Πυρηνική Φυσική
Θεόδωρος Μερτζιμέκης
Επιλογή λυμένων ασκήσεων
τελευταία ενημέρωση 2022-02-21

Άσκηση 1 Δέσμη νετρονίων 100 keV χάνει το 50% της αρχικής της έντασης περνώντας μέσα από στόχο ^{12}C με επιφανειακή πυκνότητα 10 g cm^{-2}. Ποια είναι η μεταβολή φάσης για το s−wave;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι γενικά η επιβίωση μιας δέσμης σωματιδίων με αρχική ένταση I_0 μετά από διαδρομή x μέσα σε κάποιο μέσο με το οποίο αλληλεπιδρά διέπεται από τον εκθετικό νόμο

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma x}$$

όπου Σ είναι ο ενεργός συντελεστής εξασθένισης (Σ=μ/ρ, συνήθως σε μονάδες cm^2/g). Το ίδιο μέγεθος αναπαριστά το μακροσκοπικό ανάλογο της (μικροσκοπικής) ενεργού διατομής, σ, καθώς αναπαριστά το αποτέλεσμα των συνολικών σκεδάσεων των σωματιδίων δέσμης από τα σωματίδια του στόχου. Επομένως στο παρόν πρόβλημα,

$$\frac{I}{I_o} = \frac{50}{100} = e^{-10\cdot x}$$

το οποίο δίνει $\Sigma = (1/10)\ln 2$ = 0.0693 cm^{2}g^{-1}. Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\Sigma = \sigma\frac{N_A}{A} = \frac{6\cdot 10^{23}}{12} = 0.0693$$

και επομένως η (μικροσκοπική) ενεργός διατομή σ για σκέδαση από έναν πυρήνα ^{12}C είναι:

$$\sigma = 1.38\cdot 10^{-24} cm^2 = 1.38\cdot 10^{-28} m^2$$

Η ενέργεια της δέσμης στο σύστημα εργαστηρίου είναι E=100 keV = 0.1 MeV, ενώ για τη μετατροπή της στο σύστημα κέντρου μάζας, είναι αναγκαία η ανηγμένη μάζα του συστήματος:

$$\mu = \left(\frac{1\cdot 12}{1+12}\right) M = \frac{12}{13} M$$

Λόγω της σκέδασης έχουμε ακόμη ότι

$$k^2\hbar^2 = 2\mu E \Rightarrow k^2 = 2\left(\frac{12}{13}\right)\frac{1.67\cdot 10^{-27}\cdot 0.1\cdot 1.6\cdot 10^{-13}}{(1.05\cdot 10^{-34})^2} = 0.447\cdot 10^{28} m^2$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\sigma_o = \frac{4\pi \sin^2\delta_o}{k^2}$$

άρα με αντικατάσταση της προηγούμενης τιμής

$$\sin\delta_o = \sqrt{\frac{k^2\sigma_o}{4\pi}} = \cdots = \pm 0.2216 \text{ rad}$$

ή ισοδύναμα

$$\delta_o = \pm 12.8^\circ$$

——※——

Άσκηση 2 Σε ποια ενέργεια νετρονίου στο εργαστήριο το p−wave γίνεται σημαντικό κατά τη σκέδαση n−p;

Λύση

Η στροφορμή γενικά μπορεί να οριστεί ως $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ ή απλά rp. Στο σύστημα κέντρου μάζας για *σχετική στροφορμή* $l = 1$ (δηλ. p−wave), ορμή p και απόσταση μεταξύ p−n ίση με $\alpha \approx 2$ fm ισχύει ότι

$$\alpha p_{\text{cm}} = l\hbar = 1 \cdot \hbar = \hbar \Rightarrow p = \frac{\hbar}{\alpha}$$

Η ενέργεια στο κέντρο μάζας (CM) μπορεί να γραφεί ως

$$E_{cm} = \frac{p_{cm}^2}{2\mu} = \frac{p_{cm}^2}{2\frac{M}{2}} = \frac{p_{cm}^2}{M} = \left(\frac{\hbar^2}{\alpha^2}\right)\frac{1}{M}$$

Αντίστοιχα στο σύστημα εργαστηρίου (lab)

$$E_{lab} = 2E_{cm} = \frac{2\hbar^2}{M\alpha^2} = \frac{2\hbar^2 c^2}{Mc^2\alpha^2} = \frac{2 \cdot 197.3^2\ (\text{MeV} \cdot \text{fm})^2}{940\ \text{MeV} \cdot 2^2\ \text{fm}^2} = 20.6\ MeV$$

——※——

Άσκηση 3 Νετρόνια ενέργειας 1 MeV σκεδάζονται από στόχο. Η τελική γωνιακή κατανομή στο κέντρο μάζας είναι ισότροπη, ενώ η ολική ενεργός διατομή βρίσκεται να είναι 10^{-25} cm^2. Να υπολογιστεί η μετατόπιση φάσης για $l = 0$ (s−wave)

Λύση

Επειδή η γωνιακή κατανομή είναι ισότροπη συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει εξάρτηση από τη γωνία. Η μόνη περίπτωση είναι λοιπόν να υπάρχει μόνο s−wave. Επομένως:

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0$$

Λόγω της σχέσης $k^2\hbar^2 = p^2 = 2m_N E$, με m_N τη μάζα νουκλεονίου, η ενεργός διατομή γράφεται

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi\hbar^2}{2m_N E}\sin^2\delta_0$$

$$\sin^2\delta_0 = \frac{2m_N E\sigma}{4\pi\hbar^2} = \frac{m_N c^2 E\sigma}{2\pi\hbar^2 c^2} \Rightarrow \frac{940\ \text{MeV} \cdot 1\ \text{MeV} \cdot 10\ \text{fm}^2}{2\pi(197\ \text{MeV} \cdot \text{fm})^2}$$

ή

$$\sin^2\delta_0 = 0.03857 \Rightarrow \delta_0 = \pm 11.3^\circ$$

——※——

Άσκηση 4 Για το δευτέριο, να βρεθεί η απόσταση (rms) μεταξύ πρωτονίου και νετρονίου με χρήση της κανονικοποιημένης κυματοσυνάρτησης βασικής στάθμης (α^{-1}=4.3 fm):

$$\Psi = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}e^{-\alpha r}$$

Λύση

Αναζητούμε την τιμή της ακτίνας rms, η οποία ορίζεται γενικά ως

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle &= \int \Psi^* r^2 \Psi dV \\
&= \int_0^\infty \frac{r^2}{r^2}\frac{\alpha}{2\pi}e^{-2\alpha r}4\pi r^2 dr \\
&= \int_0^\infty 2\alpha r^2 e^{-2\alpha r} dr \\
&= 2\alpha \int_0^\infty r^2 e^{-2\alpha r} dr \\
&= 2\alpha \frac{1}{4\alpha^3} \\
&= \frac{1}{2\alpha^2}
\end{aligned}$$

Τελικά

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{4.3\,\text{fm}}{\sqrt{2}} \approx 3\,\text{fm}$$

——※——

Άσκηση 5 Να δείξετε ότι για κάποια τιμή ενέργειας τα p−waves έχουν μεγαλύτερη επίδραση στη συμπεριφορά της διαφορικής ενεργού διατομής από ό,τι στην ολική ενεργό διατομή. Θεωρήστε ότι στην ενέργεια αυτή $\delta_0 = 20°$, $\delta_1 = 2°$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι οι τιμές $l = 0, 1$ αντιστοιχούν σε s- και p-waves.

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{1}(2l+1)\sin^2\delta_l \\
&= \frac{4\pi}{k^2}(\sin^2\delta_0 + 3\sin^2\delta_1)
\end{aligned}$$

Ανάλογα, η διαφορική ενεργός διατομή μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2}\left(\sin^2\delta_0 + 6\sin\delta_0\sin\delta_1\cos(\delta_1-\delta_0)\cos\theta + 9\sin^2\delta_1\cos^2\theta\right)$$

Για τις δοθείσες τιμές φάσεως, $\delta_0 = 20°$, $\delta_1 = 2°$

$$\sigma_p \approx 0.03\sigma_{total}$$

Επομένως η συνεισφορά της δ_1 είναι μόνο 3% της ολικής, ενώ για τη διαφορική ενεργό διατομή, η συνεισφορά φαίνεται ότι είναι της τάξης του 350%:

$$\frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}(0°)}{\frac{d\sigma}{d\Omega}(180°)} = 3.5$$

όπου στην τελευταία σχέση έχει χρησιμοποιηθεί ο λόγος γωνιών 0-180 για να αναδειχθεί η μεταβολή της τιμής της διαφορικής σ.

——✠——

Άσκηση 6 Η ανάλυση σκεδαζομένων σωματιδίων μάζας m και ενέργειας E από σταθερό κέντρο σκέδασης με εμβέλεια α έδωσε:

$$\delta_l = \sin^{-1}\left(\frac{(i\alpha k)^l}{\sqrt{(2l+1)(l!)}}\right)$$

Να δειχθεί ότι η ολική ενεργός διατομή σε δεδομένη ενέργεια δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση

$$\sigma = \frac{2\pi\hbar^2}{mE}\exp\left(\frac{-2mE\alpha^2}{\hbar^2}\right)$$

Λύση

Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$\sin\delta_l = \frac{(i\alpha k)^l}{\sqrt{(2l+1)(l!)}}$$

και γενικά γνωρίζουμε ότι:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l$$

Επίσης $k^2\hbar^2 = p^2 = 2mE$. Με αντικατάσταση:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{4\pi\hbar^2}{k^2\hbar^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l \\
&= \frac{4\pi\hbar^2}{2mE}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l \\
&= \frac{2\pi\hbar^2}{mE}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left(\frac{(i\alpha k)^l}{\sqrt{(2l+1)(l!)}}\right)^2 \\
&= \frac{2\pi\hbar^2}{mE}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{(i\alpha k)^{2l}}{(2l+1)(l!)} \\
&= \frac{2\pi\hbar^2}{mE}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\alpha^2k^2)^l}{l!} \\
&= \frac{2\pi\hbar^2}{mE}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\alpha^2k^2\hbar^2/\hbar^2)^l}{l!} \\
&= \frac{2\pi\hbar^2}{mE}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-2mE\alpha^2/\hbar^2)^l}{l!} \\
&= \frac{2\pi\hbar^2}{mE}\exp\left(-2mE\alpha^2/\hbar^2\right)
\end{aligned}$$

Άσκηση 7 Για δυναμικό σκληρής σφαίρας από το οποίο η σκέδαση d−wave μπορεί να αγνοηθεί τελείως, να δειχθεί ότι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \approx \alpha^2\left(1 - \frac{k^2\alpha^2}{3} + 2(k\alpha)^2\cos\theta\right)$$

και

$$\sigma = 4\pi\left(1 - \frac{k^2\alpha^2}{3}\right)$$

Λύση Ξεκινώντας από τη γενική σχέση

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2}\left|\sum_l (2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta)\right|^2$$

και γνωρίζοντας ότι τα πολυώνυμα Legendre για s− και p−waves ($l = 0, 1$, αντίστοιχα) δίνονται από: $P_0 = 1$, $P_1 = \cos\theta$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) &= \frac{1}{k^2}\left|e^{i\delta_0}\sin\delta_0 + 3e^{i\delta_1}\sin\delta_1\cos\theta\right|^2 \\
&= \frac{1}{k^2}\left(\sin^2\delta_0 + 3\sin\delta_0\sin\delta_1\cos\theta e^{-i\delta_0}e^{+i\delta_1} + 3\sin\delta_0\sin\delta_1\cos\theta e^{+i\delta_0}e^{-i\delta_1} + 9\sin^2\delta_1\cos^2\theta\right) \\
&= \frac{1}{k^2}\left(\sin^2\delta_0 + 6\sin\delta_0\sin\delta_1\cos\theta\cos(\delta_0 - \delta_1) + 9\sin^2\delta_1\cos^2\theta\right)
\end{aligned}$$

Αγνοώντας όρους 2ης τάξης στο δ_1 και αναπτύσσοντας κατά Taylor το $\sin\delta_0$ γράφουμε

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \approx \frac{1}{k^2}\left(\left(\delta_0 - \frac{\delta_0^3}{3!}\right)^2 + 6\delta_0\delta_1\cos\theta\cdot 1\right)$$

όπου κρατώντας τους όρους μικρότερης τάξης στο δ_0

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \approx \frac{1}{k^2}\left(\delta_0^2 - \frac{\delta_0^4}{3} + 6\delta_0\delta_1\cos\theta\right)$$

Με αντικατάσταση των $\delta_0 = k\alpha$, $\delta_1 = \frac{k^3\alpha^3}{3}$ στην τελευταία σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) &= \frac{1}{k^2}\left(k^2\alpha^2 - \frac{1}{3}k^4\alpha^4 + 6(k\alpha)\left(\frac{k^3\alpha^3}{3}\right)\cos\theta\right)\\ &= \alpha^2 - \frac{k^2\alpha^4}{3} + 2k^2\alpha^4\cos\theta\\ &= \alpha^2\left(1 - \frac{k^2\alpha^2}{3} + 2k^2\alpha^2\cos\theta\right)\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, η ολική ενεργός διατομή υπολογίζεται:

$$\begin{aligned}\sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega\\ &= 2\pi\int_{-1}^{+1}\alpha^2\left(1 - \frac{k^2\alpha^2}{3} + 2k^2\alpha^2\cos\theta\right)d(\cos\theta)\\ &= 4\pi\alpha^2\left(1 - \frac{k^2\alpha^2}{3}\right)\end{aligned}$$

όπου όπως αναμένεται έχει εξαφανισθεί η εξάρτηση από τη γωνία θ.

Άσκηση 8 Να χαρακτηρισθούν οι παρακάτω διασπάσεις

1. $^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He}$ + e$^-$ + ν_e
2. $^{14}\mathrm{O} \to {}^{14}\mathrm{N}$* + e$^+$ + ν_e
3. $^{13}\mathrm{B} \to {}^{13}\mathrm{C}$ + e$^-$ + $\overline{\nu_e}$

Λύση

1. Τα σπιν/ομοτιμίες είναι $\frac{1}{2}^+$ και για τα δύο ισότοπα, επομένως: $\Delta J = 0$, $\Delta\pi = 0$

   Μπορεί να είναι και Fermi, αλλά και Gamow−Teller (μεικτή β αποδιέγερση)

2. Αρχικό και τελικό σπιν 0^+ (λόγω διεγερμένης κατάστασης του $^{14}\mathrm{N}$, θα δίνεται το σπιν της στάθμης), επομένως: $\Delta J = 0$, $\Delta\pi = 0$

   Η αποδιέγερση είναι τύπου Fermi

3. Αρχικό σπιν $\frac{3}{2}^-$, τελικό σπιν $\frac{1}{2}^-$ (πιθανώς δε θα δίνεται σε μια τέτοια περίπτωση και θα πρέπει να εξαχθεί με το πρότυπο των φλοιών. Είναι λοιπόν $\Delta J = 1$, $\Delta\pi = 0$

   Πρόκειται για επιτρεπτή Gamow-Teller

−−※−−

Άσκηση 9 Θεωρούμε τις επιτρεπτές διασπάσεις β στις οποίες παρατηρείται μεγάλη έκλυση ενέργειας E_0. Αν αγνοηθεί το φαινόμενο Coulomb όπως και οι μάζες των λεπτονίων, ΝΔΟ:

1. $\tau \sim E_0^{-5}$
2. $\langle E_e \rangle \approx E_0/2$

Λύση

1. Αν αγνοηθεί η αλληλεπίδραση Coulomb, τότε ο παράγοντας Fermi, $F(Z, E_0) = 1$. Επομένως από το χρυσό κανόνα του Fermi, η σταθερά διάσπασης μπορεί να γραφεί:

$$\lambda = \frac{G_F |M_F|^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^3} f$$

   όπου

$$f(E, Z_0) = \frac{1}{(m_e c^2)^5} \int_0^{E_0} (E_0 - E_e)^2 E_e^2 dE_e$$

   που με απλή ολοκλήρωση ως προς E_e δίνει:

$$f = \frac{1}{30} \left(\frac{E_0}{m_e c^2} \right)^5$$

   Με αντικατάσταση της τιμής του f και γνωρίζοντας ότι εξ ορισμού λ=1/τ

$$\frac{1}{\tau} = \frac{G_F |M_F|^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^3} \cdot \frac{1}{30} \left(\frac{E_0}{m_e c^2} \right)^5$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{G_F |M_F|^2}{60\pi^3 \hbar^3 c^6} \cdot E_0^5$$

   οπότε τελικά $\tau \sim E_0^{-5}$. Η σχέση ονομάζεται και *Sargent's Law*

2. Σε πολύ καλή προσέγγιση, μπορεί να θεωρηθεί ότι η συνάρτηση $f(E, Z_o)$ είναι συμμετρική στο εύρος ενεργειών (0,E_0). Οπότε η μέση τιμή είναι $\langle E_e \rangle \approx E_0/2$.

——※——

Άσκηση 10 Να βρεθεί το ανηγμένο στοιχείο πίνακα για μια ηλεκτρική μετάπτωση Ε1 με γνωστό τ και E_γ=0.32 MeV στο $^{11}\mathrm{Be}$

Λύση

Εφόσον δίνεται το είδος της μετάπτωσης (Ε1) μπορούμε να αναζητήσουμε από το τυπολόγιο το ανηγμένο στοιχείο πίνακα $B(E\lambda)$, με $\lambda = 1$ για τη συγκεκριμένη περίπτωση.

Γενικά,

$$\frac{1}{\tau} = \lambda = C(E\lambda) \cdot E_\gamma^{2\lambda+1} \cdot B(E\lambda)$$

με

$$C(E\lambda) = \alpha\hbar c \frac{8\pi(\lambda+1)}{\lambda((2\lambda+1)!!)^2} \frac{1}{\hbar} \left(\frac{1}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1}$$

όπου α είναι η σταθερά λεπτής υφής Με απλή αντικατάσταση των τιμών/μεγεθών, μπορεί να υπολογιστεί η τιμή B(E1) από την προκύπτουσα έκφραση:

$$B(E1) = \frac{9\hbar(\hbar c)^3}{\alpha\hbar c \cdot 8\pi \cdot 2\tau \cdot E_\gamma^3} = \dots$$

Στο σημείο αυτό θυμίζουμε ότι σε προσέγγιση, $\hbar c = 197.2$ MeV·fm και η σταθερά λεπτής υφής $\alpha \approx 1/137$.

——※——

Άσκηση 11 Να βρεθεί το πλάτος Γ για τη μετάβαση $\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{3}{2}^-$ στάθμης 2.13 MeV στο $^{11}\mathrm{B}$, θεωρώντας ότι είναι σωματιδιακή μετάβαση.

Λύση

Αρκεί να βρεθεί ο μέσος χρόνος ημιζωής τ ή ισοδύναμα η σταθερά διάσπασης λ. Ισχύει Γ = $\hbar$/τ.

Από τους κανόνες επιλογής ακτινοβολίας γ, για τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι η μετάβαση $\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{3}{2}^-$ είναι τύπου Μ1 (μαγνητικό δίπολο). Άρα από το τυπολόγιο έχουμε:

$$\frac{1}{\tau} = C(M\lambda) \cdot E_\gamma^{2\lambda+1} \cdot B(M\lambda)$$

ή σε σχέση με το ηλεκτρικό πολύπολο

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{\hbar c}{2m_p c^2}\right)^2 \cdot C(E\lambda) \cdot E_\gamma^{2\lambda+1} \cdot B(M\lambda)$$

και για $\lambda = 1$

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{\hbar c}{2m_p c^2}\right)^2 \cdot C(E1) \cdot E_\gamma^3 \cdot B(M1)$$

Ο συντελεστής C(E1) υπολογίζεται όπως στην άσκηση 10, ενώ το B(M1) είναι από το τυπολόγιο. Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση με $\hbar$ έχουμε το τελικό αποτέλεσμα για το πλάτος μετάβασης Γ.

——※——

Άσκηση 12 Διεγερμένη στάθμη με σπίν/ομοτιμία 6^+ σε ενέργεια 109 keV και τ=632 yrs αποδιεγείρεται με διάσπαση γ στη βασική στάθμη (1^+) του $^{108}\mathrm{Ag}$, η οποία αποδιεγείρεται με τη σειρά της μέσω διάσπασης β^- και μέσο χρόνο ζωής τ=3.4 min. Εξηγήστε πώς είναι δυνατό η ισομερής στάθμη να είναι πιο σταθερή από τη θεμελιώδη.

Λύση

Οι δύο διασπάσεις πραγματοποιούνται με δύο διαφορετικές αλληλεπιδράσεις. Στην αποδιέγερση γ η αλληλεπίδραση Coulomb είναι υπεύθυνη για τη μετάβαση με ένα πολύπολο 5ης τάξης (ΔJ=6-1=5), ενώ η αποδιέγερση της βασικής στάθμης γίνεται μέσω ασθενούς αλληλεπίδρασης. Η τιμή $\log ft$ της β αποδιέγερσης στην περίπτωση αυτή (από 1^+ σε 2^+ στο θυγατρικό ισότοπο) είναι 5.45 (πηγή: Nudat3).

——※——

Άσκηση 13 Αν η Q-value της αντίδρασης (p,n) του τριτίου είναι ίση με -0.7637 MeV και E_{max} είναι η μέγιστη ενέργεια της β-διάσπασης του τριτίου, να υπολογιστεί η E_{max} δεδομένου ότι η διαφορά μάζας μεταξύ νετρονίου και ατόμου του υδρογόνου είναι 0.78 MeV.

Λύση

Έχουμε διαδοχικά (όλες οι τιμές ενέργειας σε MeV)

$$m_n - m(H) = 0.78$$

$$^3H + p \to \, ^3_2He + n - 0.7637$$

$$m(^3H)c^2 - m(^3He)c^2 \to \; m_n c^2 - m_p c^2 - 0.7637$$

από τη β διάσπαση:

$$^3H \to \, ^3_2He + e^- + \overline{\nu_e} + E_{max}$$

$$m(^3H) \to \; m(^3He)c^2 + m_e c^2 + 0 + E_{max}$$

και συνδυάζοντας τις σχέσεις;

$$\begin{aligned} E_{max}/c^2 =&\ m_n - (m_p + m_e) - 0.7637 \\ E_{max}/c^2 =&\ m_n - m(H) - 0.7637 \\ E_{max}/c^2 =&\ 0.781 - 0.7637 = 0.0173 \end{aligned}$$

Η τιμή 17.3 keV είναι το άνω όριο που θέτει στη μάζα του νετρίνου η μελέτη της αποδιέγερσης β του τριτίου.

Άσκηση 14 Σε πείραμα σκέδασης, στόχος Al πάχους L=10 μm βομβαρδίζεται από δέσμη νετρονίων με ροή $3 \cdot 10^{12}$ σωμάτια/cm^2 s. Η διαφορική ενεργός διατομή δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B\cos^2\theta$$

με A,B σταθερές. Όταν τοποθετηθεί ανιχνευτής διαστάσεων 0.1×0.1 m^2 σε απόσταση 5 m από το στόχο καταμετρούνται κατά μέσο όρο 20 σωμ/s στις 30° και 15.75 σωμ/s στις 60°. Να βρεθούν τα A,B όταν για το Al (A=27 και ρ=2.7 g/cm^3).

Λύση

Από τον τύπο της διαφορικής ενεργού διατομής:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{I(\theta)}{I_o N d\Omega} = A + B\cos^2\theta$$

Στην παραπάνω σχέση, η αρχική δέσμη διαθέτει

$$I_o = \frac{3 \cdot 10^{12}}{m^2 \cdot s} = \frac{3 \cdot 10^8}{cm^2 \cdot s}$$

ανά μονάδα εμβαδού (Σ cm^2) της διατομής της δέσμης. Στην απόσταση που βρίσκεται ο ανιχνευτής ορίζει στερεά γωνία ίση με:

$$d\Omega = \frac{0.1 \cdot 0.1\ m^2}{5^2\ m^2} = \frac{10^{-2}\ m^2}{25\ m^2} = 4 \cdot 10^{-4}\ sr$$

Επιπλέον τα σωματίδια στόχου που βρίσκονται στην πορεία της δέσμης (με την πυκνότητα να αντιστοιχεί στη γραμμική πυκνότητα σε g/cm) είναι:

$$N = \frac{N_A \rho L}{A} = \frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 2.7\ g/cm \cdot 10\ \mu m}{27\ g} = 6 \cdot 10^{19}$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει με απλή αντικατάσταση, λύνοντας το σύστημα δύο εξισώσεων για θ=30°, 60°:

$$\begin{aligned} 2.778 \cdot 10^{-22} =&\ A + B\cos^2 30 \\ 2.188 \cdot 10^{-22} =&\ A + B\cos^2 60 \end{aligned}$$

Οι τιμές που προκύπτουν είναι αντίστοιχα A=89.3 b/sr, B=118 b/sr

——⁜——

Άσκηση 15 Βρείτε την Q-value της αντίδρασης ^{30}Si + d $\rightarrow$ ^{31}Si + p + Q όταν ξέρετε ότι

$$^{30}Si + d \rightarrow ^{31} P + n + 5.10\ MeV$$
$$^{31}Si \rightarrow ^{31} P + e^{-} + 1.51\ MeV$$
$$n \rightarrow p + e^{-} + 0.78\ MeV$$

Λύση

Θεωρώντας όλες τις ενέργειες σε MeV και εγκαταλείποντας το σύμβολο της μάζας, έχουμε:

^{30}Si + d $\rightarrow$ ^{31}Si + p + Q

^{30}Si + d $\rightarrow$ 1.51 + ^{31}P + e^{-} + p + Q

^{30}Si + d $\rightarrow$ 1.51 + ^{31}P + n - 0.78 + Q

Τελικά: 1.51 - 0.78 + Q = 5.10, δηλ. Q = 4.37 MeV

——⁜——

Άσκηση 16 Η διάσπαση β^{-} του $^{66}_{29}$Cu πραγματοποιείται στο 80% των περιπτώσεων προς διεγερμένη στάθμη του θυγατρικού πυρήνα με εκπομπή ηλεκτρονίου μέγιστης ενέργειας 1.6 MeV. Να βρεθεί η ενέργεια της διεγερμένης στάθμης

Λύση

Εφόσον το ισότοπο διασπάται 80% προς διεγερμένη στάθμη, το υπόλοιπο 20% των περιπτώσεων μπορούμε να υποθέσουμε με ασφάλεια ότι αποδιεγείρεται προς τη βασική στάθμη του θυγατρικού. Η ενεργειακή διαφορά των σταθμών, ΔΕ, είναι το τελικό ζητούμενο.

Το πρώτο ζητούμενο είναι η Q-value. Η μάζα του $^{66}_{29}$Cu μπορεί να βρεθεί από τον τύπο της μάζας (δίνεται στο τυπολόγιο), έστω m(Cu). Ομοίως του θυγατρικού του, ο οποίος είναι (λόγω της β-) με τιμές Z=30,A=66 (είναι το ισότοπο $^{66}_{30}$Zn), έστω m(Zn).

Τότε η Q-value είναι Q = m(Cu)-m(Zn)-m$_e$c^2 = (γνωστή). Αντίστοιχα στη διεγερμένη στάθμη η Q' αντιστοιχεί στη μέγιστη ενέργεια του ηλεκτρονίου, άρα Q'=1.6 MeV. Τελικά από την εξίσωση Q-Q'= ΔΕ λαμβάνουμε τη ζητούμενη ενεργειακή διαφορά.

——⁜——

Άσκηση 17 Οι πυρήνες $^{27}\mathrm{Si}$ και $^{27}\mathrm{Al}$ είναι κατοπτρικοί. Ο πρώτος εκπέμπει ποζιτρόνια με ενέργεια $E_{\mathsf{max}} = 3.48$ MeV. Να βρεθεί το μέτρο της ακτίνας r_0.

Λύση Η διάσπαση β+ του $^{27}\mathrm{Si}$ γίνεται ως εξής:

$$^{27}Si \rightarrow ^{27}Al + e^{+} + \nu_e + Q$$

Επειδή οι πυρήνες είναι κατοπτρικοί, η διαφορά στην ενέργεια σύνδεσης των δύο ισοτόπων είναι καθάρα λόγω της διαφοράς της ενέργειας Coulomb (όρος a_c στον αντίστοιχο ημιεμπειρικό τύπο, ο οποίος εξαρτάται από τον ατομικό αριθμό του ισοτόπου). Η ενέργεια Coulomb ομογενώς φορτισμένης σφαίρας δίνεται από τον τύπο:

$$E_c = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Z^2e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0 A^{1/3}}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ως ολικό φορτίο $q = Ze$ και $R = r_0 A^{1/3}$. Συνεπώς, η διαφορά στην ενέργεια Coulomb ανάμεσα στα δύο κατοπτρικά ισότοπα με φορτίο Ze και (Z-1)e, αντίστοιχα, δίνεται από:

$$\Delta E_c = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}\left(Z^2 - (Z-1)^2\right) = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}(2Z-1) = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}A$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση για τους συγκεκριμένους κατοπτρικούς πυρήνες της άσκησης:

$$2Z - 1 = A$$

Επιπλέον, ισχύει ότι $e^2/4\pi\epsilon_0 = 1.44$ MeV fm. Ενεργειακά, για τη διάσπαση έχουμε:

$$\Delta E_c = E_{max} + m_e c^2 + (m_n - m_p)c^2$$

όπου η διαφορά στις μάζες μεταξύ μητρικού και θυγατρικού είναι απλά η διαφορά μεταξύ μαζών νετρονίου–πρωτονίου, ίση με 1.29 MeV/c^2. Ακόμη, $m_e c^2$=0.511 MeV και τελικά με αντικατάσταση όλων των τιμών (A=27, $E_{\mathsf{max}} = 3.48$ MeV), προκύπτει ότι $r_0 = 1.47$ fm.

——※——

Άσκηση 18 Δείξτε ότι το ισότοπο ($^{226}_{88}\mathrm{Ra}$) είναι ασταθές και μπορεί να διασπασθεί μέσω διάσπασης άλφα. Δίνονται οι μάζες m($^{226}_{88}\mathrm{Ra}$)=226.025360 amu, m($^{222}_{86}\mathrm{Rn}$)=222.017531 amu, m($^{4}_{2}\mathrm{He}$)=4.002603 amu

Λύση Η αστάθεια μπορεί να ελεγθεί μέσω του υπολογισμού της Q-value σε αυθόρμητες διασπάσεις. Δηλ. για τη συγκεκριμένη περίπτωση

Διάσπαση α

$$^{226}Ra \rightarrow ^{222}Rn + \alpha + Q$$

Q / c^2 (σε amu) = m($^{226}_{88}\mathrm{Ra}$) - m($^{222}_{86}\mathrm{Rn}$) - m($^{4}_{2}\mathrm{He}$) =226.025360 - 222.017531 - 4.002603 = 0.005226 > 0

Η θετική τιμή ισοδυναμεί με το ότι η διάσπαση είναι εφικτή.

——⁂——

Άσκηση 19 Να δείξετε ότι ο πυρήνας ${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$ μπορεί να διασπασθεί. Επιπλέον, να κρίνετε αν η διάσπαση θα είναι α ή β. Δίνονται τα πλεονάσματα μάζας για τους πυρήνες (σε amu$\times 10^{-6}$): Δ(${}^{4}_{2}\mathrm{He}$)=2603, Δ(${}^{225}_{88}\mathrm{Ra}$)=23528, Δ(${}^{229}_{89}\mathrm{Ac}$)=32800, Δ(${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$)=31652, Δ(${}^{229}_{91}\mathrm{Pa}$)=32022

Λύση

Το πλεόνασμα μάζας είναι Δ=m-A για κάθε ισότοπο με μάζα m και μαζικό αριθμό A. Συνολικά πρέπει να ελεγχθούν οι τρεις περιπτώσεις αυθόρμητων διασπάσεων:

Διάσπαση α:
${}^{229}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{225}_{88}\mathrm{Ra}$ + ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$

Το κριτήριο για να πραγματοποιείται η διάσπαση α είναι $M_1 - M_2 - \alpha > 0$

m(${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$) - m(${}^{225}_{88}\mathrm{Ra}$) - m(${}^{4}_{2}\mathrm{He}$) = (90+Δ(${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$)) - (88+m(${}^{225}_{88}\mathrm{Ra}$)) - (4+m(${}^{4}_{2}\mathrm{He}$))
= Δ(${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$) - Δ(${}^{225}_{88}\mathrm{Ra}$)- Δ(${}^{4}_{2}\mathrm{He}$) = 0.005521 amu

επομένως η διαφορά είναι μεγαλύτερη από το 0 και η α διάσπαση είναι εφικτή

Διάσπαση β-:
${}^{229}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{229}_{91}\mathrm{Pa}$ + e^{-} + ν + Q_{β^-}

Το κριτήριο για να πραγματοποιείται η διάσπαση β- είναι $M_1 - M_2 > 0$

m(${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$) - m(${}^{229}_{91}\mathrm{Pa}$) = (90+Δ(${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$)) - (88+m(${}^{229}_{91}\mathrm{Pa}$)
= Δ(${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$) - Δ(${}^{229}_{91}\mathrm{Pa}$) = 0.031652-0.032022 amu = -0.000370 amu <0

επομένως η διαφορά είναι μικρότερη από το 0 και η β- διάσπαση ΔΕΝ είναι εφικτή

Διάσπαση β+:
${}^{229}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{229}_{89}\mathrm{Ac}$ + e^{+} + ν + Q_{β^+}

Το κριτήριο για να πραγματοποιείται η διάσπαση β+ είναι $M_1 - M_2 - 2m_e > 0$

m(${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$) - m(${}^{229}_{89}\mathrm{Ac}$) - 2m$_e$ = (90+Δ(${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$)) - (88+m(${}^{229}_{89}\mathrm{Ac}$) - 2m$_e$
= Δ(${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$) - Δ(${}^{229}_{89}\mathrm{Ac}$) -2m$_e$
= 0.031652-0.032800-2$\times$0.000548 amu = -0.002244 amu <0

επομένως η διαφορά είναι μικρότερη από το 0 και η β+ διάσπαση ΔΕΝ είναι εφικτή. Σημειώνεται ότι στον τελευταίο υπολογισμό χρησιμοποιήθηκε η μάζα του ηλεκτρονίου σε amu και όχι στη συνήθη της τιμή 0.511 MeV/c^2.

Άσκηση 20 Ο πυρήνας $^{22}_{11}\mathrm{Na}$ διασπάται προς $^{22}_{10}\mathrm{Ne}$ μέσω εκπομπής ποζιτρονίου με $T_{max} = 0.542$ MeV, ακολουθούμενη από αποδιέγερση γ με ενέργεια φωτονίου $E_{\gamma} = 1.277$ MeV. Αν η m($^{22}_{10}\mathrm{Ne}$)= 21.991385 amu, να προσδιορισθεί η μάζα του $^{22}_{11}\mathrm{Na}$.

Λύση

Η διάσπαση γράφεται: $^{22}_{11}\mathrm{Na} \to {}^{22}_{10}\mathrm{Ne}$ + e^{+} + ν

Ενεργειακά: m($^{22}_{11}\mathrm{Na}$) = m($^{22}_{10}\mathrm{Ne}$) + 2m$_{e}c^{2}$ + E

$$E = (T_{\mathsf{max}} + T_{\gamma})\ MeV = \frac{T_{\mathsf{max}} + T_{\gamma}}{931.5}\, amu = \frac{0.542 + 1.277}{931.5}\, amu = 0.001953\, amu$$

Με αντικατάσταση, m($^{22}_{11}\mathrm{Na}$) = 21.991385 + 2$\times$0.000548 + 0.001953 = 21.994434 amu

Άσκηση 21 Σωμάτια β ($E_{max} = 1.7$ MeV) εκπέμπονται από το ισότοπο $^{32}\mathrm{P}$ και ανιχνεύονται σε ανιχνευτή Geiger-Mueller, ο οποίος διαθέτει τοίχωμα ενεργού πάχους 20 mg/cm^{2}. Ποιο ποσοστό του αριθμού σωματιδίων απορροφάται από τα τοιχώματα; Υποθέστε ενεργό συντελεστή απορρόφησης μ=10.87 cm^{2}/g.

Λύση

Η ένταση δέσμης σωματιδίων που απορροφούνται από κάποιο μέσο υπακούει στον εκθετικό νόμο $I(x) = I_0 \exp(-\Sigma x)$, όπου I_0 η αρχική ένταση, x το μήκος που έχει διανύσει, ρ η πυκνότητα του μέσου και Σ ο συντελεστής απορρόφησης του συγκεκριμένου μέσου. Η σχέση μπορεί να ξαναγραφεί μέσω του ενεργού συντελεστή απορρόφησης, μ, και του ενεργού πάχους του υλικού, d:

$$I(x) = I_0 \exp\left(-\Sigma x\right) = I_0 \exp\left(-\left(\frac{\Sigma}{\rho}\right)(\rho x)\right) = I_0 \exp(-\mu \cdot d)$$

Το ποσοστό απορρόφησης είναι: $f = \frac{I_0 - I(d)}{I_0} = 1 - \exp(-\mu d)$ και με απλή αντικατάσταση των τιμών, $f = 0.20$ ή 20%

Άσκηση 22 Να υπολογιστεί η ηλεκτρική τετραπολική ροπή Q στο ακραίο πρότυπο των φλοιών για τους πυρήνες $^{15}_{7}\mathrm{N}$ και $^{11}_{5}\mathrm{B}$. Να εκφράσετε το αποτέλεσμα ως συνάρτηση του $\langle r^2 \rangle$.

Λύση Στο ακραίο πρότυπο των φλοιών, θεωρούμε ότι οι κλειστοί φλοιοί δε συνεισφέρουν. Αυτό ισχύει και για την ηλεκτρική τετραπολική ροπή ενός πυρήνα, η οποία ορίζεται ως η αναμενόμενη τιμή

$$Q = \frac{1}{e} \sum \langle q(3z^2 - r^2) \rangle$$

Η άθροιση είναι σε όλα τα ασύζευκτα πρωτόνια (ή οπές). Η αναμενόμενη τιμή είναι για μια κατάσταση μέγιστης προβολής σπιν, δηλ. $|I, I_z = I\rangle$. Κατά συνέπεια η προηγούμενη εξίσωση, με χρήση και της σχέσης που ισχύει σε πολικές συντεταγμένες $z = r\cos\theta$, μπορεί να γραφεί αναλυτικά:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{e} \sum \langle I, I_z | e(3z^2 - r^2) | I, I_z \rangle \\ &= \frac{e}{e} \sum \langle I, I_z | (3r^2\cos^2\theta - r^2) | I, I_z \rangle \\ &= \sum \langle r^2 \rangle \langle I, I_z | (3\cos^2\theta - 1) | I, I_z \rangle \end{aligned}$$

Η αναμενόμενη τιμή του $\cos\theta$ μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} \langle I, I_z | \cos^2\theta | I, I_z \rangle &= \langle I, I_z | \frac{z^2}{r^2} | I, I_z \rangle \\ &= \frac{\langle I, I_z | z^2 | I, I_z \rangle}{\langle I, I_z | r^2 | I, I_z \rangle} \\ &= \frac{I_z^2}{I^2} \\ &= \frac{I_z^2 \hbar^2}{I(I+1)\hbar^2} \\ &= \frac{I^2}{I(I+1)} \\ &= \frac{I}{(I+1)} \end{aligned}$$

και αντίστοιχα για το

$$\langle (3\cos^2\theta - 1) \rangle = 3\frac{I}{I+1} - 1 = \frac{3I - I - 1}{I+1} = \frac{2I-1}{I+1}$$

Για τις περιπτώσεις που ζητούνται, πρέπει να βρεθεί το σπιν της βασικής στάθμης. Το $^{15}_{7}\mathrm{N}$ έχει ένα ασύζευκτο πρωτόνιο στη στάθμη 1p$_{1/2}$ και κατά συνέπεια το σπιν είναι 1/2. Με αντικατάσταση στον τύπο της ηλεκτρικής τετραπολικής ροπής παραπάνω, Q=0.

Αντίστοιχα, για το $^{11}_{5}$B, υπάρχει ένα ασύζευκτο πρωτόνιο στην 1p$_{3/2}$ και συνεπώς το σπιν είναι 3/2. Η αντικατάσταση δίνει:

$$\begin{aligned} Q &= -\langle r^2 \rangle \frac{2I-1}{(I+1)} = -\langle r^2 \rangle \frac{2 \times \frac{3}{2} - 1}{(\frac{3}{2}+1)} \\ &= -\frac{4}{5}\langle r^2 \rangle \end{aligned}$$

Για μια τυπική τιμή πυρηνικής ακτίνας $r \approx 3fm$, η παραπάνω σχέση δίνει $Q \approx -7\, fm^2$

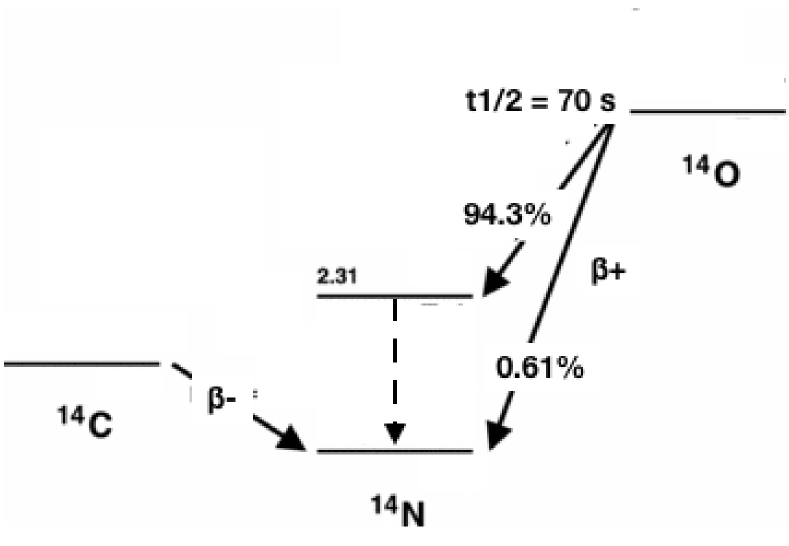
——※——

Άσκηση 23 Στο σχήμα απεικονίζεται μια κλασική περίπτωση υπερ-επιτρεπτής μετάβασης μέσω β+ από το $^{14}_{8}$O προς τη διεγερμένη στάθμη (στα 2.31 MeV) του $^{14}_{7}$N.

- Ποια είναι τα σπιν, οι ομοτιμίες και τα ισοσπιν της αρχικής και τελικής στάθμης αυτής της υπερ-επιτρεπτής μετάβασης; Να αιτιολογήσετε.
- Τι τύπου είναι οι μεταβάσεις β- του $^{14}_{6}$C και της β+ του $^{14}_{8}$O προς τη βασική στάθμη του $^{14}_{7}$N;

Χρησιμοποιήστε αναλογικές στάθμες/ισοσπίν στο συλλογισμό σας).

Λύση



Οι πυρήνες ^{14}C και ^{14}O είναι άρτιοι-άρτιοι και επομένως $J^{\pi} = 0^{+}$. Στο ^{14}O υπάρχουν δύο πλεονάζοντα πρωτόνια σε σχέση με τα νετρόνια κι επομένως, το ισοσπίν $T_z = (Z-N)/2$

είναι $T_z = 1$. Η χαμηλότερη ενεργειακά στάθμη θα έχει την ίδια τιμή ισοσπίν, άρα η βασική στάθμη του ισοτόπου έχει $T = 1$.

Υπερεπιτρεπτές μεταβάσεις συμβαίνουν όταν $\Delta J = \Delta\pi = \Delta T = 0$. Έπεται έτσι ότι η στάθμη στα 2.31 MeV έχει κι αυτή $T = 1$, $J^\pi = 0^+$.

Το ^{14}N έχει ένα ασύζευκτο πρωτόνιο και ένα ασύζευκτο νετρόνιο και τα δύο σε στάθμες 1p$_{1/2}$ (περιττός-περιττός πυρήνας). Η ομοτιμία της στάθμης συνολικά είναι το γινόμενο των ομοτιμιών των κυματοσυναρτήσεων των ασύζευκτων νουκλεονίων, η οποία είναι $\pi = (-1)^-(-1)^- = +$.

Το σπιν της στάθμης είναι $J = \overrightarrow{1/2} + \overrightarrow{1/2}$, δηλ. είτε 0 είτε 1. Αν είναι $J = 0$ τότε η αποδιέγερση γ είναι $0^+ \to 0^+$ δηλ. απαγορευμένη, επομένως $J^\pi = 1^+$ για τη βασική στάθμη στο ^{14}N. Ακόμη, επειδή $Z = N$, $T_z = T = 1$ για τη βασική στάθμη.

Η διάσπαση β+ ^{14}O(gs) $\to$ ^{14}N(gs) είναι με $\Delta J = \Delta T = 1$ και $\Delta\pi = 0$, άρα επιτρεπτή Gamow–Teller. Αντίστοιχα για τη μετάβαση β- ^{14}C(gs) $\to$ ^{14}N(gs), $\Delta J = \Delta T = 1$ και $\Delta\pi = 0$, επομένως είναι επιτρεπτή Gamow–Teller. Επιπλέον, επειδή ^{14}C και ^{14}O είναι κατοπτρικοί πυρήνες, οι ισχείς μετάβασης (στοιχεία πίνακα) είναι παρόμοιες.