Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής

Κβαντομηχανική Ι *Α. Καρανίκας και Π. Σφήκας*

Σημειώσεις Ι: ακτινοβολία μελανού σώματος.

1. <u>Εισαγωγή</u>

Όπως αναλύει το βιβλίο του μαθήματος, ο Planck κατάφερε να «εφεύρει» την σωστή εξίσωση για το φάσμα της ακτινοβολίας της μελανής οπής και αμέσως μετά ξεκίνησε τις προσπάθειες να την «εξηγήσει». Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι η εξίσωσή του μπορούσε να θεωρηθεί «σωστή» γιατί αναπαρήγαγε την σωστή εξάρτηση από τις ποσότητες ν και T στο όριο των χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων, δηλαδή στο όριο $\nu \to 0$ και $\nu \to \infty$. Το αποτέλεσμα το γνωρίζετε ήδη, από την «Σύγχρονη Φυσική» του δευτέρου έτους, και εδώ θα θυμίσουμε μόνο τα βασικά.

Ορίζουμε την συνολική ισχύ ανά μονάδα επιφανείας που ακτινοβολεί ένα σώμα σε θερμοκρασία T ως R_T. Ο νόμος του Stefan υποδεικνύει ότι $R_T = \sigma T^4$, όπου $\sigma = 5.67' 10^{-5} erg / cm^2 / s / K^4$. Πολύ πιο ενδιαφέρουσα είναι η διαφορική ισχύς ανά μονάδα επιφανείας, για μία συγκεκριμένη συχνότητα. Ορίζουμε την ποσότητα $R(\nu)$ ως την ισχύ, dR_T, που ακτινοβολείται στο διάστημα συχνοτήτων $\nu,\ \nu + d\nu$ δια του διαστήματος αυτού:

$$R(\nu) = \frac{dR_T}{d\nu} \Rightarrow R_T = \int_0^\infty R(\nu)\, d\nu$$

Μία καλή εικόνα είναι να φανταστείτε ότι φοράτε ειδικά γυαλιά-φίλτρα τα οποία αφήνουν να περάσει μόνο μία συγκεκριμένη συχνότητα. Το μέγα θέμα, λοιπόν, είναι η εξάρτηση της $R(\nu)$ από την συχνότητα ν για διαφορετικές θερμοκρασίες. Αυτή είναι η ποσότητα την οποία «μάντεψε» σωστά ο Planck. Σε ότι ακολουθεί, θα δείξουμε πως η υπόθεση ότι η ενέργεια των ηλεκτρο-μαγνητικών κυμάτων που ακτινοβολούνται είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας $h\nu$ οδηγεί στην εξίσωση του Planck:

$$R(\nu) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

2. <u>Συνταγή</u>

Προσπαθούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια που ακτινοβολείται ανά μονάδα χρόνου, επιφανείας και συχνότητας από ένα μελανό σώμα. Το πλησιέστερο μοντέλο στο μελανό σώμα είναι μία κοιλότητα σε ένα σώμα που βρίσκεται σε θερμοκρασία T (σε ισορροπία) και έχουμε ανοίξει μία πολύ μικρή τρύπα στην επιφάνειά του. Το ερώτημα είναι, πλέον, πώς να υπολογίσομε την ενέργεια (ανά μονάδα χρόνου και επιφανείας) που θα εξέρχεται από αυτή την τρύπα.

Η διαδικασία έχει ως εξής:

1. Εκφράζουμε την $R(\nu)$ ως συνάρτηση της πυκνότητας της ενεργείας ανά μονάδα συχνότητας, $u_\nu(\nu) = dE / dV$, μέσα στην κοιλότητα.
2. Υπολογίζουμε την $u_\nu(\nu)$ ως το γινόμενο δύο παραγόντων: ένας παράγοντας εξαρτάται από την κοιλότητα, και είναι ο αριθμός των διαφορετικών κυμάτων στην κοιλότητα ως συνάρτηση μίας συγκεκριμένης συχνότητας, ν. Το συμβολίζουμε με $g(\nu)d\nu$. Ο άλλος παράγοντας δεν εξαρτάται από την κοιλότητα, αλλά είναι ιδιότητα της ηλεκτρομαγνητικής

ακτινοβολίας: είναι η μέση ενέργεια ανά κύμα με συχνότητα $\nu -$ και τον συμβολίζουμε με $\left\langle E(\nu)\right\rangle$. Προφανώς, θα ισχύει: $u_\nu(\nu) = g(\nu)\left\langle E(\nu)\right\rangle d\nu$.

3. Υπολογίζουμε το $g(\nu)$.
4. Υπολογίζουμε το $\left\langle E(\nu)\right\rangle$.

3. Σχέση μεταξύ των $R_T(\nu)$ και $u_\nu(\nu)$.

Έστω μία κοιλότητα με πυκνότητα ενεργείας ανά μονάδα χρόνου $u_\nu(\nu)$. Παίρνοντας μία μικρή (εσωτερική) επιφάνεια dA της κοιλότητας, η συνολική ενέργεια που προσπίπτει σε αυτήν σε χρόνο dt είναι (όγκος κύματος)×(πυκνότητα ενεργείας/χρόνο)=$cdAdtu_\nu \cos\theta$, όπου θ η γωνία μεταξύ της επιφάνειας dA (δηλ. της κάθετης προς αυτήν) και της κατεύθυνσης του κύματος. Η συνολική ροή (ενέργεια ανά μονάδα επιφανείας) ανά μονάδα χρόνου είναι επομένως το ολοκλήρωμα της

$$cdAdtu_\nu \cos\theta / dAdt$$

ως προς όλες τις γωνίες θ. Το ολοκλήρωμα μας δίνει $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{2}$ από τα κύματα που δεν πίπτουν στην επιφάνεια και $\frac{1}{2}$ από την μέση τιμή του $\cos\theta$). Επομένως,

$$R(\nu) = \frac{c}{4} u_V(\nu) \tag{1.1}$$

4. Υπολογισμός της πυκνότητας κυμάτων $g(\nu)$

Η πυκνότητα ενεργείας μέσα στην κοιλότητα είναι το γινόμενο της πυκνότητας των κυμάτων με συχνότητα ν, $g(\nu)d\nu$, και της μέσης ενεργείας του κάθε τέτοιου κύματος, $\left\langle E(\nu)\right\rangle$. Για να υπολογίσουμε την $g(\nu)$ θα υπολογίσουμε πρώτα τον συνολικό αριθμό κυμάτων με συχνότητα από 0 έως και ν σε ένα όγκο dV. Έστω ότι ο αριθμός αυτός είναι $N(\nu)$. Προφανώς, $g(\nu) = dN / dVd\nu$.

Για να υπολογίσουμε το $N(\nu)$, θεωρούμε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται σε τρείς διαστάσεις, σε μία κυβική κοιλότητα με κυματικό αριθμό k_x, k_y και k_z ως προς τους τρείς άξονες, x, y και z αντίστοιχα. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα έχει τη μορφή

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)$$

Το άνυσμα $\vec{E}_0$ έχει δύο δυνατές πολώσεις, ενώ η υπόθεση ότι το κύμα «χωράει» στην κοιλότητα (την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει σχήμα κύβου χωρίς να χάσουμε την γενικότητα του αποτελέσματος) οδηγεί στις εξισώσεις

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L};\ k_y = n_y \frac{\pi}{L};\ k_z = n_z \frac{\pi}{L}$$

Όπου οι αριθμοί n_x, n_y και n_z είναι ακέραιοι αριθμοί και L είναι το μήκος των πλευρών του κύβου. Ο κυματικός αριθμός συνδέεται με την συχνότητα ω μέσω της γνωστής σχέσης

$$\left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{c}\nu$$

Επομένως ο αριθμός των κυμάτων στην κοιλότητα που έχουν συχνότητα έως ν είναι ίσος με όλους τους συνδυασμούς των αριθμών k_x, k_y και k_z που αντιστοιχούν στην πιο πάνω συνθήκη, δηλαδή,

$$\left|\vec{k}\right| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \le \frac{2\pi}{c}\nu$$

Ο αριθμός αυτός είναι ίσος με τον όγκο του πρώτου οκταμορίου της σφαίρας που δίδεται από την ως άνω σχέση, σε μονάδες του βασικού κύβου όγκου $(\pi/L)^3$:

$$N(\nu)=\frac{2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{1}{8}}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3}=\frac{1}{3}\pi L^3\frac{(2\pi\nu)^3}{c^3\pi^3}=\frac{8\pi\nu^3}{3c^3}L^3$$

Στην πιο πάνω εξίσωση, ο μεν παράγοντας δύο στον όγκο συμπεριλαμβάνεται επειδή υπάρχουν δύο πολώσεις ανά κύμα με συγκεκριμένο κυματάνυσμα, ο δε παράγοντας $1/8$ είναι εκεί μια και μετράμε μόνο το οκταμόριο των θετικών αριθμών k_x, k_y και k_z. Επομένως

$$g(\nu)=\frac{1}{V}\frac{dN}{d\nu}=\frac{1}{L^3}\frac{d}{d\nu}\left(\frac{8\pi\nu^3}{3c^3}L^3\right)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \tag{1.2}$$

5. <u>Υπολογισμός της μέσης ενέργειας των κυμάτων</u> $\langle E(\nu)\rangle$

Ένα σύστημα με πιθανές καταστάσεις ενεργείας $E_n, n=1,...,m,...$ που βρίσκεται σε θερμοκρασία T έχει πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση με ενέργεια E_n, που δίδεται από την κατανομή Boltzman:

$$P(E_n)=\frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}};\quad \text{με}\ \beta=\frac{1}{kT}$$

Από εδώ είναι πολύ απλό να δείξουμε ότι η μέση τιμή της ενέργειας, όταν η τελευταία είναι συνεχής ποσότητα, δίδεται από την έκφραση:

$$\langle E\rangle=\sum_n E_nP(E_n)=\frac{\sum_n E_ne^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}}\to\frac{\int_0^\infty Ee^{-\beta E}dE}{\int_0^\infty e^{-\beta E}dE}=\frac{1}{\beta}=kT$$

Όταν λοιπόν τα κύματα με συχνότητα ν έχουν ως πιθανές τιμές ενεργείας όλες τις συνεχείς τιμές από 0 έως άπειρο, η μέση ενέργειά τους είναι kT. Συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με αυτό της $g(\nu)$, φθάνομε στον νόμο Rayleigh-Jeans:

$$u(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT$$

Ο οποίος, προφανώς δεν μπορεί να αληθεύει για όλες τις συχνότητες, μέχρι το άπειρο, μια και αυτό θα σήμαινε ότι η ολική πυκνότητα ενεργείας μίας κοιλότητας (δηλ. το ολοκλήρωμα της ως άνω έκφρασης ως προς ν) είναι άπειρη…

Όπως λέει και το βιβλίο σας, ο Planck, «μάντεψε» σωστά τον τύπο με την σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά, δηλ. το

$$u(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

όπου h μία νέα σταθερά που, για να συμφωνήσει ο τύπος αυτός με τα πειραματικά δεδομένα, έχει την τιμή $h=6.63\times10^{-27}\,\text{erg s}=6.63\times10^{-34}\,\text{J s}$.

Μετά από πολλές δοκιμές στο να βρει ένα τρόπο να δικαιολογήσει την έκφραση αυτή, κατέληξε στο εξής σκεπτικό: αν θεωρήσουμε ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα έχει ενέργεια που είναι πάντα ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας $h\nu$, τότε ο υπολογισμός της μέσης τιμής μας δίνει

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\sum_n e^{-\beta E_n}} \sum_n E_n e^{-\beta E_n} = \frac{1}{Z}\left(-\frac{dZ}{d\beta}\right) \quad \text{με} \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

Η ποσότητα Z υπολογίζεται εύκολα ως γεωμετρική πρόοδος με παράγοντα $e^{-\beta h\nu}$:

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\beta n h\nu} = \frac{1}{1-e^{-\beta h\nu}}$$

Και επομένως

$$\frac{dZ}{d\beta} = -1 \cdot \frac{1}{\left(1-e^{-\beta h\nu}\right)^2} \cdot \left(-e^{-\beta h\nu}\right) \cdot \left(-h\nu\right) = -h\nu \frac{e^{-\beta h\nu}}{\left(1-e^{-\beta h\nu}\right)^2}$$

η μέση τιμή της ενεργείας είναι

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\beta} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu}-1} \tag{1.3}$$

6. <u>Όλα τα κομμάτια μαζί</u>

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.1), (1.2) και (1.3) παίρνομε τον πολυπόθητο τύπο:

$$R(\nu) = \left.\frac{c}{4}\right|_{(1)} \left.\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\right|_{(2)} \left.\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}\right|_{(3)} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$$

Απίστευτο και όμως αληθινό!
Επιπλέον, το ολοκλήρωμα ως προς όλες τις συχνότητες μας δίνει:

$$\int_0^\infty R(\nu)d\nu = \frac{2\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu = \frac{2\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{2\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4$$

Το οποίο μας δίδει την τιμή της σταθεράς του Stefan σε συνάρτηση των σταθερών k, h και c:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}$$

το οποίο και συμφωνεί με την μετρούμενη τιμή του σ.

Έτσι γεννήθηκαν τα «κβαντισμένα» ηλεκτρομαγνητικά κύματα…