

ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΦΘΙΝΟΠΩΡΟ 2004

III. Το Πρότυπο των Φλοιών

Κ. Ν. Παπανικόλας
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη

Η ενότητα που ακολουθεί αναπτύσσει το πρότυπο των φλοιών σαν εξειδίκευση θεωρίας ανεξάρτητου σωματίου. Σχολιάζεται η επιτυχία του και οι ατέλειες του. Εξετάζεται ο λόγος που στο πυκνό πυρηνικό σύστημα το πρότυπο φλοιών έχει τόσο καλή επιτυχία.

Πυρηνικά Πρότυπα Μέσου Πεδίου και Φλοιώδους Δομής

Στην μελέτη της δομής των ατομικών πυρήνων σειρά απο ενδείξεις και φαινόμενα επιδεικνύουν συμπεριφορά ανεξάρτητου σωματίου. Αναφερόμαστε σε φαινόμενα στα οποία το πυκνό σύστημα των N νουκλεονίων συμπεριφέρεται ώστε το κάθε νουκλεόνιο να αισθάνεται την παρουσία των υπόλοιπων νουκλεονίων κατα ένα συνολικό και έμμεσο τρόπο, μέσω κάποιου μέσου πεδίου. Πολλά απο τα πειραματικά αυτά δεδομένα, αν μελετηθούν σαν συνάρτηση του ατομικού αριθμού επιδεικνύουν και φλοιώδη δομή. Είναι προφανές ότι φλοιώδης δομή υποδηλώνει και συμπεριφορά ανεξάρτητου σωματίου.

Ιστορικά η αδυναμία της κατανόησης της κλασικά παράδοξης αυτής συμπεριφοράς, ότι δηλαδή ένα εξαιρετικά πυκνό σύστημα όπως ο ατομικός πυρήνας μπορεί να περιγραφεί με βάση τη θεωρία ανεξάρτητου σωματίου, καθυστέρησε σημαντικά την ανάπτυξη του προτύπου των φλοιών και των θεωριών πυρηνικού μέσου πεδίου. Είναι χαρακτηριστικό ότι το πρότυπο φλοιώδους δομής καθιερώναται 35 χρόνια αργότερα απο την ανακάλυψη του πυρήνα και 20 χρόνια αργότερα απο την ανακάλυψη των συστατικών του.

Η πιο απλη μορφή θεωρίας ανεξάρτητου σωματίου είναι αυτή του κβαντικού αέριου Fermi. Το δυναμικό που το διέπει, το δυναμικό απείρου βάθους, είναι το πιο απλό δυναμικό το οποίο μπορούμε να επικαλεσθούμε για να δημιουργήσουμε ένα δέσμιο σύστημα N σωματιών.

Πρότυπο ανεξάρτητου σωματίου

Η πειραματική επιβεβαίωση της εγκυρότητας της περιγραφής των πυρήνων με όρους θεωρίας μέσου πεδίου μας επιτρέπει την αναζήτηση των κατάλληλων φαινομενολογικών δυναμικών για την βέλτιστη περιγραφή πυρηνικών φαινομένων. Ιστορικά, ένα απο τα πιο δύσκολα φαινόμενα να περιγραφεί, ήταν η προβλεψη των μαγικών αριθμών - δηλαδή η ορθή περιγραφή της φλοιώδους δομής των πυρήνων.

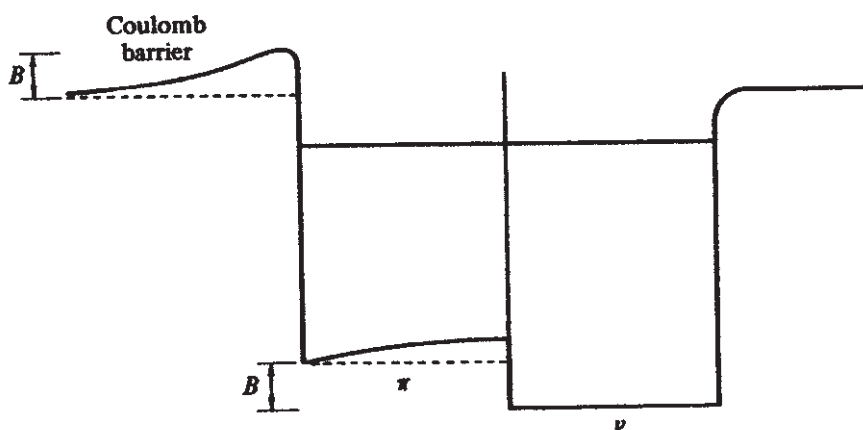
Θα παρουσιάσουμε πιο κατω την λύση του προβλήματος με την χρήση διαφόρων δυναμικών ενός σώματος $V(j)$, όπου $j = [\vec{r}, \vec{L}, \vec{S} \dots]$ είναι το άνυσμα που χαρακτηρίζει το σωματίο.

Ανεξάρτητα απο την μορφή του δυναμικού οι λύσεις που θα προκύψουν, θα έχουν πάντοτε την μορφή ορίσουσας Slater:

$$\Psi_N(r_1, r_2, \dots, r_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(r_1) & \varphi_1(r_2) & \dots & \varphi_1(r_N) \\ \varphi_2(r_1) & \varphi_2(r_2) & \dots & \varphi_2(r_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N(r_1) & \varphi_N(r_2) & \dots & \varphi_N(r_N) \end{vmatrix}$$

Βέβαια η δυσκολία του προβλήματος ανάγεται στην ανεύρεση των κατάλληλων τροχιακών, $\varphi_\lambda(\vec{r}_j)$. Αυτά προκύπτουν απο την επίλυση της εξίσωσης Schrödinger για ένα νουκλεόνιο στο συγκεχυμένο μέσο δυναμικό $V(\vec{r})$, το οποίο και ορίζει τον τύπο του προτύπου ανεξάρτητου σωματίου.

Το πρόβλημα ανάγεται έτσι στην ανεύρεση του δυναμικού που θα μπορούσε να προβλέψει τους μαγικούς αριθμούς (2,8,20,50,82 και 126) και να περιγράψει το μέγιστο δυνατό αριθμό παρατηρούμενων φαινομένων με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια. Δεδομένου ότι τα πρότυπα μέσου πεδίου αποτελούν μόνο μία απλή προσέγγιση στο περίπλοκο πρόβλημα πολλών σωμάτων, δεν μπορούμε να περιμένουμε μια ακριβή περιγραφή στο πρότυπο ανεξάρτητου σωματίου. Το πόσο καλή μπορεί να είναι η προσέγγιση αυτή θα το διερευνήσουμε στην συνέχεια.



Σχ. 1: Το μέσο δυναμικό που αισθάνονται τα πρωτόνια (π) και νετρόνια (ν) δεν είναι ταυτόσημα, διαφέρουν κύρια κατά την δύναμη Coulomb, η οποία καθιστά τα πρωτόνια λιγότερο δέσμια.

Έχοντας επιλέξει το μέσο δυναμικό, μπορούμε να προχωρήσουμε στην ανεύρεση των τροχιακών και των ιδιοενεργειών τους, επιλύοντας την εξίσωση Schrödinger:

$$H\varphi_n = \varepsilon_n\varphi_n$$

$$H = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \right]$$

Γενικά, το δυναμικό $V(\vec{r})$ έχει την ακόλουθη γενική μορφή:

$$V(\vec{r}) = \sum_{n=1}^L \hat{O}_n U(\vec{r})$$

Όπου το \hat{O}_n : είναι τελεστής ενός σώματος, όπως : $\mathbf{1}, L \cdot \vec{S}, \dots$

και $U(r)$: συνάρτηση χωρικής εξάρτησης λ.χ. αρμονικού ταλαντωτή, φρεάτιο απείρου ή πεπερασμένου βάθους, ή τύπου Woods-Saxon.

$$U^{WS}(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-e)/\alpha}} \quad (1)$$

Αν το πρόβλημα και το δυναμικό παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία, όπως στην περίπτωση των ατομικών πυρήνων, τότε είναι χρήσιμο να γράψουμε την αναμενόμενη λύση (τροχιακό) σαν γινόμενο του ακτινικού και του γωνιακού μέρους: $\varphi(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r^2} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \hat{L}^2$$

Μια και μας είναι γνωστό ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή του μεγέθους της στροφορμής \hat{L}^2 είναι οι σφαιρικές αρμονικές $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$.

$$\hat{L}^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \ell(\ell + 1) \hbar^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$$\hat{L}_z Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

Αν αντικαταστήσουμε $R_{n\ell}(r) = u_{n\ell}(r)/r$ τότε το ακτινικό μέρος της εξίσωσης λύνεται με την λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} u_{n\ell} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2m r^2} \right] u_{n\ell} = \varepsilon_{n\ell} u_{n\ell}$$

Τό πρόβλημα ακόμη και στην απλοποιημένη αυτή μορφή του, δηλ στη περίπτωση όπου το δυναμικό είναι κεντρικό, δεν επιδέχεται αναλυτική λύση παρά σε εξαιρετικά απλές περιπτώσεις. Θα εξετάσουμε τις απλές περιπτώσεις του δυναμικού απείρου βάθους και του αρμονικού ταλαντωτή. Βέβαια, δεν υπάρχει καμιά δυσκολία να λύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις αριθμητικά για οποιοδήποτε κεντρικό δυναμικό.

Πηγάδι δυναμικού απείρου βάθους Fermi

Όπως είδαμε σε προηγούμενες ενότητες το δυναμικό απείρου βάθους για σύστημα πολλών σωμάτων είναι ισοδύναμο με το αέριο Fermi. Σε σφαιρικές συντεταγμένες έχει την μορφή:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq r_o A^{1/3} \\ \infty & r > r_o A^{1/3} \end{cases}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\varepsilon_{n\ell} - \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} \right) \right) u_{n\ell}(r) = 0$$

Λύση: Η λύση του προβλήματος αυτού δίνεται από τις κανονικοποιημένες σφαιρικές λύσεις Bessel.

$$u_{n\ell} = j_\ell(k_{n\ell} r)$$

όπου ο κυμματαριθμός δίνεται από την σχέση

$$k_{nl} = \sqrt{\frac{2m\varepsilon_{nl}}{\hbar^2}}$$

Το δυναμικό απείρου βάθους καθορίζει όπως οι κυματοσυναρτήσεις μας υπακούουν τις ακόλουθες οριακές συνθήκες για $r = 0$ ή για $r = R$.

$$j_\ell(k_{nl}(r=0)) = j_\ell(k_{nl}(r=R)) = 0$$

Η συνθήκη αυτή, όπως και στην περίπτωση του καρτεσιανού δυναμικού, μας δίνει επίσης τις συνθήκες χβάντωσης. Η ιδιοενέργεια που αντιστοιχεί στο κυματάνυσμα k_{nl} δίνεται από το νιοστή (ν) ρίζα της ℓ σφαιρικής συνάστησης Bessel. Οι ρίζες των σφαιρικών συνάστησεων Bessel είναι διακριτές (μή εκφυλισμένες) και ως εκ τούτου δεν προκύπτει ενεργειακός εκφυλισμός στις στιβάδες με διακριτικούς δείκτες (n, ℓ) . Υπάρχει βέβαια εκφυλισμός ως προς τους μαγνητικούς χβαντικούς αριθμούς, m_ℓ εξ αιτίας της σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος.

- Οι ενεργειακές καταστάσεις που προκύπτουν είναι εκφυλισμένες ως προς m . Για κάθε ℓ έχουμε $(2\ell + 1)$ εκφυλισμένες καταστάσεις.
- Φασματοσκοπικός Συμβολισμός: Στην κατάταξη των τροχιακών που παρατηρούνται (ή υπολογίζονται) στην πυρηνική φυσική ακολουθείται φασματοσκοπικός συμβολισμός: $3s, 1p, 2d, 1f, \dots$ $3s$ για παράδειγμα δηλώνει ότι η συγκεκριμένη στοιβάδα είναι η τρίτη που παρατηρείται να έχει $\ell = 0$ απαριθμώντας στοιβάδες με πρώτη την πιο δέσμια. Έτσι $1f$ θα είναι η πρώτη με $\ell = 3$ που συναντάμε.

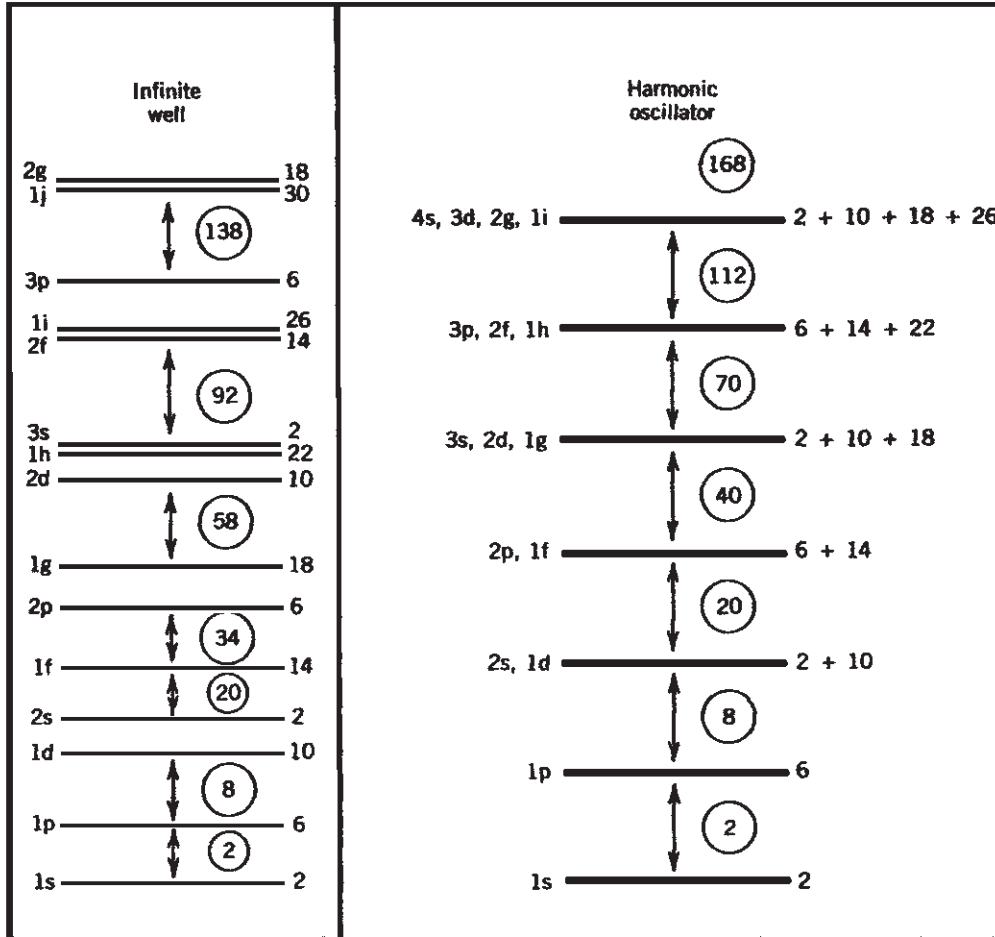
Μια απλή απαρίθμηση της χωρητικότητας κάθε στοιβάδας (φλοιού) οδηγεί στην ακόλουθη πρόβλεψη για τους μαγικούς αριθμούς που δίνει το προτυπο ανεξάρτητου σωματίου με δυναμικό το σφαιρικό δυναμικό απείρου βάθους $M = 2, 8, 20, 34, 59, 92, 138$, σε αντίθεση με τα πειραματικά δεδομένα. Το συγκεκριμένο πρότυπο δεν προβλέπει σωστά τους μαγικούς αριθμούς, παρόλο που είναι ενδιαφέρον ότι οι πρώτοι τρεις (2,8,20) προβλέπονται ορθά.

Πηγάδι Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

Το δυναμικό του απλού αρμονικού ταλαντωτή μπορεί και αυτό να λυθεί αναλυτικά. Προσφέρει μιά απλή απεικόνιση, όπως και αυτό του απείρου βάθους, η οποία όμως έχει σημαντικά πλεονεκτήματα. Όπως, είναι γνωστό η δύναμη (νόμος του Hooke) που το ορίζει, αποτελεί τον πρώτο όρο σε ανάπτυγμα Taylor πολύ πιο περίπλοκων δυνάμεων. Επίσης οι λύσεις (ιδιοσυναρτήσεις) του (συναρτήσεις Hermite) οι οποίες αποτελούν ορθοκανονικοποιημένο σύνολο, παρέχουν εξαιρετική βάση, με άριστο φυσικό περιεχόμενο, στο οποίο να αναπτυχθούν άλλες πιο περίπλοκες μη αναλυτικές λύσεις. Βέβαια, οι κυματοσυναρτήσεις που θα προκύψουν θα πάσχουν από το γεγονός ότι το δυναμικό είναι απείρου βάθους.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες έχει την μορφή:

$$V(r) = -\frac{1}{2}kr^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2r^2$$



Σχ. 2: Οι φλοιοί που προκύπτουν από τα πρότυπα του δυναμικού απείρου βάθους και του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\epsilon_{nl} - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2}\right)\right)u_{nl}(r) = 0$$

Η λύση του προβλήματος αυτού δίνεται από τις κανονικοποιημένες σφαιρικές λύσεις Hermite.

$$\begin{cases} u_\ell = j_\ell(x) & x \equiv k_{nl}R \\ \epsilon_{nl} = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega & N = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

- Η ιδιοσυνάρτηση Hermite απαιτούν [1] όπως έχουμε ίδια ομοτιμία για όλες τις καταστάσεις ℓ με αυτή του μέγιστου επιτρεπτού ℓ , δηλαδή του $\ell = N$.
- Οι ενεργειακές καταστάσεις (ιδιοτιμές) είναι εκφυλισμένες όχι μόνο ως προς m αλλά και ως προς ℓ . Για κάθε μια από τις επιτρεπόμενες τιμές του ℓ έχουμε $(2\ell + 1)$ εκφυλισμένες καταστάσεις.

Μπορεί να αποδειχθεί, ότι ανεξάρτητα αν το N είναι ζυγός ή μονός αριθμός η στοιβάδα (φλοιός) με $N = \Lambda$ είναι εκφυλισμένη κατα ένα παράγοντα $n_\Lambda = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2)$.

Και σε αυτή την περίπτωση, του δυναμικού του αρμονικού ταλαντωτή, η απλή απαρίθμηση της χωρητικότητας κάθε στοιβάδας οδηγεί στην ακόλουθη πρόβλεψη για τους μαγικούς αριθμούς $M = 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168$ σε αντίθεση με τα πειραματικά δεδομένα. → Δεν προβλέπει σωστά τους μαγικούς αριθμούς!

Όρος Σπιν-Τροχιάς

Εξαντλητική δοκιμή πιθανών κεντρικών δυναμικών, όσο περίπλοκη ακτινική εξάρτηση και να έχουν, δείχνει ότι δεν μπορούν να αναπαράγουν τούς μαγικούς αριθμούς και άλλες σημαντικές ιδιότητες των πυρήνων. Άμεση πειραματική μαρτυρία, αλλά και τεράστια έμμεση δείχνει την ύπαρξη και την ανάγκη πιο περίπλοκων δυναμικών. Η κατανόηση του ρόλου που διαδραματίζει το δυναμικό σπιν-τροχιάς αποδείχθηκε καθοριστική για την εξήγηση των μαγικών αριθμών. Η προσθήκη στο κεντρικό δυναμικό του όρου:

$$U_{so}(r) \vec{L} \cdot \vec{S}$$

όπως

$$\frac{V_o^{L \cdot S}}{1 + e^{(r-c)/\alpha}} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

είναι αναγκαία για την επίτευξη της αναπαραγωγής των μαγικών αριθμών. Παρατήρηση: Η εισαγωγή του όρου σπιν-τροχιάς $\vec{L} \cdot \vec{S}$ στο δυναμικό εισαγάγει καινούργιους κβαντικούς αριθμούς, την ολική στροφορμή και την προβολή της στον άξονα των z .

$$\text{Ολική στροφορμή: } \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Ενώ η τιμή της στροφορμής ℓ εξακολουθεί να είναι καλός κβαντικός αριθμός, αυτό δεν ισχύει για την προβολή της, ℓ_z .

$$[L^2, \vec{L} \cdot \vec{S}] = 0$$

$$[S^2, \vec{L} \cdot \vec{S}] = 0$$

$$[L_z, \vec{L} \cdot \vec{S}] \neq 0$$

$$[m_s, \vec{L} \cdot \vec{S}] \neq 0$$

$$[J^2, \vec{L} \cdot \vec{S}] = [J_z, \vec{L} \cdot \vec{S}] = 0$$

Προφανές αποτέλεσμα των πιο πάνω σχέσεων είναι να έχουμε για καλούς κβαντικούς αριθμούς του ακόλουθους: ℓ, j, m_j . Στον φασματοσκοπικό συμβολισμό που ακολουθείται είναι φυσικό, για πληρότητα, να προστεθεί και ο δείκτης j . $3s_{1/2}, 1p_{1/2}$ και $1p_{3/2}, 2d_{3/2}$ και $2d_{5/2} \dots$ Για παράδειγμα $2d_{5/2}$ δηλώνει ότι η συγκεκριμένη στοιβάδα είναι η δεύτερη που παρατηρείται να έχει $\ell = 2$ απαρτιζόμενες στοιβάδες με πρώτη την πιο δέσμια και χαρακτηρίζεται από $j = 5/2$.

Ο όρος σπιν-τροχιάς $\vec{L} \cdot \vec{S}$ έχει ως αποτέλεσμα να αρθεί μερικώς ο εκφυλισμός των $2(2\ell + 1)$ καταστάσεων που κατ'ελάχιστο παρουσιάζουν όλα τα κεντρικά δυναμικά. Όλες οι στιβάδες, πλην αυτών που πέρχονται από S καταστάσεις χωρίζονται σε δύο ομάδες:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Άρεται ο εκφυλισμός} \\ 2(2\ell + 1) \end{array} \right\} 2(2\ell + 1) \rightarrow \begin{cases} J = \ell + 1/2 & , (2j + 1) \\ J = \ell - 1/2 & , (2j + 1) \end{cases}$$

Πειραματικά παρατηρείται ότι οι στιβάδες με μεγαλύτερο J είναι οι πιο δέσμιες - αντίθετα με το αντίστοιχο φαινόμενο της ατομικής φυσικής. Επίσης το σθένος του δυναμικού αυτού είναι σημαντικά ισχυρότερο.

Έτσι για $\ell = 1$ (η περίπτωση αυτή ισχύει για την περιοχή του ^{12}C και ^{16}O , η οποία θεωρείται κλασικό παράδειγμα εμφανούς παρουσίας του δυναμικού σπιν-τροχιάς):

$$2(1 \cdot 2 + 1) = 6 \rightarrow \begin{cases} J = 5/2 & , (2 \cdot 3/2 + 1) = 4 \\ J = 3/2 & , (2 \cdot 1/2 + 1) = 2 \end{cases}$$

Για $\ell = 3$ (η περίπτωση αυτή ισχύει για την περιοχή του ασβεστίου ^{40}Ca και ^{48}Ca . Είναι καθοριστική στην αναπαραγωγή του μαγικού αριθμού 28):

$$2(2 \cdot 3 + 1) = 14 \rightarrow \begin{cases} J = 5/2 & , (2 \cdot 5/2 + 1) = 6 \\ J = 3/2 & , (2 \cdot 7/2 + 1) = 8 \end{cases}$$

Αναμενόμενη τιμή: $\langle L \cdot S \rangle$

$$L \cdot S = \frac{1}{2}[(L \cdot S)^2 - L^2 - S^2] = \frac{1}{2}[J^2 - L^2 - S^2]$$

$$\rightarrow \langle L \cdot S \rangle = \frac{1}{2}j(j+1) - \frac{1}{2}\ell(\ell+1) - \frac{1}{2}s(s+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ell & \text{for } J = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(\ell+1) & \text{for } J = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Προέλευση του Μέσου Πεδίου

Το δυναμικό ενός σώματος (το "μέσο δυναμικό ") που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω, τόσο το κεντρικό όσο και αυτό του σπιν - τροχιάς, δεν έχουν προφανή προέλευση, όπως για παράδειγμα το δυναμικό Coulomb στην ατομική φυσική που το κατανοούμε ότι προέρχεται απο το φορτίο του πυρήνα θωρακισμένο απο το φορτίο των εσωτερικών ηλεκτρονίων. Είναι βέβαια προφανές ότι θα προέρχεται απο την αθροιστική επίδραση των δυνάμεων που τα υπόλοιπα νουκλεόνια εξασκούν στο συγκεκριμένο νουκλεόνιο. Η αλληλεπίδραση αυτή δίνεται απο το γνωστό δυναμικό δύο σωμάτων V_{NN} . Τα νουκλεόνια στον πυρήνα έχουν μεγάλες ορμές και αλλάζουν διαρκώς θέσεις. Δεν είναι δυνατό να υπολογίσουμε το μέσο δυναμικό, έστω και προσεγγιστικά με την γνώση του δυναμικού V_{NN} . Ο πιο πάνω όμως συλλογισμός μας οδηγεί στην ευρηματική εξήγηση του μέσου δυναμικού και τον ορισμό μιας συγκεκριμένης κατηγορίας δυναμικών folding potentials, ειδική περίπτωση των οποίων είναι και το γνωστό δυναμικό Woods Saxon.

Αν θεωρήσουμε ότι το ενεργό δυναμικό που ένα συγκεκριμένο νουκλεόνιο "βλέπει" στην θέση \vec{r} σαν αποτέλεσμα της πιο πάνω διαδικασίας είναι το δυναμικό $V^{eff}(\vec{r})$, τότε το "μέσο δυναμικό" που θα προκύψει θα είναι:

$$V^{MF}(r) = \sum_j^{A-1} V^{eff}(\vec{r} - \vec{r}_j)$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα υπόλοιπα νουκλεόνια του πυρήνα X^A . Για A αρκετά μεγάλο, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα που να καλύπτει το πυρηνικό όγκο.

$$V^{MF}(r) = \int d\vec{r}' u^{eff}(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}')$$

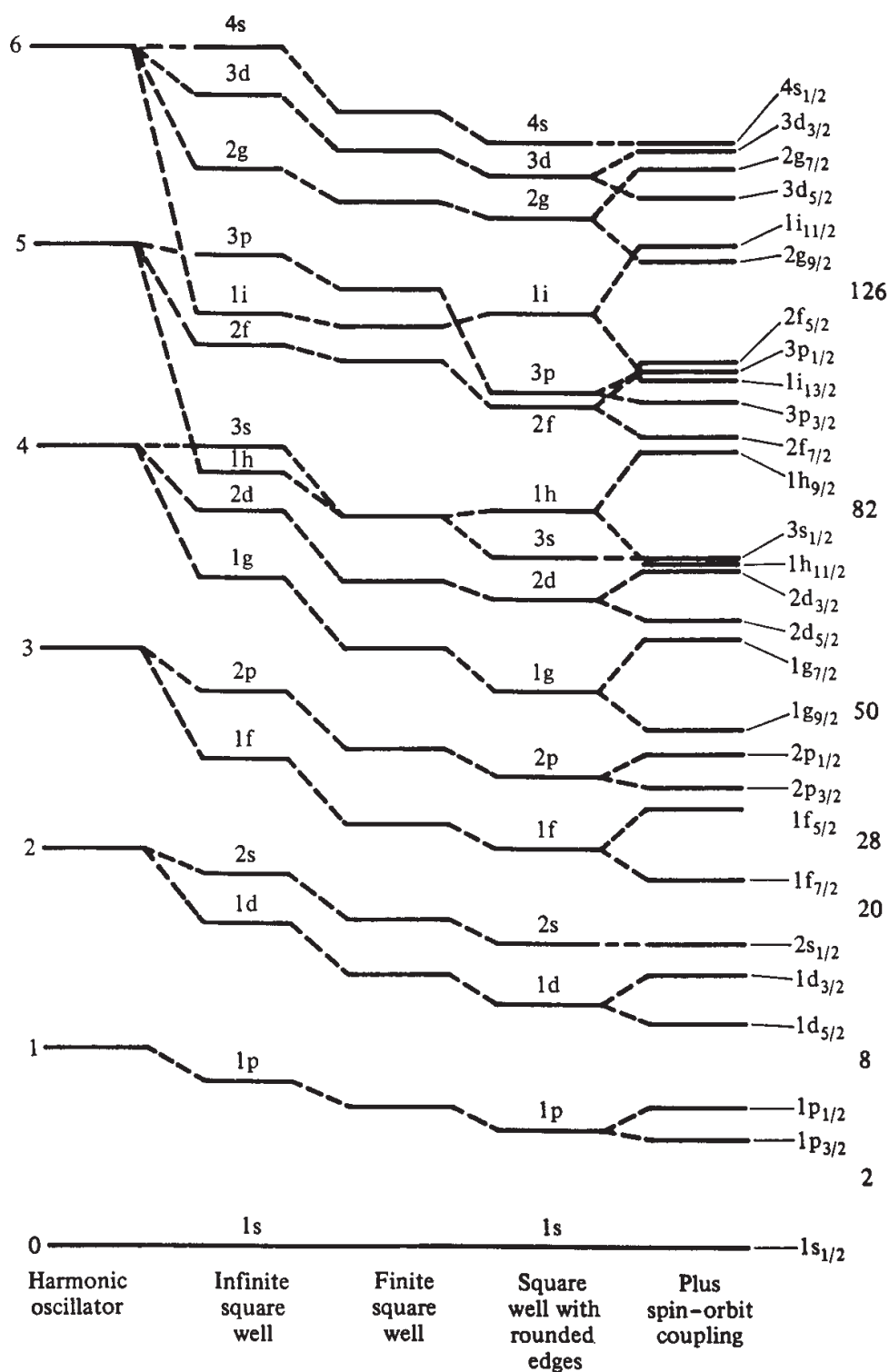
Αν για $\rho(\vec{r}')$ αντικαστήσουμε την εμπειρική κατανομή μάζας fermi και αν θεωρήσουμε ότι δεδομένης της γνωστής βραχείας εμβέλειας των πυρηνικών δυνάμεων, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την $u^{eff}(\vec{r} - \vec{r}')$ με συνάρτηση δέλτα, τότε:

$$V^{MF}(r) = \int d\vec{r}' u_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') = u_0 \rho(\vec{r}') = \frac{u_0}{1 + e^{(r-c)/\alpha}}$$

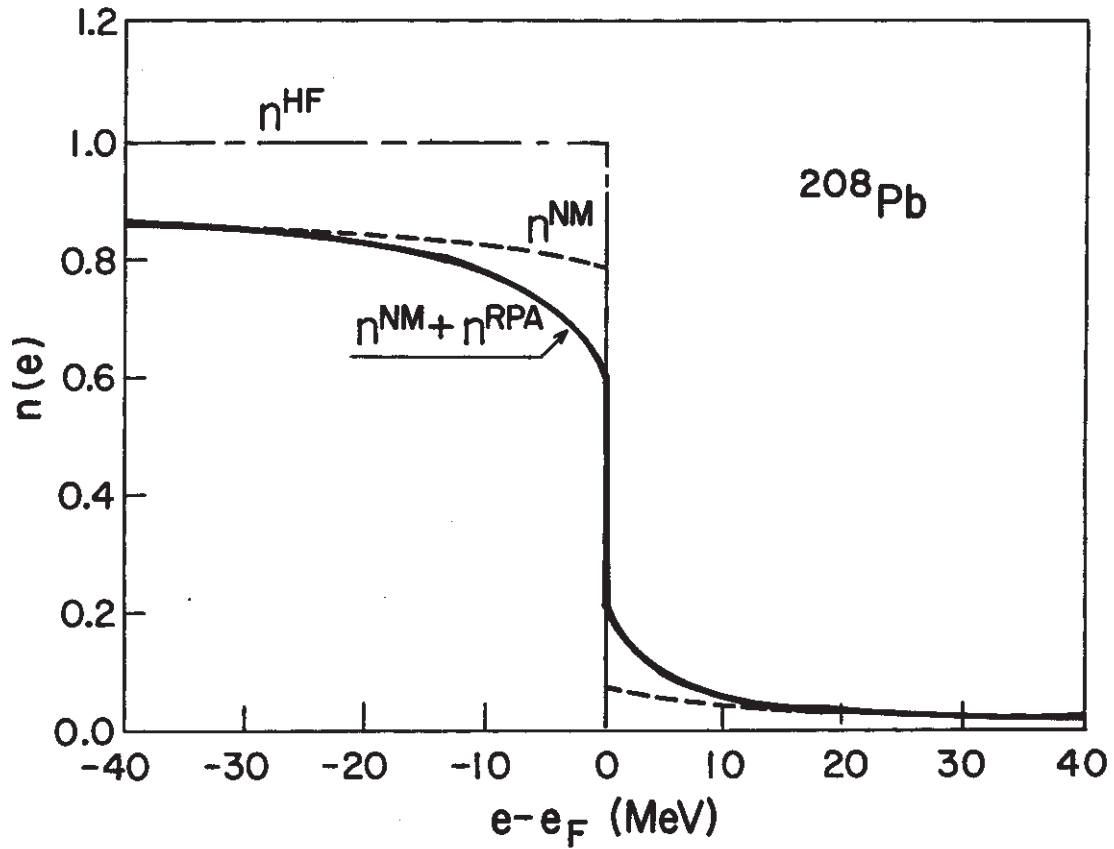
Το οποίο αναγνωρίζουμε βέβαια σαν το δυναμικό Woods Saxon.

Προέλευση του όρου σπιν τροχιάς

Με βάση το ίδιο σκεπτικό που αναπτύξαμε πιο πάνω η προέλευση του όρου σπιν τροχιάς μπορεί να αναζητηθεί στον αντίστοιχο όρο του δυναμικού V_{NN} . Κάθε ένα νουκλεόνιο στην κίνηση του μέσα στον πυρήνα αλληλεπιδρώντας με κάθε ένα απο τα υπόλοιπα νουκλεόνια, υφίσταται την δύναμη αυτή. Απλή γεωμετρική εξέταση του προβλήματος όμως μας δείχνει ότι τα νουκλεόνια στην επιφάνεια του πυρήνα θα αισθανθούν την μέγιστη δύναμη απο τον όρο αυτό, ενώ αυτά στο κέντρο καθόλου. Τα νουκλεόνια στο κέντρο του πυρήνα θα έχουν κατα μέσο όρο τα μισά νουκλεόνια (δεξιά τους) να αναιρούν την δύναμη που εξασκούν τα άλλα μισά (αριστερά τους). Σε αντίθεση τα νουκλεόνια στην επιφάνεια του πυρήνα θα αισθανθούν την μέγιστη δύναμη του όρου $V_{NN} * \vec{S} \cdot \vec{L}$, μια και όλα τα νουκλεόνια βρίσκονται είτε δεξιά τους είτε αριστερά τους.



Σχ. 3: Η διάταξη των ενεργειακών σταθμών που προκύπτει από διαφορετικά δυναμικά μέσου πεδίου. Είναι αναγκαία η εισαγωγή όρου σπιν - στροφορμής για να αναπαραχθεί η παρατηρούμενη στην φύση κατάταξη των τροχιακών



Σχ. 4: Η θεωρητικά προβλεπόμενη και πειραματικά επιβεβαιωμένη κατανομή αριθμών κατάληψης στο πυρήνα ^{208}Pb

Όριο Εγκυρότητας Πυρηνικής Θεωρίας Μέσου Πεδίου

Οι θεωρίες μέσου πεδίου όπως ήδη σχολιάσαμε, αποτελούν μόνο μια προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα N σωμάτων το οποίο έχουμε να λύσουμε. Έχουμε διαπιστώσει ότι η προσέγγιση αυτή στους πυρήνες αποδίδει πολύ καλά αποτελέσματα. Το ερώτημα είναι κατα πόσο μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε την αναμενόμενη ακρίβεια που μπορούμε να περιμένουμε από το πρότυπο αυτό. Το ερώτημα αυτό παρέμενε αναπάντητο για πολλά χρόνια. Απαντήθηκε [2] μόνο στο τέλος της δεκαετίας του 1990. Ο πιο αποτελεσματικός τρόπος ποσοτικοποίησης και απεικόνισης του βαθμού εγκυρότητας της προσέγγισης μέσου πεδίου μπορεί να βρεθεί με την βοήθεια του διαγράμματος αριθμών κατάληψης (occupation numbers), βλέπε Σχήμα. Στο όριο ανεξάρτητου σωματίου (η μορφή του δυναμικού μας είναι αδιάφορη) όλες οι βαθμίδες θα έχουν πλήρη κατάληψη μέχρι την ενέργεια Fermi και θα είναι πλήρως ακατάληπτες όσες βρίσκονται πάνω από την ενέργεια Fermi. Σε όρους αριθμών κατάληψης, αυτό αντιστοιχεί στην ακόλουθη κατανομή:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αριθμοί κατάληψης} \\ \text{Θεωριών Μέσου Πεδίου} \end{array} \right\} n(\epsilon) = \theta(\epsilon - \epsilon_{Fermi}) \rightarrow \begin{cases} \epsilon \leq \epsilon_{Fermi} & , \quad n = 1 \\ \epsilon > \epsilon_{Fermi} & , \quad n = 0 \end{cases}$$

Στο σχήμα η κατανομή αυτή αντιστοιχεί στην κατανομή n^{HF} . Αποκλίσεις από την κατανομή n^{HF} απεικονίζονται και την απόκλιση από το όριο της προσέγγισης μέσου πεδίου. Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι η περιγραφή ενός βαρειού πυρήνα όπως αυτού του ^{208}Pb δίνεται από την κατανομή $n^{NM} + n^{RPA}$. Η ποσοτικοποίηση της απόκλισης δίνεται από την ασυνέχεια στους αριθμούς κατάληψης αμέσως πριν και μετά την ενέργεια Fermi.

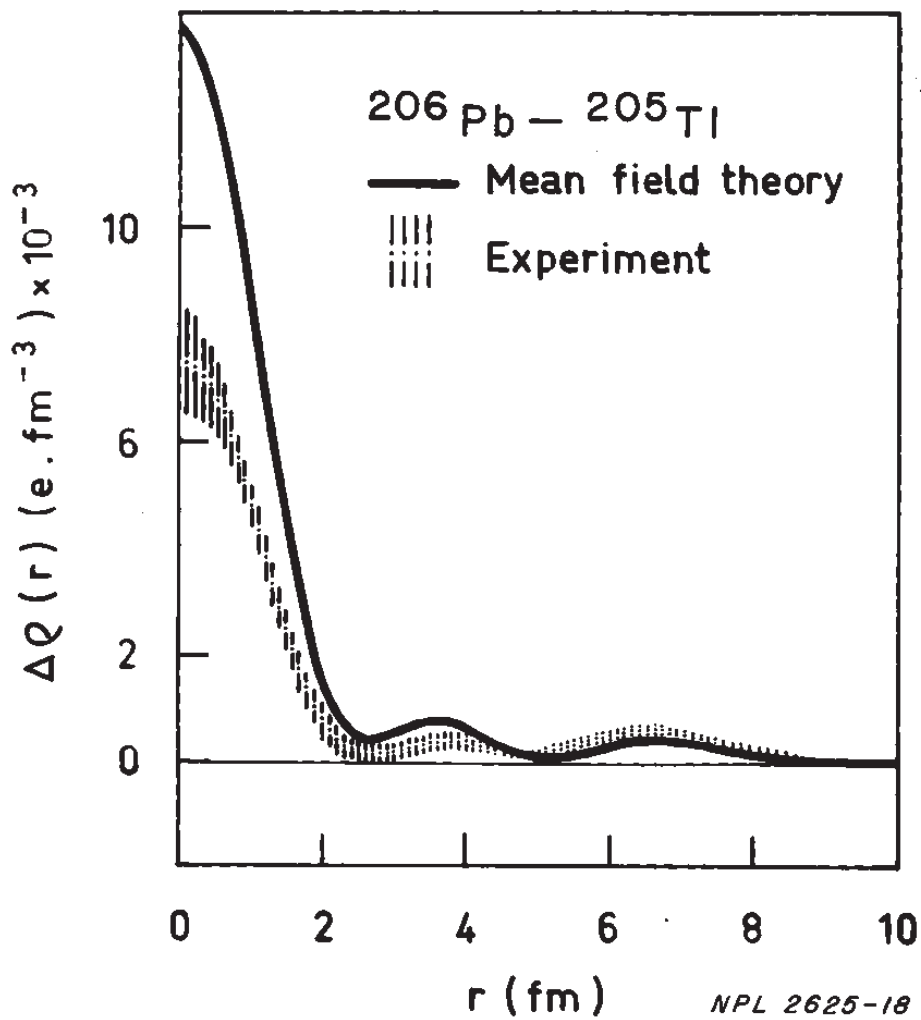
$$Z = n(\epsilon_{Fermi})_- - n(\epsilon_{Fermi})_+$$

Προφανώς για θεωρίες μέσου πεδίου η ασυνέχεια αυτή, που αποκαλείται αριθμός Landau Z , έχει την τιμή 1. Για βαρείους πυρήνες όπως αυτόν του ^{208}Pb ο αριθμός Landau Z , έχει την τιμή $Z \approx 0.65$. Αν ο αριθμός Landau Z τείνει προς μηδενισμό είναι προφανές ότι η προσέγγιση μέσου πεδίου δεν αποτελεί καλή προσέγγιση στο πρόβλημα N σωμάτων.

Πειραματική Επιβεβαίωση

Τα φαινόμενα που δείχνουν φλοιώδη δομή είναι πολλά, όπως πολλά είναι τα φαινόμενα που αναδुकνείουν συμπεριφορά ανεξάρτητου σωματίου σε συγκεκριμένους πυρήνες. Η σημαντική επιτυχία του προτύπου φλοιών στο να προβλέπει το σπιν και ομοτιμία της θεμελιωδής κατάστασης των πυρήνων, τις μαγνητικές και τετραπολικές ροπές και ορισμένες πτυχές του φάσματος διεγερμένων καταστάσεων, εμπέδωσαν το πρότυπο των φλοιών σαν το κυρίαρχο πρότυπο στην περιγραφή των βαρειών πυρήνων.

Πιο προσεκτική εξέταση των φαινομένων που προαναφέραμε αναδुकνεί ότι πολλά από τα φαινόμενα αυτά διαδραματίζονται στην επιφάνεια του πυρήνα, έχει που η πυκνότητα του είναι κατά πολύ μικρότερη της πυκνότητας του κέντρου του πυρήνα. Μπορεί δηλαδή να ισχυριστεί κανείς ότι αυτό συμβαίνει σε περιοχή όπου το πυρηνικό μέσο δεν είναι τόσο πυκνό και άρα η συμπεριφορά ανεξάρτητου σωματίου θα ήταν αναμενόμενη. Μια από τις δραματικές επιβεβαιώσεις προήλθε από τη σκέδαση ηλεκτρονίων από τους πυρήνες ^{206}Pb και ^{205}Tl . Αφού μετρήθηκε με ακρίβεια η κατανομή φορτίου των δύο αυτών πυρήνων, προσέκυψε η διαφορά φορτίου τους, η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα σαν η γραμμοσχιασμένη ζώνη (λόγω της πειραματικής αβεβαιότητας). Στο πρότυπο μέσου πεδίου η διαφορά φορτίου των ^{206}Pb και ^{205}Tl είναι απλώς η κατανομή του φορτίου που προκαλεί το τροχιακό $3s_{1/2}$. Σύγκριση της κατανομής αυτής και της πειραματικής διαφοράς φορτίου δείχνει ότι η προσέγγιση μέσου πεδίου δίνει μια καλή αναπαράσταση των πειραματικών δεδομένων, σε όλο τον πυρηνικό όγκο.



Σχ. 5: Η πειραματικά παρατηρούμενη διαφορά φορτίου ανάμεσα στους πυρήνες ^{206}Pb και ^{205}Tl επιβεβαιώνει με τον πιο δραματικό τρόπο τις προβλέψεις της πυρηνικής θεωρίας μέσου πεδίου.

Ασκήσεις

- 1.1 Να αποδειχθεί ότι σε τρισδιάστατο σφαιρικό δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή, ανεξάρτητα αν ο κύριος κβαντικός αριθμός το N είναι ζυγός ή μονός αριθμός, η στοιβάδα (φλοιός) με $N = \Lambda$ είναι εκφυλισμένη κατά ένα παράγοντα $n_\Lambda = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2)$.
- 1.2 Να προτείνετε πείραμα(τα) που θα μπορούσε να επιβεβαιώσει ότι η προσθήκη δυναμικού σπιν-τροχιάς είναι αναγκαία για την ορθή περιγραφή του πυρήνα ^{16}O στο πρότυπο φλοιών.
- 1.3 Να υπολογίσετε την κατανομή φορτίου στον πυρήνα ^4He στο πρότυπο ανεξάρτητου σωματίου A) με δυναμικό το σφαιρικό δυναμικό απείρου βάθους και B) με δυναμικό το σφαιρικό δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή.
- 1.4 Τι επιπτώσεις θα είχε η εισαγωγή διαφορετικής ακτινικής εξάρτησης ανάμεσα στο κεντρικό δυναμικό και το δυναμικό σπιν - τροχιάς (δηλαδή $U_{so}(r) \neq V(r)$).

Αναφορές

- [1] Schiff Leonard I., *Quantum Mechanics* McGraw Hill, 3d Edition (1968).
- [2] C. N. Papanicolas and V. R. Pandharipande *The Validity of Nuclear Mean Field Description* Physics Today **S56** (1989),