1. Δίδεται η κυματική συνάρτηση

$$\psi(\vec{r},t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 t - \vec{p}_1\cdot\vec{r})} + B e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 t - \vec{p}_2\cdot\vec{r})}$$

όπου: $E_1 = \dfrac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m}$, $E_2 = \dfrac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m}$.

(i). Να δειχθεί ότι ικανοποιεί την εξίσωση Schrödinger για ελεύθερο σωμάτιο μάζας m:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 \psi$$

(ii). Να υπολογισθεί το ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας:

$$\vec{J} = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right]$$

Λύση.

(i). $$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E_1 A e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 t - \vec{p}_1\cdot\vec{r})} + E_2 B e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 t - \vec{p}_2\cdot\vec{r})}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\left(-\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{\hbar^2}\right) A e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 t - \vec{p}_1\cdot\vec{r})} + \left(-\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{\hbar^2}\right) B e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 t - \vec{p}_2\cdot\vec{r})}\right\}$$

$$= E_1 A e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 t - \vec{p}_1\cdot\vec{r})} + E_2 B e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 t - \vec{p}_2\cdot\vec{r})}.$$

* $E_1 = E_2 = E$ $\left(\vec{p}_1^{\,2} = \vec{p}_2^{\,2} = \vec{p}^{\,2}\right)$ $\Rightarrow$ η ψ είναι ιδιοσυνάρτηση της ενέργειας.

(ii). Υπολογισμός του $\vec{J}$.

$$\psi^* = A^* e^{\frac{i}{\hbar}(E_1 t - \vec{p}_1\cdot\vec{r})} + B^* e^{\frac{i}{\hbar}(E_2 t - \vec{p}_2\cdot\vec{r})}$$

$$\vec{\nabla}\psi = +\frac{i}{\hbar}\vec{p}_1 A e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 t - \vec{p}_1\cdot\vec{r})} + \frac{i}{\hbar}\vec{p}_2 B e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 t - \vec{p}_2\cdot\vec{r})}$$

$$\psi^* \vec{\nabla}\psi = \frac{i}{\hbar}\vec{p}_1 |A|^2 + \frac{i}{\hbar}\vec{p}_2 |B|^2$$

$$+ \frac{i}{\hbar}\vec{p}_2 A^* B\, e^{\frac{i}{\hbar}\left[(E_1-E_2)t - (\vec{p}_1-\vec{p}_2)\cdot\vec{r}\right]}$$

$$+ \frac{i}{\hbar}\vec{p}_1 A B^*\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left[(E_1-E_2)t - (\vec{p}_1-\vec{p}_2)\cdot\vec{r}\right]}$$

$$-\psi \vec{\nabla}\psi^* = \frac{i}{\hbar}\vec{p}_1 |A|^2 + \frac{i}{\hbar}\vec{p}_2 |B|^2$$

$$+ \frac{i}{\hbar}\vec{p}_2 A B^*\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left[(E_1-E_2)t - (\vec{p}_1-\vec{p}_2)\cdot\vec{r}\right]}$$

$$+ \frac{i}{\hbar}\vec{p}_1 A^* B\, e^{\frac{i}{\hbar}\left[(E_1-E_2)t - (\vec{p}_1-\vec{p}_2)\cdot\vec{r}\right]}$$

$$\vec{J} = -\frac{i\hbar}{2m}\Big\{ \frac{2i}{\hbar}\vec{p}_1 |A|^2 + \frac{2i}{\hbar}\vec{p}_2 |B|^2$$

$$+ \frac{i}{\hbar}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) A^* B\, e^{\frac{i}{\hbar}\left[(E_1-E_2)t - (\vec{p}_1-\vec{p}_2)\cdot\vec{r}\right]}$$

$$+ \frac{i}{\hbar}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) A B^*\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left[(E_1-E_2)t - (\vec{p}_1-\vec{p}_2)\cdot\vec{r}\right]} \Big\} \Rightarrow$$

$$\vec{J} = \overset{1}{\frac{\vec{p}_1}{m}|A|^2} + \overset{2}{\frac{\vec{p}_2}{m}|B|^2}$$

$$+ \underbrace{\frac{\vec{p}_1+\vec{p}_2}{m}\, \mathrm{Re}\left[A^* B\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)t - (\vec{p}_1-\vec{p}_2)\cdot\vec{r}}\right]}_{3}$$

1, 2 : Όροι ανάλογοι της "ταχύτητας" $\left(\frac{\vec{p}_1}{m} = \vec{v}_1,\ \frac{\vec{p}_2}{m} = \vec{v}_2\right)$ με συντελεστή τα τετράγωνα των μέτρων των πλατών.

3 : Όρος συμβολής που αντιστοιχεί σε "ταχύτητα" $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

$$\vec{P}_1 = -\vec{P}_2 = \vec{P} \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{\vec{P}^2}{2m} \quad \text{και}$$

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}}{m}\left(|A|^2 - |B|^2\right).$$

2. Εάν η κυματική συνάρτηση $\psi(\vec{r},t)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, να δειχθεί ότι:

$$P(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)\,dv = \text{σταθερά}.$$

Λύση.

Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{r},t) = 0.$$

Ολοκληρώνοντας σε σφαίρα ακτίνας R:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(R)} \rho(\vec{r},t)\,dv = -\int_{V(R)} \vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{r},t)$$

$$= (\text{Θεώρημα Gauss}) - \int_{S(R)} \vec{J}\cdot\hat{n}\,ds$$

$P(t) = \lim_{R\to\infty}\int_{V(R)} \rho(\vec{r},t)\,dv$, οπότε αρκεί να

δείξουμε ότι $\lim_{R\to\infty}\int \vec{J}\cdot\hat{n}\,ds = 0.$

Τότε $\frac{dP(t)}{dt} = 0 \Rightarrow P$ σταθερά.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, όσον αφορά τις γωνίες (ϑ, φ) επειδή το ολοκλήρωμα γίνεται σε πεπερασμένο διάστημα

$\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

η μόνη συνθήκη είναι να μην υπάρχει απειρισμός σε κάποια τιμή τους.

Επομένως θα επικεντρωθούμε στην μεταβλητή $r \in [0, \infty)$ και για ευκολία θα θεωρήσουμε

$$\psi(r,t).$$

$$P(t) = (4\pi) \int_0^\infty \psi^*(r,t)\psi(r,t)\, r^2 dr$$

Η συνθήκες για να είναι η ψ τετραγωνικά ολοκληρώσιμη είναι:

(i). Η $\psi(r,t)$ πεπερασμένη για $\forall\ r \neq 0$.

(ii). Η $\psi(r,t)$ να μην απειρίζεται πιο γρήγορα από $\frac{1}{r}$ όταν $r \to 0$.

(Επιτρέπεται συμπεριφορά $\sim \frac{1}{r}$ λόγω του r^2 στο μέτρο της ολοκλήρωσης.

(iii). Όταν $r \to \infty$ η $\psi(r,t)$ να τείνει στο μηδέν ταχύτερον ως $\frac{1}{r^{3/2+\epsilon/2}}$:

$$\psi^* \psi\, r^2 \sim \frac{1}{r^{1+\epsilon}}$$

(Εάν $\epsilon = 0$ θα είχαμε από κάποια τιμή R του r και μετά

$$\int_R^\infty \frac{1}{r} dr = \ln r \Big|_R^\infty \to \infty.)$$

Λόγω της (iii) το ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας

θα συμπεριφέρεται για μεγάλα r ως:

$$\psi^* \frac{\partial}{\partial r}\psi \sim \frac{1}{r^{4+\epsilon}}$$

και επομένως η ροή από σφαίρα ακτίνας R

$$\int_{S(R)} \vec{J}\cdot\hat{n}\, \underbrace{dS}_{R^2 d\Omega} \sim \frac{1}{R^{2+\epsilon}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Άρα:

$$\frac{d}{dt}P(t) = 0 \Rightarrow P(t) \text{ σταθερά.}$$

* ψ τετραγωνικά ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$ επιτρέπεται η κανονικοποίηση.

** P = σταθερά $\Rightarrow$ η κυματική συνάρτηση παραμένει κανονικοποιημένη στην χρονική εξέλιξη.

4. Σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) + i\Gamma(\hat{x}), \quad (V(x), \Gamma(x) \text{ πραγματικές συναρτήσεις}).$$

Να εξαχθεί το αντίστοιχο της εξίσωσης συνέχειας. Ποία είναι η χρονική εξέλιξη της ολικής πιθανότητας όταν Γ σταθερά < 0;

$$\psi^* \left(i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + \cancel{V(x)}\psi + i\Gamma(x)\psi \right)$$

$$\psi \left(-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^* + \cancel{V(x)}\psi^* - i\Gamma(x)\psi^* \right)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x} \right) + 2i\Gamma(x)\psi^*\psi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) + 2i\Gamma\rho$$

$(\rho = \psi^*\psi)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} J = +2\frac{\Gamma}{\hbar}\rho$$

$$J = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)$$

(Το μιγαδικό μέρος του δυναμικού συνεισφέρει την χρονική μεταβολή της πυκνότητας πιθανότητας.) (Μη Ερμιτιανή Χαμ.)

Ολοκληρώνοντας (για τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ψ):

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2\Gamma}{\hbar} P \Rightarrow P(t) = P(0)\, e^{\frac{2\Gamma}{\hbar}t}.$$

$\Gamma < 0 \rightarrow P(t) \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$.

5. Κάθε κυματική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως:

$$\psi(x,t) = A(x,t)\, e^{i\varphi(x,t)}$$

όπου A, φ πραγματικές συναρτήσεις (η A μπορεί να ληφθεί θετική).

(i). Να δειχθεί ότι η μέση τιμή της θέσης και η διασπορά της δεν εξαρτώνται από την φ.

(ii). Εάν η φ είναι χωρικά σταθερή η μέση τιμή της ορμής και το ρεύμα πυκνότητας μηδενίζονται.

Λύση.

(i).
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} A(x,t)\, A(x,t)\, dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \ldots = \int_{-\infty}^{\infty} A(x,t)\, A(x,t).$$

(ii).
$$\langle p \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} A\, e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial x}\left(A e^{i\varphi}\right) dx$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{\partial A}{\partial x}\, dx + \hbar \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{\partial \varphi}{\partial x} A\, dx$$

$$-\frac{i\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} A^2\, dx = 0$$

$$\langle p \rangle = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx$$

$$J = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right] = -\frac{i\hbar}{2m}\left[A \frac{\partial A}{\partial x} + iA^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - A\frac{\partial A}{\partial x} + iA^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] \Rightarrow$$

$$J = \frac{\hbar}{m} A^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle p \rangle = 0, \quad J = 0.$$

6. Στην κυματική συνάρτηση $\psi(x,t)$ η μέσες τιμές και οι διασπορές της θέσης και της ορμής είναι $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, (Δx), (Δp) αντίστοιχα.
Να υπολογισθούν οι

$$\langle x\rangle_{\psi'}, \quad \langle p\rangle_{\psi'}, \quad \langle \Delta x\rangle_{\psi'}, \quad \langle \Delta p\rangle_{\psi'}$$

για την

$$\psi'(x,t) = \psi(x-x_0,t)\, e^{ip_0 x/\hbar}.$$

Λύση.

$$\langle x\rangle_{\psi'} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi'^*(x,t)\, x\, \psi'(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x-x_0,t)\, x\, \psi(x-x_0,t)\, dx$$

$$\overset{x-x_0=y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(y,t)(y+x_0)\psi(y,t)\, dy = \langle x\rangle + x_0 .$$

$$\langle x^2\rangle_{\psi'} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x-x_0,t)\, x^2\, \psi(x-x_0,t)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(y,t)\underbrace{(y+x_0)^2}_{y^2+x_0^2+2yx_0}\psi(y,t)\, dx$$

$$= \langle x^2\rangle + x_0^2 + 2x_0\langle x\rangle$$

$$(\Delta x)^2_{\psi'} = \langle x^2\rangle_{\psi'} - \langle x\rangle^2_{\psi'} = \langle x^2\rangle + \cancel{x_0^2} + \cancel{2x_0\langle x\rangle}$$

$$- \langle x\rangle^2 - \cancel{x_0^2} - \cancel{2x_0\langle x\rangle}$$

$$= \langle \Delta x\rangle^2 .$$

$$\langle p\rangle_{\psi'} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi'^{*}(x,t)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi'(x,t)\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{*}(x-x_0,t)\, e^{-ip_0x/\hbar}\Big[\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x-x_0,t)\right)e^{ip_0x/\hbar}$$

$$+ \psi(x-x_0,t)(-i\hbar)\frac{i}{\hbar}p_0\, e^{ip_0x/\hbar}\Big]\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{*}(y,t)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\psi(y,t)\right)dy + p_0\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}(y,t)\psi(y,t)\,dy$$

$$= \langle p\rangle + p_0 .$$

$$\langle p^2\rangle_{\psi'} = -\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{*}(y,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(y,t)\,dy - 2\hbar i p_0\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}(y,t)\frac{\partial}{\partial y}\psi(y,t)\,dy$$

$$+ p_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}(y,t)\psi(y,t)\,dy$$

$$= \langle p^2\rangle + 2p_0\langle p\rangle + p_0^2$$

$$\langle \Delta p\rangle^2_{\psi'} = \langle p^2\rangle + 2p_0\langle p\rangle + p_0^2 - \langle p\rangle^2 - p_0^2 - 2\langle p\rangle p_0$$

$$= \langle \Delta p\rangle^2 .$$

$$\langle x\rangle_{\psi'} = \langle x\rangle + x_0 \qquad \langle \Delta x\rangle_{\psi'} = \langle \Delta x\rangle$$

$$\langle p\rangle_{\psi'} = \langle p\rangle + p_0 \qquad \langle \Delta p\rangle_{\psi'} = \langle \Delta p\rangle .$$

7. Κβαντικό σύστημα έχει δύο ενεργειακές στάθμες:

$$\hat H\psi_1 = E_1\psi_1, \quad \hat H\psi_2 = E_2\psi_2 .$$

Θεωρούμε φυσικό μέγεθος $\hat A$ με ιδιοκαταστάσεις:

$$\hat A\chi_1 = \alpha_1\chi_1, \quad \hat A\chi_2 = \alpha_2\chi_2$$

και:

$$\psi_1 = \cos\varphi\,\chi_1 + \sin\varphi\,\chi_2 \quad , \quad \chi_1 = \cos\varphi\,\psi_1 - \sin\varphi\,\psi_2$$
$$\psi_2 = -\sin\varphi\,\chi_1 + \cos\varphi\,\chi_2 \quad , \quad \chi_2 = \sin\varphi\,\psi_1 + \cos\varphi\,\psi_2 .$$

(i). Την χρονική στιγμή $t=0$ το σύστημα ευρίσκεται στην κατάσταση ψ_1. Να ευρεθούν οι πιθανότητες ώστε σε μέτρηση των $\hat H, \hat A$ να έχουμε τις τιμές (E_1,E_2), (α_1,α_2) αντίστοιχα, ως συναρτήσεις του χρόνου.

(ii). Την χρονική στιγμή $t=t_0$ γίνεται μέτρηση του $\hat A$ και ευρίσκεται η τιμή α_1. Να απαντηθεί το ερώτημα (i) για $t>t_0$.

(i). $$\psi(0) = \psi_1 \Rightarrow \psi(t) = e^{-i\omega_1 t}\,\psi_1 =$$

$$= e^{-i\omega_1 t}\cos\varphi\,\chi_1 + e^{-i\omega_1 t}\sin\varphi\,\chi_2$$

Επομένως: $P(E_1) = 1$, $P(E_2) = 0$; $P(\alpha_1) = \cos^2\varphi$, $P(\alpha_2) = \sin^2\varphi$ } ανεξάρτητες του χρόνου.

(ii). $t=t_0$: Μέτρηση του $\hat A$ με αποτέλεσμα α_1 $\Rightarrow$

$$\psi(t_0) = \chi_1 \Rightarrow \psi(t_0) = \cos\varphi\,\psi_1 - \sin\varphi\,\psi_2$$

$(t>t_0)$ $$\Rightarrow \psi(t) = \cos\varphi\, e^{-i\omega_1(t-t_0)}\psi_1 - \sin\varphi\, e^{-i\omega_2(t-t_0)}\psi_2$$

Επομένως: $P(E_1) = \cos^2\varphi$, $P(E_2) = \sin^2\varphi$ } ανεξάρτητες του χρόνου

$$\psi(t) = \cos\varphi\, e^{-i\omega_1 (t-t_0)} \left[\cos\varphi\, \chi_1 + \sin\varphi\, \chi_2\right]$$

$$-\sin\varphi\, e^{-i\omega_2 (t-t_0)} \left[-\sin\varphi\, \chi_1 + \cos\varphi\, \chi_2\right]$$

$$= \left[\cos^2\varphi\, e^{-i\omega_1 (t-t_0)} + \sin^2\varphi\, e^{-i\omega_2 (t-t_0)}\right] \chi_1$$

$$+ \cos\varphi \sin\varphi \left[e^{-i\omega_1 (t-t_0)} - e^{-i\omega_2 (t-t_0)}\right] \chi_2 \quad \Rightarrow$$

$$\psi(t) = e^{-i\omega_2 (t-t_0)} \left\{ \left[\cos^2\varphi\, e^{i(\omega_2-\omega_1)(t-t_0)} + \sin^2\varphi\right] \chi_1 \right.$$

$$\left. + \cos\varphi \sin\varphi \left[e^{i(\omega_2-\omega_1)(t-t_0)} - 1\right] \chi_2 \right\}$$

Άρα:

$$P(\alpha_1) = \left| \cos^2\varphi\, e^{i(\omega_2-\omega_1)(t-t_0)} + \sin^2\varphi \right|^2$$

$$= \cos^4\varphi + \sin^4\varphi + 2\cos^2\varphi \sin^2\varphi \cos\left[(\omega_2-\omega_1)(t-t_0)\right]$$

$$= 1 - 2\left[1 - \cos\left[(\omega_2-\omega_1)(t-t_0)\right]\right] \cos^2\varphi \sin^2\varphi$$

$$P(\alpha_2) = 2\left[1 - \cos\left[(\omega_2-\omega_1)(t-t_0)\right]\right] \cos^2\varphi \sin^2\varphi$$

$$\left(P(\alpha_1) + P(\alpha_2) = 1 \right).$$