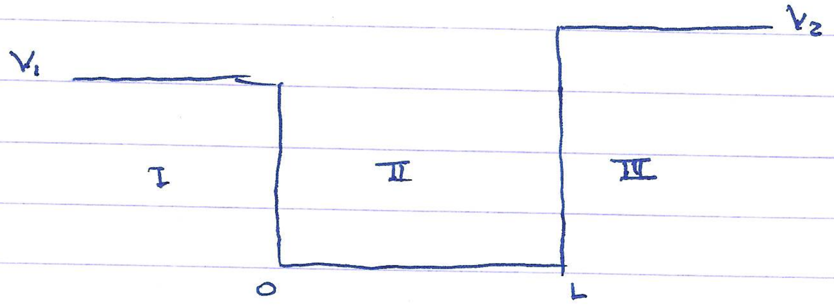
6. Να ευρεθούν οι δέσμιες καταστάσεις του ακόλουθου ασύμμετρου πηγαδιού.



Για τις ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων έχουμε:

$$0 < E < V_1 . \qquad (V_1 < V_2).$$

$x<0$ $\quad \psi_{I} = A e^{q_1 x} \qquad q_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_1 - E)}$

$0<x<L$ $\quad \psi_{II} = B \sin(kx+\delta) \qquad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$

$x>L$ $\quad \psi_{III} = \Gamma e^{-q_2 x} \qquad q_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_2 - E)}$

Στο σημείο $x=0$:

$$\left.\begin{aligned} A &= B \sin\delta \\ q_1 A &= k B \cos\delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\delta = \frac{k}{q_1}$$

Στο σημείο $x=L$:

$$\left.\begin{aligned} B \sin(kL+\delta) &= \Gamma e^{-q_2 L} \\ kB \cos(kL+\delta) &= -q_2 \Gamma e^{-q_2 L} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan(kL+\delta) = -\frac{k}{q_2}$$

Εάν :

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} L^2 V_1} > \frac{2n-1}{2}\pi - \arcsin\sqrt{\frac{V_1}{V_2}}$$

υπάρχουν n δέσμιες καταστάσεις.

** Για το συμμετρικό πηγάδι $V_1 = V_2 = V_0$

$$\sqrt{\frac{2mL^2}{\hbar^2}E} = n\pi - 2\arcsin\sqrt{\frac{E}{V_0}} \Rightarrow$$

$$2\sqrt{\frac{2m(\frac{L}{2})^2}{\hbar^2}E} = n\pi - 2\arcsin\sqrt{\frac{E}{V_0}}$$

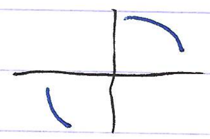
$$\Rightarrow 2\xi = n\pi - 2\arcsin\frac{\xi}{a}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{n\pi}{2} - \arcsin\frac{\xi}{a}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{2} - \xi\right) = \frac{\xi}{a}$$

$$\frac{n\pi}{2} < \xi < \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

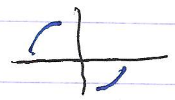
(i). n περιττό $\rightarrow \tan\xi > 0$



$$\sin\frac{n\pi}{2}\cos\xi - \cos\frac{n\pi}{2}\sin\xi = \frac{\xi}{a} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos\xi = \pm\frac{\xi}{a} \\ \sin\xi = \pm\sqrt{1-\xi^2/a^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\tan\xi = \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi}$$

(ii). n άρτιο $\rightarrow \tan\xi < 0$



$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\xi - \cos\frac{n\pi}{2}\sin\xi = \frac{\xi}{a} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin\xi = \pm\frac{\xi}{a} \\ \cos\xi = \pm\sqrt{1-\xi^2/a^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\xi = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}$$

$$\tan\delta = \frac{k}{q_1} \Rightarrow \frac{\pm\sin\delta}{\sqrt{1-\sin^2\delta}} = \frac{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}}{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_1-E)}} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{V_1-E}} = \frac{\sqrt{\frac{E}{V_1}}}{\sqrt{1-\frac{E}{V_1}}}$$

$$\Rightarrow \sin\delta = \pm\sqrt{\frac{E}{V_1}}$$

$$\Rightarrow \delta = \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_1}} + n_1\pi$$

$$0 < \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_1}} < \frac{\pi}{2}$$

Ομοίως: $\tan(kL+\delta) = \frac{\sin(kL+\delta)}{\sqrt{1-\sin^2(kL+\delta)}} = -\frac{\sqrt{\frac{E}{V_2}}}{\sqrt{1-\frac{E}{V_2}}} \Rightarrow$

$$kL+\delta = -\arcsin\sqrt{\frac{E}{V_2}} + n_2\pi$$

$$0 < \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_2}} < \frac{\pi}{2}$$

Επομένως:

$$kL = (n_2-n_1)\pi - \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_1}} - \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_2}}$$

$$\Rightarrow kL = n\pi - \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_1}} - \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_2}}, \quad n=1,2,\ldots$$

$(kL > 0 \Rightarrow (n_2-n_1)\pi > 0)$

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}L^2}\sqrt{E} = n\pi - \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_1}} - \arcsin\sqrt{\frac{E}{V_2}}, \quad n=1,2,\ldots$$

$$0 < \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}L^2}\sqrt{E} < \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}L^2}\sqrt{V_1}$$

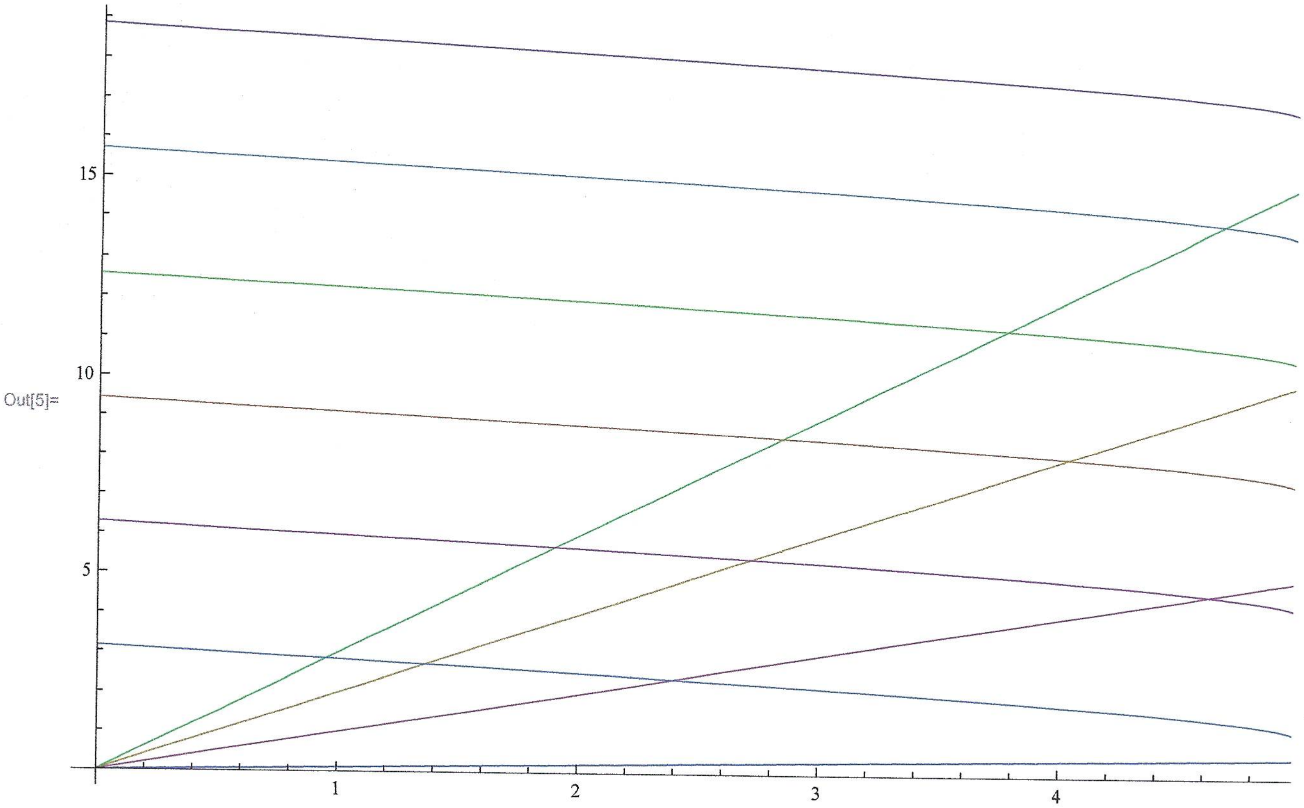
A

$$n\pi < A < (n-1)\pi$$

Για $E = V_1$ $\quad \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}L^2}\sqrt{V_1} = n\pi - \arcsin\sqrt{\frac{V_1}{V_2}} - \frac{\pi}{2}$

Για να υπάρχει δέσμια κατάσταση πρέπει:

$$\boxed{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}L^2 V_1} > \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{V_1}{V_2}}}$$



$V_2 = 2V_1$
$V_1 = 5$ /

7. Στο πρόβλημα (1) να δείξετε ότι:

(i). $V_2 \to \infty$ $\Rightarrow$ Ενεργειακό φάσμα και ιδιοσυναρτήσεις του απειρόβαθου πηγαδιού.

(ii). $V_1 = -\dfrac{\lambda}{2L}$, $L \to 0$ $\Rightarrow$ Στο πρόβλημα με $V(x) = \lambda\delta(x)$, $\lambda > 0$.

Αρμονικός ταλαντωτής.

Εξίσωση ιδιοτιμών:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_E + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi_E = E\psi_E \Rightarrow$$

$$\frac{\hbar\omega}{2}\left\{-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d^2}{dx^2}\psi_E + \frac{m\omega}{\hbar}x^2\psi_E = \frac{2E}{\hbar\omega}\psi_E\right\}$$

Ορίζοντας την $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x = \alpha x$

η οποία είναι αδιάστατη και θεωρώντας $\psi_E(\xi)$ έχουμε:

$$\boxed{\psi_E'' + (\lambda - \xi^2)\psi_E = 0, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}, \quad \left(' = \frac{d}{d\xi}\right) \quad \xi = \alpha x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x.}$$

(i). Συμπεριφορά στο $\pm\infty$.

$$\xi^2 \gg \lambda \rightarrow \psi_E'' - \xi^2\psi_E = 0$$

→ χρειαζόμαστε εξίσωση η οποία με δύο παραγωγίσεις να εμφανίζει τον όρο $\xi^2\psi_E$

$$\rightarrow \quad \psi_E \sim e^{-\xi^2/2}$$

Ανζατς: $\quad \psi_E(\xi) = e^{-\xi^2/2} H_E(\xi).$

Η $H_E(\xi)$ ικανοποιεί την εξίσωση: $\quad \left(\psi_E' = -\xi e^{-\xi^2/2} H_E + e^{-\xi^2/2} H_E'\right)$

$$\psi_E'' = \left(\xi^2 H_E - 2\xi H_E' + H_E'' - H_E\right)e^{-\xi^2/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_E'' - 2\xi H_E' + (\lambda - 1)H_E = 0.}$$

(ii). Προσδιορισμός των E, ψ_E.

Έχοντας εξασφαλίσει (?) ότι $\psi_E \to 0$ εάν $\xi \to \pm\infty$

Θεωρούμε ανάπτυγμα της $H_E(\xi)$ σε σειρά:

$$(\lambda-1)\quad \left[H_E(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots + a_n\xi^n\right]$$

$$(-2)\quad \xi H_E'(\xi) = a_1\xi + 2a_2\xi^2 + 3a_3\xi^3 + \dots + na_n\xi^n$$

$$H_E''(\xi) = 2a_2 + 6a_3\xi + 12a_4\xi^2 + 20a_5\xi^3 + \dots + n(n-1)a_n\xi^{n-2}$$

$$\dots + (n+2)(n+1)a_{n+2}\xi^n$$

$*$

Μηδενισμός της σειράς $(*\xi) \Rightarrow$ μηδενισμός του συντελεστού κάθε δύναμης του ξ:

$$2a_2 = (1-\lambda)a_0$$

$$2\cdot 3\, a_3 = (2+1-\lambda)a_1$$

$$\vdots$$

$$\boxed{(n+2)(n+1)a_{n+2} = (2n+1-\lambda)a_n}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$*$ Με πιο συνοπτικό συμβολισμό: $H_E(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\xi^n$

$$H_E'(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n\xi^{n-1} \Rightarrow -2\xi H_E'(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2na_n)\xi^n$$

$$H_E''(\xi) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m\xi^{m-2} \underset{m-2=n}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\xi^n$$

$$\to \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (1-\lambda-2n)a_n\right]\xi^n = 0}$$

- $a_0 \neq 0, \quad a_1 = 0$:

$$H_E(\xi) = a_0\left(1 + \frac{a_2}{a_0}\xi^2 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_0}\xi^{2n} + \dots\right) \quad \text{Άρτια λύση}$$

$a_0 = 0, \quad a_1 \neq 0$:

$$H_E(\xi) = a_1\left(\xi + \frac{a_3}{a_1}\xi^3 + \dots + \frac{a_{2n-1}}{a_1}\xi^{2n-1} + \dots\right) \quad \text{Περιττή λύση}$$
$$= a_1\xi\left(1 + \frac{a_3}{a_1}\xi^2 + \dots + \frac{a_{2n-1}}{a_1}\xi^{2(n-1)} + \dots\right)$$

Οι λόγοι προσδιορίζονται από την αναδρομική σχέση:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+2)(n+1)} \quad \dots$$

- Σύγκλιση της σειράς :

Για $n \to \infty$ $(n \gg 1)$ $\dfrac{a_{n+2}}{a_n} \to \dfrac{2}{n}$ δηλαδή ο λόγος

δύο διαδοχικών όρων $\to 0$ ως $\dfrac{2}{n}$.

Εάν θεωρήσουμε την σειρά $e^{\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\xi^2)$

ο λόγος δύο διαδοχικών όρων $\dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \sim \dfrac{1}{n}$

Επομένως η σειρά για την $H_E(\xi)$ συγκλίνει σε κάθε σημείο αλλά συμπεριφέρεται ως e^{ξ^2}.

Άρα

$e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_E(\xi)$ δεν μηδενίζεται εάν $\xi \to \pm\infty \Rightarrow$ μη τετραγωνικά ολοκληρώσιμη $\psi_E(\xi)$.

Άρα : Η σειρά πρέπει να τερματίζει $\Rightarrow$

$H_E(\xi)$ πολυώνυμο $\Longrightarrow$

$$\boxed{\exists\, n : \quad 1 - \lambda + 2n = 0 .}$$

- Προφανώς ο μηδενισμός για το ίδιο λ δεν μπορεί να συμβεί για δύο διαδοχικά n:

$$\left.\begin{array}{ll} & 1-\lambda-2n=0 \\ \text{και} & 1-\lambda-2(n+1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

αναγκαστικά οι ιδιοσυναρτήσεις θα είναι άρτιες εάν n άρτιο: $n \to n-2 \to n-4 \to \cdots 0$

$$\cdots 0 \leftarrow 0 \leftarrow a_n \rightarrow a_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow a_0$$

και περιττές εάν n περιττό: $a_1 \to a_3 \to \cdots a_{2n-1} \to 0 \to 0 \cdots$

Για κάθε n:

$$\lambda_n = 1+2n$$

$$\Rightarrow \frac{2E_n}{\hbar\omega} = 1+2n$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+n\right).}$$

$$\boxed{\psi_n(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)}$$

↳ πολυώνυμο n-βαθμού

μόνο με άρτιες δυνάμεις εάν n άρτιο και μόνο με περιττές δυνάμεις εάν n περιττό.

$\boxed{\text{Πολυώνυμα Hermite.}}$

$n=0$: $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

$$\psi_0(\xi) = a_0 e^{-\xi^2/2}$$

$n=1$: $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

$$\psi_1(\xi) = a_1 \xi e^{-\xi^2/2}$$

$n=2$: $E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$

$$\overset{\lambda=5}{a_2 = \frac{1}{2}(-4)a_0 = -2a_0}$$

$$\psi_2(\xi) = a_0(1-2\xi^2)e^{-\xi^2/2}$$

$n=3$: $E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega$

$$\overset{\lambda=7}{a_3 = \frac{1}{6}(-4)a_1 = -\frac{2}{3}a_1}$$

$$\psi_3(\xi) = a_1\left(\xi - \frac{2}{3}\xi^3\right)e^{-\xi^2/2}$$

Βασική στάθμη: $E_0 = \hbar\omega/2 \neq 0$ (σχέση αβεβαιότητας).

$\downarrow$

Κυματική συνάρτηση: $a_0 e^{-\xi^2/2}$

$$= a_0 e^{-\alpha^2 x^2/2} \rightarrow \text{Γκαουσιανή}$$

Κυματική συνάρτηση ελαχίστου γινομένου αβεβαιοτήτων θέσης - ορμής.

$\left((\Delta x) = \frac{1}{\alpha},\ (\Delta p) = \alpha\frac{\hbar}{2}\right)$.

Πολυώνυμα Hermite. Ιδιότητες - Κανονικοποίηση.

- Διαφορική εξίσωση: $(\lambda = 2n+1)$

$$H_n'' - 2\xi H_n' + 2n H_n = 0.$$

- Τα πολυώνυμα Hermite εκφράζονται συνοπτικά από την γεννήτρια συνάρτηση $G(\xi,s)$:

$$G(\xi,s) = e^{\xi^2-(s-\xi)^2} = e^{-s^2+2\xi s}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(\xi) s^n$$

$$\boxed{H_n(\xi) = \frac{\partial^n}{\partial s^n} G(\xi,s)\Big|_{s=0}}$$

Πράγματι αποδεικνύεται ότι οι συντελεστές του αναπτύγματος ανωτέρω ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση η οποία δίνει τα πολυώνυμα Hermite.

(i). $$\frac{\partial G}{\partial \xi} = 2sG = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H'(\xi) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2H_n(\xi) s^{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} H_m'(\xi) s^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m(m-1)!} 2H_{m-1}(\xi) s^m$$

$$\Rightarrow H_m'(\xi) = 2m H_{m-1}(\xi)$$

(ii). $$\frac{\partial G}{\partial s} = (-2s + 2\xi) G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} H_n(\xi) s^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-2H_n(\xi)) s^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (2\xi H_n(\xi)) s^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} H_n(\xi) s^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} (-2H_{m-1}(\xi)) s^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} (2\xi H_m(\xi)) s^m$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} H_{m+1}(\xi) s^m$$

$$\Rightarrow \quad H_{m+1}(\xi) = 2\xi H_m(\xi) - 2m H_{m-1}(\xi).$$

(Για τον s^0 : $2\xi H_0(\xi) = H_1(\xi)$ o.k.)

Από τις ιδιότητες (i) και (ii) προκύπτει η διαφορική εξίσωση για τα H_m. Πράγματι:

$$(ii) \xrightarrow{(i)} H_{m+1}(\xi) = 2\xi H_m(\xi) - H_m'(\xi)$$

$$\Rightarrow H_m'(\xi) + H_{m+1}(\xi) - 2\xi H_m(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow H_m''(\xi) + H_{m+1}'(\xi) - 2H_m(\xi) - 2\xi H_m'(\xi) = 0$$

$$\xrightarrow{(i)} H_m''(\xi) + 2(m+1) H_m(\xi) - 2H_m(\xi) - 2\xi H_m'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow H_m''(\xi) - 2\xi H_m'(\xi) + 2m H_m(\xi) = 0.$$

- $$H_n = \frac{\partial^n}{\partial s^n} G(\xi, s) \Big|_{s=0}$$
$$= e^{\xi^2} \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-(s-\xi)^2} \Big|_{s=0}$$
$$= (-1)^n e^{\xi^2} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left(e^{-(s-\xi)^2} \right) \Big|_{s=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}.}$$

- Οι ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή γράφονται

$$\psi_n(x) = N_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \qquad (\xi = \alpha x)$$

οπότε η κανονικοποίηση θα δίνεται από την έκφραση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \psi_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |N_n|^2 e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_n(\xi) \frac{1}{\alpha} d(\alpha x)$$
$$= \frac{|N|^2}{\alpha} \underline{\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) H_n(\xi) e^{-\xi^2} d\xi} = 1$$

υπολογίζεται εύκολα με την χρήση της γεννήτριας συνάρτησης. **

** Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} G(\xi,s)\, G(\xi,t)\, d\xi = \sum_{m,n} \frac{s^m t^n}{m!\, n!} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(\xi) H_n(\xi) e^{-\xi^2} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} e^{-s^2+2s\xi} e^{-t^2+2t\xi} d\xi = \sqrt{\pi}\, e^{2st}$$

Γκαουσιανό ολοκλήρωμα

$$= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n s^n t^n}{n!}$$

Επομένως:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_m(\xi) H_n(\xi) d\xi = 0 \quad , \; m \neq n \quad \text{(ορθογώνια)}$$

και:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_n(\xi) d\xi = \sqrt{\pi}\, 2^n n!$$

Άρα:

$$\frac{|N_n|^2}{\alpha} \sqrt{\pi}\, 2^n n! = 1 \Rightarrow$$

$$N_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!} \right)^{1/2}$$

Να δείξετε ότι: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\psi_n(\xi)=\sqrt{n}\,\psi_{n-1}(\xi),$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi}-\xi\right)\psi_n(\xi)=\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}(\xi).$$

$$\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\psi_0=0.$$

(i). $\psi_n(\xi)=N_n e^{-\xi^2/2}H_n(\xi) \Rightarrow$

$$\frac{d}{d\xi}\psi_n(\xi)=N_n e^{-\xi^2/2}H_n'(\xi)-N_n\xi e^{-\xi^2/2}H_n(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\xi}\psi_n(\xi)+\xi\psi_n(\xi)=N_n e^{-\xi^2/2}\,2n\,H_{n-1}$$

$$=\frac{N_n}{N_{n-1}}\psi_{n-1}(\xi)$$

$$N_n=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,n!\,2^n}}, \quad N_{n-1}=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,(n-1)!\,2^{n-1}}} \quad \frac{N_n}{N_{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$=\sqrt{2n}\,\psi_{n-1}(\xi) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\psi_n(\xi)=\sqrt{n}\,\psi_{n-1}(\xi).$$

(ii). $H_{n+1}=2\xi H_n-H_n' \Rightarrow$

$$e^{-\xi^2/2}H_{n+1}(\xi)=-e^{-\xi^2/2}H_n'+2\xi e^{-\xi^2/2}H_n$$

$$=-\left[\left(e^{-\xi^2/2}H_n\right)'+\xi e^{-\xi^2/2}H_n\right]+2\xi e^{-\xi^2/2}H_n$$

$$\Rightarrow e^{-\xi^2/2}H_{n+1}(\xi)=-\left[\left(e^{-\xi^2/2}H_n\right)'-\xi e^{-\xi^2/2}H_n\right]$$

$$\Rightarrow \frac{N_n}{N_{n+1}}\psi_{n+1}(\xi)=-\left(\frac{d}{d\xi}-\xi\right)\psi_n(\xi) \Rightarrow$$

$$\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}(\xi)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi}-\xi\right)\psi_n(\xi).$$