



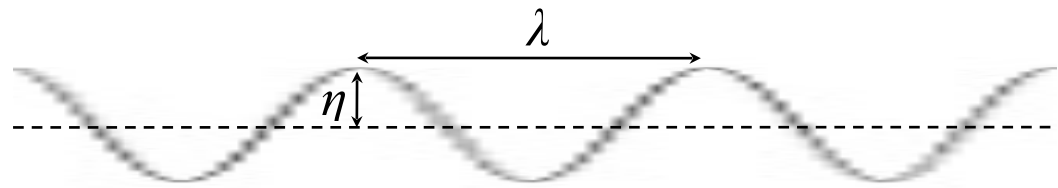
6. Oceanic Gravity Waves

6. Βαρυντικά Κύματα στον Ωκεανό



- Εισαγωγικές έννοιες για ωκεάνια κύματα - Waves in the ocean
- Επιφανειακά βαρυντικά κύματα - Surface gravity waves
- Ανεμογενή κύματα - Wind waves
- Σπάσιμο κύματος - Wave breaking
- Εσωτερικά βαρυντικά κύματα - Internal gravity waves

Characteristic properties of waves



- **Wavelength (λ):** The distance between two consecutive peaks and
- **Wavenumber (K)**

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- **Period (T):** The time it takes for two consecutive peaks to pass from a point in space and
- **Frequency (ω)**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- **Phase Speed (C):** The speed of a monochromatic wave
- **Group Speed (C_g):** The speed of a wave packet

$$c \equiv \frac{\omega}{K} = \frac{\lambda}{T}$$

$$c_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial K}$$

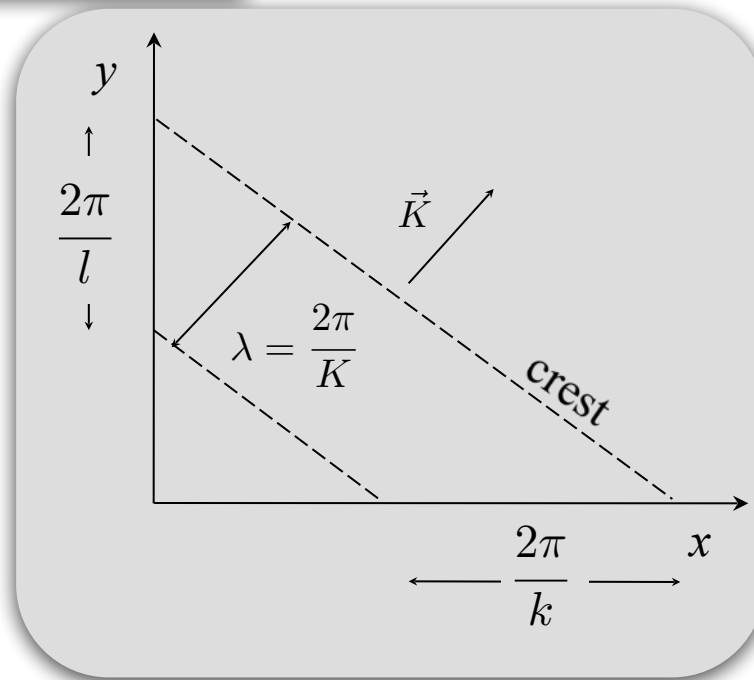
- **Wave Energy (E_w):**

$$E_w = \rho_w g \langle \eta^2 \rangle$$

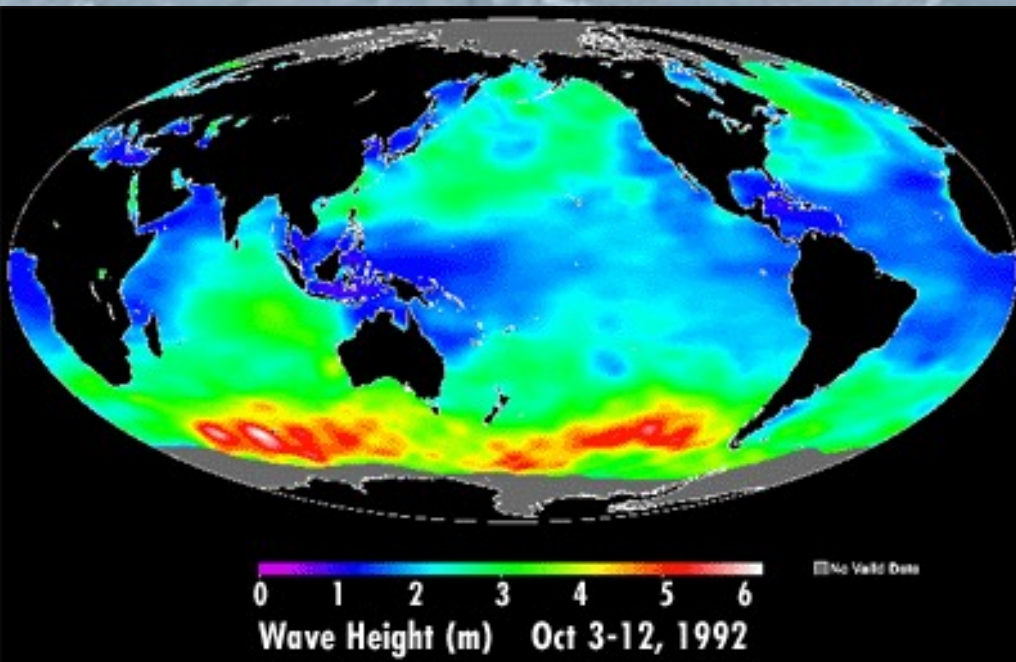
- **Significant Wave Height ($H_{1/3}$):** The average height (double amplitude) of the 1/3 largest waves

$$H_{1/3} = 4 \langle \eta^2 \rangle^{1/2}$$

- **Fetch:** The length of water over which a given wind
- has blown

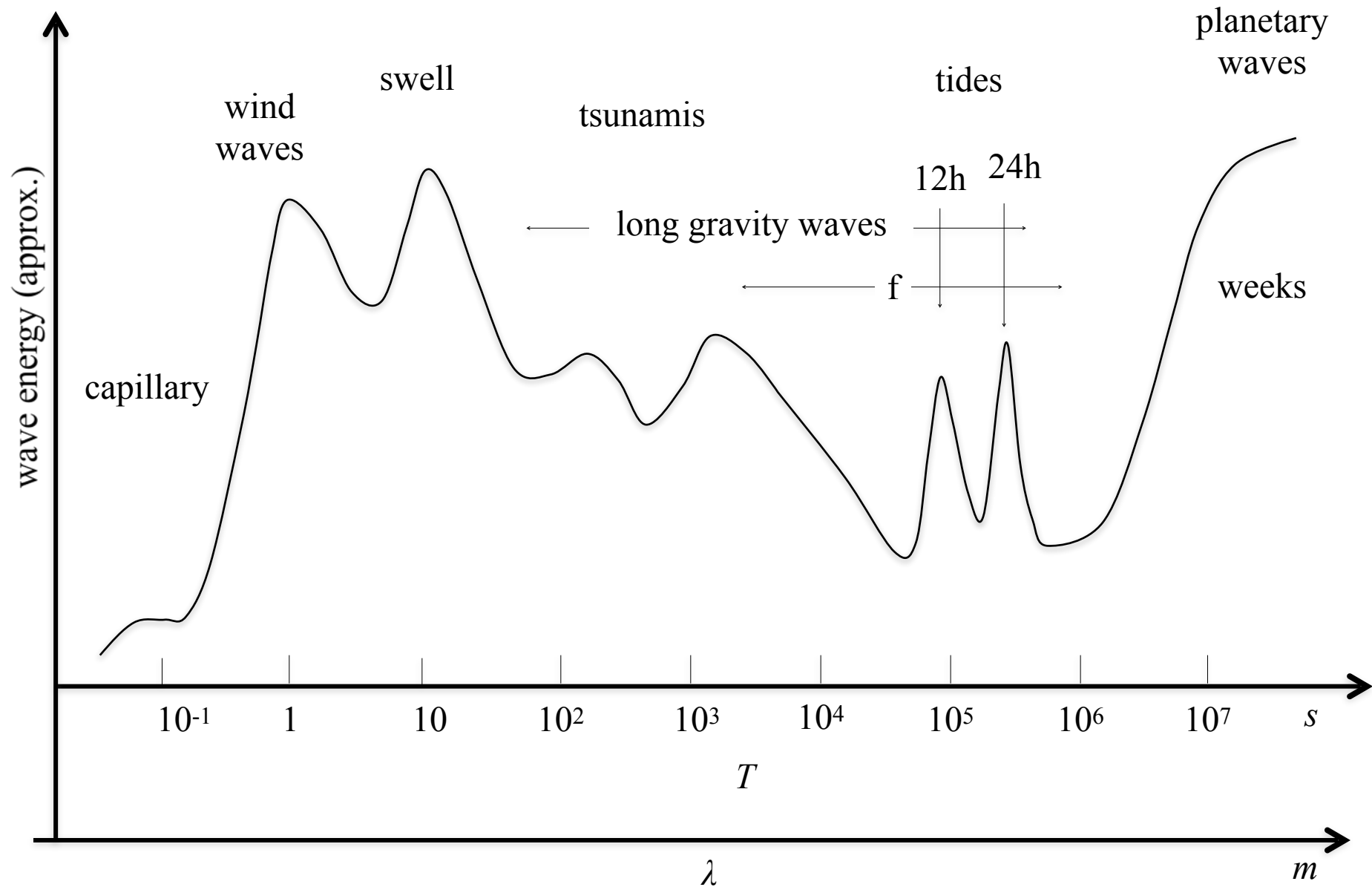


Μέρος Ι. Επιφανειακά Κύματα



Wave height as observed by NASA's TOPEX/Poseidon's dual-frequency radar altimeter

The oceanic wave spectrum



Working equations

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{u} - g + A_H \nabla_H^2 \vec{u} + A_V \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} \quad \text{Momentum Conservation}$$

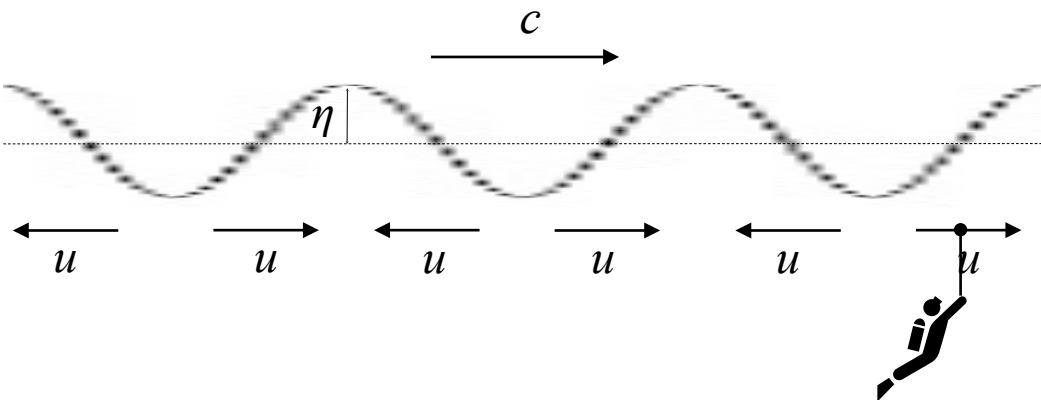
$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{Mass Conservation}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + A_H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{(Incompressible flow)}$$

*

$$R_{oT} = \frac{\text{Temporal Changes}}{\text{Coriolis Term}} = \frac{U}{T} \frac{1}{fU} = \frac{1}{fT}$$



surface gravity waves: $T \sim$ up to tens/hundreds seconds

$$R_{oT} = \frac{\text{Temporal Changes}}{\text{Coriolis Term}} = \frac{U}{T} \frac{1}{fU} = \frac{1}{fT} \gg 1$$



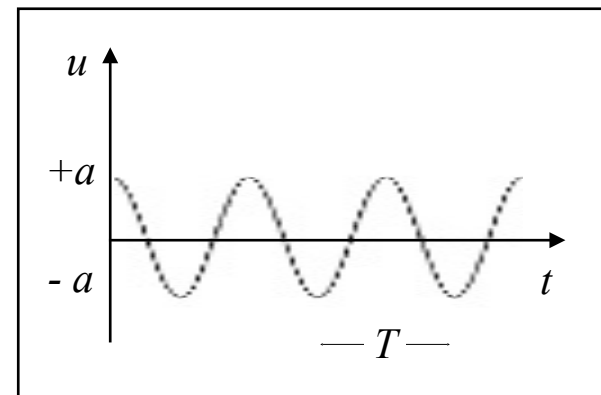
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \cancel{fu} + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \cancel{fv} + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + A_H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

linear

inviscid



Linear gravity waves in barotropic fluid

$$R_{oT} = \frac{\text{Temporal changes}}{\text{Coriolis term}} = \frac{U}{T} \frac{1}{fU} = \frac{1}{fT} \gg 1$$

$$E_K = \frac{\text{Viscosity}}{\text{Coriolis term}} = \frac{A_H}{fL^2} \left(\text{and } \frac{A_V}{fH^2} \right) \ll 1$$

$$F_R = \frac{U}{\sqrt{gH}} \ll 1 \quad (\text{or } \rho = \rho_0)$$

Scaling parameters

Linear waves

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + A_H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3)$$

where $P = p - g\rho_0 z$

$$\frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial}{\partial y}(2) + \frac{\partial}{\partial z}(3)$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right)$$

= 0 (because of continuity)

$$\boxed{\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0}$$

Εξίσωση LAPLACE

Boundary Conditions:

at $z = 0$

$$P = \rho_0 g \eta$$

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

at $z = -H$

$$w = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Αναζητούμε κυματικές λύσεις:

$$\eta = \eta_0 \cos(kx + y - \omega t)$$

Για απλούστερες λύσεις αγνοούμε τη μία οριζόντια διεύθυνση

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \right)$$

Κυματικές λύσεις για Laplace equation:

$$\boxed{P = (Ae^{kz} + Be^{-kz}) \cos(kx - \omega t)}$$

Από την οριακή συνθήκη στην επιφάνεια της θάλασσας:

$$A + B = \rho_0 g \eta_0$$

Από την οριακή συνθήκη στο βυθό της θάλασσας:

$$Ae^{-kH} + Be^{kH} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B = \rho_0 g \eta_0 \\ Ae^{-kH} + Be^{kH} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = \rho_0 g \eta_0 \frac{e^{kH}}{e^{kH} + e^{-kH}} \\ B = \rho_0 g \eta_0 \frac{e^{-kH}}{e^{kH} + e^{-kH}} \end{array}$$

$$P = \rho_0 g \eta_0 \frac{e^{k(z+H)} + e^{-k(z+H)}}{e^{kH} + e^{-kH}} \cos(kx - \omega t) = \frac{\rho_0 g \eta_0 \cosh[k(z+H)]}{\cosh(kH)} \cos(kx - \omega t)$$

Από την εξίσωση (3):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{kg\eta_0 \sinh[k(z+H)]}{\cosh(kH)} \cos(kx - \omega t)$$

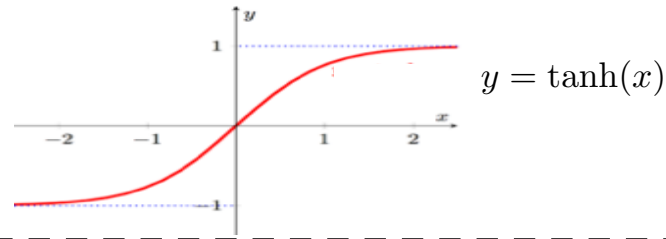
Χρησιμοποιώντας την επιφανειακή οριακή συνθήκη όπου: $\left(w = \frac{\partial \eta}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right)$

$$\frac{kg\eta_0 \sinh(kH)}{\cosh(kH)} \cos(kx - \omega t) = \omega^2 \eta_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\omega^2 = gk \tanh(kH)$$

Dispersion relation – Σχέση διασποράς

$$\omega^2 = gk \tanh(kH)$$



Short waves (βραχέα κύματα) - Deep water

$\lambda < H$ (short wavelength or deep ocean) $\Rightarrow kH > 1$

$$\tanh(kH) \simeq 1$$

$$\boxed{\omega^2 = gk}$$

Phase velocity: $c \equiv \frac{\omega}{k}$

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad \textbf{Dispersive}$$

Group velocity: $c_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$

$$c_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{c}{2} \quad \textbf{Dispersive}$$

Long waves (μακρά κύματα) - Shallow water

$\lambda > H$ (long wavelength or shallow ocean) $\Rightarrow kH < 1$

$$\tanh(kH) \simeq kH$$

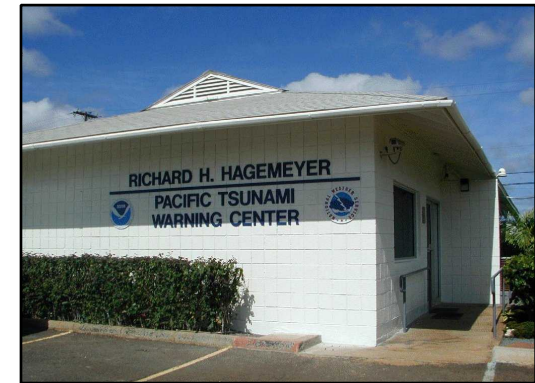
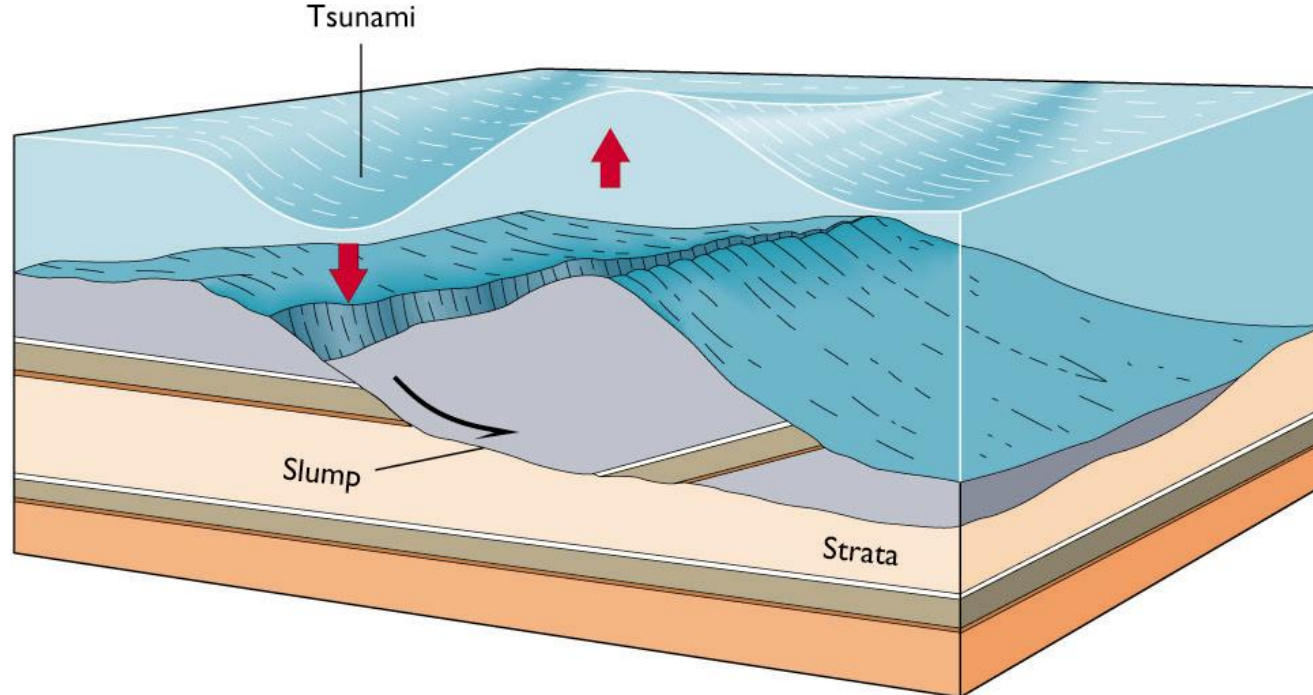
$$\boxed{\omega^2 = gk^2 H}$$

Phase velocity: $c \equiv \frac{\omega}{k}$

$$c = \sqrt{gH} \quad \textbf{Non-dispersive}$$

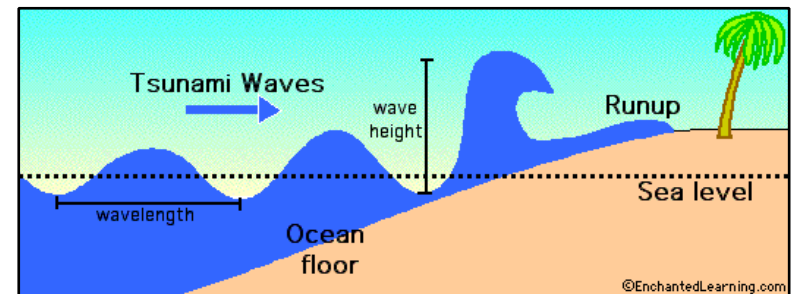
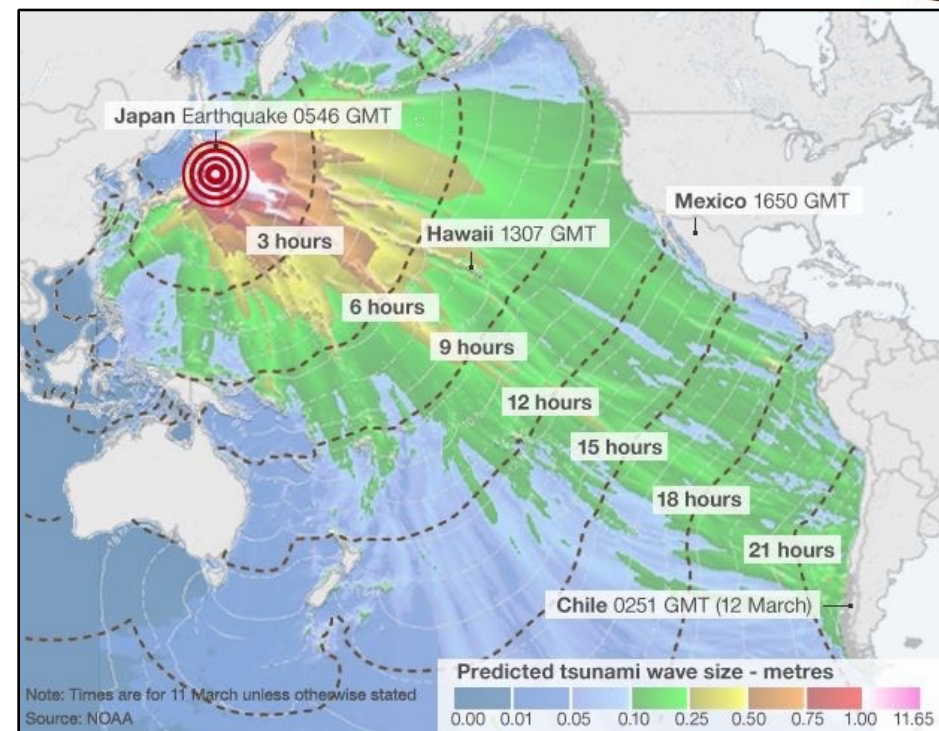
Group velocity: $c_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$

$$c_g = \sqrt{gH} = c \quad \textbf{Non-dispersive}$$



$$c = \sqrt{gH}$$

Tsunamis



Water parcel orbits

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ w &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \eta_0 \frac{\cosh[k(z_0 + H)]}{\omega \cosh(kH)} \cos(kx_0 - \omega t) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \eta_0 \frac{\sinh[k(z_0 + H)]}{\omega \cosh(kH)} \sin(kx_0 - \omega t) \end{aligned}$$

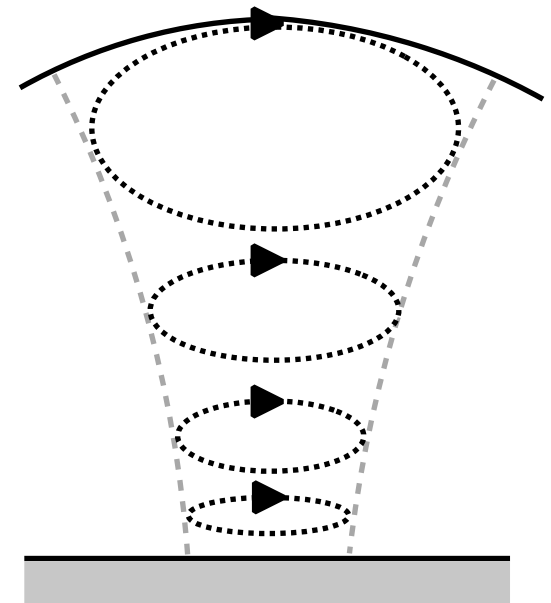
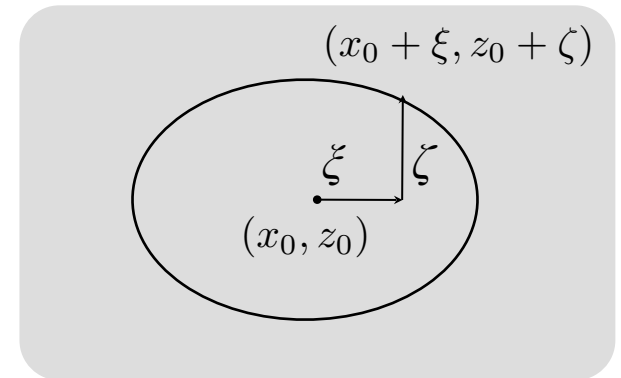
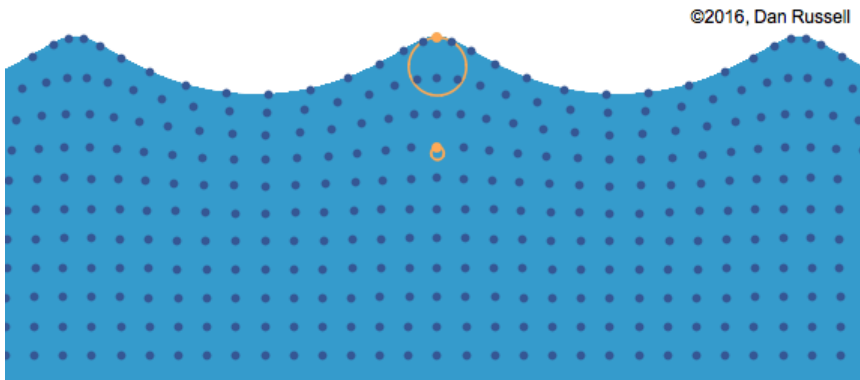
$$\xi = \eta_0 \frac{\cosh[k(z_0 + H)]}{\cosh(kH)} \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$\zeta = -\eta_0 \frac{\sinh[k(z_0 + H)]}{\cosh(kH)} \sin(kx_0 - \omega t)$$

$$\frac{\xi^2}{\left[\frac{\eta_0 \cosh[k(z_0 + H)]}{\cosh(kH)} \right]^2} + \frac{\zeta^2}{\left[\frac{\eta_0 \sinh[k(z_0 + H)]}{\cosh(kH)} \right]^2} = 1$$

semimajor axis

semiminor axis



- Και οι δύο άξονες μειώνονται με το βάθος
- Ο semiminor άξονας μηδενίζεται στο βυθό $(-H)$

Short waves

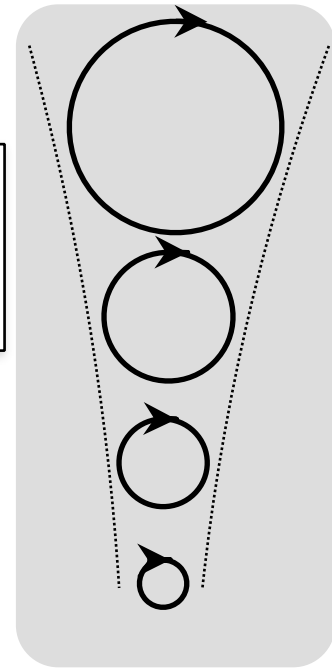
$\lambda < H$ (short wavelength or deep ocean) $\Rightarrow kH > 1$

$$\frac{\cosh[k(z_0 + H)]}{\cosh(kH)} = \frac{\sinh[k(z_0 + H)]}{\cosh(kH)} \simeq e^{kz_0}$$

$$\xi = \eta_0 e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t)$$

$$\zeta = -\eta_0 e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t)$$

- Κυκλικές τροχιές
- Οι τροχιές μειώνονται εκθετικά με το βάθος



Long waves

$\lambda > H$ (long wavelength or shallow ocean) $\Rightarrow kH < 1$

$$\cosh[k(z_0 + H)] \simeq 1$$

$$\sinh[k(z_0 + H)] \simeq k(z_0 + H)$$

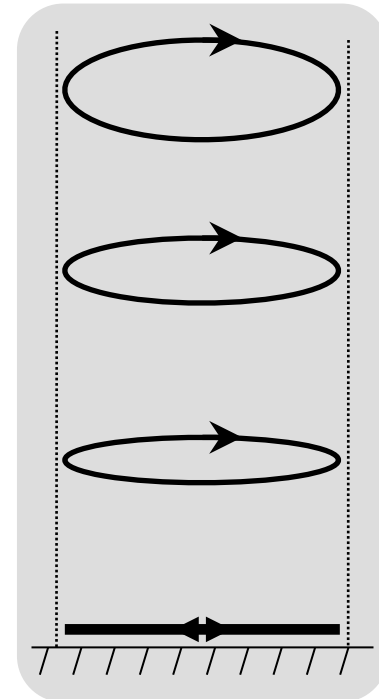
$$\cosh(kH) \simeq 1$$

$$\xi = \eta_0 \sin(kx_0 - \omega t)$$

$$\zeta = -k\eta_0 (z_0 + H) \cos(kx_0 - \omega t)$$

Σταθερά

Γραμμική μείωση με το βάθος και μηδενισμός στο $z_0 = H$



Stokes Drift

Αν δεν εφαρμόσουμε την παραπάνω προσέγγιση (δηλ. η Lagrangian ταχύτητα σε χρόνο t είναι ίση με την Eulerian ταχύτητα στη θέση x_0, z_0 σε χρόνο t)

Η Lagrangian ταχύτητα $u_L(x_0,z_0,t)$ μπορεί να οριστεί με ανάπτυξη σε σειρά Taylor της Eulerian ταχύτητας $u(x,z,t)$ γύρω από τα x_0, z_0

$$u_L(x_0, z_0, t) = u(x_0, z_0, t) + (x - x_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 + (z - z_0) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 + ...$$

Στο όριο των βραχέων κυμάτων(deep water limit):

$$u(x_0, z_0, t) = \eta_0 \omega e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$x - x_0 = \eta_0 e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t)$$

$$z - z_0 = -\eta_0 e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t)$$

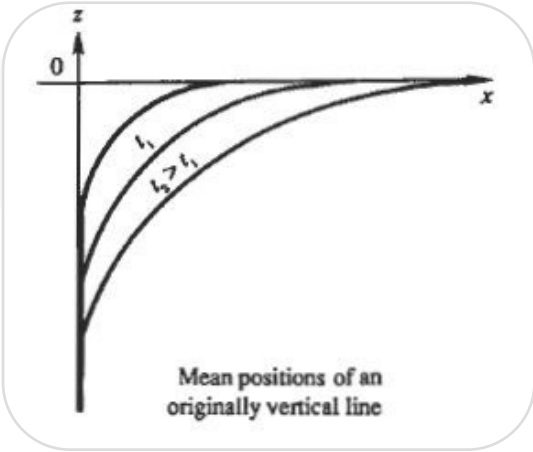
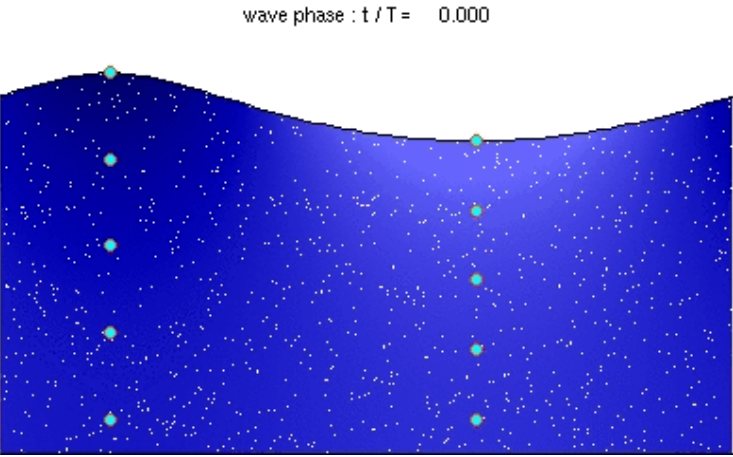
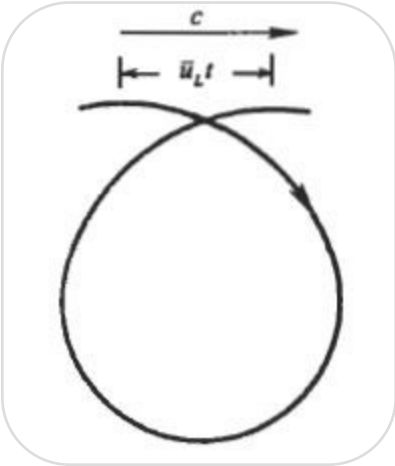
Παίρνοντας το μέσο όρο ως προς μία περίοδο

$$\bar{u}_s = \bar{u}_L - \bar{u} = \eta_0^2 \omega e^{2kz_0}$$

Γενικά

$$\bar{u}_s = \eta_0^2 \omega k \frac{\cosh [2k(z_0 + H)]}{2 \sinh^2(kH)}$$

Stokes velocity (drift)



$$\eta = \eta_0 \cos(kx - \omega t) + \eta_0 \cos(kx + \omega t) = 2\eta_0 \cos(kx) \cos(\omega t)$$

$$u = \frac{2kg\eta_0 \cosh[k(z + H)]}{\omega \cosh(kH)} \cos(kx) \cos(\omega t)$$

Οριακή συνθήκη:

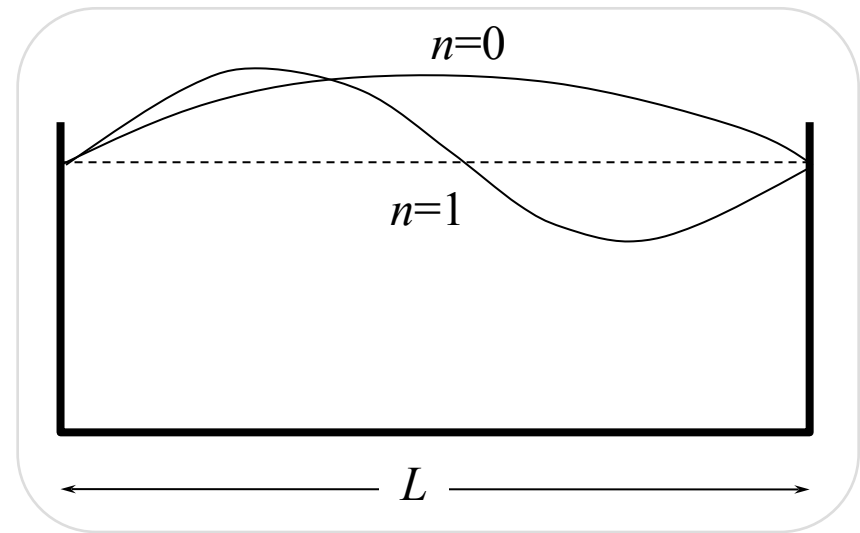
$u=0$ at $x=0$ και L

$kL = (n + 1)\pi$ where $n = 0, 1, 2, \dots$

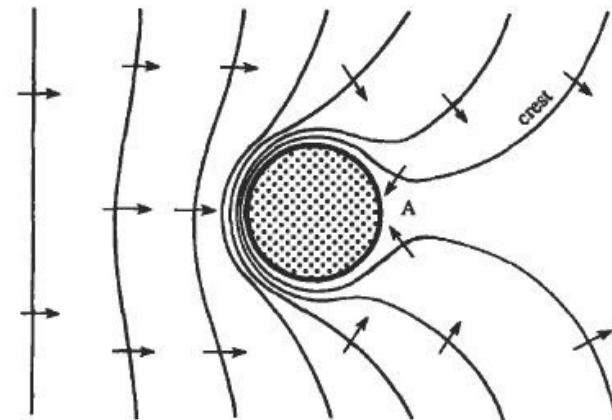
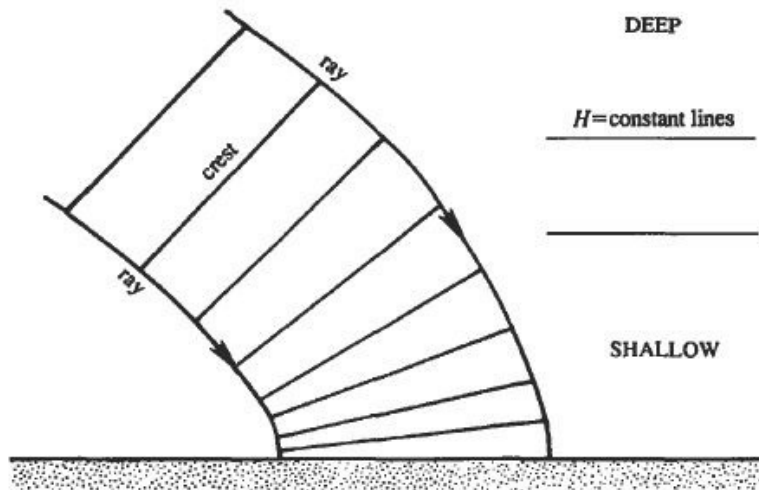
$$\lambda = \frac{2L}{n + 1}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi g(n + 1)}{L} \tanh \left[\frac{(n + 1)\pi H}{L} \right]}$$

Seiches



Wave Refraction and the island effect on waves



Η συνεχής λύση

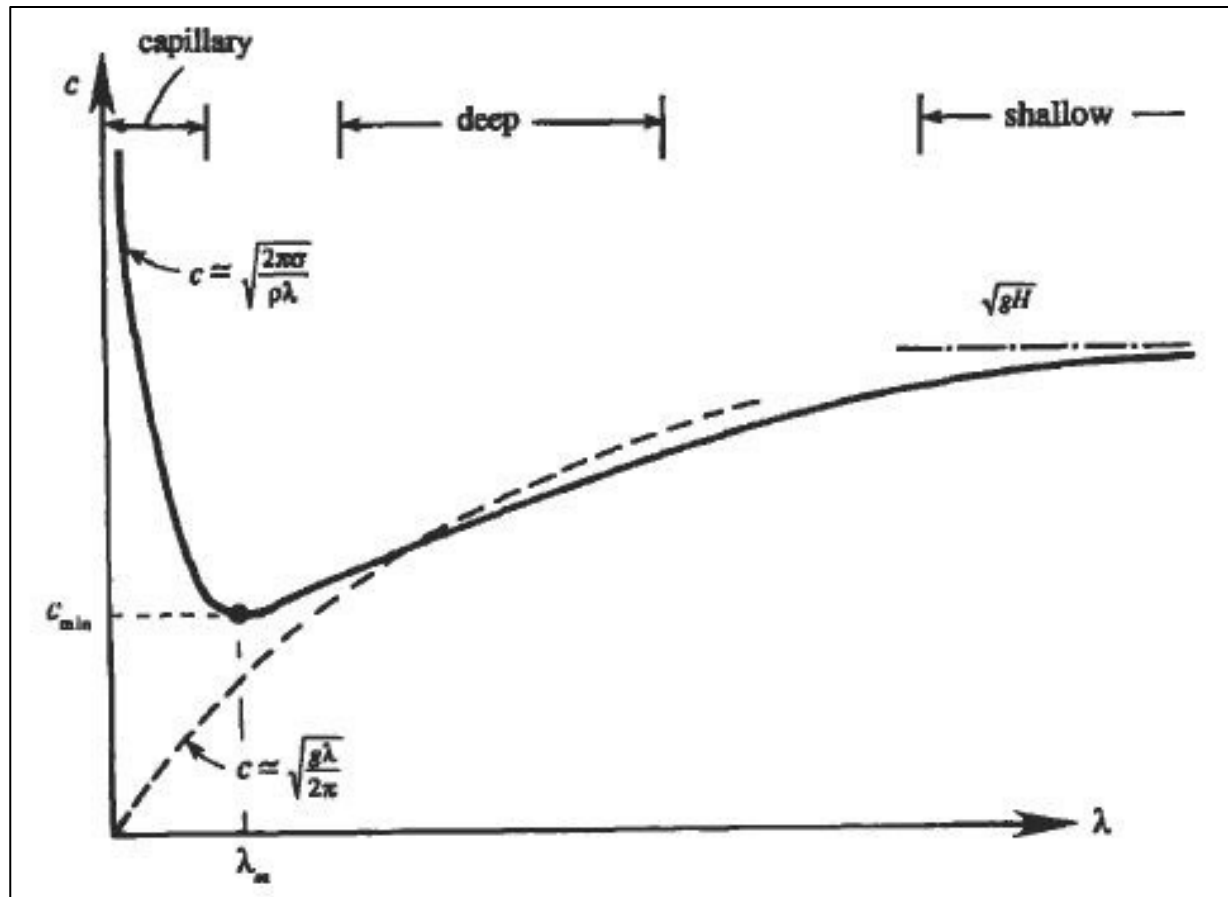
Αν εισάγουμε και την επιφανειακή τάση σ (πολύ μικρά μήκη κύματος, $\lambda < 7 \text{ cm}$)

$$P = -\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \text{ at } z = \eta$$

$$\omega = \sqrt{k \left(g + \frac{\sigma k^2}{\rho_0} \right) \tanh(kH)}$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho_0} \right) \tanh(kH)}$$

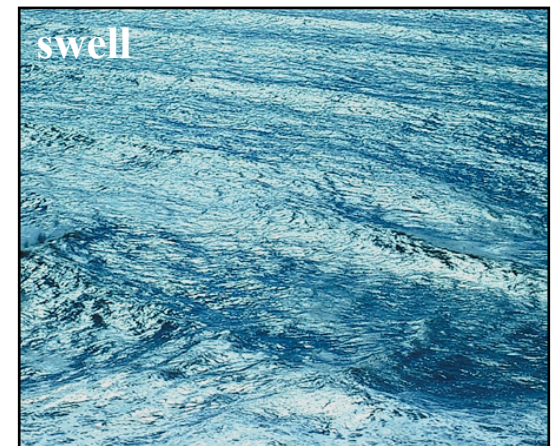
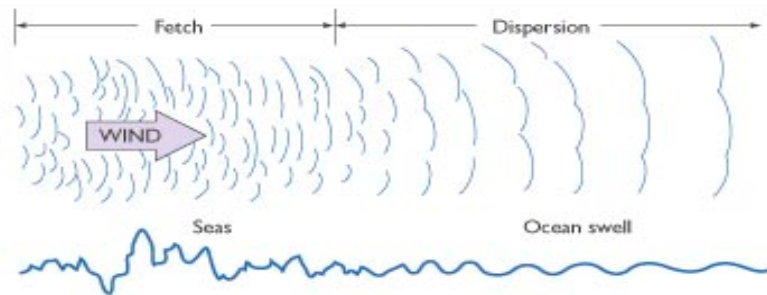
Mixed capillary-gravity waves: **Ripples**



Για $\lambda < 4 \text{ mm}$, pure **Capillary** waves, και: $c = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho_0\lambda}}$
 $\tanh(kH) \simeq 1$

Ανεμογεννή κύματα - “windsea”

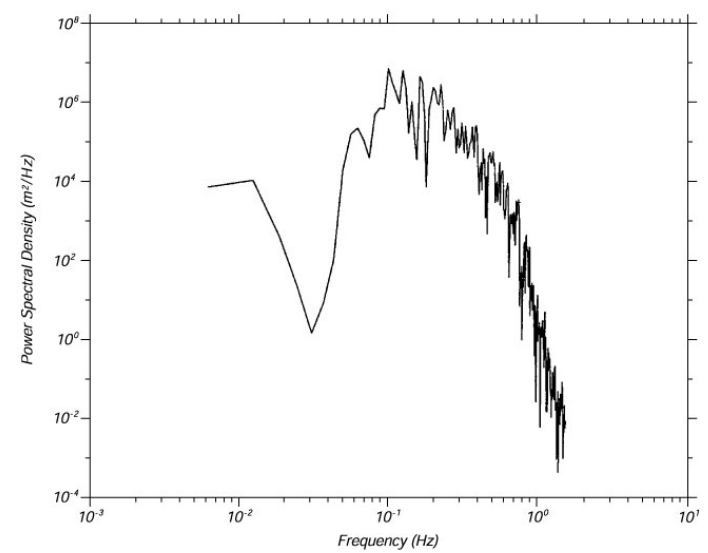
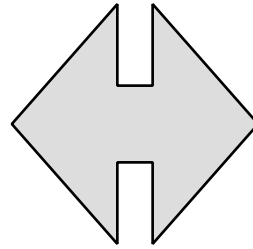
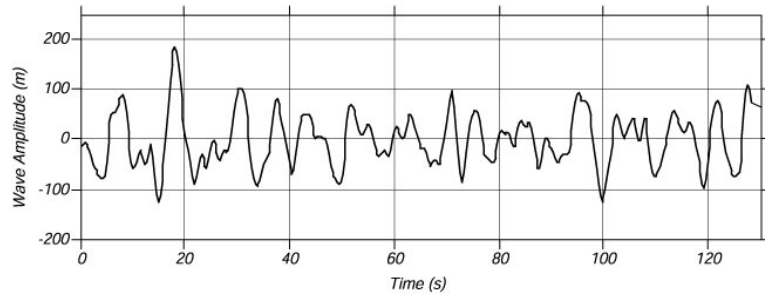
“The wind wave is a special water wave as it is generated by the action of wind at the air-water interface. Since the wind wave is associated with air and water flows above and below the waves, its characteristics are determined by the coupling process between the boundary layers in air and water. The important elements in the wind wave are the surface wave motion, the local wind-drift and turbulence in the air and water boundary layers” (Toba, 1988)



Κύριες φάσεις δημιουργίας ανεμογενούς κύματος:

1. Η τύρβη του ανέμου δημιουργεί διαταραχές στην επιφάνεια της θάλασσας (pressure fluctuations), που εξελίσσονται σε “χαοτικές ανωμαλίες/κύματα” μεγέθους λίγων εκατοστών (Phillips mechanism)
2. Ο άνεμος δρά στα μικρά αυτά κύματα, τα οποία συνεχώς αναπτύσσονται λόγω της δράσης της ορμής του ανέμου πάνω στο προφίλ των κυμάτων (Miles mechanism)
3. Τα κύματα αρχίζουν να αλληλεπιδρούν δημιουργώντας όλο και μεγαλύτερα κύματα/κυματοπακέτα (μεταφορά ενέργειας από μικρά λ σε μεγάλα λ).
4. Τελικά τα κύματα αυτά αναπτύσσουν ταχύτητες μεγαλύτερες από αυτές του ανέμου, η μορφή τους γίνεται πιο ομαλή και απομακρύνονται από την περιοχή δημιουργίας με τη μορφή swell.

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n e^{i2\pi n\omega t}$$



**Dominant
wave
frequency**

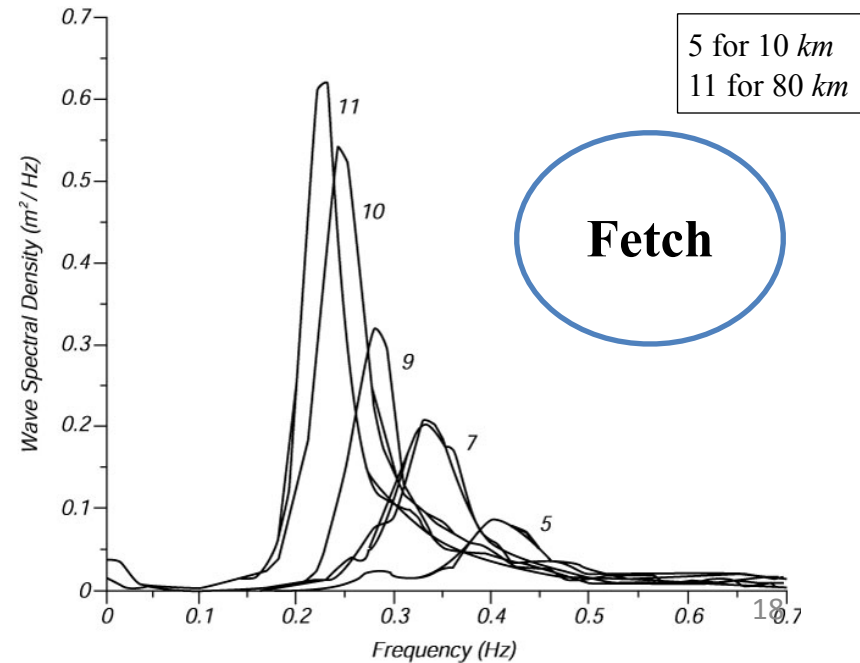
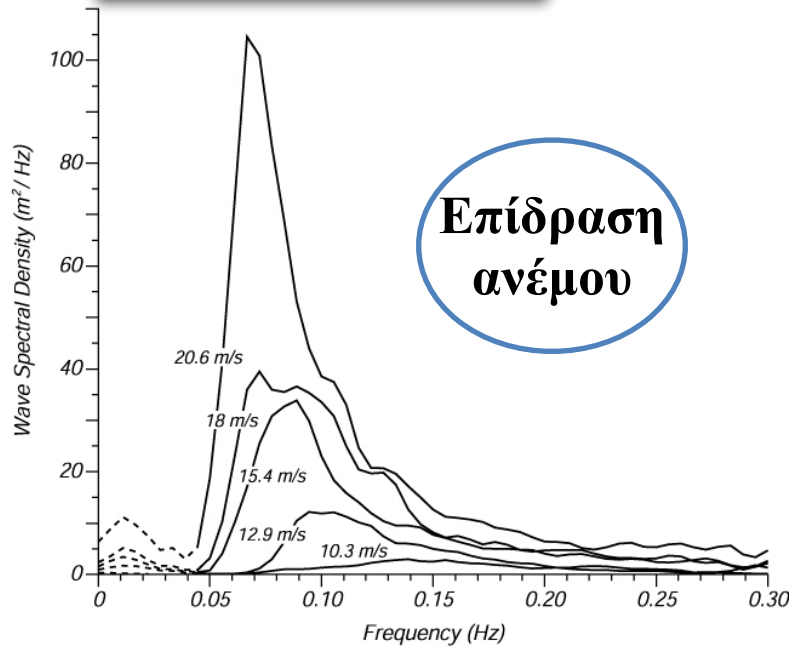
**Significant
wave
height**

$$\omega_D = g \frac{0.88}{U_{10}}$$

Kitagorodskii (1973)

$$H_{1/3} = 0.2 \frac{(U_{10})^2}{g}$$

$$N_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \eta(t) e^{-i2\pi n\omega t} dt$$



Διατήρηση του Κυματικό Φάσματος

$$\frac{\partial Q_w}{\partial t} + c_g \cdot \nabla Q_w = S_w + S_{n-l} - S_d$$

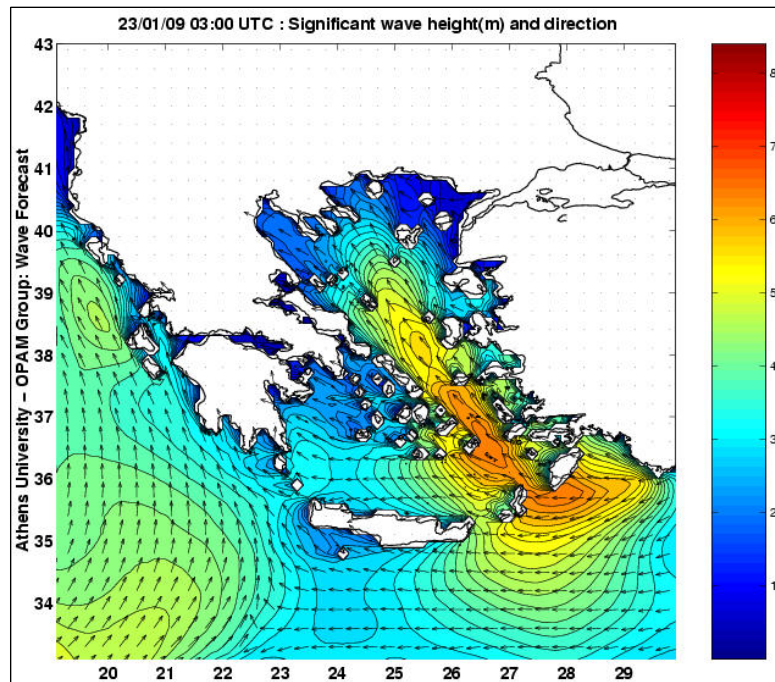
Τοπική εξέλιξη

Μεταφορά

Ανάπτυξη λόγω μη-γραμμικότητας

Ανάπτυξη λόγω επίδρασης του ανέμου

Απώλειες



Κυματικά μοντέλα:

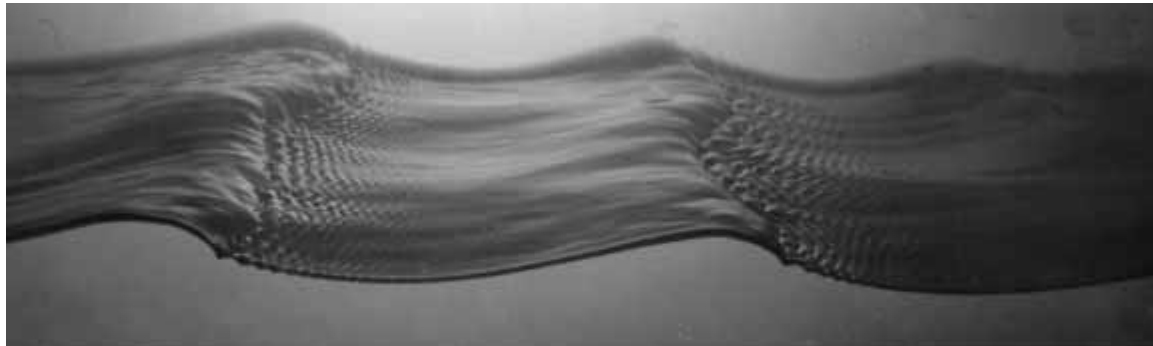
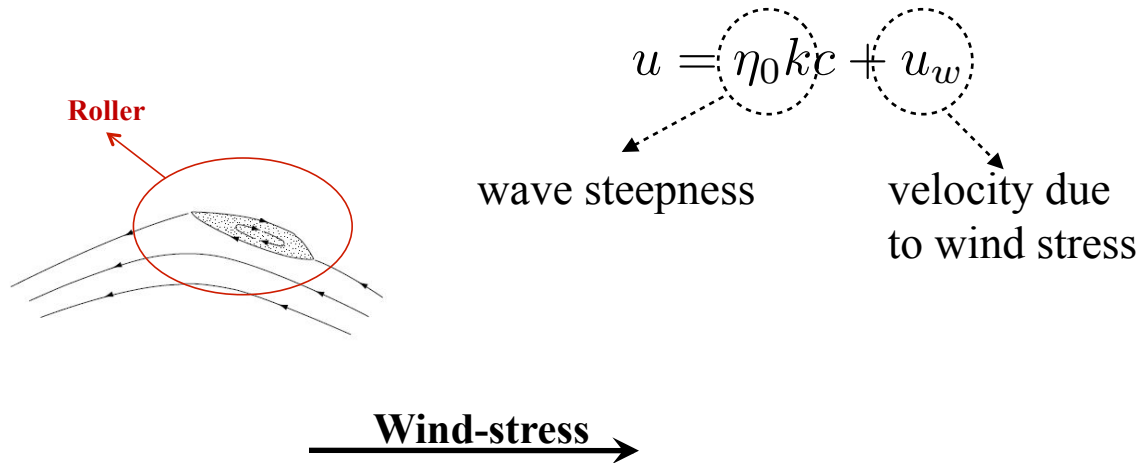
- WAM
- SWAN
- WAVEWATCH

“Σπάσιμο κύματος” (Wave breaking)

Στην ανοικτή θάλασσα, “σπάσιμο κύματος” έχουμε όταν επιφανειακά τμήματα του νερού (συνήθως κοντά στην κορυφή του κύματος) αποκτούν ταχύτητα μεγαλύτερη από το κύμα και το “ξεπερνούν”.

$$u > c$$

Η ταχύτητα του νερού, παρουσία κύματος (μήκους κύματος λ και πλάτους Σ “σπάσιμο κύματος”) έχουμε όταν επιφανειακά τμήματα του νερού (συνήθως κοντά στην κορυφή του κύματος) αποκτούν ταχύτητα μεγαλύτερη από το κύμα και το “ξεπερνούν”.



Η απώλεια ενέργειας από το κυματικό πεδίο μεταφέρεται στην κινητική ενέργεια του επιφανειακού στρώματος, μέσω της ορμής που ασκεί το τμήμα του νερού “που έσπασε” στην επιφάνεια της θάλασσας.

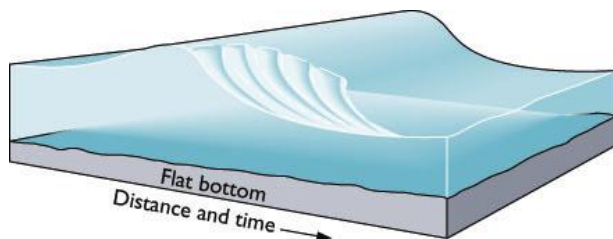
Στην παράκτια ζώνη:

- Η ταχύτητα του κύματος μειώνεται
- Το μήκος κύματος μειώνεται
- Το ύψος κύματος αυξάνεται
- Η μορφή του κύματος γίνεται λιγότερο συμμετρική (οι κοιλίες είναι πιο επίπεδες)
- Η συχνότητα παραμένει σταθερή

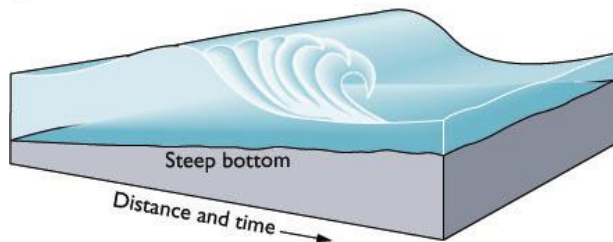
Τα κύματα γίνονται πιο απότομα (steepness increases) και τείνουν να “σπάνε”. Εμπειρικά, όταν

$$\frac{H}{L} \sim \frac{2\eta_0}{\lambda} \geq \frac{1}{7}$$

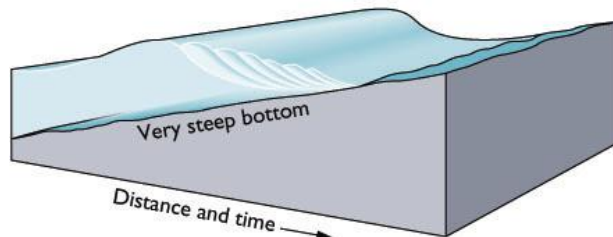
το κύμα γίνεται ασταθές και “σπάει”.



(a) SPILLING BREAKER



(b) PLUNGING BREAKER



(c) SURGING BREAKER

Spilling breaker: Η κορυφή του κύματος “καταρρέει” (‘spills over’). Ενέργεια απελευθερώνεται σε όλη την παράκτια ζώνη. Συμβαίνει σε σχετικά μικρή κλίση του βυθού.

Plunging breaker: Η κορυφή “κουλουριάζεται” (‘curls over’) μπροστά πό το κύμα. Η ενέργεια απελευθερώνεται απότομα. Συμβαίνει σε σχετικά μεγάλη κλίση του βυθού.

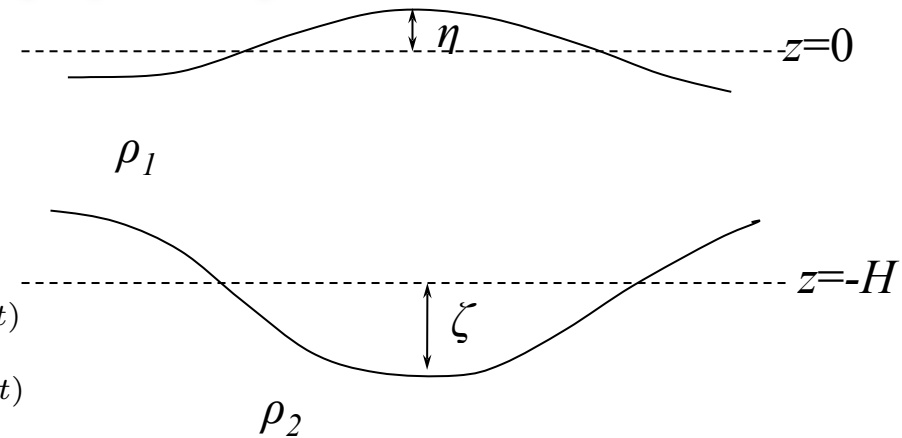
Surging breaker: Δεν παρατηρείται σπάσιμο. Συμβαίνει σε απότομη κλίση του βυθού. Η ενέργεια απελευθερώνεται προς την ανοικτή θάλασσα.

**Μέρος II. Εσωτερικά
Κύματα**

Πα. Εσωτερικά κύματα βαρύτητας: Απλή στρωμάτωση

Δύο στρώματα. Οι εξισώσεις Laplace για κάθε στρώμα:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} P_1 &= (Ae^{kz} + Be^{-kz}) e^{i(kx - \omega t)} \\ P_2 &= (Ce^{kz} + De^{-kz}) e^{i(kx - \omega t)} \\ \eta &= ae^{i(kx - \omega t)} \\ \zeta &= be^{i(kx - \omega t)} \end{aligned}$$



Οριακές συνθήκες:

$$\text{at } z = 0 \rightarrow P_1 = \rho_1 g \eta, \quad w_1 = \frac{\partial \eta}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial z} = -\rho_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$\text{at } z = -H \rightarrow P_1 = P_2 = \rho_1 g (H + \eta - \zeta) + \rho_2 g \zeta, \quad w_1 = w_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

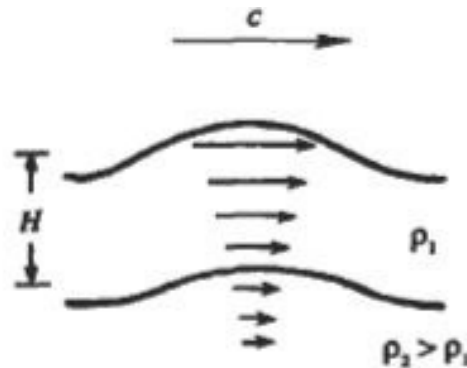
$$\text{at } z = -\infty \rightarrow w_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial P_2}{\partial z} = 0$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες:

$$\left(\frac{\omega^2}{gk} - 1 \right) \left(\frac{\omega^2}{gk} [\rho_1 \sinh(kH) + \rho_2 \cosh(kH)] - (\rho_2 - \rho_1) \sinh(kH) \right) = 0$$

Πρώτη λύση:

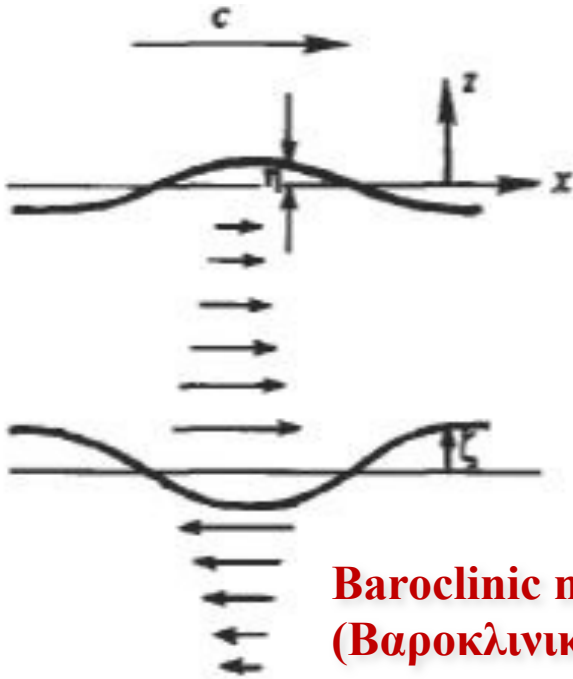
$$\omega^2 = gk$$



Barotropic mode
(Βαροτροπικός
τρόπος
ταλάντωσης)

Δεύτερη λύση:

$$\omega^2 = \frac{gk(\rho_2 - \rho_1) \sinh(kH)}{\rho_2 \cosh(kH) + \rho_1 \sinh(kH)}$$



Γενικά:

Αν ο ωκεανός αποτελείται από n στρώματα, οι τρόποι ταλάντωσης είναι 1 βαροτροπικός και $n-1$ βαροκλινικοί (συνολικά n τρόποι ταλάντωσης)

Baroclinic mode
(Βαροκλινικός τρόπος ταλάντωσης)

**Εσωτερικά κύματα:
Βαροκλινικός τρόπος
ταλάνωσης**

Short waves

$$kH \rightarrow \infty$$

$$\coth(kH) \simeq 1$$

$$\omega^2 = \frac{gk(\rho_2 - \rho_1) \sinh(kH)}{\rho_2 \cosh(kH) + \rho_1 \sinh(kH)} =$$

$$= \frac{gk(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 \coth(kH) + \rho_1}$$

Long waves

$$kH \ll 1$$

$$\sinh(kH) \simeq kH$$

$$\cosh(kH) \simeq 1$$

$$\omega^2 = \frac{gK^2 H(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2} = g' k^2 H$$

$$c = \sqrt{g' H} \quad g' = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$$

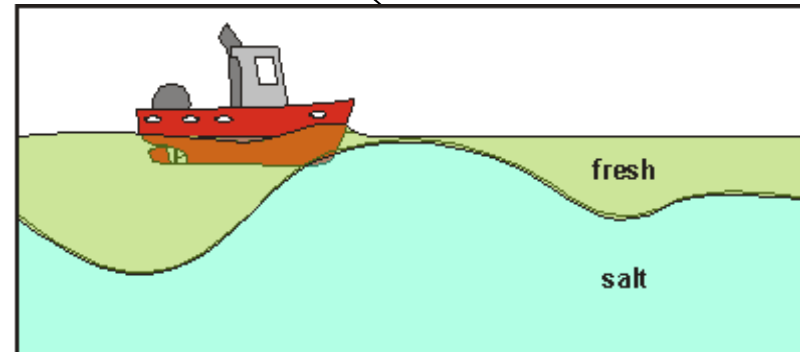
$$\omega = \sqrt{gk \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)}$$

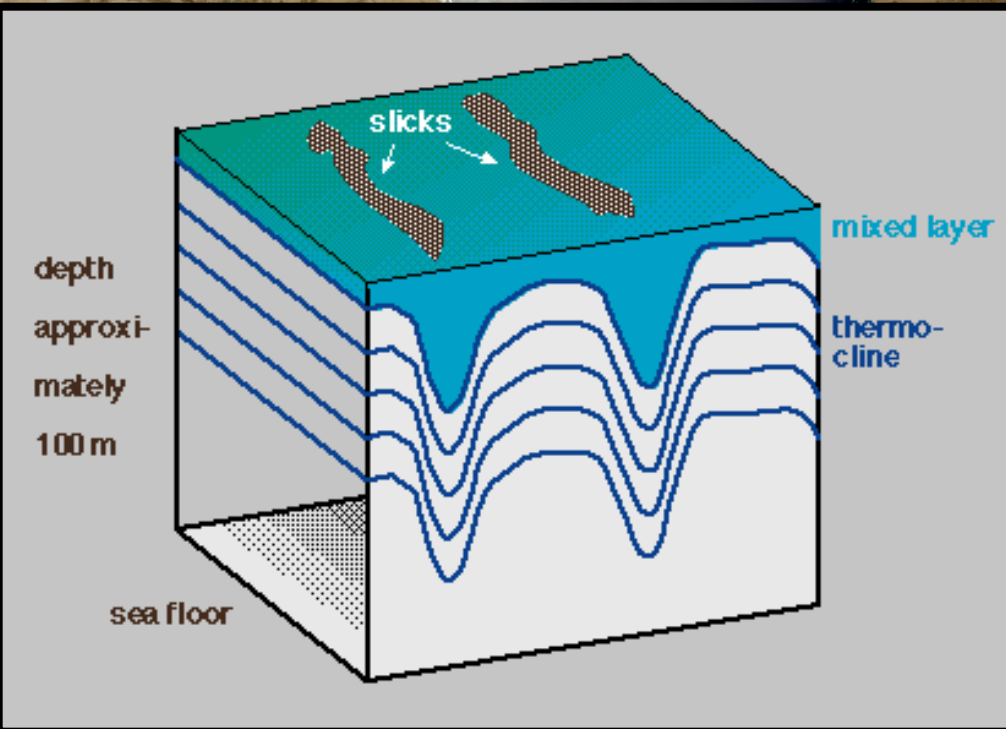
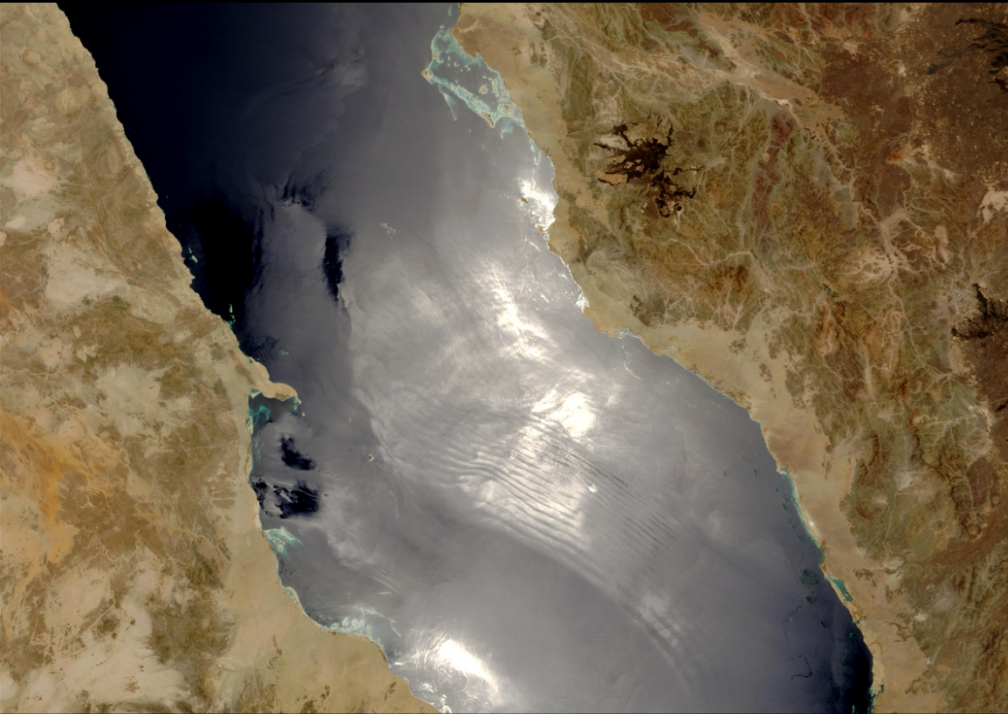
$$\eta = -\zeta \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \right) e^{-kH}$$

Σε τυπική στρωμάτωση στον ωκεανό:
 $\Delta\rho = O(1\text{kg/m}^3)$, $\rho_2 = O(1000\text{kg/m}^3)$

$$g' = 10^{-3} g$$

$$\eta = -\zeta \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \right)$$





Εσωτερικά κύματα βαρύτητας

(η “έκφραση” τους στην επιφάνεια της θάλασσας και στην κορυφή της ατμόσφαιρας)