Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής

Κβαντομηχανική Ι *Α. Καρανίκας και Π. Σφήκας*

Σημειώσεις VIII: Σκέδαση: απλά μονο-διάστατα δυναμικά

Όπως γνωρίζουμε ήδη από την κλασσική Φυσική, η σκέδαση μιας δέσμης σωματιδίων από ένα στόχο παρέχει πληροφορίες σχετικές με τα σωμάτια που αποτελούν το στόχο. Επίσης παρέχει πληροφορίες επί της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων του στόχου και της δέσμης.

Στην περιγραφή της σκέδασης στην Κβαντική Μηχανική, θεωρούμε ότι η εισερχόμενη δέσμη αποτελείται από μια συνεχή ροή ελεύθερων σωματιδίων.

Υποθέτοντας ότι η δέσμη έχει πυκνότητα ρ σωματιδίων ανά μονάδα όγκου, συμπεραίνουμε ότι η κυματοσυνάρτηση της προσπίπτουσας δέσμης κανονικοποιείται ως

$$|\psi|^2 dV = \rho dV = dN_v$$

όπου dN_v ο αριθμός των σωματιδίων της δέσμης σε όγκο dV.

Η αντίστοιχη εξίσωση σε μια διάσταση είναι, προφανώς:

$$|\psi(x)|^2 dx = \rho dx = dN$$

και επομένως ο αριθμός των σωματιδίων της δέσμης στο διάστημα $[a,b]$ είναι απλώς

$$N(a,b) = \int_a^b |\psi|^2 dx$$

Η πληροφορία την οποία προσπαθούμε να εξαγάγουμε βρίσκεται στα σωμάτια της δέσμης μετά τη σκέδαση. Το εργαλείο που έχουμε για να προβλέψουμε τι αναμένουμε να δούμε είναι η εξίσωση συνέχειας, που εκφράζει τη διατήρηση του αριθμού των σωματιδίων, εφόσον ο στόχος δεν παράγει ή αναλώνει σωμάτια της δέσμης. Σχηματικά, αν το ρεύμα είναι $\vec{J}$, και η πυκνότητα σωματιδίων ρ, η εξίσωση συνέχειας είναι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Σε μια διάσταση, η εξίσωση γίνεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \qquad (8.1)$$

Γνωρίζουμε ήδη, από τις προηγούμενες διαλέξεις, ότι η αντικατάσταση

$$\rho = \psi^* \psi$$

στην (8.1), και με χρήση της χρονικής εξάρτησης της $\psi(x,t)$ δηλ. της

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\hat{\mathrm{H}}\psi \;\; \text{και} \;\; \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = +\frac{i}{\hbar}\left(\hat{\mathrm{H}}\psi\right)^*$$

βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\psi\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)\right] = 0 \tag{8.2}$$

Συγκρίνοντας με την (8.1) συμπεραίνουμε ότι

$$j(x) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)$$

Η γενίκευση των ως άνω σε τρεις διαστάσεις είναι άμεση:

$$\vec{J}(x) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \tag{8.3}$$

1. <u>Σκέδαση σε μια διάσταση</u>

Έστω μια δέσμη που αντιστοιχεί σε εισερχόμενο ρεύμα $\vec{J}_I$, που σκεδάζεται από ένα στόχο, με αποτέλεσμα το ρεύμα μετά τη σκέδαση να είναι $\vec{J}_0$. Σε μια διάσταση, το σκεδαζόμενο ρεύμα έχει μόνο δύο δυνατότητες: να ταξιδέψει στην ίδια ή στην αντίθετη διεύθυνση με/από εκείνη της δέσμης. Το ρεύμα στην ίδια διεύθυνση το συμβολίζουμε με J_T, και το ρεύμα προς την αντίθετη διεύθυνση, δηλ. το ρεύμα που ανακλάται, με J_R. Μιας και θέλουμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα που έχουν να κάνουν με τη φύση του στόχου, κανονικοποιούμε τα J_T και J_R ως προς το εισερχόμενο ρεύμα:

$$\mathbb{R} = \frac{J_R}{J_I} \qquad \mathbb{T} = \frac{J_T}{J_I}$$

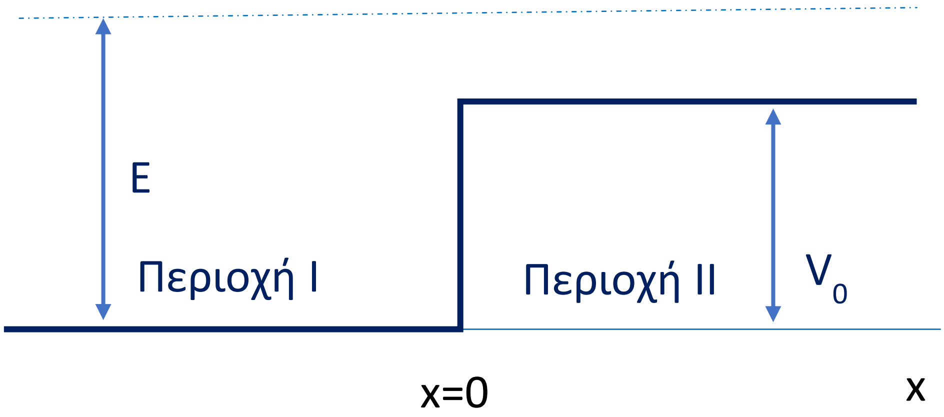
Για ένα επίπεδο κύμα,

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

Το ρεύμα δίδεται ως

$$j(x) = \frac{\hbar|A|^2}{2mi}\left[e^{-i(\;)}\cdot ik\cdot e^{+i(\;)} - e^{+i(\;)}\cdot(-ik)\cdot e^{-i(\;)}\right] = \frac{\hbar k}{m}|A|^2 = \rho v$$

Το πιο απλό παράδειγμα είναι το βήμα δυναμικού:



Μπορούμε να γράψουμε:

$$\psi_I(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$
$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik_2x}$$

όπου τα k_1 και k_2 δίδονται από την εξίσωση Schrödinger στις δυο περιοχές: k_1 στο $[-\infty, 0]$ και k_2 στο $[0, +\infty]$.

Οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης είναι

$$\mathbb{R} = \frac{|B|^2 k_1}{|A|^2 k_1} \quad \text{και} \quad \mathbb{T} = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1} \tag{8.4}$$

Η (8.4) δείχνει ότι μπορούμε να αποφύγουμε την σταθερά κανονικοποίησης, δηλ το A, και να γράψουμε το εισερχόμενο κύμα ως e^{ikx}. Έτσι θα έχουμε:

$$\psi_I(x) = e^{ik_1x} + Re^{-ik_1x}$$
$$\psi_{II}(x) = Te^{ik_2x}$$

Και τώρα οι δυο συντελεστές $\mathbb{R}$ και $\mathbb{T}$ δίδονται άμεσα ως

$$\mathbb{R} = |R|^2 \text{ και } \mathbb{T} = |T|^2 \frac{k_2}{k_1}$$

Η εύρεση των R και T ακολουθεί τη γνωστή μεθοδολογία χρήσης της συνέχειας της κυματοσυνάρτησης και της παραγώγου:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow 1 + R = T$$
$$\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0) \Rightarrow ik_1 - ik_1R = ik_2T \Rightarrow 1 - R = \frac{k_2}{k_1}T$$

Λύνοντας το σύστημα των δυο εξισώσεων βρίσκουμε:

$$T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \text{ και } R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

και επομένως:

$$\mathbb{R} = \frac{\left(k_1 - k_2\right)^2}{\left(k_1 + k_2\right)^2} \text{ και } \mathbb{T} = \frac{4k_1k_2}{\left(k_1 + k_2\right)^2}$$

Παρατηρούμε δε ότι:

$$\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1$$

όπως και πρέπει, από τη διατήρηση του ρεύματος.

Όσο δε για τα k_1 και k_2 βρίσκονται από την εξίσωση Schrödinger:

$$x < 0: \ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_I}{\partial x^2} = E\psi_I \Rightarrow \frac{\partial^2\psi_I}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_I = k_1^{\,2}\psi_I \Rightarrow k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$x \geq 0: \ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_{II}}{\partial x^2} + V_0\psi_{II} = E\psi_{II} \Rightarrow \frac{\partial^2\psi_{II}}{\partial x^2} = -\frac{2m\left(E - V_0\right)}{\hbar^2}\psi_{II} \Rightarrow k_2 = \sqrt{\frac{2m\left(E - V_0\right)}{\hbar^2}}$$

Τα πιο πάνω ισχύουν (προφανώς, αφού πήραμε k_2 πραγματικό) για $E > V_0$.

Αν η ενέργεια είναι μικρότερη του δυναμικού, δηλ. αν $E < V_0$, τότε $k_2 \to ik_2$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \psi_I\left(x\right) &= e^{ik_1x} + Re^{-ik_1x} \\ \psi_{II}\left(x\right) &= Te^{-k_2x} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα βήματα, ή απλώς χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα και κάνοντας την αντικατάσταση $k_2 \to ik$, βρίσκουμε:

$$R = \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} \text{ και } T = \frac{2k_1}{k_1 + ik_2}$$

Οπότε οι συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης είναι:

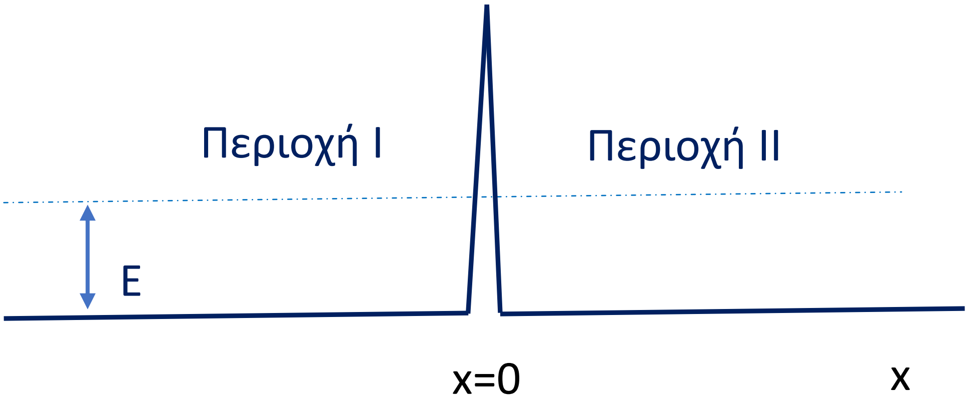
$$\mathbb{R} = \left|R\right|^2 = \frac{\left|k_1 - ik_2\right|^2}{\left|k_1 + ik_2\right|^2} = 1 \text{ και } \mathbb{T} = 0$$

Προσοχή στο T: μολονότι ο συντελεστής T (της κυματοσυνάρτησης για $x > 0$) είναι $\neq 0$, το ρεύμα στην περιοχή ΙΙ είναι μηδέν:

$$\mathbb{T} = 0$$

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για πραγματική $\psi\left(x,t\right)$ είναι μηδέν, έστω και αν η $\psi\left(x,t\right)$ δεν είναι μηδέν.

2. <u>Σκέδαση από συνάρτηση Dirac-δέλτα</u>



Προφανώς η κυματοσυνάρτηση στις δυο περιοχές $\left(I: x<0 \text{ και } II: x>0\right)$ γράφονται ως εξής:

$$\psi_I\left(x\right)=e^{ikx}+Re^{-ikx}$$
$$\psi_{II}\left(x\right)=Te^{ikx}$$

όπου

$$k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

Εξισώσεις συνέχειας της $\psi\left(x\right)$:

$$\psi_I\left(0\right)=\psi_{II}\left(0\right)\Rightarrow 1+R=T \qquad (8.6)$$

Η παράγωγος της $\psi\left(x\right)$ είναι, προφανώς, ασυνεχής, λόγω της ασυνέχειας της $\delta\left(x\right)$ στο $x=0$. Άρα, όπως και στην εύρεση δέσμιων καταστάσεων, ολοκληρώνουμε την εξίσωση Schrödinger γύρω από το $x=0$:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi+\lambda\delta\left(x\right)\right]dx=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}E\psi dx$$

και επομένως

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=+\varepsilon}-\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=-\varepsilon}\right)+\lambda\psi\left(0\right)=0\Rightarrow\psi'_{II}\left(0\right)-\psi'_I\left(0\right)=\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi\left(0\right)$$

και άρα

$$ikT-ik\left(1-R\right)=\frac{2m\lambda}{\hbar^2}T\Rightarrow 1-R=\frac{ik-\frac{2m\lambda}{\hbar^2}}{ik}T \qquad (8.7)$$

Από τις (8.6) και (8.7) βρίσκουμε εύκολα

$$\left(1+\frac{ik-\frac{2m\lambda}{\hbar^2}}{ik}\right)T=2\Rightarrow T=\frac{ik}{ik-m\lambda/\hbar^2} \text{ και άρα}$$

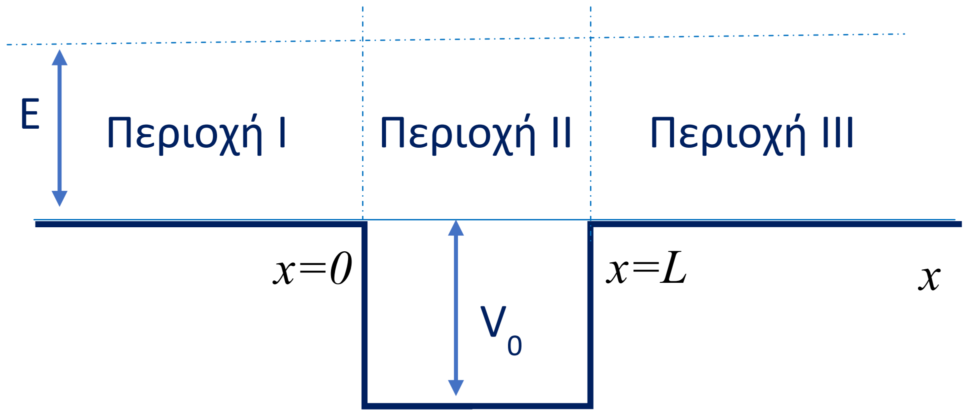
$$R = T - 1 = \frac{m\lambda/\hbar^2}{ik - m\lambda/\hbar^2}$$

Οι συντελεστές $\mathbb{R}$ και $\mathbb{T}$ είναι επομένως

$$\mathbb{R} = \frac{m^2\lambda^2/\hbar^4}{k^2 + m^2\lambda^2/\hbar^4} \quad \text{και} \quad \mathbb{T} = \frac{k^2}{k^2 + m^2\lambda^2/\hbar^4}$$

Είναι προφανές ότι $\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1$, ενώ για $\lambda \to 0$, έχουμε $\mathbb{R} = 0$ και $\mathbb{T} = 1$ (όπως και αναμένουμε).

3. <u>Σκέδαση από πηγάδι</u>



Η λύση της εξίσωσης Schrödinger στις τρεις περιοχές μας δίνει επίπεδα κύματα της μορφής $\exp\{ik;x\}$ όπου

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = k_3 \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$$

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= e^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\ \psi_{II}(x) &= Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \\ \psi_{III}(x) &= Fe^{ik_1x} \end{aligned} \tag{8.8}$$

Όπως πάντα, οι συντελεστές στην (8.8) βρίσκονται με εφαρμογή των συνθηκών συνέχειας της $\psi(x)$ και της παραγώγου της:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Συνέχεια στο } x=0: && I + B = C + D \\ & && ik_1(I-B) = ik_2(C-D) \\ &\text{Συνέχεια στο } x=L: && Ce^{ik_2L} + De^{-ik_2L} = Fe^{ik_1L} \\ & && ik_2\left\{Ce^{ik_2L} - De^{-ik_2L}\right\} = ik_1Fe^{ik_1L} \end{aligned}\right\} \text{4 εξισώσεις σε 4 αγνώστους}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε την εξής σχέση:

$$4k_1k_2 = \left\{(k_1+k_2)^2 e^{-ik_2L} - (k_2-k_1)^2 e^{ik_2L}\right\} Fe^{ik_1L}$$

και άρα η πιθανότητα περάσματος του δυναμικού είναι

$$\mathbb{T} = \frac{J_T}{J_I} = \frac{|F|^2}{1} \cdot \frac{k_1}{k_1} = \frac{16 k_1^2 k_2^2}{\left| (k_1 + k_2)^2 e^{-ik_2 L} - (k_2 - k_1)^2 e^{ik_2 L} \right|^2} \tag{8.9}$$

Ή αντικαθιστώντας τα k_1 και k_2 με τα E και V_0, παίρνουμε:

$$T = \frac{4E(E+V_0)}{4E(E+V_0) + V_0^2 \sin^2(k_2 L)}$$

Αναλύουμε την (8.9) για μερικές ειδικές/οριακές περιπτώσεις:

α) Χωρίς πηγάδι: $k_1 = k_2 \Rightarrow \mathbb{T} = \frac{16 k_1^4}{\left|4k_1^2\right|^2} = 1$. Όπως περιμένουμε, χωρίς δυναμικό, $V_0 = 0$, και απλώς έχουμε ένα συνεχές κύμα παντού.

β) $k_1 \ll k_2$ (δηλαδή πολύ βαθύ πηγάδι: $E \ll V_0$)

$$\mathbb{T} = \frac{16 k_1^2}{k_2^2 \left(e^{-ik_2 L} - e^{ik_2 L}\right)^2} = \frac{4 k_1^2}{k_2^2 \sin^2(k_2 L)} = \frac{4}{\sin^2(k_2 L)} \cdot \left(\frac{E}{E + V_0} \right) \approx \frac{4}{\sin^2(k_2 L)} \frac{E}{V_0}$$

γ) $E \gg V_0$ $\quad k_2 \approx k_1 \Rightarrow \mathbb{T} = 1$. Ουσιαστικά, για πολύ μικρό ύψος, το δυναμικό δεν επηρεάζει το εισερχόμενο κύμα.

δ) Παρατηρούμε στην (8.9) τους παράγοντες $e^{\pm i k_2 L}$.

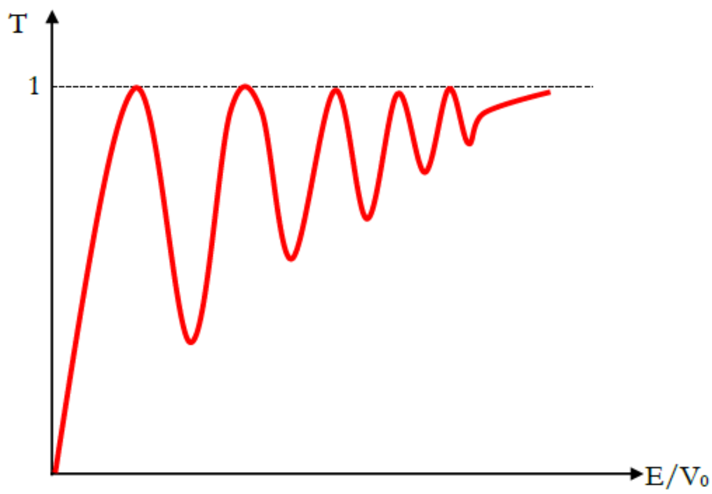
Για $k_2 L = n\pi \Rightarrow e^{\pm i k_2 L} = \pm 1 = (-1)^n \Rightarrow$

$$\mathbb{T} = \frac{16 k_1^2 k_2^2}{\left| (k_1 + k_2)^2 - (k_2 - k_1)^2 \right|^2} = 1 \tag{8.10}$$

Για $k_2 L = n\pi$ εφόσον $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot L = n\pi \Rightarrow 2L = n \cdot \lambda_2$ ή $L = n \cdot \frac{\lambda_2}{2}$

Βλέπουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση για συγκεκριμένες τιμές του k_2, όλο το εισερχόμενο ρεύμα περνάει το δυναμικό και δεν υπάρχει ανακλώμενο κύμα. Το φαινόμενο αυτό λέγεται "Ramsauer-Townsend effect" ή και "Ramsauer effect". Παρατηρείται στη σκέδαση ηλεκτρονίων με χαμηλή ενέργεια από ευγενές αέριο. Συγκεκριμένα, η ενεργός διατομή (που είναι ανάλογη του $\mathbb{T}$) παρουσιάζει ελάχιστα σε συγκεκριμένες ενέργειες της δέσμης των ηλεκτρονίων. Αυτό φαίνεται σχηματικά πιο κάτω. Θεωρώντας το άτομο του ευγενούς αερίου ως βήμα δυναμικού, με ενεργό πλάτος $\sim 2R$, το ελάχιστο δίδεται για μήκος κύματος του ηλεκτρονίου k_2. Η δε ενέργεια του ηλεκτρονίου δίδεται ως:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \right)^2 = \frac{h^2}{2m \cdot 4R^2} = \frac{h^2}{8mR^2}$$



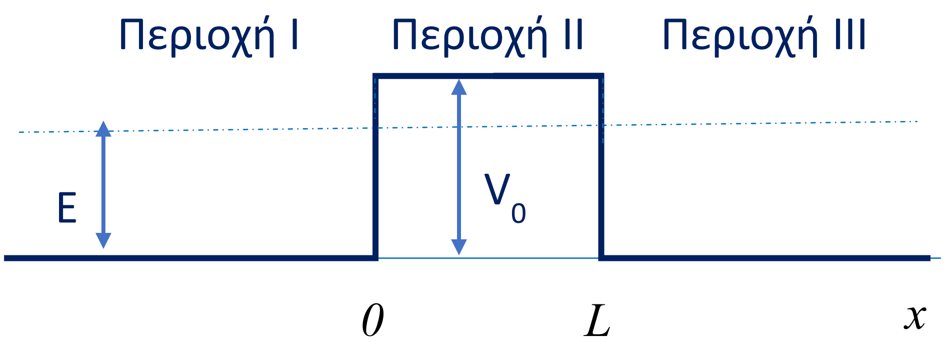
Εκτελώντας το πείραμα, από τη θέση του ελάχιστου βρίσκουμε το V_0.

Από εδώ εξάγουμε ότι $R \sim 1\overset{0}{\mathrm{A}} \simeq 10^{-8}\,\mathrm{cm}$.

Και το βάθος του πηγαδιού?

$$E \sim \frac{\left(6.6\times10^{-27}\,\mathrm{erg}\cdot\mathrm{s}\right)^2}{32\cdot10^{-27}\times10^{-16}\,\mathrm{cm}} \sim 1.2\times10^{-11}\,\mathrm{erg} \sim 10\,\mathrm{eV}$$

4. <u>Φαινόμενο σήραγγας</u>



Το πρόβλημα είναι το ίδιο με το βήμα δυναμικού, μόνο που τώρα $V_0 \to -V_0$. Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον όταν $E < V_0$. Σε αυτή την περίπτωση, η κυματοσυνάρτηση στην περιοχή ΙΙ δεν έχει ταλαντωτική συμπεριφορά, αλλά εκθετική:

$$\begin{aligned} \psi_I &= e^{ikx} + Re^{-ikx} \\ \psi_{II} &= Ae^{qx} + Be^{-qx} \\ \psi_{III} &= Te^{ikx} \end{aligned} \tag{8.11}$$

Η επίλυση των (8.11) χρησιμοποιεί ακριβώς την ίδια άλγεβρα, μόνο που τώρα $k_2 = iq$:

$$e^{ik_2L} - e^{-ik_2L} = 2i\sin\left(k_2L\right) \to e^{-qL} - e^{qL} = 2i\sin k_2L \to \sin k_2L \to i\sinh qL$$

και βρίσκουμε:

$$\mathbb{R} = \frac{V_0^{\,2} \sin \hbar^2 qL}{V_0^{\,2} \sin \hbar^2 qL + 4k^2 q^2}$$
$$\mathbb{T} = \frac{4k^2 q^2}{V_0^{\,2} \sin \hbar^2 qL + 4k^2 q^2} \tag{8.12}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, το εκπληκτικό φαινόμενο, ένα κύμα (και άρα σωμάτιο...) με $E < V_0$ να μπορεί να περάσει από βήμα δυναμικού με $V_0 > E$! Αυτό λέγεται "φαινόμενο σήραγγας", και είναι ένα καθαρά κβαντομηχανικό φαινόμενο.

Στην περίπτωση που $E > V$, η έκφραση (8.12) για το συντελεστή διέλευσης γίνεται

$$\mathbb{R} = \frac{V_0^{\,2} \sin qL}{V_0^{\,2} \sin qL + 4k^2 q^2}$$
$$\mathbb{T} = \frac{4k^2 q^2}{V_0^{\,2} \sin qL + 4k^2 q^2}$$

Και βλέπουμε ακόμα ένα περίεργο φαινόμενο: ακόμα και αν το σωμάτιο έχει ενέργεια μεγαλύτερη από το δυναμικό, έχει πιθανότητα να ανακλαστεί.

5. <u>Γενική θεώρηση φαινομένου σήραγγας</u>

Γενικεύοντας το βήμα του δυναμικού στο υποκεφάλαιο 4, σε ένα γενικό δυναμικό $v(x)$, η εξίσωση Schrödinger στην κλασσικά "απαγορευμένη" περιοχή γράφεται:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]\psi(x) = \alpha^2(x)\psi(x)$$

Για πολύ μικρό μήκος, δx ,

$$\psi(x+\delta x) = \psi(x)e^{-\alpha(x)\delta x} \qquad\qquad \psi(x+x_0) = \psi(x_0)e^{-xa}$$

$$1 + \psi'(x)\delta(x) = \psi(x)\left[1 - \alpha(x)\delta x + \ldots\right]$$

$$\Rightarrow \psi'(x) = -\alpha(x)\psi(x) \Rightarrow \int \frac{d\psi}{\psi} = -\int \alpha(x)dx$$

και φθάνουμε στην πιο απλή μορφή της προσέγγισης WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin):

$$\psi(x_2) = \psi(x_1)e^{-\int_{x_1}^{x_2}\alpha(x)dx}$$

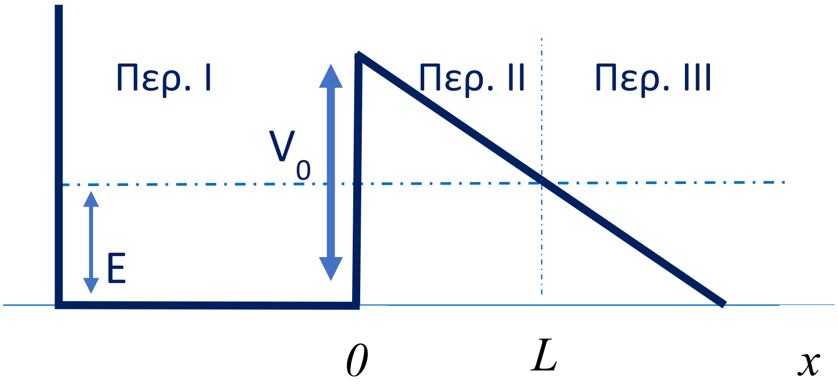
και προφανώς υπάρχει πιθανότητα διέλευσης ενός σωματιδίου με $E < v\max$ που δίδεται ως:

$$\Rightarrow P(\text{διέλευσης}) : \frac{\left|\psi(x_2)\right|^2}{\left|\psi(x_1)\right|^2} \approx \exp\left\{-2\int_{x_1}^{x_2}\alpha(x)\,dx\right\}$$

Δηλαδή

$$P_{\delta\iota\acute{\varepsilon}\lambda} \sim \exp\left\{-2\int_{x_1}^{x_1}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{V(x)-E}\; dx\right\}$$

5.1. <u>Ψυχρή εκπομπή ηλεκτρονίων σε πολύ μεγάλο ηλεκτρικό πεδίο</u>



$$\left.\begin{aligned} V &= V_0 - e\mathbb{E}x \\ E &= V_0 - e\mathbb{E}L \end{aligned}\right\} \Rightarrow L = \frac{V_0 - E}{e\mathbb{E}}$$

Η πιθανότητα διέλευσης δίδεται ως

$$\mathbb{T} \sim \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\int_0^L \sqrt{V_0 - E - e\mathbb{E}x}\; dx\right\}$$

Ο όρος στον εκθέτη, Q, υπολογίζεται εύκολα:

$$Q = \sqrt{e\mathbb{E}}\,\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\cdot\int_0^L \sqrt{L-x}\; dx = 2\sqrt{e\mathbb{E}}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\cdot\int_0^L \sqrt{u}du$$

$$= 2\sqrt{\frac{2me\mathbb{E}}{\hbar^2}}\frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2me\mathbb{E}}{\hbar^2}}u^{3/2}\Big|_0^L = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2me\mathbb{E}}{\hbar^2}}\cdot L^{3/2}$$

Γράφοντας $W = V_0 - E$,

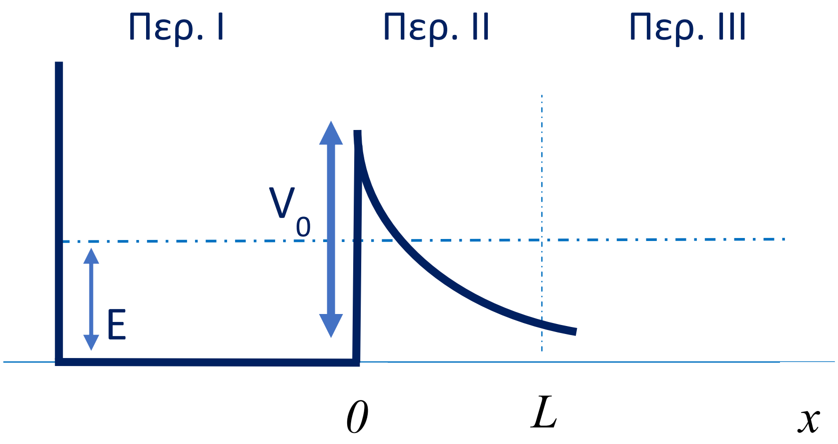
$$\mathbb{T} \sim \exp\left\{-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\frac{W^{3/2}}{e\mathbb{E}}\right\}$$

Για πολύ μεγάλο πεδίο, $\sim 10^8\, V/m$ παρατηρούμε ρεύμα να εξέρχεται! Και επειδή το τυπικό βάθος W είναι $\sim 4eV$, βλέπουμε ότι χρειάζονται εξαιρετικά υψηλά ηλεκτρικά πεδία:

$$W \sim 4eV \Rightarrow 5.5\times 10^{10}\, V/m$$

5.2 <u>Διάσπαση α (ενός πυρήνα)</u>

Το απλοποιημένο μοντέλο που χρησιμοποιούμε είναι ότι το σωμάτιο α (2 p και δυο n) "βρίσκεται" σε ένα πεπερασμένο πηγάδι χάρη στην ισχυρή αλληλεπίδραση. Αν αυτό το σωμάτιο α βγει από τον πυρήνα, θα νιώθει μόνο το δυναμικό Coulomb:



$$V(r) = \frac{2(\mathbb{Z}-2)e^2}{r}$$

$$V(R) = \frac{2(\mathbb{Z}-2)e^2}{R}$$

$\mathbb{Z} \sim 90$

$R \sim 10^{-12}\,\mathrm{cm}$

$\mathrm{e} \sim 4.8\times10^{-10}\,\mathrm{esn}$

$\mathrm{V}_0 = 4\times10^{-5}\,\mathrm{erg}{=}25\mathrm{MeV}$

$${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}T_h$$

$\tau_{\exp} = 2\times10^{17}$

$\tau_{\theta\varepsilon\omega\rho} = 3.3\times10^{17}$

$$T \sim \exp\left\{-2\int_R^{r_{ext}} \frac{\sqrt{2m\big(V(r)-E\big)}}{\hbar}\,dr\right\} = \exp\left\{-2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int_R^{r_{ext}}\left(\frac{R}{r}V_0 - E\right)^{1/2} dr\right\}$$

$$T \sim \exp\left\{-\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar}\frac{V_0 R}{\sqrt{E}} + \frac{4\sqrt{2mV_0}}{\hbar}R\right\} \Rightarrow T(E) \sim Ae^{-c/\sqrt{E}}$$