $\psi_E(0)=0$.

Ακολουθώντας τα βήματα της επίλυσης του αρμονικού ταλαντωτή (για $x>0$) βρίσκουμε ακριβώς τις ίδιες λύσεις, μόνο που δεν είναι όλες αποδεκτές επειδή πρέπει $\psi_E(0)=0$.

Επομένως το πρόβλημα έχει ως λύσεις

μόνο τις περιττές ιδιοσυναρτήσεις οι οποίες μηδενίζονται στο $x=0$.

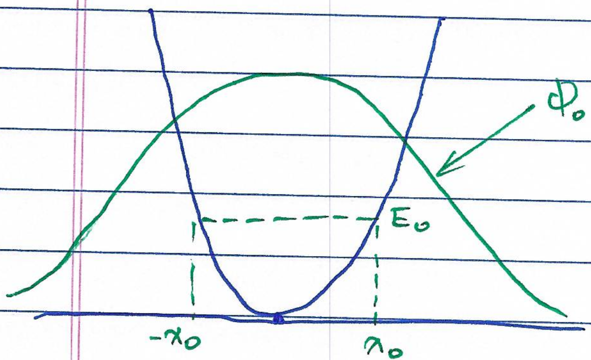
Επομένως:

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad n = 1, 3, \ldots$$

$$\psi_n(x) = N_n e^{-\beta^2 x^2/2} H_n(\beta x) .$$

5. Σωμάτιο βρίσκεται στην θεμελιώδη στάθμη του αρμονικού ταλαντωτή. Να ευρεθεί η πιθανότητα ώστε να βρίσκεται στην κλασσικά απαγορευμένη περιοχή.

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega , \qquad \phi_0(x) = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\beta^2 x^2/2}$$



$$\frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 = E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \Rightarrow \beta^2 x_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\beta}$$ (κλασσικό πλάτος ταλάντωσης).

Κλασσικά απαγορευμένη περιοχή:

$$|x| > x_0 .$$

Η πιθανότητα είναι:

$$P = \int_{\frac{1}{\beta}}^{\infty} \phi_0^2(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-1/\beta} \phi_0^2(x)\,dx =$$

$$1 - \int_{-1/\beta}^{1/\beta} \phi_0^2(x)\,dx = 1 - 2\int_0^{1/\beta} \phi_0^2(x)\,dx$$

$$= 1 - 2\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1/\beta} e^{-\beta^2 x^2}\,dx = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-y^2}\,dy \quad (y = \beta x).$$

Προσέγγιση: $e^{-y^2} = 1 - y^2 + \frac{1}{2}y^4 \,..\, \rightarrow$

$$\boxed{P = 1 - \frac{23\sqrt{\pi}}{15} \sim 0.157}$$

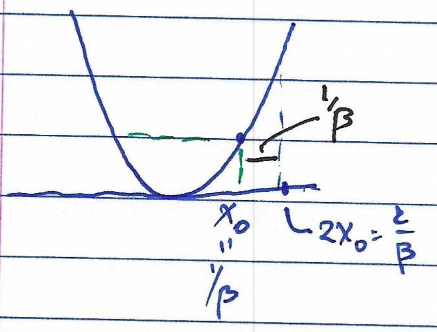
Όσον αφορά στο ερώτημα εντοπισμού του σωματίου στην κλασσικά απαγορευμένη περιοχή:

π.χ. για $x>0$ η κλασσικά απαγορευμένη περιοχή είναι εάν $x > \frac{1}{\beta}$

Θέτοντας $x = \frac{1}{\beta} + y$ έχουμε:

$$\phi_0(x) = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{\beta^2}{2}\left(\frac{1}{\beta}+y\right)^2} = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-\frac{1}{2} - \beta y - \frac{\beta^2}{2}y^2}$$

Δηλαδή υπάρχει μετρήσιμη πιθανότητα για $y \sim \frac{1}{\beta}$ $\left(x \sim \frac{2}{\beta}\right)$ και εκεί πρέπει να εντοπισθεί με διασπορά



$(\Delta x) \ll \frac{1}{\beta}$ $\Rightarrow$ (σχέση αβεβαιότητας)

$\Rightarrow (\Delta p) \gg \frac{\hbar \beta}{2}$.

Άρα έχουμε επιπλέον $\langle p^2 \rangle \gg \frac{\hbar^2 \beta^2}{4}$ $\Rightarrow$

Επιπλέον ενέργεια $\Rightarrow (\Delta E) \gg \frac{\hbar\omega}{8}$.

Λόγω αυτής της (ΔE) δεν μπορούμε εάν εντοπισθεί το σωμάτιο σε σημείο της "απαγορευμένης" περιοχής να είμαστε βέβαιοι ότι το σημείο ευρίσκεται πράγματι σε απαγορευμένη περιοχή.

6. Δέσμη σωματίων ενέργειας E προσπίπτει σε δυναμικό $V(x)$ το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες

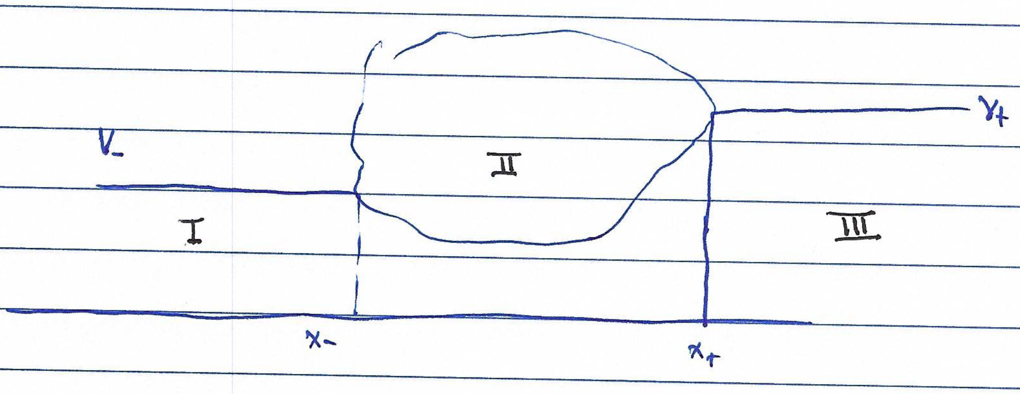
$$x > x_+ \;:\; V(x) = V_+$$
$$x < x_- \;:\; V(x) = V_- \qquad , \quad x_- < x_+$$

και

$$V_- < V_+ .$$

(i). Εάν $E > V_+$ να δείξετε ότι $\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1$ για περίπτωση είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά.

(ii). Εάν $V_- < E < V_+$ να δείξετε ότι $\mathbb{R} = 1$, $\mathbb{T} = 0$.



Σε κάθε περίπτωση $\psi(x,t) = e^{-i\omega t}\psi_E(x)$, $\omega = \frac{E}{\hbar}$

όπου $\psi_E(x)$ λύση της $\hat{H}\psi_E = E\psi_E$.

Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} j = 0 .$$

$$\rho = \psi^*(x,t)\,\psi(x,t) = |\psi_E(x)|^2 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

$\frac{\partial j}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ Το ρεύμα είναι χωρικά σταθερό.

(i). Για πρόσπτωση π.χ. από τα δεξιά.

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \psi_I(x) & \text{εάν} \quad x < x_- \\ \psi_{III}(x) & \text{εάν} \quad x > x_+ \end{cases}$$

με:

$$\psi_I(x) = C' e^{-ik_1 x} \quad , \quad k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_-)}$$

και:

$$\psi_{III}(x) = A e^{-ik_3 x} + B e^{ik_3 x} \qquad k_3 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_+)}$$

Τα αντίστοιχα ρεύματα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} J_I = -\frac{\hbar k_1}{m}|C|^2 = -J_T \\ J_{III} = \frac{\hbar k_3}{m}(|B|^2 - |A|^2) = J_R - J_I \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-J_T = J_R - J_I \Rightarrow J_I = J_R + J_T$$

$$\Rightarrow 1 = \mathbb{R} + \mathbb{T}$$

(ii). Εάν $V_- < E < V_+ \Rightarrow$ πρόσπτωση μόνο εξ αριστερών και

$$\psi_I = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$$

$$\psi_{III} = C e^{-q_3 x} \qquad q_3 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_+ - E)}$$

και τα αντίστοιχα ρεύματα:

$$\left.\begin{array}{l} J_I = \frac{\hbar k_1}{m}(|A|^2 - |B|^2) = J_I - J_R \\ J_{III} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow J_R = J_I \Rightarrow$$

$$\mathbb{R} = 1, \ (\mathbb{T} = 0).$$

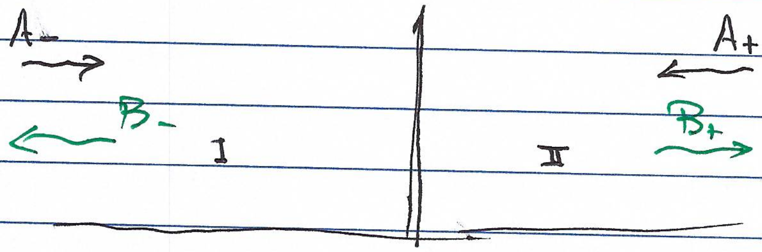
Εάν έχουμε πηγές σωματίων και αριστερά και δεξιά (προφανώς αυτό είναι δυνατόν μόνο στην περίπτωση που $E>V_+$) τότε:

$$\left.\begin{aligned} \psi_I(x) &= A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \\ \psi_{III}(x) &= G e^{ik_3 x} + D e^{-ik_3 x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} J_I &= \frac{\hbar k_1}{m}\left(|A|^2 - |B|^2\right) = J_{I-} - J_{R-} \\ J_{III} &= \frac{\hbar k_3}{m}\left(|G|^2 - |D|^2\right) = J_{R+} - J_{I+} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{J_{I-} + J_{I+} = J_{R-} + J_{R+}}$$

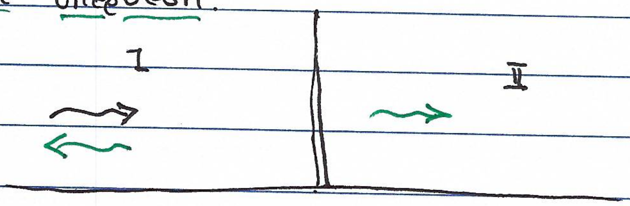
17. Δέσμες σωματιδίων μάζας m και ενέργειας E προσπίπτουν από τα αριστερά και από τα δεξιά στο δυναμικό $V(x)=\lambda\delta(x)$ με πλάτη A_- και A_+ αντίστοιχα. Να ευρεθούν τα πλάτη B_- και B_+ των δεσμών που ανακλώνται από το δυναμικό προς τα αριστερά και προς τα δεξιά αντίστοιχα.



$$\psi_I(x) = A_- e^{ikx} + B_- e^{-ikx} \qquad k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},\ (E>0).$$

$$\psi_{II}(x) = A_+ e^{-ikx} + B_+ e^{ikx}$$

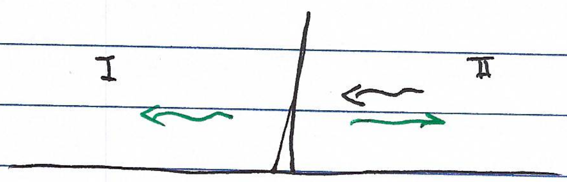
(i). Λύση με υπέρθεση.



$$G = -\frac{ik\hbar^2}{m\lambda - ik\hbar^2}A$$

$$B = -\frac{+m\lambda}{m\lambda - ik\hbar^2}A$$

$$\psi^{(1)}(x): \quad A e^{ikx} + B e^{-ikx} \ \vdots\ G e^{ikx}$$



$$G' = -\frac{ik\hbar^2}{m\lambda - ik\hbar^2}A'$$

$$B' = -\frac{m\lambda}{m\lambda - ik\hbar^2}A'$$

$$\psi^{(2)}(x): \quad G' e^{-ikx} \ \vdots\ A' e^{-ikx} + B' e^{ikx}$$

$$\psi(x): \quad \underset{\substack{\parallel\\ A_-}}{A} e^{ikx} + \underbrace{(B+G')}_{\substack{\parallel\\ B_-}} e^{-ikx} \ \vdots\ \underset{\substack{\parallel\\ A_+}}{A'} e^{-ikx} + \underbrace{(G+B')}_{\substack{\parallel\\ B_+}} e^{ikx}$$

Επομένως : $A = A_-\,,\quad B_- = B + C'$
$A' = A_+\,,\quad B_+ = C + B'$ $\Big\}\Rightarrow$

$$B_- = -\frac{m\lambda}{m\lambda - i\hbar^2 k}A_- - \frac{ik\hbar^2}{m\lambda - i\hbar^2 k}A_+$$

$$B_+ = -\frac{ik\hbar^2}{m\lambda - ik\hbar^2}A_- - \frac{m\lambda}{m\lambda - i\hbar^2 k}A_+$$

ή

$$\begin{pmatrix} B_- \\ B_+ \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A_- \\ A_+ \end{pmatrix}$$

$\llcorner$ πίνακας σκέδασης

$$S = -\frac{1}{m\lambda - ik\hbar^2}\begin{pmatrix} m\lambda & ik\hbar^2 \\ ik\hbar^2 & m\lambda \end{pmatrix}$$

$$S S^\dagger = I.$$

$\hookrightarrow$ μοναδιακός πίνακας $\rightarrow |B_-|^2 + |B_+|^2$

$= |A_-|^2 + |A_+|^2.$

(ii). Λύση με απ' ευθείας υπολογισμό.

Στο σημείο $x=0$:

$$\left.\begin{aligned} A_+ + B_+ &= A_- + B_- \\ -ik(A_+ - B_+) - ik(A_- - B_-) &= \frac{2m\lambda}{\hbar^2}(A_+ + B_+) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} ik(A_- + B_-) &= ik(A_+ + B_+) \\ ik(A_- - B_-) &= -\left(ik + \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)A_+ + \left(ik - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)B_+ \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$2ikA_- = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}A_+ + 2\left(ik - \frac{m\lambda}{\hbar^2}\right)B_+ \Rightarrow$$

$$B_+ = -\frac{1}{m\lambda - ik\hbar^2}\left\{ik\hbar^2 A_- + m\lambda A_+\right\}$$

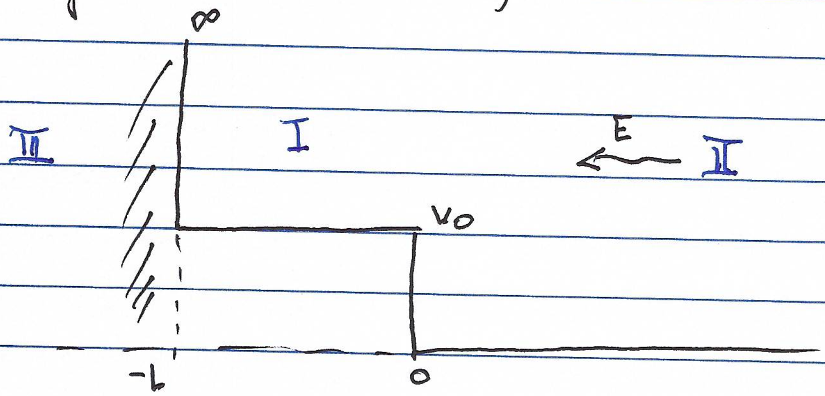
$$\vdots$$

Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι:

$$|B_-|^2 + |B_+|^2 = |A_-|^2 + |A_+|^2$$

$$\left(R + T = 1 + \mu^2, \quad \mu = \frac{|A_+|}{|A_-|} \right) ??$$

7. Δέσμη σωματίων μάζας m και ενέργειας E προσπίπτουν εκ δεξιών στο κάτωθι δυναμικό:



Να βρεθούν οι συντελεστές ανάκλασης και διέλευσης.

(i). $E > V_0$.

$$\psi_{II}(x) = e^{-ikx} + R e^{ikx} \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_{I}(x) = A e^{-ik_1 x} + B e^{ik_1 x} \qquad k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}$$

$$\psi_{III}(x) = 0$$

Για $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + R = A + B \\ -ik(1-R) = -ik_1(A-B) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 + R = A + B \\ 1 - R = \frac{k_1}{k}(A-B) \end{array}\right.$$

Για $x=-L$:

$$A e^{ik_1 L} + B e^{-ik_1 L} = 0 \Rightarrow B = -A e^{2ik_1 L}$$

$$\Rightarrow$$

$$2 = A\left\{\left(1 - e^{2ik_1 L}\right) + \frac{k_1}{k}\left(1 + e^{2ik_1 L}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad 2k e^{-ik_1 L} = A\left\{-2ik \sin k_1 L + 2k_1 \cos k_1 L\right\}$$

$$A = \frac{k e^{-ik_1 L}}{k_1 \cos k_1 L - ik \sin k_1 L}$$

$$B = -\frac{k e^{ik_1 L}}{k_1 \cos k_1 L - ik \sin k_1 L}$$

$$R = \frac{1}{k_1 \cos k_1 L - ik \sin k L}(-2ik \sin k_1 L) - 1$$

$$\Rightarrow \quad R = -\frac{k_1 \cos k_1 L + ik \sin k_1 L}{k_1 \cos k_1 L - ik \sin k_1 L}$$

$$|R|^2 = 1 \Rightarrow \mathbb{R} = 1, \quad \mathbb{T} = 0.$$

$|A|^2 = |B|^2 \Rightarrow$ Το ρεύμα στην περιοχή $-L < x < 0$ μηδενίζεται.

(ii). $0 < E < V_0$.

$$\psi_{II}(x) = e^{-ikx} + R e^{ikx}$$

$$\psi_I(x) = A e^{qx} + B e^{-qx} \qquad q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}(V_0 - E)}$$

Το αποτέλεσμα γράφεται εύκολα με την αντικατάσταση:

$$k_1 = iq \quad \Rightarrow$$

$$\cos k_1 L = \cos(iqL) = \cosh qL$$

$$\sin k_1 L = \sin(iqL) = i \sinh qL$$

και είναι:

$$A = \frac{k e^{qL}}{k \sinh qL + iq \cosh qL}$$

$$B = -\frac{k e^{-qL}}{k \sinh qL + iq \cosh qL}$$

$$R = \frac{k \sinh qL - iq \cosh qL}{k \sinh qL + iq \cosh qL}.$$

Πάλι:

$|R| = 1$ και το ρεύμα στην περιοχή I μηδενίζεται.

να δειχθεί.