

ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΦΘΙΝΟΠΩΡΟ 2004

II. Κβαντικό Αέριο Fermi

Κ Ν. Παπανικόλας
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη

Η ενότητα που ακολουθεί αναπτύσσει την θεωρία του αερίου Fermi στην γενική του μορφή και στην συνέχεια το εξειδικεύει στο πυρηνικό πρότυπο του αερίου Fermi. Παρατίθεται η πειραματική μαρτυρία που επιβεβαιώνει την εγκυρότητα της προσέγγισης ανεξάρτητου σωματίου στους πυρήνες, κύρια με πειράματα ημιαστικής σκέδασης ηλεκτρονίων.

Αέριο Fermi

Στην μελέτη της δομής των ατομικών πυρήνων σειρά απο ενδείξεις και φαινόμενα επιδεικνύουν συμπεριφορά ανεξάρτητου σωματίου. Αναφερόμαστε σε φαινόμενα στα οποία το πυκνό σύστημα των N νουκλεονίων συμπεριφέρεται ώστε το κάθε νουκλεόνιο να αισθάνεται την παρουσία των υπόλοιπων νουκλεονίων κατα ένα συνολικό και έμμεσο τρόπο, μέσω κάποιου μέσου πεδίου. Πολλά απο τα πειραματικά αυτά δεδομένα, αν μελετηθούν σαν συνάρτηση του ατομικού αριθμού επιδεικνύουν και φλοιώδη δομή. Είναι προφανές ότι φλοιώδης δομή υποδηλώνει και συμπεριφορά ανεξάρτητου σωματίου.

Ιστορικά η αδυναμία της κατανόησης της κλασικά παράδοξης αυτής συμπεριφοράς, ότι δηλαδή ένα εξαιρετικά πυκνό σύστημα όπως ο ατομικός πυρήνας μπορεί να περιγραφεί με βάση τη θεωρία ανεξάρτητου σωματίου, καθυστέρησε σημαντικά την ανάπτυξη του προτύπου των φλοιών και των θεωριών πυρηνικού μέσου πεδίου. Είναι χαρακτηριστικό ότι το πρότυπο φλοιώδους δομής καθιερώναται 35 χρόνια αργότερα απο την ανακάλυψη του πυρήνα και 20 χρόνια αργότερα απο την ανακάλυψη των συστατικών του.

Η πιο απλη μορφή θεωρίας ανεξάρτητου σωματίου είναι αυτή του χβαντικού αέριου Fermi. Το δυναμικό που το διέπει, το δυναμικό απείρου βάθους, είναι το πιο απλό δυναμικό το οποίο μπορούμε να επικαλεσθούμε για να δημιουργήσουμε ένα δέσμιο σύστημα N σωμάτων.

Το καρτεσιανό δυναμικό απείρου βάθους

Θα αρχίσουμε την εξέταση του χβαντικού αέριου Fermi με την μελέτη της κυματοσυνάρτησης N σωμάτων σε καρτεσιανό δυναμικό απείρου βάθους:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & , \quad x, y, z \leq L \\ \infty & , \quad x, y, z > L \end{cases}$$

Τα σωματλια είναι εγκλωβισμένα σε κιβώτιο (κύβο) όγκου $V = L^3$. Η επιλογή καρτεσιανών συντεταγμένων και κυβικού όγκου, ίσως ξενίζει αφού μας στερεί την σφαιρική συμμετρία. Η επεξηγηματική αξία της επιλογής αυτής θα γίνει προφανής στην συνέχεια. Θα επανέλθουμε στην επίλυση του προβλήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες και με σφαιρικό τρισδιάστατο δυναμικό απείρου βάθους στην επόμενη ενότητα.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το ίδιο αυτό δυναμικό (απείρου βάθους) τόσο στην κλασική όσο και στην χβαντική φυσική ορίζει το ιδανικό αέριο. Αντιστοιχεί στην επιλογή ότι τα συστατικά του αερίου (λ.χ. τα μόρια) δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αλλά μόνο με τα τοιχώματα του δοχείου που το εγκλωβίζουν τα οποία είναι και αδιαπέραστα.

Γνωρίζουμε απο την χβαντική θεωρία πολλών σωμάτων οτι για φερμιονικά συστήματα (λ.χ. των νουκλεονίων του ατομικού πυρήνα) η κυματοσυνάρτηση θα είναι μια ορίζουσα Slater:

$$\Psi_N(r_1, r_2, \dots, r_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(r_1) & \varphi_1(r_2) & \dots & \varphi_1(r_N) \\ \varphi_2(r_1) & \varphi_2(r_2) & \dots & \varphi_2(r_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N(r_1) & \varphi_N(r_2) & \dots & \varphi_N(r_N) \end{vmatrix}$$

Η ανεύρεση των τροχιακών: $\varphi_\lambda(\vec{r}_j)$ στο κυβικό αυτό πηγάδι είναι εξαιρετικά απλή και ιδιαίτερα παιδαγωγική. Δεν χρειάζεται στην περίπτωση αυτή να λύσουμε την εξίσωση Schrödinger ενός σώματος στο δυναμικό αυτό.

$$H_o(j)\varphi_\lambda(j) = \varepsilon_\lambda\varphi_\lambda(j)$$

στην περίπτωση μας, η απαίτηση όπως τα τροχιακά $\varphi_\lambda(\vec{r}_j)$ έχουν την σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά, δηλαδή: $\varphi_\lambda(\vec{r} = 0) = 0$ και $\varphi_\lambda(\vec{r} = L) = 0$ οδηγεί στην λύση (προσδιορισμό των τροχιακών).

$$\varphi(x, y, z) = A(\sin k_x x)(\sin k_y y)(\sin k_z z)$$

$$kL = n\pi \rightarrow k_i = \frac{n_i\pi}{L}$$

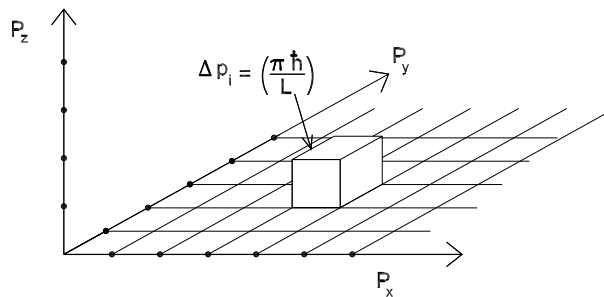
όπου $i = x, y, z$ και $n_i = 1, 2, \dots, \infty$

άρα

$$\varphi_\lambda(x, y, z) = A \sin\left(\frac{n_x\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n_y\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{n_z\pi}{L}z\right)$$

Είναι προφανές ότι ο δείκτης λ ο οποίος προσδιορίζει το τροχιακό έχει τρεις συνιστώσες $\lambda = (n_x, n_y, n_z)$ είναι δηλαδή ένα τρισδιάστατο άνυσμα στον χώρο των ορμών.

Το φερμιόνιο με κυματοδιάνυσμα k_x έχει ορμή $|p_i| = \hbar k_i$.



Σχ. 1: Στον χώρο των ορμών κάθε τροχιακό καταλαμβάνει κάποια θέση η οποία ορίζεται απο τον δείκτη $\lambda = (n_x, n_y, n_z)$. Κάθε τέτοια κατάσταση καταλαμβάνει όγκο ω_i .

Είναι εξαιρετικά χρήσιμο να δούμε πως αναπαράστώνται στον χώρο των ορμών και τι σημαίνουν τα πιο πάνω αποτελέσματα. Εύκολα μπορούμε να επισημάνουμε ότι στον χώρο των ορμών

κάθε τροχιακό καταλαμβάνει μια συγκεκριμένη θέση η οποία ισπαέχει απο οποιαδήποτε γειτονική της. Μπορούμε έτσι να πούμε ότι κάθε τέτοια κατάσταση καταλαμβάνει ένα συγκεκριμένο όγκο ω_i και στην συνέχεια να βρούμε τον αριθμό καταστάσεων ανα μονάδα όγκου (δηλαδή την πυκνότητα καταστάσεων). Δηλαδή:

- " όγκος " που καταλαμβάνει κάθε κατάσταση :

$$\omega_i = \left(\frac{\pi\hbar}{L}\right)^3$$

- Αριθμός καταστάσεων ανά μονάδα "όγκου" στον χώρο των ορμών:

$$\frac{1}{\omega_i} = \left(\frac{L}{\pi\hbar}\right)^3 = \frac{V}{(\pi\hbar)^3}$$

Προσοχή:

- Μας ενδιαφέρει μόνο το τεταρτημόριο (+++) δηλ. το $\frac{1}{8}$ του διαθέσιμου χώρου. Αρνητικό πρόσημο σε οποιαδήποτε επιμέρους κυματοσυνάρτηση δεν έχει ξεχωριστή σημασία.
- Αν το φερμιόνιο έχει spin S , τότε η αρχή του Pauli μας επιτρέπει να έχουμε $(2S+1)$ φερμιόνια να καταλαμβάνουν την ίδια κατάσταση.
- Για νουκλεόνια με ισοσπιν I , τότε η αρχή του Pauli μας επιτρέπει να έχουμε $(2I+1)$ νουκλεόνια να καταλαμβάνουν την ίδια κατάσταση.

Με τα πιο πάνω στοιχεία μπορούμε να υπολογίσουμε μια σειρά από ενδιαφέρουσες ποσότητες:

A) $N(p_o)$: ολοκληρωμένη πυκνότητα καταστάσεων

Ο αριθμός των καταστάσεων (στον συγκεκριμένο γεωμετρικό όγκο V) με το περιορισμό η ορμή οποιασδήποτε κατάστασης να μην υπερβαίνει το p_o .

$$\begin{aligned} N(p_o) &= (\text{όγκος τεταρτημορίου}) \times (\text{Αριθμός καταστάσεων ανά μονάδα όγκου}) = \\ &= \left[\frac{1}{8}\left(\frac{4\pi}{3}p_o^3\right)\right] \times \left[\frac{V}{(\pi\hbar)^3}\right] = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_o^3 \rightarrow p_o^3 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)\left(\frac{N_o}{V}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \end{aligned}$$

B) $n(p_o)$: πυκνότητα καταστάσεων

Ο αριθμός καταστάσεων με p τέτοιο: $p_o < p < p_o + dp_o$

Το διαφορικό της πιο πάνω σχέσης είναι:

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p_o^2 dp_o$$

Γ) $N(E)$: ολοκληρωμένη πυκνότητα καταστάσεων

Ο αριθμός καταστάσεων με ενέργεια μικρότερη από E

Η ενέργεια του σωματίου E σαν συνάρτηση της ορμής δίνεται από την σχέση (μη σχετικιστικά):

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \rightarrow p = (2mE)^{1/2}$$

$$N(E) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3 \frac{4\pi}{3} p_o^3} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} (2mE)^{3/2}$$

$$N(E) = \frac{V}{6\pi^2 \hbar^3} (2mE)^{3/2}$$

Δ) $n(E)$: πυκνότητα καταστάσεων

Ο αριθμός των καταστάσεων ανάμεσα σε E , $E + dE$ είναι $n(E)dE$ όπου

$$n(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{V}{4\pi^2 \hbar^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E}$$

Ας δούμε τι αποτελέσματα προκύπτουν από το απλό αυτό μοντέλο για ατομικούς πυρήνες. Δεχόμαστε τις ακόλουθες παραδοχές:

- Τα νουκλεόνια είναι περιορισμένα σε όγκο $V = \frac{4\pi}{3} R^3$, $R = r_o A^{1/3}$
- Τα νουκλεόνια έχουν spin $1/2$, άρα συνοδεύονται από ένα παράγοντα εκφυλισμού $(2S + 1) = (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = 2$
- Έχουμε εδώ δύο ειδών νουκλεόνια, πρωτόνια και νετρόνια, άλλος ένας παράγοντας 2. (Μπορούμε να εισαγάγουμε το ισοτοπικό spin I :

$$I_2 = +\frac{1}{2} \text{ (πρωτόνιο)}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \text{ (νετρόνιο)}$$

Άρα έχουμε έναν παράγοντα εκφυλισμού 4. Μπορούμε τότε να γράψουμε:

$$A = (\text{όγκος τεταρτημορίου}) \times (\text{καταστάσεις ανά μονάδα όγκου}) \times (\text{παράγοντας εκφυλισμού})$$

$$A = \frac{1}{8} \left(\frac{4\pi}{3}\right) p_o^3 \times \frac{V}{(\pi\hbar)^3} \times 4 \quad (1)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \frac{4}{\hbar^3} \left[\frac{4\pi}{3} r_o^3 A\right] \left[\frac{4\pi}{3} p_o^3\right] \quad (2)$$

$$\rightarrow p_o^3 = \frac{(2\pi\hbar)^3}{(r_o)^3} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{9 \pi \hbar^3}{8 r_o^3} \Rightarrow \quad (3)$$

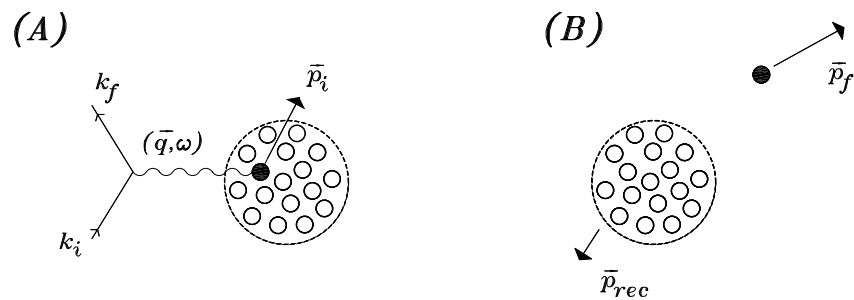
$$p_f^3 = \frac{9 \pi \hbar^3}{8 r_o^3} \quad \varepsilon_f = \frac{p_f^2}{2m} \quad (4)$$

Αν επιλέξουμε $r_0 = 1.2fm$, τότε: $\varepsilon_f = 33MeV$ και $k_f = 248MeV/c$

Το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό. Το πρότυπο αυτό προβλέπει ότι η ενεργεια και η ορμή Fermi είναι η ίδια για όλους τους πυρήνες!

Πειραματική Επιβεβαίωση

Η πιο πειστική μαρτυρία για την εγκυρότητα του προτύπου του αέριου Fermi σε πυρηνικά συστήματα, αλλά και για πυκνά φερμιονικά συστήματα γενικότερα, προέρχεται από την ημιαστική σκέδαση ηλεκτρονίων από πυρήνες. Στην ημιαστική σκέδαση, τα ηλεκτρόνια σκεδάζονται πρωταρχικά από τα νουκλεόνια (τα φορτισμένα πρωτόνια) τα οποία συνθέτουν τον πυρήνα και όχι τον πυρήνα σαν σύνολο. Όπως θα δείξουμε πιο κάτω, αποτέλεσμα της σκέδασης αυτής είναι η αποκάλυψη της κινηματικής κατάστασης του νουκλεονίου από το οποίο προκλήθηκε η σκέδαση. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το κατά πόσο στην συνέχεια συγκεκριμένο νουκλεόνιο αποδεδεμεύτηκε από τον πυρήνα ή όχι είναι αδιάφορο για την κινηματική του ηλεκτρονίου.



Σχ. 2: Σχηματική Αναπαράσταση ημιαστικής σκέδασης ηλεκτρονίων Α) κατά την διάρκεια της σκέδασης και Β) μετά την σκέδαση. Είναι πιο απλό, αλλά όχι αναγκαίο το νουκλεόνιο που απορρόφησε το δυνητικό φωτόνιο να αποδεδεμευθεί από τον πυρήνα.

Εξετάζουμε την διαδικασία της ημιαστικής σκέδασης ηλεκτρονίου από πυρήνα στην προσέγγιση ανεξάρτητου σωματίου. Στην προσέγγιση αυτή το δυνητικό φωτόνιο αλληλεπιδρά μόνο με ένα νουκλεόνιο (το πιο σύνηθες με ένα πρωτόνιο), το οποίο κινείται στον πυρηνικό όγκο χωρίς να αλληλεπιδρά με τα γειτονικά του νουκλεόνια. Με την βοήθεια του σχήματος ορίζουμε τις ακόλουθες ποσότητες: Το αρχικό και τελικό τετράνυσμα του σκεδαζομένου ηλεκτρονίου $k_i = (k_i^0, \vec{k}_i)$ και $k_f = (k_f^0, \vec{k}_f)$, όπως το αρχικό και τελικό τετράνυσμα του σκεδαζομένου νουκλεονίου $p_i = (p_i^0, \vec{p}_i)$ και $p_f = (p_f^0, \vec{p}_f)$. Ο θυγατρικός πυρήνας ανακρούει με ορμή p_{rec} .

Το δυνητικό φωτόνιο που μετέχει στην αντίδραση, χαρακτηρίζεται από ενέργεια $\omega = k_f^0 - k_i^0$ και ορμή $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$. Διατήρηση της ορμής πριν και μετά από την σκέδαση μας δίνει τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{q}$$

$$T_f = \frac{(\vec{p}_i + \vec{q})^2}{2m}$$

$$T_{rec} = \frac{p_i^2}{2(A-1)m} \quad (\ll T_f)$$

όπου T_f είναι η κινητική ενέργεια του σκεδαζόμενου νουκλεονίου και T_{rec} η κινητική ενέργεια του ανακρουομένου πυρήνα (θεατή).

Διατήρηση της ενέργειας πριν και μετά απο την σκέδαση $E_i = E_f$ μας δίνει τις ακόλουθες εξισώσεις:

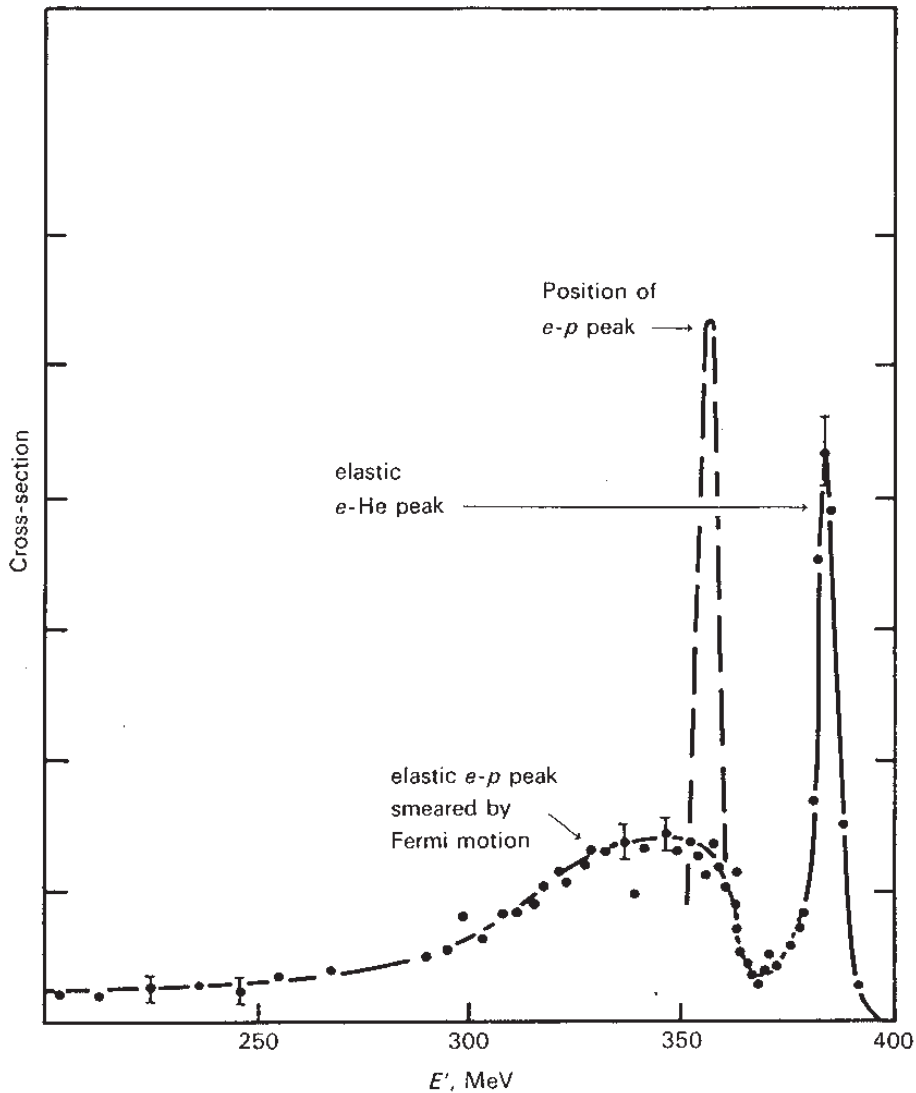
$$E_i = \omega + \left(\frac{p_i^2}{2m} - \varepsilon\right) + E_{spectator}$$

$$E_f = T_f + E_{spectator} + T_{rec}$$

Όπου ε είναι η ενέργεια αλληλεπίδρασης του νουκλεονίου στο μέσο πεδίο που το δεσμεύει και $E_{spectator}$ η ενέργεια των $(A-1)$ νουκλεονίων του πυρήνα, που στην προσέγγιση του ανεξάρτητου σωματίου συμμετέχουν σαν απλοί θεατές. Λύνοντας τις πιο πάνω εξισώσεις, σαν συνάρτηση του ω βρίσκουμε:

$$\omega + \left(\frac{p_i^2}{2m} - \varepsilon\right) = \left(T_f = \frac{p_i^2 + q^2 + 2\vec{q} \cdot \vec{p}_i}{2m}\right) + T_{rec}$$

$$\rightarrow \omega = \frac{q^2}{2m} + \frac{\vec{q}\vec{p}_i}{m} + (\varepsilon + T_{rec})$$

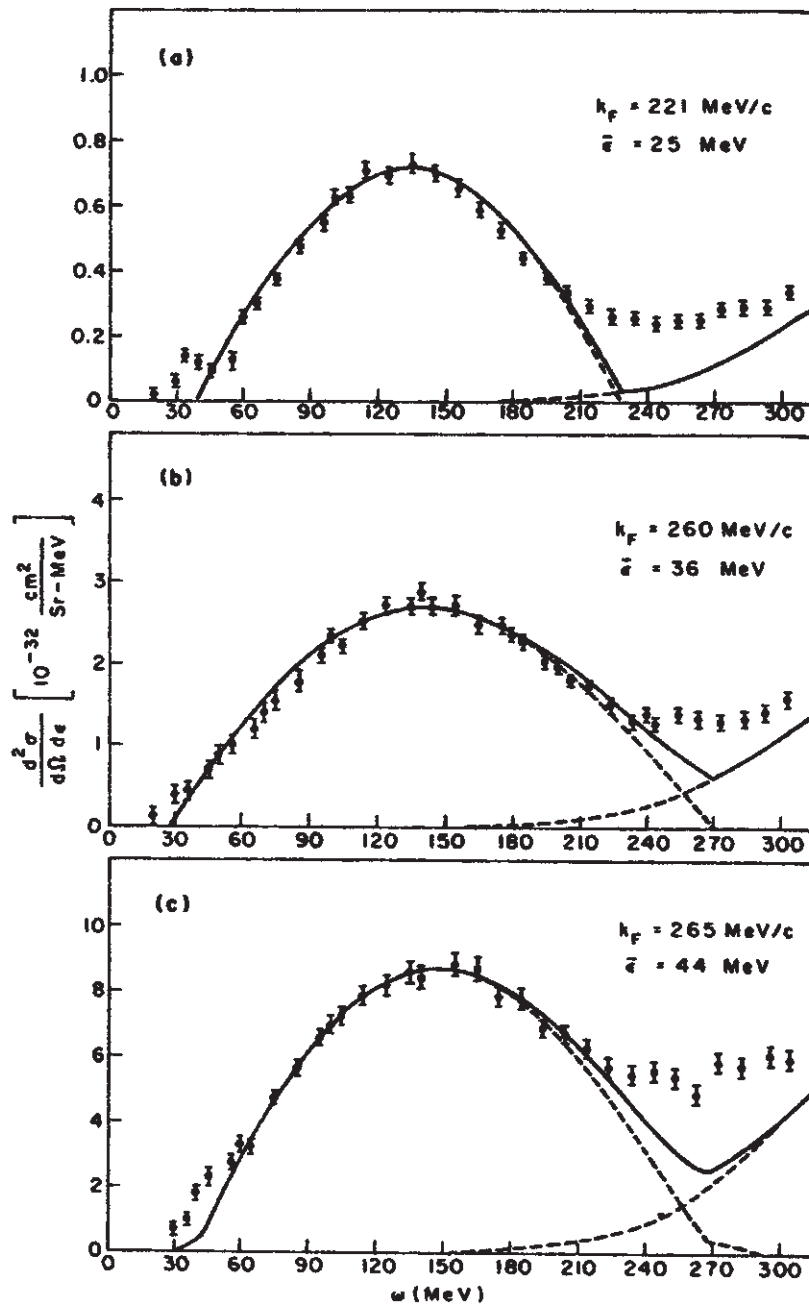


Σχ. 3: Σύγκριση ελαστικής σκεδασης απο ελεύθερα πρωτόνια (στοχος Υδρογόνου) και ημιαστικής σκεδασης απο πυρήνα ^4He .

Η πιο πάνω εξίσωση φανερώνει την ικανότητα των πειραμάτων ημιαστικής σκέδασης να αποκαλύψουν την αρχική κατανομή ορμών στον υπο μελέτη πυρήνα. Ο πιο πάνω τύπος δείχνει ότι για σκέδαση απο πρωτόνια (στόχος υδρογόνου), όλη η ενεργός διατομή θα συγκεντρωθεί σε μία κορυφή. Σε πυρήνες όπου τα νουκλεόνια είναι δέσμια στον πυρήνα, μπορούμε να μελετήσουμε την σκέδαση σαν συνάρτηση της ω στην περιοχή που θα αντιστοιχούσε ελαστική σκέδαση απο υδρογόνο. Εκει θα αναμένουμε μια πεπλατυσμένη κορυφή της οποίας το πλάτος θα είναι αντίστοιχο με τις κινητικές ενέργειες που έχουν τα νουκλεόνια και με μέγιστο πλάτος να δίνεται απο την ενέργεια Fermi.

Τα πειράματα αυτά για πρώτη φορά πραγματοποιήθηκαν στον επιταχυντή του πανεπιστημίου Stanfoud. Πειραματικά φάσματα, ενεργού διατομής σαν συνάρτηση της ενέργειας ω του δυνητικού φωτονίου, παρουσιάζονται στο Σχήμα 3. Ανάλυση των δεδομένων με βάση τον πιο πάνω φορμαλισμό

έδωσαν εντυπωσιακά και απρόσμενα αποτελέσματα. Το πρότυπο του αερίου Fermi, περιέγραφε τα δεδομένα με εξαιρετικά καλή ακρίβεια.



Σχ. 4: Ενεργός διατομή απο πειράματα ημιαστικής σκεδάσης ηλεκτρονίων απο α) ^{12}C , b) ^{118}Sn και c) ^{208}Pb . Η συνεχής καμπύλη είναι το άθροισμα της πρόβλεψης του προτύπου του αερίου Fermi [1] με τις παραμέτρους προσαρμοσμένες στις τιμές που δείχνει το σχήμα και απλοϊκού μοντέλου ηλεκτοπαραγωγής πιονίων (σε μεγάλα ω).

Πυρήνας	Ορμή k_F	Ενέργεια ϵ_F
${}^6\text{Li}$	169	15
${}^{12}\text{C}$	221	26
${}^{24}\text{Mg}$	235	29
${}^{40}\text{Ca}$	251	34
${}^{89}\text{Y}$	260	36
${}^{118}\text{Sn}$	260	36
${}^{181}\text{Ta}$	265	37
${}^{208}\text{Pb}$	265	37

Πίνακας 1: Η ορμή και η ενέργεια Fermi που προκύπτουν από την προσαρμογή της πρόβλεψης του αερίου Fermi [1] στα δεδομένα της ημιαστικής σκέδασης από σειρά πυρήνων.

Τα πρωτοποριακά πειράματα του Stanford έδωσαν για μια σειρά από ισότοπα για την ορμή k_F και ενέργεια ϵ_F τις τιμές που φαίνονται στον πίνακα.

Η εντυπωσιακή ικανότητα του αερίου Fermi να περιγράψει την ημιαστική σκέδαση ηλεκτρονίων από ατομικούς πυρήνες δεν αφήνει καμμία αμφιβολία ότι πρότυπα ανεξάρτητου σωματίου, ανταποκρίνονται και απεικονίζουν τους πυρήνες. Έτσι πρότυπα μέσου πεδίου έχουν την δυνατότητα και μπορούν να περιγράψουν τα πυρηνικά φαινόμενα σε βαρείους πυρήνες. Είναι έτσι μέλημα μας να προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε την κατάλληλη θεωρία μέσου πεδίου που να περιγράφει τα φαινόμενα αυτά, και ιδιαίτερα βέβαια την φλοιώδη δομή (Μαγικούς αριθμούς κλπ.).

Δεν είναι καθόλου προφανές γιατί το πρότυπο του αερίου Fermi και ίσως άλλα πρότυπα που κάνουν χρήση πύλο περιπλοκών δυναμικών ενός σώματος, μπορούν να περιγράψουν με επιτυχία ένα πυκνό σύστημα, όπως οι ατομικοί πυρήνες. Θα απαντήσουμε το ερώτημα αυτό σε μελλοντική διάλεξη.

Ασκήσεις

- 1.1 Στην εξέταση του δυναμικού απείρου βάθους (βλέπε σχετική ενότητα) καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι γνωρίζουμε με απόλυτη ακρίβεια την ορμή του σωματίου και με σχετικά καλή ακρίβεια την θέση του. Παραβαίνει αυτό την αρχή της αβεβαιότητας;
- 1.2 Να περιγράψετε το πυρήνα ^{16}O στο πρότυπο αερίου Fermi.

Αναφορές

- [1] Moniz E.J. et. al., *Phys. Rev. Letters* **26**, 445 (1971).
- [2] Frois B. and Papanicolas C. N., *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **37**, 133 (1987).
- [3] G. van der Steenhoven and P.K.A. Huberts, in *Modern Topics in Electron Scattering*, B. Frois and I. Sick eds. ,World Scientific (1991)