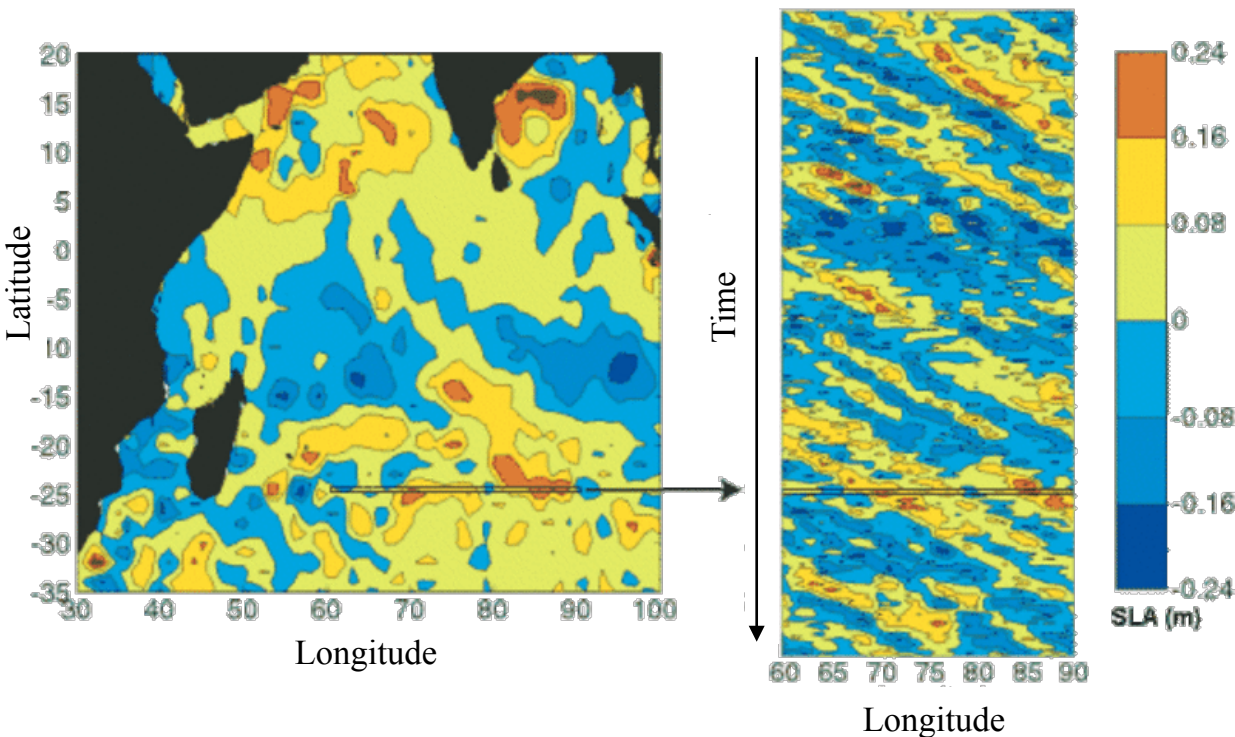




7. Ocean Waves in the presence of rotation

7. Ωκεάνια κύματα παρουσία περιστροφής



• Ωκεάνια κύματα παρουσία περιστροφής - Ocean waves in the presence of rotation:

- Poincare' Waves
- Kelvin Waves
- Rossby Waves

Εξισώσεις εργασίας:

Conservation of momentum equations:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + A_H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Conservation of mass equation:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

* για απλούστευση θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις διακριτών στρωμάτων (διάδοση στις διευθύνσεις x,y) - Δες “Δυναμική των Ρευστών” και Διάλεξη 4



Θα μελετήσουμε βαροτροπικά (ομογενές μέσο) κύματα, μεγάλης κλίμακας, όπου

$$Ro = \frac{U}{fL} \ll 1 \quad (\text{γραμμικά κύματα})$$

αλλά τώρα

$$Ro_T = \frac{\text{Temporal changes}}{\text{Rotation}} = \frac{U}{T} \frac{1}{fU} = \frac{1}{fT} \sim 1$$

τώρα T είναι της τάξης της περιόδου και όχι U/L .

Επιπλέον, για απλούστευση θα χρησιμοποιήσουμε

$$Ek = \frac{A_H}{fL^2} \left(\text{or } \frac{A_V}{fH^2} \right) \ll 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + fv \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - fu \quad (12)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (13)$$

**Εξισώσεις
εργασίας**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g' \frac{\partial h}{\partial y} - fu$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0$$

Για δυναμική δύο στρωμάτων



Henri Poincaré

Επιφανειακά κύματα παρουσία περιστροφής (Poincare waves)

Θεωρώντας μεγάλη κλίμακα (αλλά όχι πλανητική) η f μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, οι κυματικές λύσεις για τα u , v και η μπορούν να γραφούν ως

$$u = u_0 e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$$v = v_0 e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$$\eta = \eta_0 e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

όπου k και l είναι οι x - και y -συνιστώσες του κυματαριθμού και ω η συχνότητα του κύματος. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (11) έως (13):

$$-i\omega u - fv = -igk\eta$$

$$-i\omega v + fu = -igl\eta$$

$$-i\omega\eta + H(iku + ilv) = 0$$

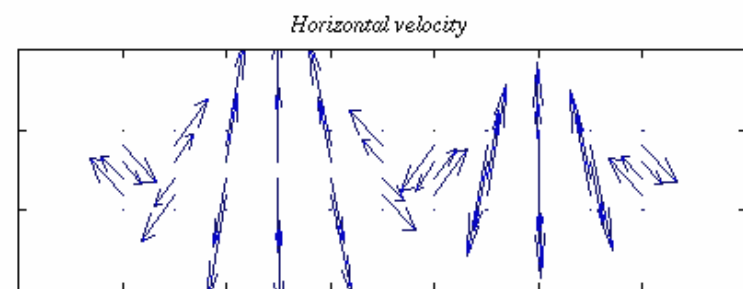
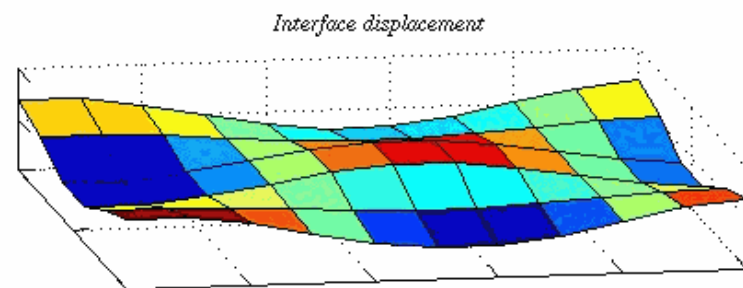
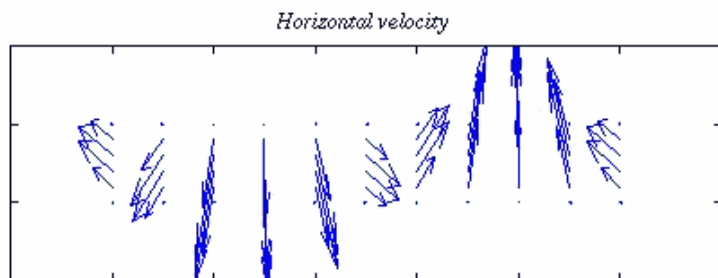
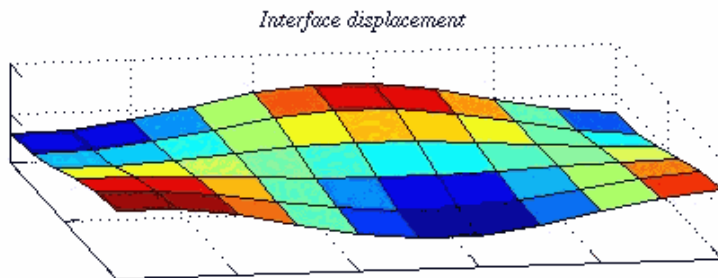
για μη τετριμμένη λύση, η ορίζουσα των συντελεστών πρέπει να είναι ίση με μηδέν, άρα

$$\omega [\omega^2 - f^2 - gH(k^2 + l^2)] = 0 \quad (14)$$

Μία λύση είναι $\omega = 0$ (steady state - γεωστροφή). Η άλλες λύσεις είναι:

$$\omega = \sqrt{f^2 + gHK^2} \quad (15) \text{ or for internal mode: } \omega = \sqrt{f^2 + g'hK^2}$$

όπου $K = (k^2 + l^2)^{1/2}$. Τα κύματα που περιγράφονται από τη σχέση αυτή διασποράς ονομάζονται **κύματα Poincaré**.



Στο όριο $f=0$ (ή αντίστοιχα $K^2 \gg f^2/gH$ ή $K^2 \gg 1/R^2$) η σχέση διασποράς γίνεται

$$\omega = \sqrt{gH}K \quad \left(\omega = \sqrt{g'h}K \right)$$

William Thomson,
Lord Kelvin

που είναι η σχέση διασποράς για τα “απλά” επιφανειακά μακρά κύματα βαρύτητας και

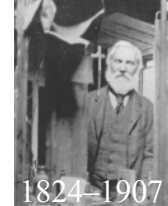
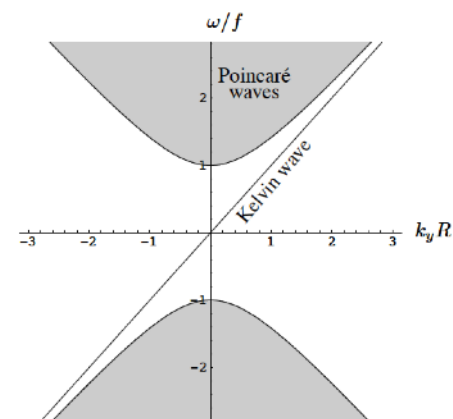
$$R = \frac{\sqrt{gH}}{f} \quad \left(R = \frac{\sqrt{g'h}}{f} \right)$$

η **Ακτίνα Αποδιαμόρφωσης Rossby (Rossby Radius of Deformation)** που δείχνει τη σημαντικότητα της περιστροφής σε σχέση με την κλίμακα L .

Σε αντίθετη περίπτωση ($\lambda \gg R$)

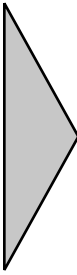
$$\omega = f$$

αδρανειακές κινήσεις (inertial oscillations).



KELVIN WAVES (μια ειδική λύση)

Αναζητώντας λύση στις (11) έως (13) για την περίπτωση ύπαρξης ορίου (“τοίχου”), όπου η κάθετη ταχύτητα (v στο συγκεκριμένο παράδειγμα) μηδενίζεται, ο Sir William Thomson (Lord Kelvin) πρότεινε την εξέταση λύσης, όπου η κάθετη στο όριο ταχύτητα μηδενίζεται παντού. Άρα, οι εξισώσεις καταλήγουν σε:



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ f u &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Λύσεις της μορφής:

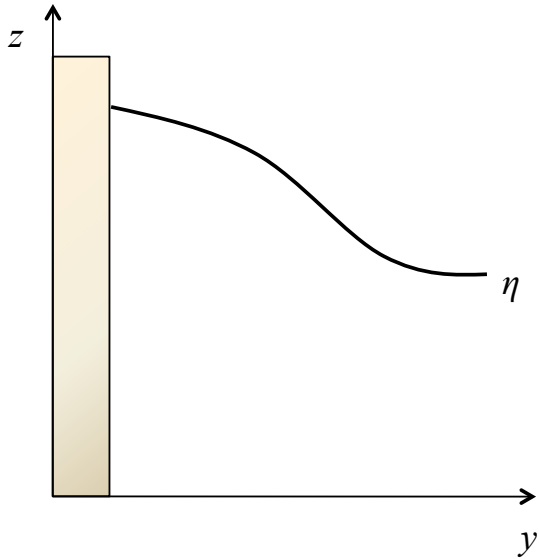
$$[u, \eta] = [\hat{u}(y), \hat{\eta}(y)] e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\left. \begin{aligned} -i\omega \hat{u} &= -igk\hat{\eta} \quad (a) \\ f\hat{u} &= -g \frac{d\hat{\eta}}{dy} \quad (b) \\ -i\omega \hat{\eta} + iHl\hat{u} &= 0 \quad (c) \end{aligned} \right\}$$

From (a) and (c):

$$\begin{aligned} \hat{\eta} (\omega^2 - gHk^2) &= 0 \\ \Rightarrow \omega &= \pm k \sqrt{gH} \end{aligned}$$

$$c = \pm \sqrt{gH}$$



Τα κύματα αυτά εμφανίζουν μέγιστη διαταραχή στην ακτή (έχοντας το όριο στα δεξιά/αριστερά στο βόρειο/νότιο ημισφαίριο) και μειώνονται εκθετικά με την απόσταση από την ακτή.

μείωση της διαταραχής
από την ακτή με $\frac{y}{R_D}$ όπου

Συνδυάζοντας (b) και (c):

$$\frac{d\hat{\eta}}{dy} + \frac{f}{c}\hat{\eta} = 0$$

Λύση: $\hat{\eta} = \eta_0 e^{-\frac{f}{c}y}$

$$\eta = \eta_0 e^{-\frac{f}{c}y} \cos k(x - ct)$$

$$u = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H}} e^{-\frac{f}{c}y} \cos k(x - ct)$$

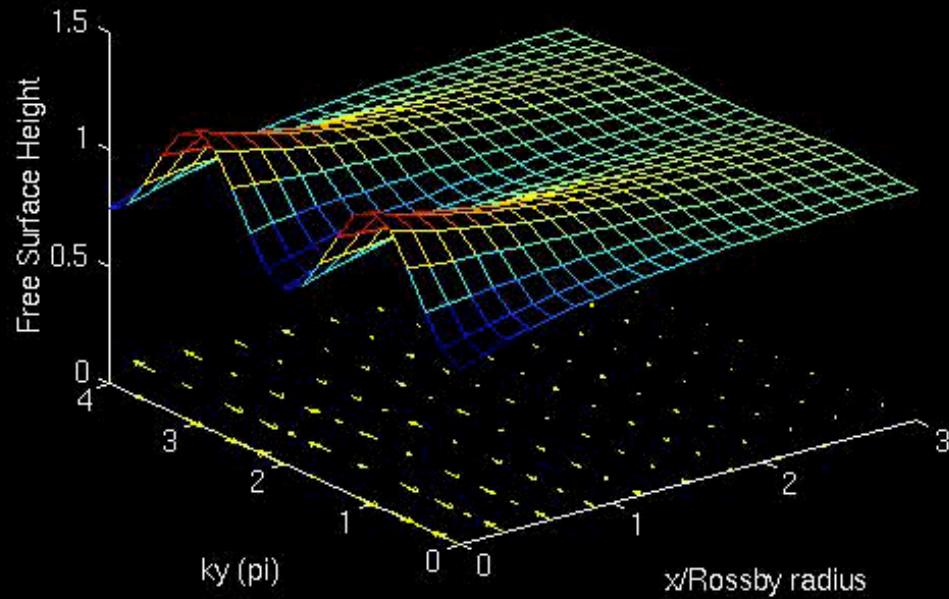
$$R_D = \frac{\sqrt{gH}}{f}$$

**Rossby Radius
of Deformation**

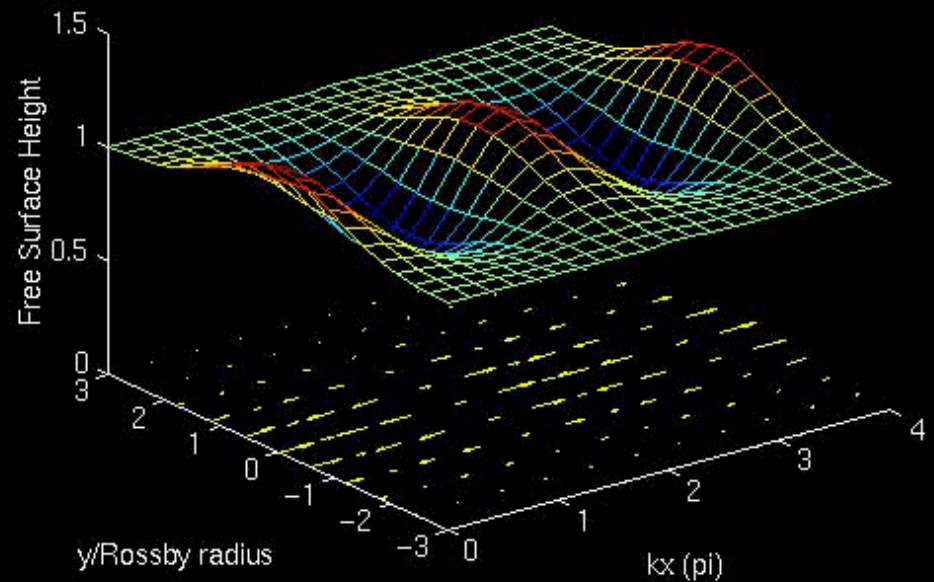
Για απλά εσωτερικά κύματα Kelvin:

$$c = \sqrt{g'h}$$

$$R_D = \frac{\sqrt{g'h}}{f}$$



Kelvin Wave Examples



Coastal Kelvin Wave

Equatorial Kelvin Wave



Πλανητικά κύματα (Rossby waves)

Η επόμενη κατηγορία κυμάτων που θα μελετήσουμε έχει κλίμακες τόσο μεγάλες και τα κύματα είναι τόσο αργά, που δέχονται όχι μόνο την επίδραση της περιστροφής αλλά και της μεταβολής της σε σχέση με το γεωγραφικό πλάτος (**planetary effect** - $f = 2\Omega \sin \varphi$ - τα κύματα αυτά είναι οι μηχανισμοί εξέλιξης των μεγάλων γεωστροφικών πλανητικών συστημάτων που μελετήσαμε σε προηγούμενες διαφάνειες).



Carl-Gustaf
Arvid Rossby

Αν θεωρήσουμε ότι φ_0 είναι το γεωγραφικό πλάτος στο μέσο της περιοχής που εξελίσσεται ένα τέτοιο κύμα, μπορούμε να προσεγγίσουμε το γεωγραφικό πλάτος ως $\varphi = \varphi_0 + y/a$ (* για μικρές γωνίες $\sin \varphi \approx \varphi$), όπου a είναι η ακτίνα του πλανήτη ($a_{\Gamma\eta} = 6371 \text{ km}$). Θεωρώντας το y/a μικρή μεταβολή μπορούμε να αναπτύξουμε τη συχνότητα Coriolis σε σειρά Taylor

$$f = 2\Omega \sin \varphi_0 + 2\Omega \frac{y}{a} \cos \varphi_0 + \dots$$

κρατώντας μόνο τους δύο πρώτους όρους, μπορούμε να γράψουμε

$$f = f_0 + \beta_0 y \quad (16)$$

όπου $\beta_0 = 2 (\Omega/a) \cos \varphi_0$ ονομάζεται παράμετρος β (**β parameter**). Τυπικές τιμές για μεσαία γεωγραφικά πλάτη είναι $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ και $\beta_0 = 2 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$. Η προσέγγιση κατά την οποία κρατάμε μόνο τον πρώτο όρο της σειράς Taylor ονομάζεται **f -plane approximation** και η προσέγγιση (16) **β -plane approximation**.

Αντικαθιστώντας την (16) στις εξισώσεις εργασίας (11-13)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (f_0 + \beta_0 y) v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (f_0 + \beta_0 y) u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (f_0 + \beta_0 y) v = -g' \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (f_0 + \beta_0 y) u = -g' \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0$$

Για δυναμική δύο στρωμάτων

Λόγω της πολύ αργής εξέλιξης των διαδικασιών αυτών, μια πρώτη προσέγγιση είναι ότι οι ταχύτητες καθορίζονται από τη γεωστροφική ισορροπία (**quasi-geostrophic approximation**) και οι μεγάλοι όροι (που περιέχουν τα f_0 , g και H) ορίζουν τη γεωστροφική δυναμική του συστήματος (ενώ οι μικρότεροι όροι ορίζουν τις διαταραχές γύρω από τη δυναμική αυτή). Με τη προσέγγιση αυτή

$$v \simeq \frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (20)$$

$$u \simeq -\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (21)$$

Quasi-geostrophic approximation

Αντικαθιστώντας τις (20-21) στους μικρούς όρους των εξισώσεων εργασίας (17-18)

$$-\frac{g}{f_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} - f_0 v - \frac{\beta_0 g}{f_0} y \frac{\partial \eta}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{g}{f_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + f_0 u - \frac{\beta_0 g}{f_0} y \frac{\partial \eta}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

και λύνοντας ως προς u, v

$$u = -\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{f_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + \frac{\beta_0 g}{f_0^2} y \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (22)$$

$$v = \underbrace{\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\text{geostrophic}} - \underbrace{\frac{g}{f_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} + \frac{\beta_0 g}{f_0^2} y \frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\text{a-geostrophic}} \quad (23)$$

Αντικαθιστώντας τις (22-23) στην (19)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - R^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \eta - \beta_0 R^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

όπου $R = \sqrt{gH}/f$ είναι η ακτίνα αποδιαμόρφωσης Rossby και για internal mode: $R = \sqrt{g'h}/f$

Αναζητούμε και πάλι κυματική λύση της μορφής $\eta = \eta_0 e^{i(kx+ly-\omega t)}$

$$\omega = -\beta_0 R^2 \frac{k}{1 + R^2 (k^2 + l^2)} \quad (25) \quad \text{Σχέση διασποράς κυμάτων Rossby} \\ \text{(ή πλανητικών κυμάτων)}$$

Στο όριο $\beta_0 = 0$ και $\omega = 0$ και η λύση αντιστοιχεί στη γεωστροφική ισορροπία σε f -plane.

Διερεύνηση με βάση το μήκος κύματος λ ($= 2\pi/K$) των κυμάτων Rossby:

Βραχέα κύματα Rossby: $\lambda < R \rightarrow K^2 \gg \frac{1}{R^2} \rightarrow \omega \simeq -\frac{\beta_0 k}{K^2} \left(\text{for } l = 0 \rightarrow \omega \simeq -\frac{\beta_0}{k} \right)$

Μακρά κύματα Rossby: $\lambda > R \rightarrow K^2 \ll \frac{1}{R^2} \rightarrow \omega \simeq -\beta_0 K R^2 \left(\text{for } l = 0 \rightarrow \omega \simeq -\beta_0 k R^2 \right)$

Φασική ταχύτητα (στη x-διεύθυνση) $c_x = \omega/k$

$$c_x \equiv \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta_0 R^2}{1 + R^2 (k^2 + l^2)} \quad \text{πάντα αρνητική}$$

ενώ η φασική ταχύτητα (στη y-διεύθυνση) $c_y = \omega/l$ μπορεί να έχει οποιοδήποτε πρόσημο (η φασική ταχύτητα έχει γενική δυτική διεύθυνση – W – NW – SW).

Για τη μελέτη της ομαδικής ταχύτητας θα περιοριστούμε στη x-διεύθυνση ($l = 0$) και

$$\omega = -\frac{\beta_0 k}{\frac{1}{R^2} + k^2}$$

Βραχέα κύματα Rossby: $\lambda < R \rightarrow \omega \simeq -\frac{\beta_0}{k} \rightarrow c_{gx} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\beta_0}{k^2}$

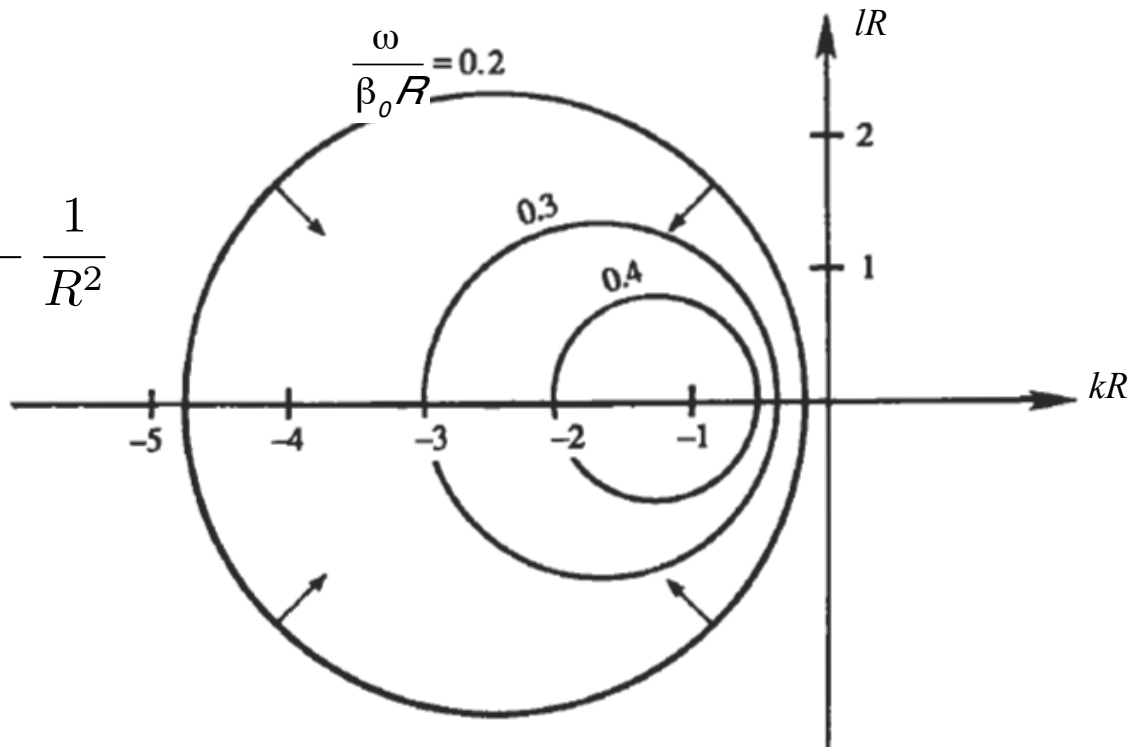
Μακρά κύματα Rossby: $\lambda > R \rightarrow \omega \simeq -\beta_0 k R^2 \rightarrow c_{gx} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = -\beta_0 R^2$

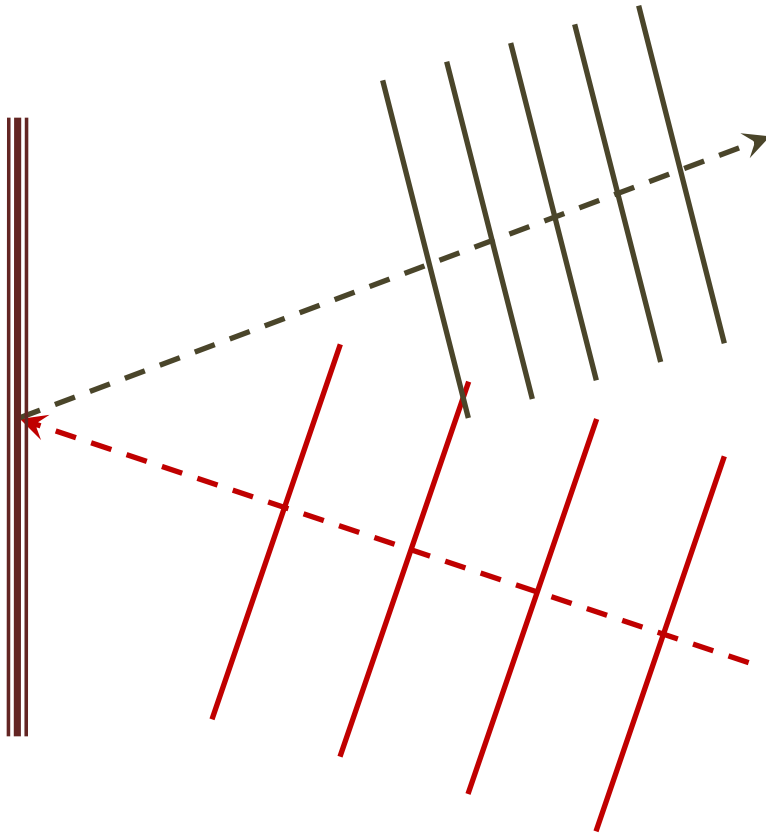
και $c_g(\text{long}) > c_g(\text{short})$

Από την (25)

$$\left(k + \frac{\beta_0}{2\omega}\right)^2 + l^2 = \left(\frac{\beta_0}{2\omega}\right)^2 - \frac{1}{R^2}$$

που περιγράφει κύκλο στο χώρο των κυματαριθμών (k, l)





Wavepacket reflection on the western boundary

$$\omega = -\frac{\beta k}{\frac{1}{R^2} + k^2}$$

Short wavelengths: $k \gg \frac{1}{R}$

$$\rightarrow \omega \approx -\frac{\beta}{k} \rightarrow c_g = \frac{\beta}{k^2}$$

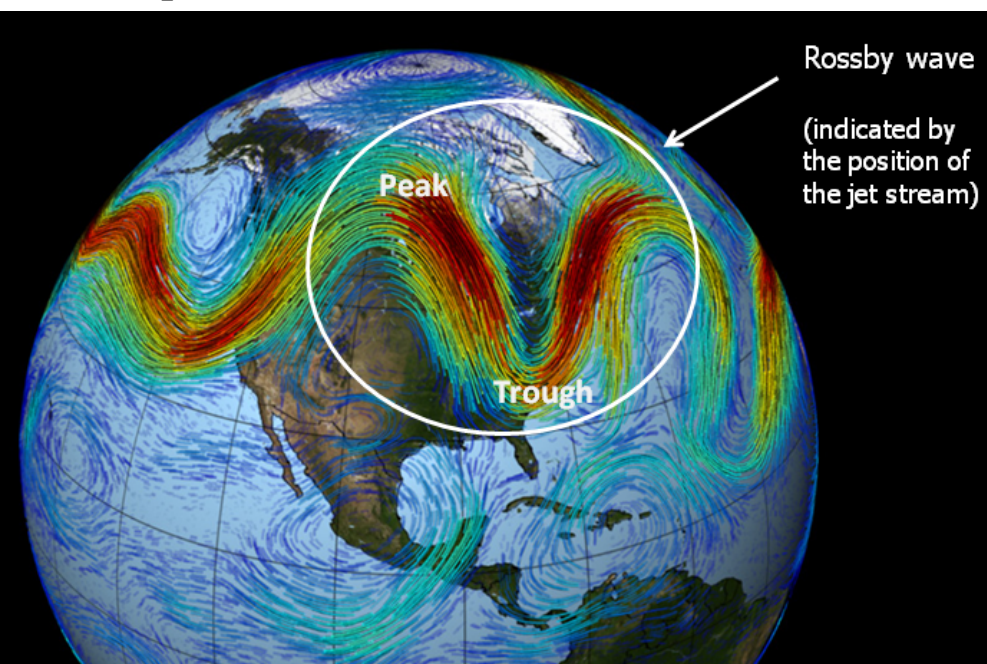
Long wavelengths: $k \ll \frac{1}{R}$

$$\rightarrow \omega \approx -\beta k R^2 \rightarrow c_g = -\beta R^2$$

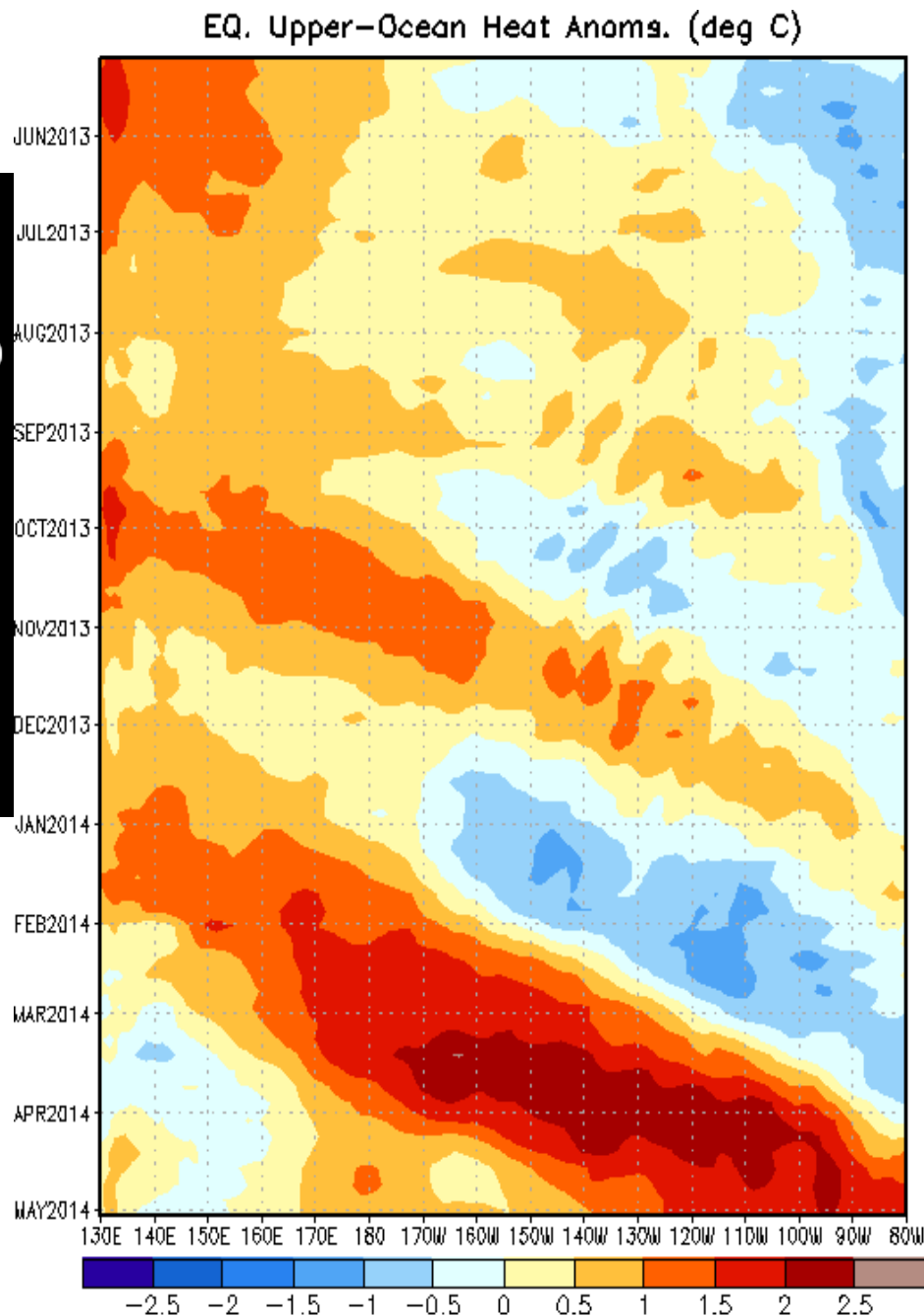
$$c_g(L) > c_g(S)$$

Πλανητικά κύματα (παραδείγματα)

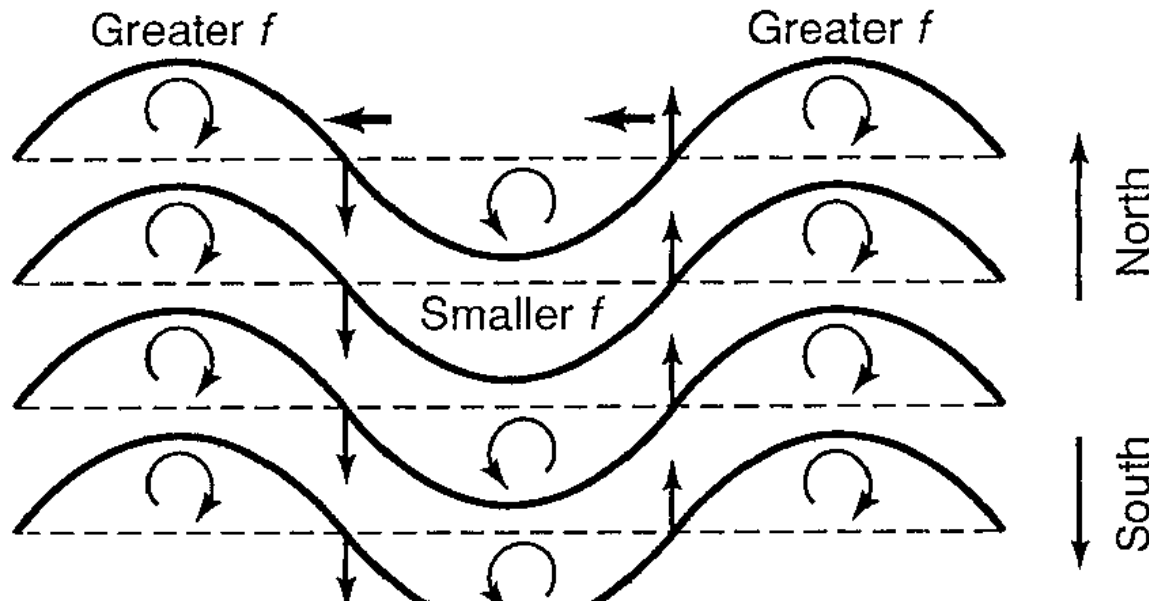
Atmospheric



Oceanic
(Hornvoller diagram)

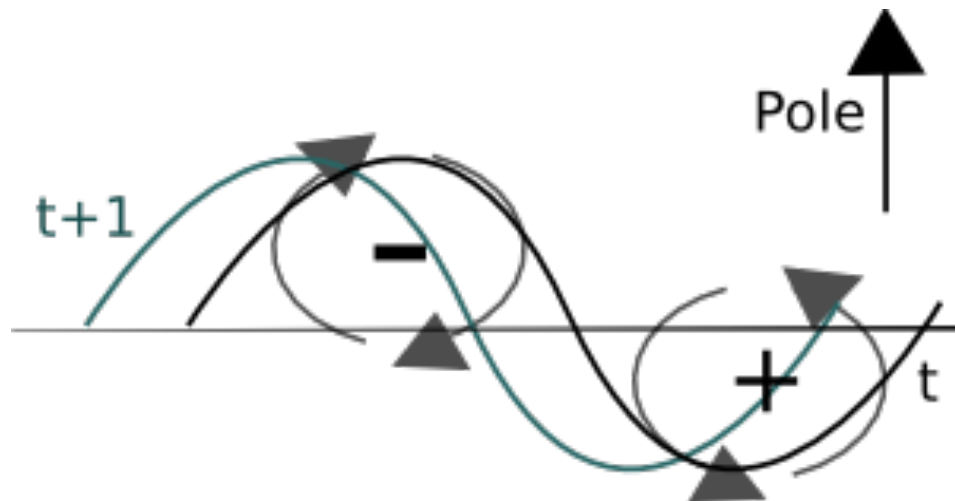


Ο μηχανισμός των πλανητικών κυμάτων



Θεωρώντας ασήμαντες απώλειες από τις μη συντηρητικές δυνάμεις (τριβή) και για τη διατήρηση του δυναμικού στροβιλισμού

$$\frac{d}{dt}(f + \zeta) = 0$$



Μπορούμε να προσομοιάσουμε το β -effect με τις αντίστοιχες μεταβολές στην τοπογραφία (θ , σε πλανητική κλίμακα). Η σχέση διασποράς είναι αντίστοιχη των κυμάτων Rossby. Αξιοποιούμε αυτό το γεγονός για τη μελέτη στο εργαστήριο των ιδιοτήτων των κυμάτων Rossby.

$$\omega = \frac{\theta g}{f} \frac{k}{1 + R^2 (k^2 + l^2)}$$

