

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Διάλεξη 04

Χ0Ε2:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \hat{x} \psi(x,t) dx$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \hat{p} \psi(x,t) dx$$

$$\hat{x} = x \text{ (πολλαπλασιάζεται με } x \text{)}$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \text{ (με } -i\hbar \text{ και παραγώγιση)}$$

$$\langle x \rangle = \int x \rho(x) dx = \int x |\psi|^2 dx = \int x \psi^* \psi dx = \int \psi^* x \psi dx$$

Την απόδειξη, άνοιξτε

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} \Rightarrow \langle p \rangle = \int \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx$$
$$= \int \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi dx$$

~~χθες~~ Στιν κβ. Μηχανική, $\forall$ φυσική ποσότητα
αντιστοιχεί $\hat{Q}$ είναι τελεστής

$$x \rightarrow \hat{x}$$

$$p \rightarrow \hat{p}$$

$$L_x \rightarrow \hat{L}_x$$

$$E \rightarrow \hat{E} \text{ αλλά: } \hat{H} \text{ (Hamiltonian)}$$

Φυσική ποσότητα $Q \rightsquigarrow \hat{Q}$ ←

$$\langle Q \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \hat{Q} \psi(x,t) dx \quad \Leftarrow$$

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΒΑΝΤΟ

Τελειώνει: δρά σε μία συνάρτηση. (το μόνο που έχουμε πηξόν)

$$\psi(x, t)$$

Μετράω το Q . $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ $\langle Q \rangle = \frac{Q_1 + \dots + Q_n}{n}$
 $\in \mathbb{R}$ τα αποτελέσματα των μετρήσεων:
 πραγματικά αριθμοί.

$$\Rightarrow \langle Q \rangle = \langle Q \rangle^*$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ όταν } z = z^* \\ a + ib = a - ib \\ \Rightarrow b = 0$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\int \psi^* \hat{Q} \psi dx}_{\text{}} &= \left(\int \psi^* \hat{Q} \psi dx \right)^* \\ &= \int \psi (\hat{Q} \psi)^* dx \\ &= \int \underbrace{(\hat{Q} \psi)^*}_{\text{}} \underbrace{\psi dx}_{\text{}} \end{aligned}$$

$$\int \psi^* \hat{Q} \psi dx = \int (\hat{Q} \psi)^* \psi dx$$

$$\hat{Q} := \text{ερμιτιανός}$$

$$\int \psi_1^* \hat{Q} \psi_2 dx = \int (\hat{Q} \psi_1)^* \psi_2 dx \quad (\psi = \psi_1 + \lambda \psi_2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΡΜΙΤΙΑΝΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

$\forall \hat{Q}$: $\hat{Q} f(x) = g(x)$ γενική δράση.

«Υπάρχουν κάποιες συγκεκριμένες τρέζες που

$\hat{Q} \varphi(x) = q \varphi(x)$

αριθμός

$$\hat{D} = \frac{d}{dx}$$

$$\hat{D} f(x) = f'(x) \quad \text{π.χ.} \quad \hat{D}(3x^2 - 2x) = 6x - 2$$

$g(x)$

$$\hat{D} e^{ax} = (e^{ax})' = a e^{ax}$$

$$\hat{D} e^{3x} = 3 e^{3x}$$

$$\hat{D} e^{6x} = 6 e^{6x}$$

$\phi_n(x)$: ιδιοσυναρτήσεις του $\hat{Q}$
 q_n : ιδιοτιμές του $\hat{Q}$

Εξίσωση ιδιοτιμής/ιδιοσυνάρτησης:

$$\hat{Q} \phi_n(x) = q_n \phi_n(x)$$

Συμβολίζουμε τον厄密τιανό συζυγή ως $\hat{Q}^\dagger$.

厄密τιανός: $\hat{Q}^\dagger = \hat{Q}$

Παράδειγμα ή παράγωγος $\hat{D} = \frac{d}{dx}$. Είναι厄密τιανός?

$$\int \psi^* \hat{D} \psi dx \stackrel{?}{=} \int (\hat{D} \psi)^* \psi dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{d\psi}{dx} dx = \cancel{\psi^* \psi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \frac{d\psi^*}{dx} dx$$

$$\boxed{\psi(\pm\infty) = 0}$$

$$\int \psi^* \hat{D} \psi = - \int (\hat{D} \psi)^* \psi dx \Rightarrow \boxed{\hat{D}^\dagger = -\hat{D}}$$

Παράγωγος
ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ
ΕΡΜΙΤΙΑΝΟΣ
ΤΕΝ!

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\int \psi^* \hat{p} \psi dx = \int \psi^* (-i\hbar) \frac{d\psi}{dx} dx =$$

$$\rightarrow = -i\hbar \int \psi^* \frac{d\psi}{dx} dx = (-i\hbar) (-) \int \left(\frac{d\psi^*}{dx} \right) \psi dx$$

$$= \int i\hbar \left(\frac{d\psi^*}{dx} \right) \psi dx$$

$$= \int \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \psi \right)^* \psi dx$$

$$\int \psi^* \hat{p} \psi dx = \int (\hat{p} \psi)^* \psi dx \Rightarrow \hat{p} \text{ ΕΡΜΙΤΙΑΝΟΣ!}$$

$\hat{p}^\dagger = \hat{p}$

α) ιδιοτιμές $\epsilon_n, \tau_n \in \mathbb{R}$

β) ιδιοσυν. που αντιστοιχούν σε διαφ. ιδιοτιμές: $\epsilon_n \neq \epsilon_m$.

$$\int \phi_n^* \phi_m dx = 0$$

Έστω $\hat{Q} \phi_n = q_n \phi_n \iff$

$$\int \psi^* \hat{Q} \psi dx \stackrel{\psi = \phi_n}{=} \int \phi_n^* \hat{Q} \phi_n dx = \underline{q_n} \int \phi_n^* \phi_n dx$$
$$\Rightarrow \int \underbrace{(\hat{Q} \phi_n)^*}_{q_n \phi_n} \phi_n dx = \underline{q_n^*} \int \phi_n^* \phi_n dx$$

$$\Rightarrow \left(\int \phi_n \phi_n^* dx \right) (q_n - q_n^*) = 0 \Rightarrow \boxed{q_n = q_n^*} \quad (\text{😊})$$

$$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n|^2 dx \neq 0 \quad \begin{aligned} &(\text{απορροια θετικων αριθμων}) \\ &(\text{εκτος αν } \phi_n(x) = 0) \end{aligned}$$

$$(\dagger) \int \varphi_n^* \varphi_m dx = 0 \quad \text{for } n \neq m$$

$$\hat{Q} \varphi_n = q_n \varphi_n$$

$$\hat{Q} \varphi_m = q_m \varphi_m \Leftrightarrow$$

$$\int \varphi_n^* \hat{Q} \varphi_m dx = \int (\hat{Q} \varphi_n)^* \varphi_m dx \quad (\text{also valid opposite!})$$

$$q_m \int \varphi_n^* \varphi_m dx = q_n^* \int \varphi_n^* \varphi_m dx$$

$$(q_m - q_n) \int \varphi_n^* \varphi_m dx = 0$$

$$\text{AN } q_m \neq q_n \Rightarrow \boxed{\int \varphi_n^*(x) \varphi_m(x) dx = 0}$$

$$\boxed{\int \psi^* \hat{Q} \psi dx = \int (\hat{Q}^+ \psi)^* \psi dx}$$

Διανυσματικός χώρος.

$$\psi \in \mathcal{C}. \quad a\psi_1 + b\psi_2 \in \mathcal{C} \quad \dots$$

Εσωτερικό γινόμενο? ΟΡΙΣΜΟΣ:

$f(x), g(x)$. ΟΡΙΖΟΥΜΕ

$$\begin{aligned} f \circ g &\equiv \int \underline{f^*(x)g(x)} dx \\ (f, g) &\equiv \int f^*(x)g(x) dx \end{aligned} \quad \Leftarrow$$

$$f \circ g = (g \circ f)^* \quad \text{έναντιθέτως με} \quad \underbrace{\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}}_{\text{καρτίκι δεν σε 3D}}$$

$$\text{μετρο} \quad \vec{A}: \quad |\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} \quad \text{σε 3D}$$

$$\text{" " " } f: \quad \underbrace{\|f\|}_{|f|} = \sqrt{f \circ f} = \sqrt{(f, f)}$$

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

$f(x)$: Τετραγωνικά ολοκλήρωσιμες.

→ Ok είναι ΚΒΑΝΤΟ (όχι οι ψ με $\int |\psi|^2 dx < \infty$)

$$\int |f(x)|^2 dx = C \leadsto f_{\text{NKA}}(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{C}}$$

$$\int |f_{\text{NKA}}(x)|^2 dx = 1$$

ΑΝ είναι τετραγ. ολοκ. $\Rightarrow$ μπορούμε ΠΑΝΤΑ να
είναι κανονικοποιημένα με 1.

Από τώρα και έπειτα: θεωρούμε ότι όλοι οι
 ψ που γράφουμε είναι $\int \psi^* \psi dx = 1$

Διοδω. Έως φ_n Τυχαία, φ_n με ιδιοτιμές q_n

$$\Rightarrow \hat{Q} \varphi_n = q_n \varphi_n \Leftarrow$$

$$\hat{Q} \varphi_m = q_m \varphi_m$$

$$\|\varphi_n\| = 1 \quad n=1, \dots, \infty$$

$$\varphi_n \circ \varphi_m = 0 \quad \text{για} \quad q_n \neq q_m$$

$$\int \varphi_n^*(x) \varphi_m(x) dx = 0$$

$\hookrightarrow$ Σχεδόν όλες τις ιδιοτιμές μιας βάσης
τω δυν. χύρα.

Για να είναι βάση, πρέπει $\forall$ άλλο διάνυσμα να
μπορέ να γραφτεί ως γραμ. συνδ. των φ_n .

ΤΥΧΑΙΑ $\psi(x)$: (πρέπει)

$$\psi(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots \Leftarrow$$

Παλ. με $\varphi_n^*(x)$ και ομογενοποίηση

$$\int \varphi_n^*(x) \psi(x) dx = \int \varphi_n^*(x) \cancel{c_1 \varphi_1(x)} + \int \varphi_n^*(x) \cancel{c_2 \varphi_2(x)} + \dots + \int \varphi_n^*(x) c_n \varphi_n(x) dx + \dots$$

$c_n \int \varphi_n^* \varphi_n dx = c_n$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^*(x) \psi(x) dx = \underline{c_n}$$

$$\psi(x) = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n + \dots$$

$$\varphi_m \circ \psi = c_1 \cancel{\varphi_m \circ \varphi_1} + c_2 \cancel{\varphi_m \circ \varphi_2} + \dots + c_m \underbrace{\varphi_m \circ \varphi_m}_{=1} + \dots + c_n \cancel{\varphi_m \circ \varphi_n} + \dots$$

$$\varphi_m \circ \psi = c_m$$

Μαγιά:
Υπόθεση

$$\boxed{\vec{A} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3} \leftarrow$$

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$
 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \quad (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$

$$\boxed{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{A} = a_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_1 + a_3 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3$$

$$\boxed{\vec{e}_2 \cdot \vec{A} = a_2}$$

ίδιος αριθμός

$$\Rightarrow \psi(x) = C_1 \psi_1 + \dots + C_n \psi_n + \dots$$

ένω για διαστάσεις $3D \in \mathbb{R}$

a) $C_i \in \mathbb{C}$

β) Άλλα $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ ενώ " " έχω 3.

$\forall \psi(x):$

$$\psi(x) = \sum_i C_i \phi_i(x)$$

όπου $\phi_i(x) =$ ιδιοσυναρτήσεις έως τρμ. ζήτησις.

↳ ανεξαρτητών βάση των χώρου των
καμασυναρτήσεων.

Παίρνω ένα τρμ. ζήτησις. π.χ. τον $\hat{Q}$.

Βρίσκω τις ϕ_n, ψ_n $\hat{Q} \phi_n = \psi_n \phi_n$

$(\phi_n, \phi_m) = \phi_n \circ \phi_m = 0$ και $\psi_n \in \mathbb{R}$

$$C_i = (\phi_i, \psi) = \phi_i \circ \psi = \int \phi_i^*(x) \psi(x) dx$$

$C_i \in \mathbb{C}$ μιγαδικές.

$f \cdot g$
~~~~~  
→

$\vec{A} \cdot \vec{B}$

$f \circ g$   
~~~~~

→

(f, g)
~~~~~

$$\int f^*(x) \cdot g(x) dx$$

↑  
παραγινόμενο

$$3 \cdot 4 \cdot (x-1)$$

Ορθοκανονικά ζεύγ  $\varphi_n(x)$  (ιδιοσυν. Ερμ. Τξ.):

$$\varphi_m \cdot \varphi_n = (\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}$$


---

$$\psi(x) = \sum_i c_i \varphi_i(x)$$

$$\Rightarrow \underline{(\varphi_j, \psi)} = (\varphi_j, \sum_i c_i \varphi_i) = \sum_i c_i \underbrace{(\varphi_j, \varphi_i)}_{\delta_{ji}} = \underline{c_j}$$



Αντιρρόφαδο πυράδι:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi \Leftarrow$$

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} \psi + \hat{V} \psi = E \psi$$

Χαμηλοταλαντι

$$\left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \right) \psi = E \psi$$

$$\hat{E} \psi = E \psi$$

$$\hat{H} \psi = E \psi$$

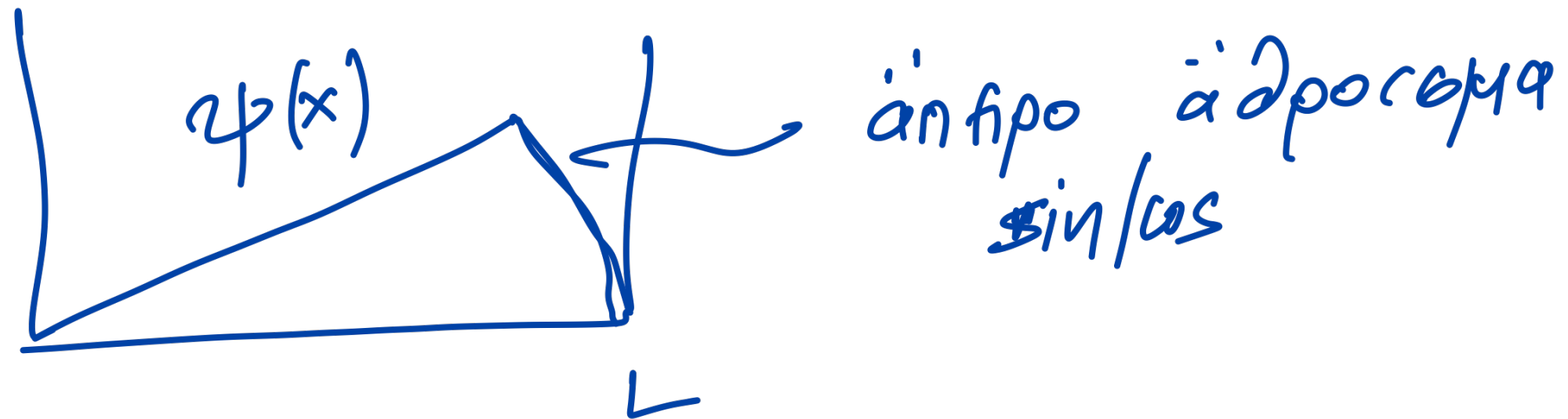
Λύνοντας το αντιρρόφαδο: βρίσκουμε τις ιδιοε. και  
ιδιοτιμές του τελεστή  $\hat{H}$  !!!

$$\hat{H} \phi_n = E_n \phi_n$$

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m L^2}$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Οποιαδήποτε  $\psi(x)$  στο  $[0, L]$  μπορεί να γραφτεί  
 ως γραμμ. συνδ. των  $\varphi_n(x)$



$$\psi(x) = a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_{18} \varphi_{18}(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) + \dots$$

$$= \sum_j a_j \varphi_j(x) = \sum_j a_j \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{j\pi x}{L}$$

$$\underline{a_j} = (\varphi_j, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j^* \psi dx = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{j\pi x}{L} \psi(x) dx$$

• Ορισμός Ερμ. Συζυγούς.

Έστω τελεστής  $\hat{A}$ . Ο ερμ. συζυγής,  $\hat{A}^\dagger$  ορίζεται ως

$$(f, \hat{A}g) = (\hat{A}^\dagger f, g) = (A^\dagger f, g)$$

Για  $\hat{A} = \text{μιγαδικός αριθμός}, = z \quad (a+ib)$

$$\int f^* z g dx = \int (z^\dagger f)^* g dx = \int z^{\dagger*} f^* g dx$$

$$\Rightarrow \boxed{z = z^*}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger$$

$$\int f^* (\hat{A}\hat{B}) g dx$$

$$\int \psi^* (\hat{A}\hat{B}) \psi dx = \int (\hat{A}^\dagger \psi)^* \hat{B} \psi dx = \int (\hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger \psi)^* \psi dx$$

$$\int [(\hat{A}\hat{B})^\dagger \psi]^* \psi dx = \int (\hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger \psi)^* dx \leftarrow$$

$$\Rightarrow (\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$$

$$\left(\hat{x}\right)^\dagger = \left(\hat{x} \cdot \hat{x}\right)^\dagger = \hat{x}^\dagger \cdot \hat{x}^\dagger = \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{x}^2$$

∀ δύναμη ενός ΕΡΜ  $\rightarrow$  Ερμιτανο's.

αντιταδίου  
(ΕΡΜ:  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ )

$$\downarrow \{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \underline{\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

μεταδίου

Αντικ:  $\hat{A}, \hat{B}$  ΕΡΜ.

$$\begin{aligned} \{\hat{A}, \hat{B}\}^\dagger &= (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})^\dagger \\ &= (\hat{A}\hat{B})^\dagger + (\hat{B}\hat{A})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger + \hat{A}^\dagger \hat{B}^\dagger = \underline{\hat{B}\hat{A} + \hat{A}\hat{B}} \end{aligned}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = (\hat{A}\hat{B})^\dagger - (\hat{B}\hat{A})^\dagger \\ = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger \hat{B}^\dagger = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = [\hat{B}, \hat{A}] = -[\hat{A}, \hat{B}]$$

Μεταθετής δύο έρμ. μεγ. ζητούμε!

ΔΕΝ είναι έρμ. μεγ.

Το γινόμενο δύο έρμ. μεγ. ΔΕΝ είναι αναγκαστικά έρμ. μεγ.

$$\hat{A} \text{ έρμ.}, \hat{B} \text{ έρμ.} \quad (\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger \Rightarrow \hat{B}\hat{A}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}\hat{A} \neq \hat{A}\hat{B}$$

Αλλά  $\hat{B}\hat{A} \neq \hat{A}\hat{B}$  γενικά

Εκτός αν  $\hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}$  δηλ. αν  $\boxed{[\hat{A}, \hat{B}] = 0}$



# ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΕΤΡΗΣΗ

Μου δίνουν ένα σύστημα.  $\psi(x,t)$  που νύ δίνουν

Μετράμε την φυσική ποσότητα  $A$ . Τι θα βρούμε?

ΔΕΝ ΞΕΡΟΥΜΕ. ΑΛΛΑ, μπορούμε να γυρίσουμε

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(x,t) \hat{A} \psi(x,t) dx$$

$\hat{A} = ?$  Απ.  $\forall A = A(x,p)$

π.χ.  $\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x})$  π.χ. Αρμ. Ταλ.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} k \hat{x}^2$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 \xrightarrow[p \rightarrow \hat{p}]{x \rightarrow \hat{x}} \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} k \hat{x}^2$$

$$A = ax^3 + bp^2 \Rightarrow \hat{A} = a\hat{x}^3 + b\hat{p}^2 \dots$$

AN το  $\psi(x,t)$  είναι ιδιοσυνάρτηση του  $\hat{A}$ ,  
 "έτσι" ού είναι  $\psi(x,t) = f_m(x)$   
 οπότε  $\boxed{\hat{A} f_m(x) = a_m f_m(x)}$

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{f_m} &\equiv \int f_m^*(x) \hat{A} f_m(x) dx \\ &= \int f_m^*(x) a_m f_m(x) dx \\ &= a_m \int f_m^* f_m dx = a_m \end{aligned}$$

$$\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = ? \quad \boxed{\langle A^2 \rangle} - \underbrace{\langle A \rangle^2}_{(a_m^2)}$$

$$\langle A^2 \rangle_{f_m} = \int f_m^*(x) \hat{A} \hat{A} f_m(x) dx$$

$$= \int f_m^* \hat{A} (a_m f_m) dx$$

$a_m f_m$

$$= \underline{a_m^2} \int f_m^* f_m dx = \underline{a_m^2}$$

$$\Delta A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \underline{a_m^2} - (\underline{a_m})^2 = \underline{0 !!!}$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ

Έρωτη: 1.000.000 βυθίσματα, που έχω το  
 ψ είναι στην  $\psi_{23}(x)$ , ΤΟΤΕ

$$\langle A \rangle = \underline{a_{23}} \quad \underline{\Delta A = 0} \Rightarrow \underline{\mu_{\epsilon 1}, \mu_{\epsilon 2}, \dots, \mu_{\epsilon 10^6} = a_{23}}$$

ΑΝ το σύστημα είναι βέβαιο γνώριμο του  $\hat{A}$ ,  
τότε μέτρο του  $A$  ΣΙΓΟΥΡΑ ΘΑ ΔΣΞΕΙ  
την ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση

Έχω ου δείω βέβαιο σύστημα,  $\psi(x, t_0)$ , βέβαιο  $10^6$   
τέτοια, να βρω ΣΙΓΟΥΡΑ βέβαιο μέτρο του  $A$ , την  
τιμή  $a_{58}$ . ΤΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΚΑΝΩ?

Μέτρησες δίνεις  $a_{58}, a_{58}, \dots, a_{58}, \dots, a_{58}$   
 $\swarrow 10^6$  μέτρησες

$$\Rightarrow \langle A \rangle = a_{58} \text{ και } \Delta A = 0$$

$$\Delta A^2 = 0 \Rightarrow \langle \underbrace{(A - a_{58})^2} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \int \psi^* \underbrace{(\hat{A} - a_{58})^2} \psi dx =$$

$$\int \psi^* (\hat{A} - a_{58}) (\hat{A} - a_{58}) \psi dx$$

$\hat{A}$   $\psi$

$$= \int \left[ (\hat{A} - a_{58}) \psi \right]^* \left[ (\hat{A} - a_{58}) \psi \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |(\hat{A} - a_{58}) \psi|^2 dx = 0$$

$$|(\hat{A} - a_{58}) \psi|^2 \geq 0 \Rightarrow |(\hat{A} - a_{58}) \psi| = 0$$

$$\boxed{\hat{A} \psi = a_{58} \psi}$$

$$\boxed{\hat{A} f_{58} = a_{58} f_{58}}$$

$\psi$  is  $f_{58}(x)$



$\Rightarrow$  ΑΝ ΘΕΛΩ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΕΙΡΟΥΦΟΡΟ ΟΤΙ  
ΘΑ ΒΡΩ  $a_{58}$  ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΤΟΙΜΑΣΩ  
ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΤΕΙ ΩΣΤΕ  $\psi(x) = f_{58}(x)$ .

Εδικοί περίπτωση  $\psi(x, t_0) = \text{ιδιοβλ. Ερμ. Τξ.}$   
 $\Leftrightarrow$  Ξέρουμε  $\hat{u}$   $\hat{a}$  βγαίνουν!!!

Τυχαια μεταβλητή:  $y_1, y_2, \dots, y_n$   $n$

$$\langle y \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n \textcircled{y_i}}{n}$$

$$= y_{58}$$

$$\langle \underline{y^2} \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i)^2}{n}$$

$$= (y_{58})^2$$

$$= \frac{y_1^2 + \dots + \textcircled{y_{58}^2} + \dots + y_n^2}{n}$$

$\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2 \equiv \text{ΔΙΑΣΠΟΡΑ}$   
ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ΑΝ η  $\psi(x, 0)$  ΔΕΝ ΕΝΑΙ ΙΔΙΟΣΥΝ ΤΟΥ  $\hat{A}$ ,  
ΤΙ ΘΑ ΒΡΩ ΑΝ ΜΕΤΡΗΣΩ ΤΟ  $A$ ?

Θεώρημα πτυρώσεως.

$$\psi(x) = \sum_n c_n \phi_n(x)$$

$$c_n = (\phi_n, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n^* \psi dx$$

Για τον  $\hat{A}$ , που έχω

$$\hat{A} \phi_n = a_n \phi_n$$

ΜΠΟΡΩ ΤΗΝ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  $\psi(x)$ :

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x) = \sum_n c_n f_n(x)}$$

$$\boxed{c_n = (f_n, \psi)}$$

Γνωρίζω

$$\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi dx$$

$$= \int \left[ \sum_m c_m f_m(x) \right]^* \hat{A} \left[ \sum_n c_n f_n(x) \right] dx$$

$$= \sum_m \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} c_m^* f_m^*(x) \hat{A} c_n f_n(x) dx$$

$$= \sum_m c_m^* \sum_n c_n \int_{-\infty}^{+\infty} f_m^* \hat{A} f_n dx$$

$\underbrace{A_n f_n}_{\text{Γνωρίζω}}$

$$= \sum_m \phi_m^* \sum_n \phi_n a_n \underbrace{\int \phi_m^* \phi_n dx}_{\delta_{mn}}$$

$$\sum_n \phi_n a_n \delta_{mn}$$

μηδέν για κάθε  $n \neq m$   
από το  $\delta$   $n=m$

$$= \sum_m \phi_m^* \phi_m a_m = \sum_m a_m |\phi_m|^2$$

$$\boxed{\langle A \rangle = \sum_m a_m |\phi_m|^2} \Leftarrow$$

Όταν έχουμε συν  $f_1 \rightarrow a_1$   
 $\dots$   $f_{31} \rightarrow a_{31}$   
 $\dots$   $f_m \rightarrow a_m$

δίνουμε



Τυχαία ποσότητα, με τιμές  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

$$\langle a \rangle = a_1 \underline{p(a_1)} + \dots + a_n \underline{p(a_n)} + \dots$$

ελαττώνεται?

Μετρήσεις δίνουν  $a_1, a_2, \dots$

με πιθανότητα  $p(a_1) = |\phi_1|^2 \dots p(a_n) = |\phi_n|^2$

ΟΤΑΝ δει είμαι σε ιδιοκατάσταση,

$$\psi(x) = \sum_n \phi_n f_n(x)$$

Θά βρω σε μέτρηση του A μια από τις

ιδιοτιμές:  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , ...

με πιθανότητα  $p(a_1) = \underline{|\phi_1|^2}$   $p(a_2) = \underline{|\phi_2|^2}$  ...



MA PREP

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(a_i) = 1$$

$$(\psi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx = 1$$

$$L = \left( \sum_m c_m f_m, \sum_n c_n f_n \right) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_m c_m f_m \right)^* \sum_n c_n f_n dx$$

$$= \sum_m c_m^* \sum_n c_n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_m^* f_n dx \right)$$

$\delta_{mn}$

$$\sum_m c_m^* c_m = \sum_m |c_m|^2 \neq 1$$

$\neq 1$

(ΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗ:  
ΕΚΕΙΝΗ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ,

$$\hat{Q} f(x) = q \underbrace{f(x)}_{\text{αριθμός}}$$

$$\hat{D} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

$e^{\lambda x}$ : ιδιοσυνάρτηση  
ως παράγωγου

$$\hat{H} \varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x) \quad \text{απειρόβαθα πυκνάδ}$$

$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$

↓

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_n}{dx^2} = E_n \psi_n$$

