

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Διάλεξη 03

Εξ Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \underbrace{V(x)}_{\text{pot}} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\leadsto \boxed{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V = \hbar \omega} + \text{γραμμικά}$$

Πήραμε δύο όντων, $\Rightarrow$ μήαμε για πιθανότητες, και

$|\psi|^2 = \rho$ πυκνότητα πιθαν. να βρεθεί το x

$$\Rightarrow \boxed{dP(x, x+dx) = |\psi(x)|^2 dx}$$

Απαίτηση: $\exists$ ποσότητα $j(x)$ τέτοια που να τηρεί

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}$$

Εξίσωση συνέχειας

$\leadsto$ διατήρηση πιθανότητας

Πύση Εγ. Schw.

$$\underline{\psi(x,t) = \phi(x) T(t)}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} T(t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \underbrace{V(x) T(t) \phi(x)} = \underbrace{i\hbar \phi(x) \frac{\partial T}{\partial t}}$$

Παράγωγοι αφορούν μόνο με

$$\frac{1}{\psi(x,t)} = \frac{1}{\phi(x) T(t)}$$

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + V(x)}_{\underline{\underline{f(x)}}} = \underbrace{\frac{i\hbar}{T(t)} \frac{dT}{dt}}_{\underline{\underline{g(t)}}}$$

$$f(x) = g(t) \quad \forall x, \forall t \Rightarrow f(x) = g(t) = c$$

σταθερά.

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= g(t_1) \\ f(x_2) &= g(t_1) \\ &\vdots \\ f(x_n) &= g(t_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f(x_1) = \dots = f(x_n) = \dots$$

$$\left. \begin{aligned} g(t_1) &= f(x_1) \\ g(t_2) &= f(x_1) \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(t_1) = g(t_2) = \dots$$

Ονομάζουμε σταθερά $c = E$ (θα δούμε ότι είναι η ενέργεια)
χρυσάκι

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi$$

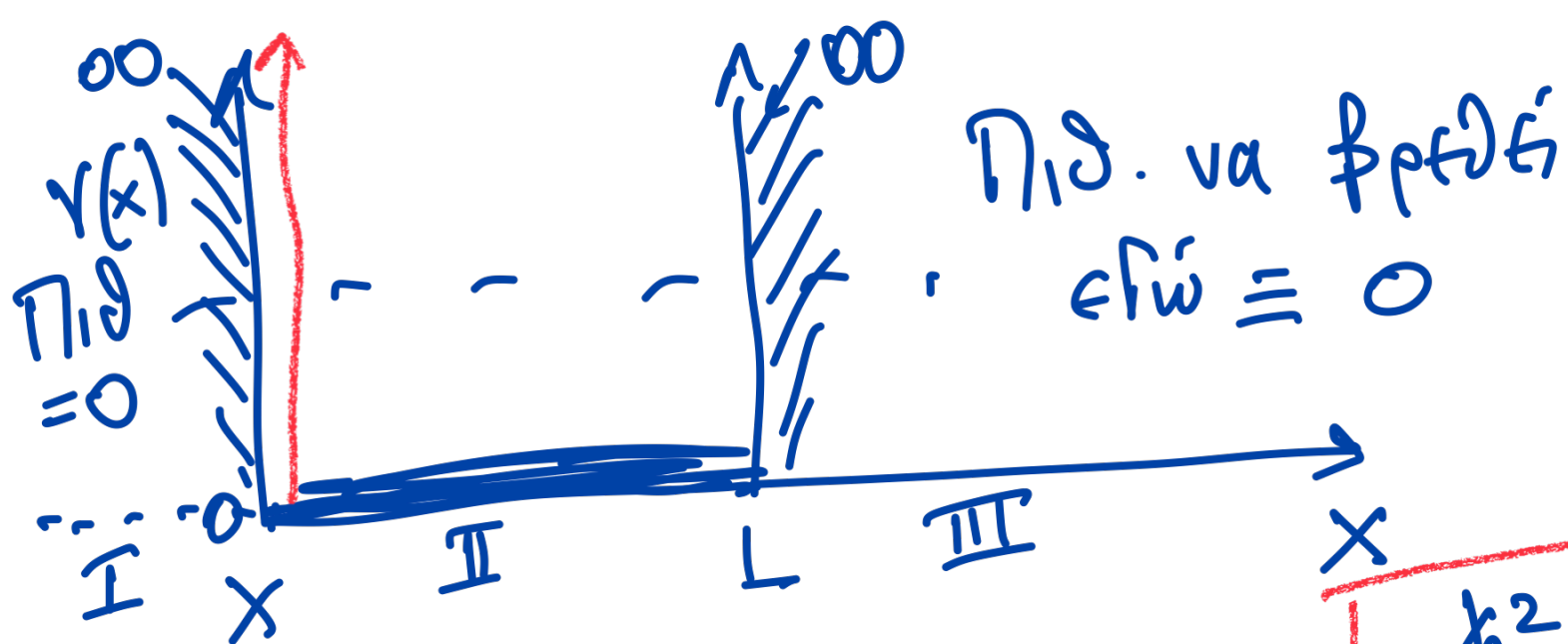
$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = E\psi$$

Σημειώστε ότι μερικές
διαφ. ε. σε δύο
ανεξάρτητες διαφ. ε.
μία για x , μία για t .

$$\psi(t) = \psi(0) e^{-iEt/\hbar}$$

Εξαρτάται από το $V(x)$. (Χρονοανεξάρτητη Ε. Schrod)

ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ



$$\psi(x,t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\infty \cdot 0 \Rightarrow 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi_I}{dx^2} + \infty \varphi_I = E \varphi_I \Rightarrow \varphi_I = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi_{II}}{dx^2} + 0 \varphi_{II} = E \varphi_{II}$$

ιδιο με I $\Rightarrow \varphi_{III} = 0$

I $V(x) = \infty \quad x < 0$ φ_I
 II $V(x) = 0 \quad 0 < x < L$ φ_{II}
 III $V(x) = \infty \quad x > L$ φ_{III}

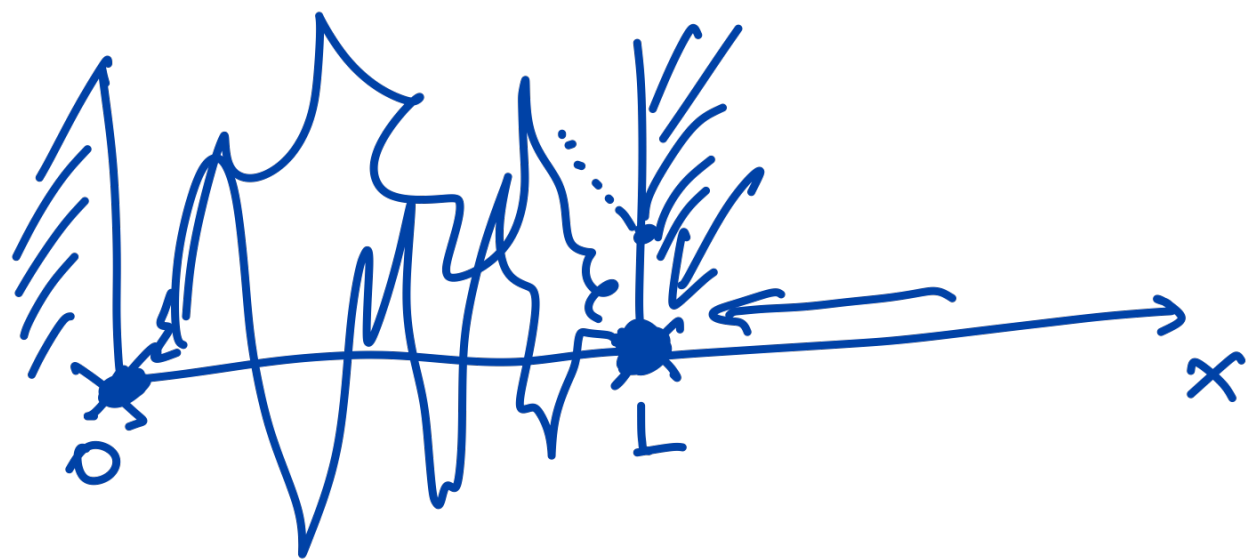
$\varphi_{II} \rightarrow \varphi$ (προσρίζονται σε $\varphi(x)$ είναι μηδέν σε I, και III)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = E \varphi \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = - \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right) \varphi = -k^2 \varphi \quad [k^2 > 0]$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -k^2 \varphi \rightarrow \left. \begin{aligned} \varphi(x) &= A e^{ikx} + B e^{-ikx} \\ \varphi(x) &= C \cos kx + D \sin kx \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dz^2} = \lambda^2 y \Rightarrow y(z) \sim e^{+\lambda z} \text{ ή } e^{-\lambda z} \\ -\lambda^2 \Rightarrow (i\lambda)^2 \Rightarrow e^{+i\lambda z} \text{ ή } e^{-i\lambda z} \end{array} \right)$$

Συνοριακές συνθήκες: $\varphi(0)=0$, $\varphi(L)=0$



$|\varphi(x)|^2 = \text{πυκν.}$
πιθ. να
βρεθεί το
 x_0

$$\begin{array}{l} \varphi(0)=0 \\ \varphi(L)=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} A e^0 + B e^{-0} = 0 \\ A e^{i k L} + B e^{-i k L} = 0 \end{array}$$

Τύπος 1

$$\begin{array}{l} C \cdot 1 + D \cdot 0 = 0 \\ C \cos kL + D \sin kL = 0 \end{array}$$

Τύπος 2

$$\textcircled{1} \quad B = -A \Rightarrow A(e^{ikL} - e^{-ikL}) = 0 \Rightarrow A \cdot 2i \sin kL = 0$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cancel{A=0} \text{ ή } \sin kL = 0 \Rightarrow \boxed{kL = n\pi}$$

$$\hookrightarrow \text{απορρίπτονται: } B = -A = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = 0}$$

$$\textcircled{2} \quad C = 0 \Rightarrow D \sin kL = 0 \Rightarrow D = 0 \text{ ή } \sin kL = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{kL = n\pi}$$

$$\varphi(x) = A \sin(kx) = \underline{\underline{A \sin \frac{n\pi x}{L}}}$$

$$n = \cancel{0}, 1, 2, \dots$$

$n=0$: ΤΙΠΟΤΑ
ΠΟΥ ΘΕΝΑ

$$\boxed{\varphi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 + \int_0^L + \int_L^{\infty} = 1$$

$$\int_0^L |A_n|^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1 \Rightarrow |A_n|^2 \frac{L}{2} = 1 \Rightarrow \underline{|A_n| = \sqrt{\frac{2}{L}}}$$

$$\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 \\ = 1 - 2\underbrace{\sin^2 \theta}$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} \left\{ x \Big|_0^L - \frac{1}{2n\pi} \underbrace{\sin \frac{2n\pi x}{L}} \Big|_0^L \right\} = \frac{L}{2}$$

⇒ Προηγμένες λύσεις:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

a) Γιατί άρα $|A_n| = \sqrt{\frac{2}{L}}$ τώρα $A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$

και όχι $A_n = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{ian}$? ⇒ παίρνω $a_n = 0$

✓ Φάση, και δεν αλλάζει την λύση.

$$\begin{aligned} |\psi_n(x)|^2 &= \frac{2}{L} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} \\ &= \frac{2}{L} |e^{ian}|^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

$$\beta) \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E$$

$$\left(k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \Rightarrow$$

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

Αντιρροαδο κυμαδι:

$$\boxed{\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}$$

Λύση της Χρονοανεξ. Ή Schw.

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = E \varphi} \Leftrightarrow E: \text{παιρνει μονο} \\ \text{διακριτες τιμες}$$

ΛΥΣΑΜΕ ΕΝΔ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ,

$$\psi_n(x,t) = \varphi_n(x) T_n(t)$$

$\uparrow$

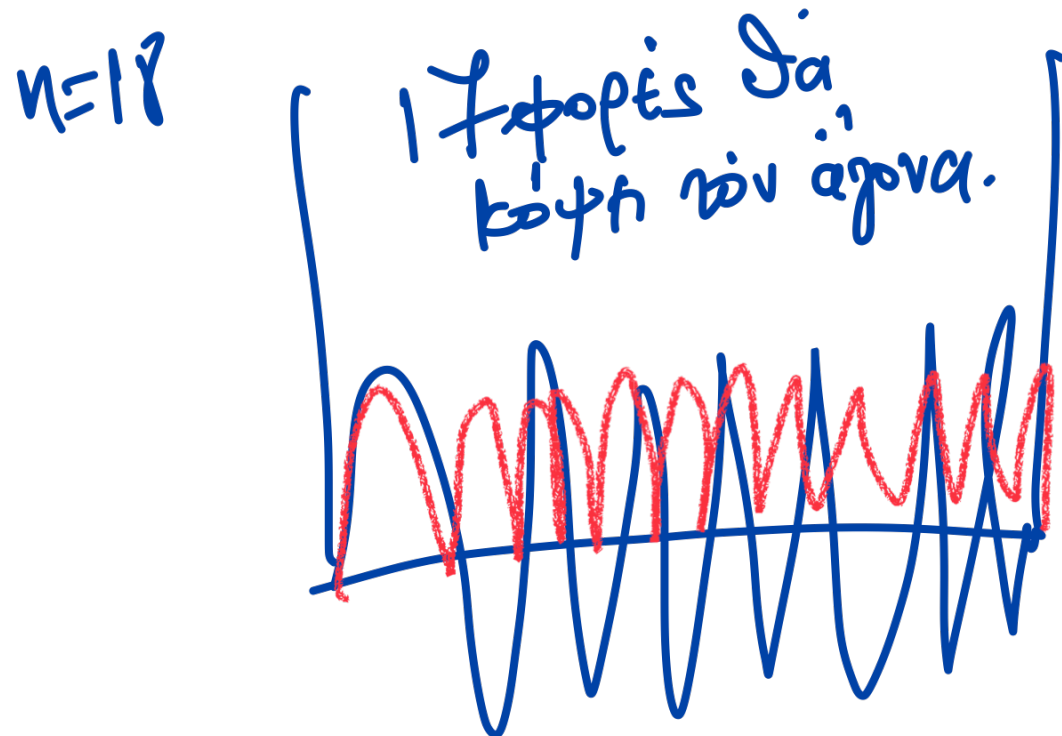
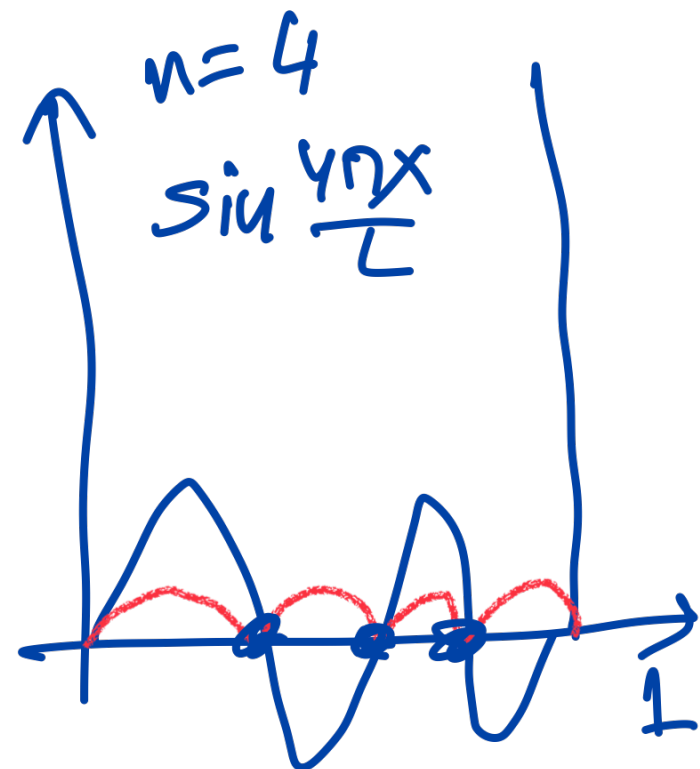
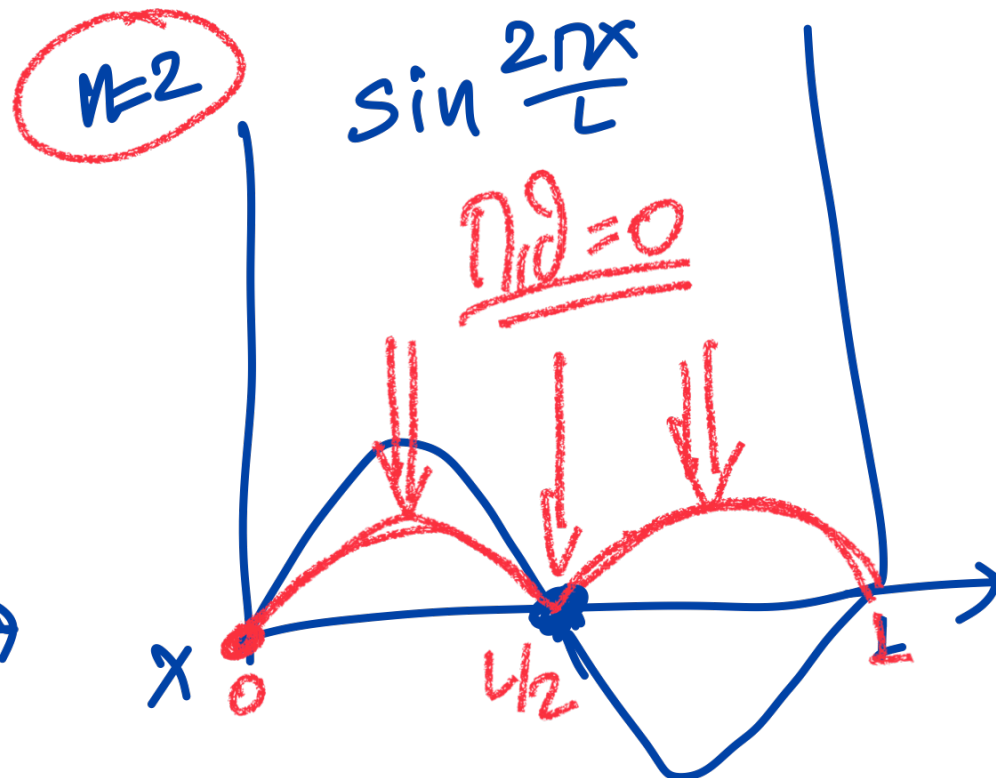
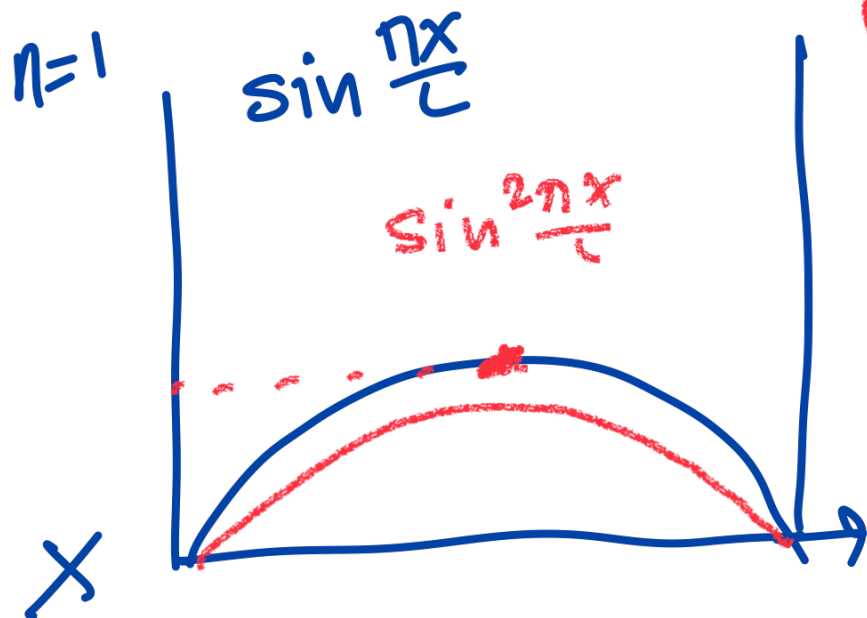
$$= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-i E_n t / \hbar}$$

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}} \Leftrightarrow$$

$$|\psi_n(x,t)|^2 = |\underbrace{C_n(x)}|^2$$

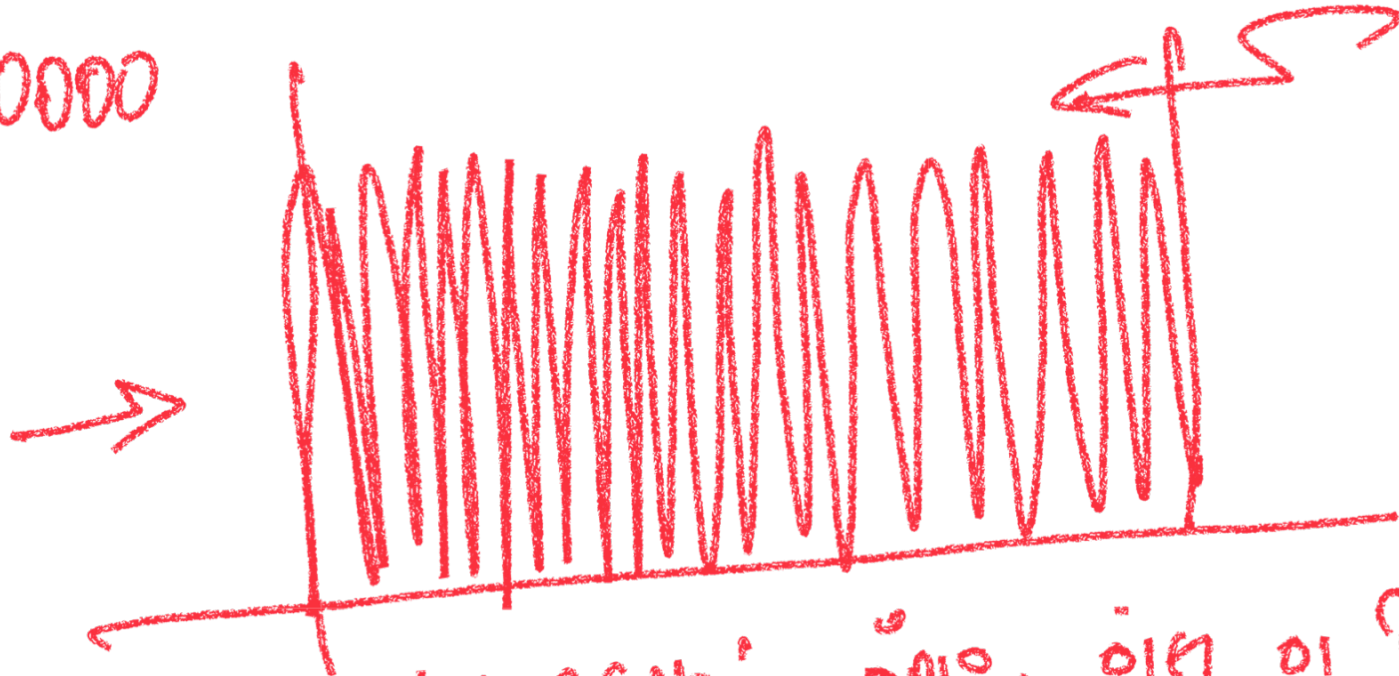
Ενδεχόν $T_n(t)$: μία φάση.
 $|T_n(t)|^2 = 1$

$n = 1, 2, 3, \dots$



Θεώρημα κόμβων.
 $N_{\text{ριγών}} = n-1$
 $\rightarrow$ (αργότερα)

$$n = 1000000$$



Συνεχής

$$E_{1000000} = \frac{(10^6) \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$n \gg 1 \Rightarrow$ κλασικό όριο, όπου οι θέτες έχουν πιθανότητες.

Προβλέπω μέσες τιμές

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

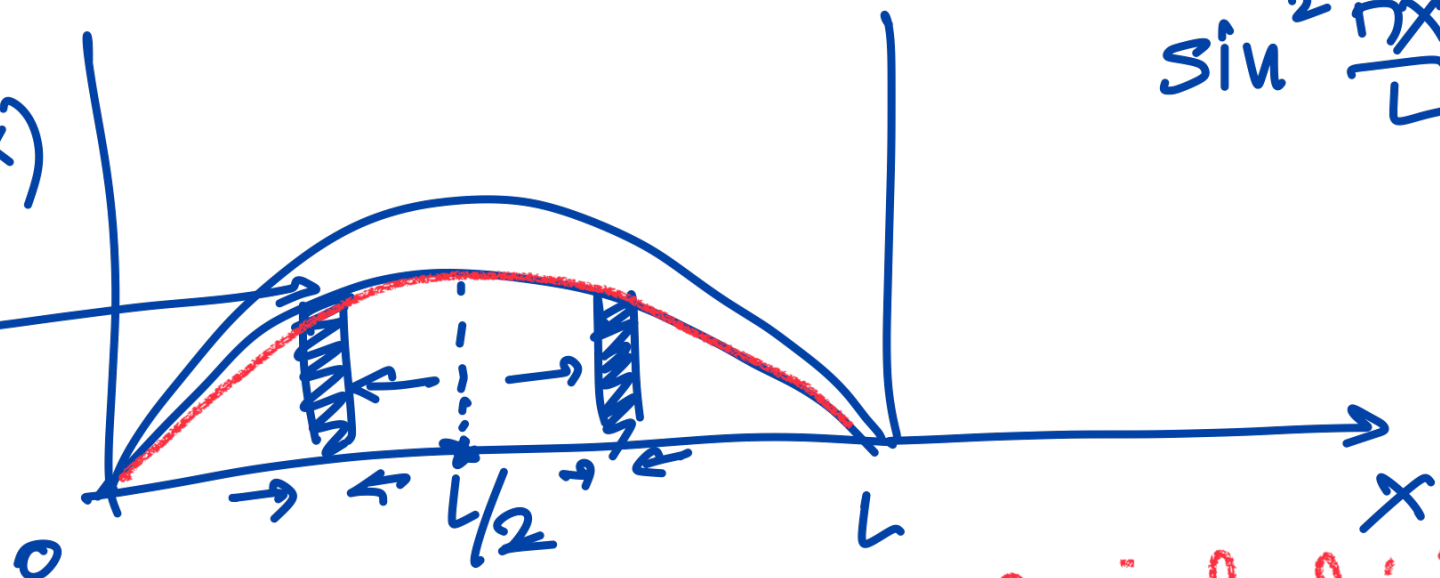
$$\langle x^{17} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{17} p(x) dx$$

Έστω απ. πυκ $[0, L]$, σωμάτιο μήκους m , και επί θεμελιώδη κατάσταση (πρώτη ελάχιστη δυνατή ενέργεια).

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_0^L x \cdot |\psi_1(x)|^2 dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L x (1 - \cos \frac{2\pi x}{L}) dx = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

Το περίπλοκο

$\psi_1(x)$
 $|\psi_1(x)|^2$

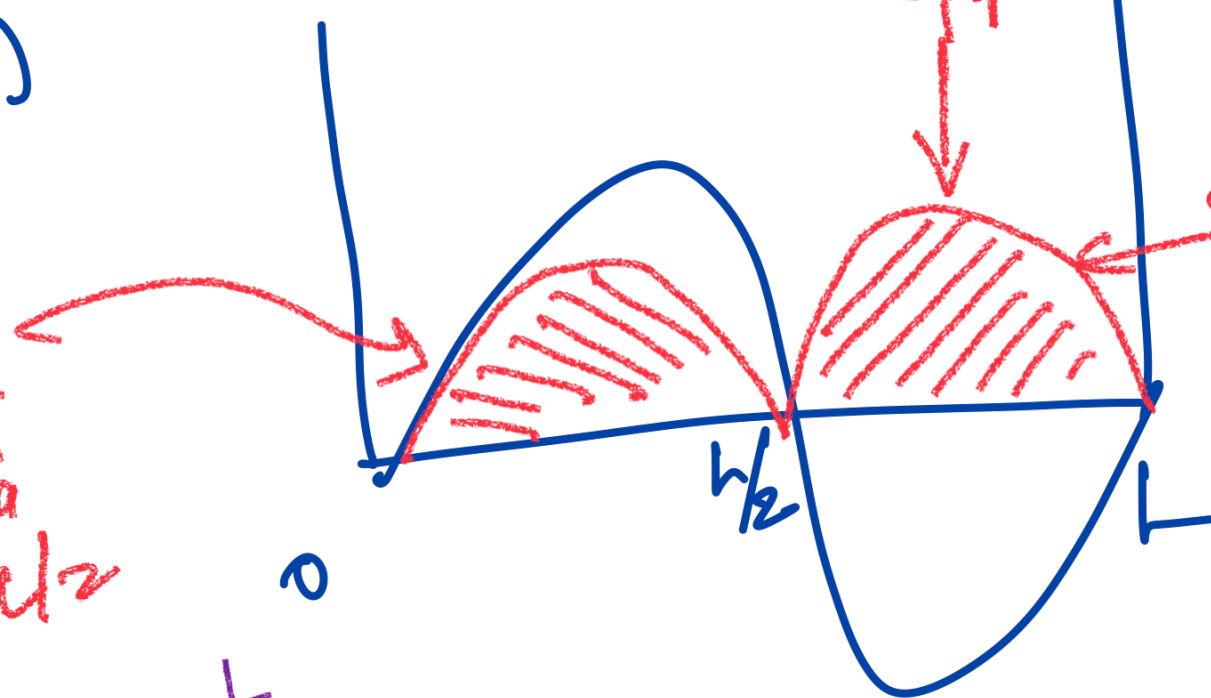


$$\sin^2 \frac{\pi x}{L}$$

$\psi_{\text{μρ}} =$ πύδ να φρεθεί δεγὰ πύδ $L/2$

$\psi_2(x)$

$\psi_{\text{μρ}} =$
πύδ να φρε-
σχεύετα
πύδ $L/2$



$|\psi_2(x)|^2$

$$\Rightarrow \langle x \rangle = \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L \frac{2}{L} x \sin^2 \frac{2\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \quad (\text{κάντε το})$$

Διακριτό φάσμα: ένω ωχάια ποσότητα $q_1, q_2, \dots, q_n$
 με πιθαν. $p(q_1) p(q_2) \dots p(q_n)$

$$\langle q \rangle \equiv \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} p(q_i) q_i$$

Ζαρί $q_1=1, \dots, q_4=4, \dots, q_6=6$
 $p(q_i) = 1/6$

$$\langle q \rangle = \frac{1}{6} (1+2+\dots+6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(1+6) \cdot 6}{2} = \underline{\underline{3,5}}$$

ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ $\langle x \rangle = \frac{L}{2}$? Όχι

Παίρνω ένα δωμάτιο, και το μέτρω έως 14:00, έως
 14:05, 14:10, 1,000 φορές και παίρνω

$$\langle x \rangle = \frac{x_{14:00} + x_{14:05} + \dots}{(N=1000)}$$

ΟΧΙ

ΕΝΑ ΣΩΜΑΤΙΟ ΜΕ ΠΟΛΛΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ΟΧΙ

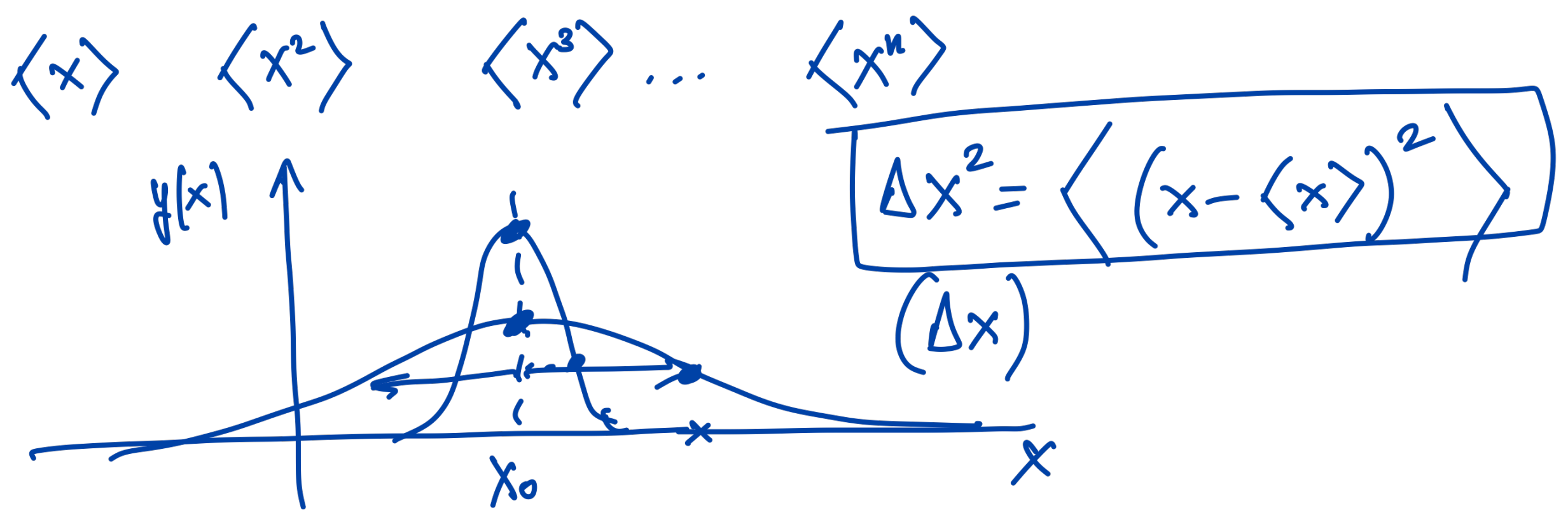
Η ΜΕΤΡΗΣΗ ΑΜΑΖΕΙ ΤΗΝ $\psi(x,t)$

ΤΙ ΕΝΝΟΟΥΜΕ ΜΕ $\langle x \rangle$?

ΝΑ ΕΤΟΜΑΣΟΥΜΕ 1000 ΠΑΝΟΜΟΙΟΤΥΠΑ
ΠΗΓΑΔΙΑ $[0, L]$ ΜΕ ΒΩΗΘΟ m , ΚΑΙ ΝΑ
ΚΑΝΩ ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ x ΣΤΟ ΚΑΘΕ
ΠΗΓΑΔΙ

αλλη
αλλη

ΜΕ ΤΗΝ ΜΙΑ
ΕΝΕΡΓΕΙΑ
 E_1

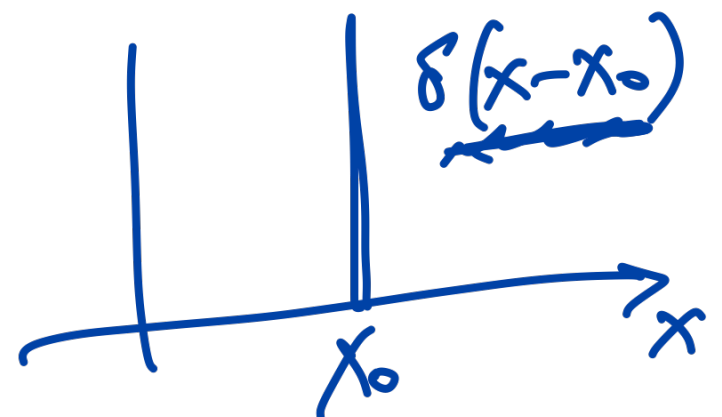


$$\begin{aligned}
 \Delta x^2 &= \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \\
 &= \underline{\langle x^2 \rangle} - \underline{\langle x \rangle^2}
 \end{aligned}$$

Εκφράζει το εύρος/φάρδος ως πυκν. πιθανότητα.

Βεβαιότητα για το αποτέλεσμα?

$$\Delta x = 0$$



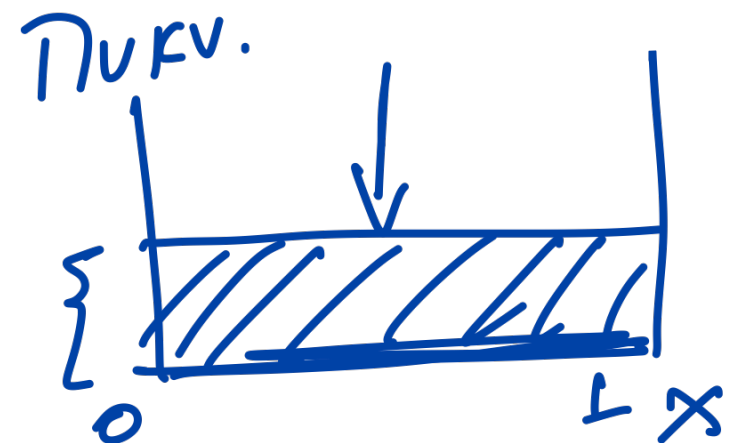
Διασπορά του x στο Απείρ. Που είναι παράδοξη ή?

$$\Delta x_n^2 = \langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2 = \underline{\langle x^2 \rangle_n} - \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\langle x^2 \rangle_n = \int_0^L x^2 |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \underline{\quad} = L^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2} \right)$$

$$\Delta x_n^2 = \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{n^2\pi^2} \right)$$



Κανονικοποίηση: $\phi(x) = \frac{1}{L}$ $\left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right)$
 $\int_0^L \phi(x) dx = 1 \rightarrow$ Διασπορά: $\leftarrow$

$$\Delta x_n^2 (n \rightarrow \infty) = \frac{L^2}{12}$$

Tis invariants φυσικ~~ες~~ ποσότητες πώς τις υπολογίζουμε?

⇒ ΟΡΜΗ? ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ? ΕΝΕΡΓΕΙΑ

⇒ Για το ένα σύστημα, μπορώ να πω και για ΠΕΡΑΝ
ΤΗΣ ΠΙΘΑΝ. ως προς x και t ?

$$\boxed{m \frac{d}{dt} \langle x \rangle = \langle p \rangle}$$

Μέση όρμη $\equiv$
 $m \frac{d}{dt}$ (μέση θέση)

$$\langle p \rangle = m \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x,t)|^2 dx$$

$\langle x(t) \rangle$ ή $\langle x \rangle_t$

$\langle x \rangle$

επιπλέον θα
φιλοσοφ. και να δώ

$$\langle p(t) \rangle = m \frac{d}{dt} \langle x(t) \rangle \quad \text{ή} \quad \langle p \rangle_t = m \frac{d}{dt} \langle x \rangle_t$$

$$\langle p(t) \rangle = m \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cancel{\frac{\partial x}{\partial t}} | \psi(x,t) |^2 + x \frac{\partial}{\partial t} | \psi(x,t) |^2 \right) dx$$

Συν κρ. Μυχ. τα x, t είναι ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΤΟ ΕΙΔΑΜΕ ΕΝΜΕΣΑ ΟΤΑΝ ΓΡΑΨΑΜΕ

$\psi(x,t)$

ΑΝΤΙΘΕΤΑ ~~όνο συν κρ. Μυχ. που~~ όπου $x = x(t)$
ΚΒΑΝΤΟ :

$$\langle p(t) \rangle = m \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) dx =$$

$$= m \int x \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dx$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V^*(x) \psi^* = -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$

$$\rightarrow = m \int \left\{ x \frac{i}{\hbar} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \underline{V^* \psi^*} \right] \underline{\psi} + \right. \\ \left. x \underline{\psi^*} \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \underline{V \psi} \right] \right\} dx$$

$\oplus = 0$

Γia $V = V^*$

$$= \frac{i}{\cancel{\hbar}} \left(-\frac{\cancel{\hbar}^2}{2\cancel{m}} \right) \cancel{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \times \psi - \psi^* \times \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) dx$$

$$= -\frac{ik}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \times \psi - \psi^* \times \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} dx$$

$$= -\frac{ik}{2} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \times \psi - \psi^* \times \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{ik}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) dx$$

Λογος: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi = 0$

Μόνο αυτό
μένει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi dx = \underbrace{\left[\psi^* \psi \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

$$\langle p(t) \rangle = -\frac{i\hbar}{2} \int \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) dx$$

$$\langle p(t) \rangle = \int \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi dx$$

$$\langle p(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x,t) dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\psi_1(x,t) = \phi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar}$$

$$\psi_2(x,t) = \phi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}$$

$$\boxed{\psi(x,t) = c_1 \psi_1(x,t) + c_2 \psi_2(x,t)} \rightarrow \text{κεντρικό } \langle x(t) \rangle$$

$|\psi|^2$ σταθερό από τον χρόνο!

Έστω ότι βρίσκουμε (δυν. ένοπλη στο σύστημα) συν
 $\psi_m(x) e^{-iE_m t/\hbar}$ $\psi_m = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{m\pi x}{L}$

(Αντ. Δυν)

$$\left. \begin{aligned} \langle p_m(t) \rangle \\ \langle p(t) \rangle_m \end{aligned} \right\} = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{m\pi x}{L} \cancel{e^{+iE_m t/\hbar}} \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{m\pi x}{L} \cancel{e^{-iE_m t/\hbar}} \right) dx$$

$$= -i\hbar \int_0^L \frac{2}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \left(\frac{m\pi}{L} \right) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \underline{\underline{0}}$$

ΣΤΑΣΙΜΗ

Ans. $\langle p \rangle_m = 0$ $\Delta p^2 = ? = \underbrace{\langle p^2 \rangle}_{?} - \underbrace{(\langle p \rangle)^2}_{?}$ (✓)

$$\langle p^2 \rangle_m = \int \psi^*(x,t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x,t) dx$$

ΓΙΑΤΙ ΑΥΤΟ?

Θεώρημα Μίχουρ Τίμων.

$$\langle x \rangle = \int x |\psi(x,t)|^2 dx = \int x \psi^* \psi dx$$

$$\langle p \rangle = \int \psi^* (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x} \psi dx$$

$$\langle x \rangle = \int \psi^* x \psi dx$$

$$\langle p \rangle = \int \psi^* (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi dx$$

Σαν. Z

Σαν. T.

ΠΩΣ ΑΠΟ ΤΗΝ $\psi(x,t)$ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ
 ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΑΛΛΕΣ ΦΥΣΙΚΕΣ
 ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ (ΠΕΡΑΝ ΤΟΥ x).

Έχω μόνο μια συνάρτηση $|\psi(x,t)|$
 από χώρο χρόνο!

• Έχω δύο ανεξ. μεταβλητές.

σημεία ημυποφορία: "μέσα" από τη $\psi(x,t)$

$$\psi(x,t) = (3x^2 - 2x + 1) \frac{t^2 - t}{18}$$

Na δράσω πάντα ως: Το MONO NA THE FANZ

Τελικός: Έχω ο τσ. $\hat{Q}$ $\leftarrow$ κανένο
που είναι τελικός

$$\boxed{\hat{Q} \underline{f(x)} = \underline{g(x)}}$$

$$\hat{3} f(x) = 3 f(x)$$

$$\hat{D} f(x) = \frac{df}{dx}$$

$$\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = -i\hbar \frac{df}{dx}$$

$$f(x) = (x-1)^2 \Rightarrow \hat{3} f(x) = 3(x-1)^2$$

$$f(x) = \underline{(x-1)^2} \Rightarrow \hat{D} f(x) = \underline{2(x-1)}$$

$$- - - - - -2i\hbar(x-1)$$

ΤΕΛΟΣΤΗΣ: ΑΜΑΖΕΙ ΜΙΑ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΕ ΚΑΠΟΙΑ
ΑΛΛΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Στιν κβ. Μηχανική, $\forall$ φυσική ποσότητα
αντιστοιχεί $\hat{Q}$ είναι τελεστής

$$x \rightarrow \hat{x}$$

$$p \rightarrow \hat{p}$$

$$L_x \rightarrow \hat{L}_x$$

$$E \rightarrow \hat{E} \text{ αλλά: } \hat{H} \text{ (Hamiltonian)}$$

Φυσική ποσότητα $Q \rightsquigarrow \hat{Q}$

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \hat{Q} \psi(x,t) dx \quad \Leftarrow$$

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΒΑΝΤΟ

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \hat{x} \psi(x,t) dx \\ \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \hat{p} \psi(x,t) dx \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_{-\infty}^{+\infty}} \right\} \Rightarrow$$

$$\hat{x} = x \quad (\text{πολλαπλασιάζεται με } x)$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (\quad \quad \text{με } -i\hbar \text{ και παραγώγη})$$