

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (1^ο Φυλλάδιο)

1. α). Να δειχθεί ότι σε ιδιοκατάσταση της ενέργειας $\psi_E(x, t)$ οι μέσες τιμές όλων των φυσικών μεγεθών τα οποία δεν έχουν εκπεφρασμένη εξάρτηση από τον χρόνο, παραμένουν χρονικά σταθερές.

β). Σε τυχαία κατάσταση $\psi(x, t)$ να δειχθεί ότι οι μέση τιμή τυχαίας συνάρτησης της Χαμιλτονιανής είναι χρονικά σταθερή, εάν η Χαμιλτονιανή δεν έχει χρονική εξάρτηση (διατήρηση της ενέργειας).

γ). Να ευρεθεί εάν υπάρχει χρονική εξάρτηση στην πιθανότητα εύρεσης κάποιου αποτελέσματος σε μέτρηση φυσικού μεγέθους στην κατάσταση $\psi_E(x, t)$ και στην πιθανότητα εύρεσης αποτελέσματος για συνάρτηση της Χαμιλτονιανής στην κατάσταση $\psi(x, t)$.

2. Να ευρεθούν οι ιδιοσυναρτήσεις της θέσης και της ορμής $\psi_{x_0}(x)$ και $\psi_{p_0}(x)$ αντίστοιχα. Να αναπτυχθεί τυχαία κατάστασης στις ανωτέρω ανωτέρω βάσεις. Να δοθεί η ερμηνεία των συντελεστών και ευρεθεί η μεταξύ τους σχέση.

3. Κάθε κυματική συνάρτηση $\psi(x, t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\psi(x, t) = A(x, t) e^{-i\varphi(x, t)}$$

όπου A, φ πραγματικές συναρτήσεις (η A μπορεί να ληφθεί θετική).

α). Να δειχθεί ότι η μέση τιμή και η διασπορά της θέσης δεν εξαρτώνται από την συνάρτηση φ .

β). Να δειχθεί ότι εάν η συνάρτηση φ είναι χωρικά σταθερή, η μέση τιμή της ορμής και το ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας μηδενίζονται.

4. Στην κυματική συνάρτηση $\psi(x, t)$ η μέση τιμή και οι διασπορά της θέσης και της ορμής είναι αντίστοιχα, $\langle x \rangle$, (Δx) , $\langle p \rangle$, (Δp) , δεδομένες πραγματικές σταθερές. Να υπολογισθούν τα ανωτέρω μεγέθη στην κυματική συνάρτηση

$$\psi'(x, t) = \psi(x - x_0, t) e^{ip_0 x}.$$

5. Σωματίο μάζας m περιγράφεται από την κυματική συνάρτηση

$$\psi(x) = N e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2} + i\frac{p_0}{\hbar}x}, \quad \sigma, x_0, p_0, \text{ πραγματικές σταθερές.}$$

α). Να υπολογισθεί η σταθερά N ώστε η συνάρτηση ψ να είναι κανονικοποιημένη. Να ευρεθεί η πιθανότητα $\tilde{\psi}(p)dp$, ώστε σε μέτρηση της ορμής να ευρεθεί αποτέλεσμα στο

διάστημα μεταξύ p , και $p + dp$.

β). Να υπολογισθούν οι μέσες τιμές και οι διασπορές της θέσης και της ορμής. Να ελεγχθεί η σχέση αβεβαιότητας θέσης-ορμής.

6. Ελεύθερο σωματίο μάζας m περιγράφεται την χρονική στιγμή $t = 0$ από την κυματική συνάρτηση $\psi(x)$. Να ευρεθεί η κυματική συνάρτηση $\psi(x, t)$ για $t > 0$.

7. Η κυματική συνάρτηση ελευθέρου σωματίου την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

$$\psi(x, 0) = Ne^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma \text{ πραγματική σταθερά.}$$

α). Να ευρεθεί η $\psi(x, t)$ για $t > 0$.

β). Να υπολογισθούν οι μέσες τιμές και οι διασπορές της θέσης και της ορμής ως συναρτήσεις του χρόνου.