Χώρος Θέσεων - χώρος ορμών.

(i). **Χώρος των Θέσεων.** $(\psi(x))$

Κυματική συνάρτηση : $\psi(x)$

$$\hat{x}\,\psi(x) = x\,\psi(x)$$

Ο τελεστής $\hat{x}$ δρα πολλαπλασιαστικά.

$\psi(x)$ "συνιστώσα" σε ανάπτυγμα ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις της Θέσης:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\,\delta(x-y)\,dy .$$

Πολλαπλασιαστική δράση : "Η συνιστώσα πολλαπλασιάζεται με την ιδιοτιμή".

$$\hat{p}\,\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

(ii). **Χώρος των ορμών.** $(\tilde{\psi}(p))$

Ιδιοσυναρτήσεις της ορμής: $f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ipx/\hbar}$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{ipx/\hbar}\,\tilde{\psi}(p)\,dp$$

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{-ipx/\hbar}\,\psi(x)\,dx$$

Μετασχηματισμός Fourier

$$\psi(x) \longrightarrow \tilde{\psi}(p)$$

$$\hat{x}\psi(x) = \psi'(x) \longrightarrow \tilde{\psi}'(p)$$

$$\psi'(x) = x\psi(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, x\, e^{ipx/\hbar}\, \tilde{\psi}(p)\, dp$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\left(e^{ipx/\hbar}\right)\right) \tilde{\psi}(p)\, dp$$

με παραγοντική ολοκλήρωση

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{ipx/\hbar} \underbrace{\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \tilde{\psi}(p)\right)}_{\tilde{\psi}'(p)} dp$$

Επομένως $\quad \psi'(x) \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}(p)$

Δηλαδή στον χώρο των ορμών

$$\hat{x}\,\tilde{\psi}(p) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}(p)$$

και $\quad \hat{p}\,\tilde{\psi}(p) = p\,\tilde{\psi}(p)$

$\hookrightarrow$ πολλαπλασιαστική δράση

Βέβαια πάντα: $\quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

1. Να γραφεί η εξίσωση Schrödinger στον χώρο των ορμών.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(p,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} \psi(x,t)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + V(x)\psi(x) \right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \left[\frac{p^2}{2m} \psi(x,t) + V(x)\psi(x) \right] dx$$

παραγοντική ολοκλήρωση

$$= \frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p,t) + \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} V(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip'x/\hbar} \tilde{\psi}(p',t)\, dp'\, dx$$

$$= \frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p-p')x/\hbar} V(x)\, dx \right]}_{K(p-p')} \tilde{\psi}(p',t)\, dp'$$

$= \frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p,t)$ + Ολοκληρωτικός τελεστής με πυρήνα

$$K(p-p') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p-p')x/\hbar} V(x)\, dx$$

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}(p,t)}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p,t) + \int K(p-p') \tilde{\psi}(p',t) = \hat{H} \tilde{\psi}(p,t)$$

2. Εάν $V(x)$ πραγματική συνάρτηση ο ολοκληρωτικός τελεστής είναι Ερμιτιανός.

Δηλαδή

$$\iint \phi^*(p)\, K(p-p')\, \tilde{\psi}(p')\, dp'\, dp$$

$$= \iint \left(K(p-p')\,\phi(p')\right)^* \tilde{\psi}(p)\, dp'\, dp \, .$$

Το δεύτερο μέλος: $$\iint \phi^*(p')\, K^*(p-p')\, \tilde{\psi}(p)\, dp'\, dp$$

$$= \iint \phi^*(p)\, K^*(p'-p)\, \tilde{\psi}(p')\, dp'\, dp$$

Αλλά $$K^*(p'-p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p'-p)}\, V(x)\, dx$$

$$= K(p-p') \qquad \text{(εάν } V(x) \text{ πραγματική συνάρτηση).}$$

Οπότε εδείχθη το αυτοσυζυγές.

3. Να δειχθεί ότι:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^*(p,t)\,\tilde{\psi}(p,t) = 0$$

από την εξίσωση Schrödinger για την $\tilde{\psi}(p)$.

$$i\hbar\, \tilde{\psi}^*(p,t)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(p,t) = \frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}^*(p,t)\tilde{\psi}(p,t) + \int \tilde{\psi}^*(p,t)\, K(p-p')\,\tilde{\psi}(p',t)\,dp'$$

$$-i\hbar\, \tilde{\psi}(p,t)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}^*(p,t) = \frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}^*(p,t)\tilde{\psi}(p,t) + \int \tilde{\psi}(p,t)\, K^*(p-p')\,\tilde{\psi}^*(p',t)\,dp'$$

Αφαίρεση: το ανάλογο της εξίσωσης συνέχειας στον χώρο των ορμών είναι:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\tilde{\psi}^*(p,t)\tilde{\psi}(p,t)\right] = \int \tilde{\psi}^*(p,t)\,K(p-p')\,\tilde{\psi}(p',t)\,dp' - \int \tilde{\psi}(p,t)\,K^*(p-p')\,\tilde{\psi}^*(p',t)\,dp'$$

Ολοκληρώνοντας ως προς p:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\int \tilde{\psi}^*(p,t)\tilde{\psi}(p,t)\,dp = \iint\left[\tilde{\psi}^*(p,t)\,K(p-p')\,\tilde{\psi}(p',t) - \tilde{\psi}(p,t)\,K^*(p-p')\,\tilde{\psi}^*(p',t)\right]dp\,dp'$$

Για $V\in\mathbb{R} \Rightarrow K^*(p-p') = K(p'-p)$ οπότε με μετονομασία $p \rightleftarrows p'$

Έχουμε: $\frac{d}{dt}\int \tilde{\psi}^*(p,t)\tilde{\psi}(p,t)\,dp = 0$.

4. Εάν $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$ να γραφεί η εξίσωση Schrödinger στον χώρο των ορμών.

$$K(p-p') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p-p')x/\hbar} \, \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m\omega^2 \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial p'^2} e^{-i(p-p')x/\hbar} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \hbar^2 m\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial p'^2} \delta(p-p')$$

Οπότε:
$$\int_{-\infty}^{\infty} K(p-p') \tilde{\psi}(p',t) \, dp'$$

$$= -\frac{1}{2} \hbar^2 m\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial p'^2} \delta(p-p') \tilde{\psi}(p',t) \, dp'$$

$$= -\frac{1}{2} \hbar^2 m\omega^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}(p,t)}{\partial p^2}$$

Άρα:

Χώρος Θέσεων:
$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\hbar\omega}{2} \left[-\frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \right] \psi(x,t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}(p,t)}{\partial t} = \frac{\hbar\omega}{2} \left[-\hbar\omega m \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{\hbar\omega m} p^2 \right] \tilde{\psi}(p,t)$$

· Όσον αφορά εις την χρονική εξέλιξη, εάν είναι γνωστές (ή ευρεθούν) οι ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής:

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(x)$$

$$\tilde{\psi}(p,t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \tilde{\psi}_n(p)$$

όπου:

$$\tilde{\psi}_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \psi_n(x) \, .$$

Για τον αρμονικό ταλαντωτή:

$$\frac{\hbar\omega}{2}\left[-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega}{\hbar}x^2\right]\psi_E(x) = E\psi_E(x)$$

$$\frac{\hbar\omega}{2}\left[-\hbar m\omega\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{m\omega\hbar}p^2\right]\tilde{\psi}_E(p) = E\tilde{\psi}_E(p)$$

όπου:

$$\tilde{\psi}_E(p) = \psi_E\left(\frac{p}{m\omega}\right)$$

5. Μετασχηματισμός Γαλιλαίου της εξίσωσης Schrödinger.

O: (x,t)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

O': (x',t')

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t'}\psi'(x',t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\psi'(x',t) + V'(x')\psi'(x',t)$$

όπου:

$$x' = x - v_0 t \qquad \qquad \left(x = x' + v_0 t' \right.$$
$$t' = t \qquad \text{και} \quad V'(x') = V(x) \qquad \left. t = t' \right)$$

Συναλλοίωτο της εξίσωσης Schrödinger σημαίνει:

$$\psi'(x',t) = f(x,t)\psi(x,t)$$

με $|f(x,t)|^2 = 1$. (Η πυκνότητα πιθανότητας στο ίδιο σημείο του χώρου να είναι η ίδια και στα δύο συστήματα).

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} = v_0\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Εισάγοντας στην εξίσωση για το O':

$$i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0\frac{\partial}{\partial x}\right) f\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f\psi) + V(x) f\psi \Rightarrow$$

$$\underline{i\hbar \frac{\partial f}{\partial t}\psi} + \cancel{i\hbar f \frac{\partial \psi}{\partial t}} + \underline{i\hbar v_0 \frac{\partial f}{\partial x}\psi} + \underline{i\hbar v_0 f \frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

$$= \underline{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\psi} - \cancel{\frac{\hbar^2}{2m} f \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} - \underline{\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}} + \cancel{V f \psi} \qquad (\text{εξ. 5. του O})$$

Αρκεί να προσδιοριστεί f :

$$i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} + i\hbar v_0 \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

και
$$i\hbar v_0 f = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

$$i\hbar v_0 f = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f(x,t) = g(t)\, e^{-i\frac{m v_0}{\hbar}x}$$

Εισάγοντας στην πρώτη εξίσωση:

$$i\hbar \dot{g} + m v_0^2 g = \frac{m v_0^2}{2} g \Rightarrow$$

$$\dot{g} = \frac{i m v_0^2}{2\hbar} g \Rightarrow g = c\, e^{\frac{i m v_0^2}{2\hbar}t}.$$

Άρα:

$$\psi'(x',t) = c\, e^{\frac{i m v_0^2}{2\hbar}t - \frac{i m v_0}{\hbar}x}\, \psi(x,t)$$

$$= c\, e^{\frac{i m v_0^2}{2\hbar}t' - \frac{i m v_0}{\hbar}(x' + v_0 t')}\, \psi(x' + v_0 t', t')$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi'(x',t') = c\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m v_0^2}{2}t' + m v_0 x'\right)}\, \psi(x' + v_0 t', t')}$$

Ισχύει ότι: $\langle x \rangle_{\psi'} = \langle x \rangle_{\psi} - v_0 t$

$$\langle p \rangle_{\psi'} = \langle p \rangle_{\psi} - m v_0$$

6. Δίδεται ο τελεστής $\hat{A}$:

$$\hat{A}\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} x'\psi(x')\,dx'.$$

Να ευρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του $\hat{A}$ στον χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

$$\int_{-\infty}^{x} x'\psi(x')\,dx' = a\,\psi(x) \Rightarrow$$

$$a\frac{d}{dx}\psi(x) = x\psi(x) \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{d}{dx}\ln \qquad (a \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x) = c\,e^{\frac{1}{2a}x^2}$$

$\psi(x)$ τετραγωνικά ολοκληρώσιμη $\Rightarrow a<0$, $a = -\sigma^2$

$$\psi_\sigma(x) = c\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\hat{A}\psi_\sigma(x) = -\sigma^2\psi_\sigma(x)$$

Για $a=0$: $\int_{-\infty}^{x} x'\psi(x') = 0, \ \forall x$

$$\Rightarrow \quad x\psi(x) = 0 \Rightarrow \psi(x) = \delta(x).$$

7. Δίδεται ο τελεστής

$$\hat{C}\phi = \phi^*$$

Είναι αυτοσυζυγής; Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του.

Για να είναι αυτοσυζυγής:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{C}\psi)^* \phi \, dx \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{C}\phi \, dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\psi^*)^* \phi \, dx \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \phi^*$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi \phi \, dx \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \phi^* \, dx$$ → Δεν είναι αυτοσυζυγής.

$$\left(\hat{C}\phi = \phi^* \Rightarrow \hat{C}^2 \phi = C\phi^* = (\phi^*)^* = \phi \right.$$

$$\left. \Rightarrow \hat{C}^2 = \hat{I} \right)$$

Ιδιοτιμές - Ιδιοσυναρτήσεις

$$\hat{C}\psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda \Rightarrow \hat{C}^2 \psi_\lambda = \psi_\lambda = \lambda^* \lambda \psi_\lambda \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\omega}$$

$$(\hat{C}(\lambda\psi_\lambda) = \lambda^* \hat{C}\psi_\lambda = \lambda^* \lambda \psi_\lambda)$$ (ο $\hat{C}$ δεν είναι γραμμικός).

$$\hat{C}\psi_\lambda = \psi_\lambda^* = e^{i\omega}\psi_\lambda \Rightarrow e^{-\frac{i\omega}{2}}\psi_\lambda^* = e^{\frac{i\omega}{2}}\psi_\lambda$$

$$\Rightarrow \left(e^{+\frac{i\omega}{2}}\psi_\lambda\right)^* = e^{\frac{i\omega}{2}}\psi_\lambda \Rightarrow$$

η συνάρτηση $e^{\frac{i\omega}{2}}\psi_\lambda$ είναι πραγματική.

Επομένως οι ιδιοσυναρτήσεις του $\hat{G}$ είναι:

$$\psi_\omega = e^{-\frac{i\omega}{2}}\phi_\omega$$

$\hookrightarrow$ πραγματική συνάρτηση.

Πράγματι:

$$\hat{G}\psi_\omega = \psi_\omega^* = e^{i\omega/2}\phi_\omega$$

$$= e^{i\omega}\left(e^{-i\omega/2}\phi_\omega\right)$$

$$= e^{i\omega}\psi_\omega \quad , \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}.$$